Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, Экстремальные задачи в теории аналитического продолжения, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 5, 113–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:11:14

УДК 517.53

А. Ю. Попов

Экстремальные задачи в теории аналитического продолжения

В работе усилены оценки, полученные С. Мандельбройтом, для длины канала, в который ряды экспонент с последовательностью положительных показателей, имеющей положительный шаг, могут допускать аналитическое продолжение. На пути получения этих результатов найдена оценка индекса конденсации А. Ф. Леонтьева, неухудшаемая на классах последовательностей с заданными шагом и верхней плотностью.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Предварительные сведения. Постановка задач

Одним из актуальных направлений в теории аналитических функций является изучение возможности аналитического продолжения сумм рядов экспонент $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\lambda_n z)$ с последовательностью положительных строго возрастающих показателей $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$. Множество таких рядов содержит в себе все степенные ряды, которые получаются при $\lambda \subset \mathbb{N}$, $e^z = w$. Обозначим

$$h(\lambda) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n), \quad D(\lambda) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n}.$$

Величина $D(\lambda)$ называется *верхней плотностью* последовательности λ , а $h(\lambda)$ — *шагом* последовательности λ [1; гл. I]. Очевидно, что если $0 < D(\lambda) < +\infty$, то

$$h(\lambda) D(\lambda) \leq 1. \quad (1.1)$$

В работе будут рассматриваться ряды экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\lambda_n z), \quad (2.1)$$

показатели которых образуют строго возрастающую последовательность положительных чисел с положительным шагом. В этом случае абсцисса сходимости ряда (2.1) совпадает с его абсциссой абсолютной сходимости и абсциссой голоморфности (определения см. в [2]). Нас интересуют ряды, множества сходимости

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00378).

и расходимости которых непусты, и поэтому без ограничения общности будем считать, что абсцисса сходимости рассматриваемых рядов равна нулю, т.е. выполнено условие

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/\lambda_n} = 1. \quad (3.1)$$

Теорема Д. Пойа–В. Бернштейна [3], [4] утверждает, что в случае, когда последовательность $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с положительным шагом имеет плотность d , т.е.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = d = D(\lambda), \quad (4.1)$$

то функция $f(z)$ имеет по крайней мере одну особую точку на любом отрезке мнимой оси длины $2\pi d$.

Эта теорема неулучшаема в следующем смысле. Для любой последовательности λ , имеющей положительный шаг и плотность d , ряд экспонент

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(\lambda_n z)}{L'(\lambda_n)},$$

где $L(z) = L(\lambda, z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/\lambda_n^2)$, имеет согласно утверждению 4 из [5; гл. 2] абсциссу сходимости равную нулю. Вместе с тем у его суммы не только нет особых точек на интервале $(-i\pi d, i\pi d)$, но $\varphi(z)$ даже допускает аналитическое продолжение во всю бесконечную полосу $|\operatorname{Im} z| < \pi d$. Последнее вытекает из интегрального представления

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp(zw)}{L(\lambda, w)} dw, \quad |\operatorname{Im} z| < \pi d$$

(см. [1; гл. 5], [5], [6]).

Если же последовательность λ плотности не имеет, а имеет лишь конечную верхнюю плотность, то “обобщение” теоремы Пойа–Бернштейна, в котором d заменено на $D(\lambda)$, неверно. Для любых $h > 0$, $D > 0$, $hD < 1$ (см. (1.1)), найдутся последовательность $\{\lambda_n\}$ с шагом h и верхней плотностью D и ряд (2.1) с абсциссой сходимости равной нулю, сумма которого аналитична на интервале $(-\pi i/h, \pi i/h)$ (разумеется, содержащем в себе отрезок длины $2\pi D$). Пример достаточно построить при $h = 1$. Переход к произвольному значению h осуществляется посредством линейной замены переменного. Такой пример для $h = 1$, $D = 1/2$ появился еще в 1906 году у Фабера (изложение его результата см. в [7]), а общий случай см. в [1; § VI.2]. И все же цитированная теорема Пойа–Бернштейна допускает некоторое обобщение: суммы рядов (2.1), (3.1) не могут аналитически продолжаться из левой полуплоскости во всю замкнутую полосу $|\operatorname{Im} z - b| \leq \pi D(\lambda)$, каково бы ни было $b \in \mathbb{R}$ (как мы видели выше, продолжение в открытую полосу $|\operatorname{Im} z| < \pi D(\lambda)$ возможно при любом значении $D(\lambda)$ для рядов экспонент специального вида). Это следует из теоремы С. Мандельбройта [1; § II.2], которая утверждает, что при любом $b \in \mathbb{R}$ сумма ряда (2.1), (3.1) имеет по крайней мере одну особую точку в канале

$$C_b(\lambda) = \{0 \leq \operatorname{Re} z \leq \delta(\lambda), |\operatorname{Im} z - b| \leq \sigma(\lambda)\} \cup \{\delta(\lambda) + ib + K(\lambda)\}. \quad (5.1)$$

Через $K(\lambda)$ обозначена индикаторная диаграмма функции $L(\lambda, z)$, $\sigma(\lambda)$ – экспоненциальный тип $L(\lambda, z)$ (напомним, что $\sigma(\lambda) \leq \pi D(\lambda)$, см. [1; § I.1]), $\delta(\lambda)$ – индекс конденсации последовательности λ :

$$\delta(\lambda) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| \right). \quad (6.1)$$

В связи с тем, что эта теорема Мандельбройта носит лишь достаточный характер, возникает вопрос об отыскании максимально возможной длины прямоугольника высоты $2\pi D(\lambda)$, в который могут аналитически продолжаться за абсциссу сходимости ряды экспонент (2.1). Сказанное приводит к постановке следующей экстремальной задачи. Для заданных положительных чисел h и D , $hD \leq 1$ (см. (1.1)), через $\mathcal{P}(h, D)$ обозначим класс всех последовательностей $\{\lambda\}$, имеющих шаг h и верхнюю плотность D .

Задача 1. При $0 < D < 1/h$ требуется найти (или возможно точнее оценить) функцию $l(h, D)$, которая определяется как точная верхняя грань чисел l , для которых найдутся $b \in \mathbb{R}$ и ряд экспонент (2.1), (3.1) с последовательностью показателей $\lambda \in \mathcal{P}(h, D)$ и суммой $f(z)$, допускающей аналитическое продолжение в некоторую окрестность прямоугольника

$$\Pi(l, D, b) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq l, |\operatorname{Im} z - b| \leq \pi D\}.$$

Можно считать, что $b = 0$, так как замена переменного $z - ib = \zeta$ не меняет структуру ряда (2.1) и его абсциссу сходимости.

Отметим, что эта задача бессодержательна, если $D = 1/h$ или $D = 0$. Согласно теореме из [8; гл. 5] $f(z)$ обязательно имеет хотя бы одну особую точку на любом отрезке мнимой оси длины $2\pi/h(\lambda)$ и, следовательно, не может быть продолжена ни в какую окрестность отрезка $\Pi(0, 1/h(\lambda), b)$ ни для каких $b \in \mathbb{R}$. Если же $D = 0$, то все точки мнимой оси для $f(z)$ особые [5; гл. 2]. Однако для любых пар чисел h и D таких, что $0 < hD < 1$, имеем $l(h, D) > 0$, но точное значение этой функции до сих пор не найдено ни в одной точке.

Особый интерес вызывают ряды экспонент с натуральными показателями, поскольку они представляют собой степенные ряды от переменной e^z . Для $D \in (0, 1)$ определим функцию $l(D)$ как точную верхнюю грань положительных чисел l , для которых существует ряд экспонент (2.1), (3.1) с натуральными показателями верхней плотности D и суммой $f(z)$, допускающей аналитическое продолжение в некоторую окрестность прямоугольника $\Pi(l, D, 0)$. Функция $l(D)$ положительна на $(0, 1)$, но точное ее значение ни в одной точке этого интервала не известно.

Справедливы очевидные соотношения

$$\begin{aligned} l(D) &\leq l(1, D) \quad \forall D \in (0, 1), \\ l(h, D) &= h^{-1} l(1, hD). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Поэтому достаточно возможно точнее оценить $l(D)$ снизу, а $l(1, D)$ сверху. Мандельбройт [1; § VI.2] доказал, что при $D \rightarrow +0$

$$l(D) > D \left(\ln \frac{1}{D} - \ln \ln \frac{1}{D} - \ln 2 + o(1) \right), \quad (8.1)$$

а при всех h и D , $0 < hD \leq 1$, он установил оценку сверху

$$l(h, D) < D \left(3 \ln \frac{1}{hD} + 8.5 + \pi \right). \quad (9.1)$$

Для получения асимптотического неравенства (8.1) Мандельбройт сконструировал “далеко продолжаемый” направо ряд экспонент (2.1), (3.1) с натуральными показателями. Неравенство (9.1) Мандельбройт вывел из своего результата (5.1) и найденной им оценки индекса конденсации (6.1):

$$\delta(\lambda) \leq 3D \ln \frac{1}{hD} + 8.5D, \quad h = h(\lambda), \quad D = D(\lambda). \quad (10.1)$$

Оценка сверху величины $\delta(\lambda)$ важна не только в теории аналитического продолжения. Индекс конденсации (6.1) находит разнообразные применения в теории рядов экспонент, в теории интерполяции, в вопросах о полноте различных систем функций (см. [5], [6], [9]).

Величина $\delta(\lambda)$ встречалась в работах многих математиков; в отечественной литературе за ней закрепилось название “индекс конденсации А. Ф. Леонтьева”. Если последовательность λ с положительным шагом имеет плотность (4.1), то $\delta(\lambda) = 0$. Если λ не имеет плотности, то ее индекс конденсации может быть положительным, и в связи с этим возникает задача о точной его оценке на тех или иных классах последовательностей. Выше были определены классы $\mathcal{P}(h, D)$ – последовательности с шагом h и верхней плотностью D .

ЗАДАЧА 2. Найти величину

$$\Delta(h, D) = \sup_{\lambda \in \mathcal{P}(h, D)} \delta(\lambda). \quad (11.1)$$

До настоящего времени задача 2 не была решена, хотя Б. Я. Левиным в [10], [11] была поставлена и решена следующая родственная экстремальная задача. Б. Я. Левин отыскал $\sup_{\lambda \in \mathcal{P}(D)} H(\lambda, \theta)$, где $\mathcal{P}(D)$ – класс строго возрастающих последовательностей положительных чисел с верхней плотностью D ,

$$H(\lambda, \theta) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |L(\lambda, x e^{i\theta})|}{x}.$$

В частности, Б. Я. Левин доказал наилучшую на классах $\mathcal{P}(h, D)$ оценку

$$H(\lambda, 0) = \max\{\operatorname{Re} z : z \in K(\lambda)\} \leq D(\lambda) \ln(3 + \sqrt{8}).$$

Этот результат вместе с теоремой Мандельбройта о непродолжимости суммы ряда экспонент в канал (5.1) приводит к неравенству

$$l(h, D) \leq \Delta(h, D) + D \ln(3 + \sqrt{8}). \quad (12.1)$$

§ 2. Основные результаты

Автору удалось точно решить экстремальную задачу 2, т.е. найти $\Delta(h, D)$ как элементарную функцию от переменных h и D на всей области ее определения $\{(h, D) \in \mathbb{R}^2 : h > 0, D > 0, hD \leq 1\}$. Функция $\Delta(h, D)$ имеет достаточно сложный вид. Для нее выведено простое и в некотором смысле неупрощаемое неравенство, приведшее к существенному продвижению в задаче 1. Найдено усиление неравенства (9.1), которое позволило получить асимптотику $l(h, D)$ при $D \rightarrow +0$. Также усилена оценка снизу Мандельбройта (8.1) для $l(D)$.

Перейдем к формулировкам результатов.

Обозначим $s = (hD)^{-1}$, $a = s - \sqrt{s^2 - s + 1/2}$.

ТЕОРЕМА 1. *При любых $h > 0$ и $0 < D \leq h^{-1}$ справедливо равенство*

$$\Delta(h, D) = D \left(a \ln \frac{2s - a}{a} + (1 - a) \ln \frac{2s - 1 - a}{1 - a} + 2(s - a) \ln \frac{2s - a}{2s - a - 1} \right). \quad (1.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *При любом фиксированном значении $h > 0$ функция $\Delta(h, D)$ является строго возрастающей по переменной D на отрезке $[0, 1/h]$, а при любом фиксированном значении $D > 0$ функция $\Delta(h, D)$ является строго убывающей по переменной h на полуинтервале $(0, 1/D]$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *При любых $h > 0$, $D > 0$, $s = (hD)^{-1} \geq 1$, справедлива оценка*

$$\Delta(h, D) < D(1 + \ln 2 + \ln(s + \sqrt{s^2 - s + 1/2})). \quad (2.2)$$

В частности, имеем

$$\Delta(h, D) < D \ln \frac{4e}{hD} < D(2.39 - \ln(hD)). \quad (3.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Справедливо равенство*

$$\Delta\left(\frac{1}{D}, D\right) = D \ln(3 + \sqrt{8}), \quad (4.2)$$

а если $hD < 1$, то

$$\Delta(h, D) > D \ln \frac{3 + \sqrt{8}}{hD}. \quad (5.2)$$

Если же $hD \leq 1/2$, то

$$\Delta(h, D) > D(2 - \ln(hD)). \quad (6.2)$$

Следствие 3 показывает, что задача о максимальном индексе конденсации принципиально отличается от задачи Б. Я. Левина об экстремальном индикаторе, поскольку в первой ответ существенно зависит от h и даже при фиксированном D имеем $\lim_{h \rightarrow +0} \Delta(h, D) = +\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 4. При $s \geq 2$ с абсолютной постоянной в символе O выполняется соотношение

$$\Delta(h, D) = D(\ln(4es) + O(s^{-1} \ln s)).$$

Следствие 4 показывает, что постоянную $4e$ в неравенстве (3.2) нельзя заменить меньшей. Из неравенств (12.1) и (3.2) немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 2. При любых $h > 0$, $D > 0$, $hD < 1$, справедлива оценка

$$l(h, D) < D \ln \frac{4e(3 + \sqrt{8})}{hD}. \quad (7.2)$$

Другими словами, можно утверждать, что сумма всякого ряда экспонент (2.1), (3.1) с последовательностью положительных показателей, имеющей шаг h и конечную верхнюю плотность D , не продолжима ни в какой прямоугольник вида

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z < D(\ln(4e(3 + \sqrt{8})) - \ln(hD)), b \leq \operatorname{Im} z \leq b + 2\pi D, b \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема 2 вместе с неравенством (8.1) влечет за собой

СЛЕДСТВИЕ 5. При любом фиксированном h справедлива асимптотика

$$l(h, D) \sim D \ln \frac{1}{D} \quad (D \rightarrow +0).$$

За счет предложенного автором усовершенствования конструкции “далеко продолжаемого” направо ряда экспонент с натуральными показателями и нулевой абсциссой сходимости удалось доказать следующую теорему, усиливающую неравенство (8.1).

ТЕОРЕМА 3. При $D \in (0, 1/6]$ справедлива оценка

$$l(D) > D \ln \frac{\sqrt[4]{128}}{\pi D} > D \ln \frac{1.07}{D}.$$

СЛЕДСТВИЕ 6. С абсолютной постоянной в символе O имеет место асимптотика

$$l(D) = D \ln \frac{1}{D} + O(D) \quad (D \rightarrow +0).$$

Из теоремы 3 и (7.1) получаем

СЛЕДСТВИЕ 7. При любом $h > 0$ и $D \in (0, 1/(6h)]$ выполняется неравенство

$$l(h, D) > D \ln \frac{1.07}{hD}. \quad (8.2)$$

Из (7.2) и (8.2) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 8. На множестве $\{(h, D) \in \mathbb{R}^2 : hD \leq 1/6\}$ с абсолютной постоянной в символе O справедливо соотношение

$$l(h, D) = D \ln \frac{1}{hD} + O(D).$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 разбивается на несколько этапов. Некоторые из этих этапов удобно выделить в отдельные леммы. Сперва для функции $\ln |L(\mu, x)|$, где μ — строго возрастающая последовательность действительных чисел со считающей функцией $N(x) = N(\mu, x) = \sum_{\mu_n \leq x} 1$, удовлетворяющей ограничению

$$N(x) = O(x^{2-\tau}) \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (1.3)$$

с некоторым $\tau > 0$, устанавливается справедливость интегрального представления.

ЛЕММА 1. При любом $R \in (0, +\infty) \setminus \mu$ выполняется равенство

$$-\frac{\ln |L(\mu, R)|}{2R} = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_R(t) - \varphi_R(1)}{t^2 - 1} dt, \quad (2.3)$$

где $\varphi_R(t) = \frac{N(Rt)}{Rt}$.

Если последовательность μ имеет конечную верхнюю плотность, то

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{N(\mu, x)}{x} = D(\mu)$$

и условие (1.3) выполняется с $\tau = 1$.

Лемма 1 позволяет с помощью ряда дополнительных соображений свести задачу отыскания верхней грани $\delta(\lambda)$ на классах $\mathcal{P}(h, D)$ к экстремальной задаче на некотором множестве функций $\{\psi\}$, непрерывных на $\mathbb{R}_+$, с соответствующими ограничениями на $\psi(x) - \psi(y)$. Экстремальная функция ψ “угадывается”. Еще одна трудность состоит в том, что характеристики последовательности $h(\lambda)$ и $D(\lambda)$ являются асимптотическими и неравенства $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h(\lambda)$ и $n/\lambda_n \leq D(\lambda)$, вообще говоря, не выполняются. Поэтому доказывается

ЛЕММА 2. Пусть λ — некоторая строго возрастающая последовательность положительных чисел шага h и верхней плотности D . Пусть затем p и B — произвольные числа, удовлетворяющие условиям $D < B < p$, $p > 1/h$. Тогда справедлива оценка

$$\delta(\lambda) \leq J(p, B),$$

где

$$J(p, B) = \sup_{0 \leq A \leq B} J(p, B, A), \quad (3.3)$$

$$J(p, B, A) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(t) - A}{t^2 - 1} dt, \quad (4.3)$$

$$\psi_A(t) = \psi_A(p, B, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq q, \\ p \left(1 - \frac{q}{t}\right), & q < t < \frac{p-A}{p-B}, \\ B, & t \geq \frac{p-A}{p-B}; \end{cases}$$

$$q = \frac{p-A}{p}.$$

Функцию $J(p, B)$ удастся найти в явном виде.

ЛЕММА 3. При фиксированных значениях p и B ($0 < B < p < +\infty$) функция $f(A) = J(p, B, A)$ достигает максимума на отрезке $[0, B]$ в точке

$$A_0(p, B) = p - \sqrt{p^2 - pB + B^2/2}, \quad (5.3)$$

и максимум этот равен

$$J(p, B) = B \left(a \ln \frac{2s-a}{a} + (1-a) \ln \frac{2s-a-1}{1-a} + 2(s-a) \ln \frac{2s-a}{2s-a-1} \right), \quad (6.3)$$

где $s = p/B$, $a = s - \sqrt{s^2 - s + 1/2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функция $J(p, B)$ определялась в лемме 2 формулой (3.3) лишь для $B < p$. Но ее “продолжение”, задаваемое посредством (6.3), непрерывно по совокупности аргументов в области $0 < B < 2p < +\infty$. Это вытекает из (6.3), из непрерывности логарифма и квадратного корня на области их определения и из неравенств $0 < a < 1$ и $2s > a + 1$, справедливых при любом $s > 1/2$.

Теперь из лемм 1–3 выведем теорему 1, а после этого приведем доказательства упомянутых лемм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сравнивая полученное в лемме 3 выражение для $J(p, B)$ с правой частью равенства (1.2), убеждаемся в том, что утверждение теоремы 1 равносильно справедливости тождества

$$\Delta(h, D) = J\left(\frac{1}{h}, D\right), \quad 0 < D \leq h^{-1} < +\infty. \quad (7.3)$$

Исходя из определения величины $\Delta(h, D)$ заключаем, что равенство (7.3) эквивалентно одновременному выполнению следующих двух утверждений.

1) Для индекса конденсации А. Ф. Леонтьева любой последовательности λ , имеющей положительный шаг, справедлива оценка

$$\delta(\lambda) \leq J\left(\frac{1}{h(\lambda)}, D(\lambda)\right). \quad (8.3)$$

2) Для любых положительных чисел h и D , удовлетворяющих неравенству $0 < D \leq 1/h$, существует последовательность λ с шагом h , верхней плотностью D и индексом конденсации

$$\delta(\lambda) = J\left(\frac{1}{h}, D\right).$$

Сперва докажем утверждение 1). Зафиксируем последовательность λ с шагом $h(\lambda) = h$ и верхней плотностью $D(\lambda) = D$. Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции J по обоим переменным (см. выше замечание 1) найдется открытый круг K с центром в точке $(1/h, D)$ такой, что при любых $(p, B) \in K$ выполняется неравенство $J(p, B) < J(1/h, D) + \varepsilon$. А так как в этом круге заведомо имеются точки $(\tilde{p}, \tilde{B})$, удовлетворяющие условиям $\tilde{p} > 1/h$, $D < \tilde{B} < \tilde{p}$, то на основании леммы 2 заключаем, что $\delta(\lambda) \leq J(\tilde{p}, \tilde{B}) < J(1/h, D) + \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности ε приходим к соотношению (8.3). Тем самым утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Зафиксируем положительные числа h и D , удовлетворяющие условию $hD \leq 1$. Построим сперва экстремальную последовательность в случае $hD < 1$. Положим

$$m_k = \exp(4^k), \quad r_k = \frac{pm_k}{p - A_0}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$p = \frac{1}{h}, \quad A_0 = p - \sqrt{p^2 - pD + D^2/2}. \quad (9.3)$$

Заметим, что $m_{k+1} = m_k^4$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Последовательность положительных чисел λ определим следующим образом. Пусть k_0 — наименьшее из натуральных чисел k таких, что $m_k > \max(h, (1 - hD)^{-1})$. Положим

$$\lambda \cap [0, m_{k_0+1}] = \emptyset,$$

а при $k > k_0$

$$\begin{aligned} \lambda \cap \left[m_k, \frac{m_k}{1 - hD} \right] &= \left\{ m_k + \nu h : \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq \frac{m_k D}{1 - hD} \right\}, \\ \lambda \cap \left(\frac{m_k}{1 - hD}, m_k^2 \right] &= \left\{ \frac{m_k}{1 - hD} + \frac{\nu}{D} : \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq m_k D \left(m_k - \frac{1}{1 - hD} \right) \right\}, \\ \lambda \cap (m_k^2, m_{k+1}) &= \emptyset. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Таким образом, на отрезках $[m_k, m_k/(1 - hD)]$ последовательность λ представляет собой арифметическую прогрессию с разностью h , на полуинтервалах $(m_k/(1 - hD), m_k^2]$ — арифметическую прогрессию с разностью $1/D$, а на интервалах (m_k^2, m_{k+1}) элементы λ отсутствуют.

Очевидно, что шаг полученной последовательности равен h . Покажем, что ее верхняя плотность равна D , а затем отыщем асимптотику $\ln |L(R_k)|$ (последовательность $R_k = r_k + O(1)$ будет определена ниже). С этой целью найдем функцию $N(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1$ на участках $[m_k, m_{k+1}]$ с “достаточно хорошей” точностью. Ввиду (10.3) имеем

$$N(m_k) = N(\sqrt{m_k}) = O(\sqrt{m_k}). \quad (11.3)$$

Если $m_k < x \leq m_k/(1 - hD)$, то

$$N(x) = N(m_k) + \frac{x - m_k}{h} + O(1). \quad (12.3)$$

При $m_k/(1 - hD) < x \leq m_k^2$ имеем

$$N(x) = N\left(\frac{m_k}{1 - hD}\right) + \left(x - \frac{m_k}{1 - hD}\right)D + O(1) \quad (13.3)$$

и, наконец,

$$N(x) = N(m_k^2), \quad m_k^2 < x < m_{k+1}. \quad (14.3)$$

Из соотношений (10.3) и (11.3) (напоминаем, что $p = 1/h$) находим

$$\frac{N(x)}{x} = p \left(1 - \frac{m_k}{x} \right) + O \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right), \quad m_k \leq x \leq \frac{m_k}{1-hD}; \quad (15.3)$$

а так как на этом участке $m_k/x \geq 1-hD$, то получаем оценку

$$\frac{N(x)}{x} \leq D + O \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right), \quad m_k \leq x \leq \frac{m_k}{1-hD}. \quad (16.3)$$

Кроме того, из (15.3) вытекает асимптотическое равенство

$$N \left(\frac{m_k}{1-hD} \right) = \frac{m_k D}{1-hD} + O(\sqrt{m_k}) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (17.3)$$

Следовательно, верхняя плотность последовательности λ не меньше D . Соотношения (17.3) и (12.3)–(14.3) убеждают нас в справедливости неравенства (16.3) при $x \in [m_k/(1-hD), m_{k+1}]$. Из сказанного заключаем, что верхняя плотность λ в точности равна D . Легко видеть, что все постоянные в символах O зависят только от чисел h и D .

Теперь определим R_k . Возьмем ближайший справа к r_k элемент последовательности λ , который обозначим через λ_{ν_k} . Положим $R_k = \lambda_{\nu_k} + h/2$, если $r_k > \lambda_{\nu_k} - h/2$, и $R_k = \lambda_{\nu_k} - h/2$, если $r_k \leq \lambda_{\nu_k} - h/2$. Поскольку r_k лежит на тех участках, где λ является арифметической прогрессией с разностью h , то $R_k \in [r_k, r_k + h)$.

Обозначим $\varphi_k(t) = \frac{N(R_k t)}{R_k t}$ и покажем, что функции φ_k в некотором смысле “достаточно хорошо” приближаются функцией ψ_{A_0} при $k \rightarrow \infty$, где A_0 и ψ_A определены соотношениями (5.3) и (4.3), в которых B следует заменить на D , а p на h . А именно для разности $g_k(t) = \varphi_k(t) - \psi_{A_0}(t)$ установим справедливость равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{g_k(t) - g_k(1)}{t^2 - 1} dt = 0. \quad (18.3)$$

С этой целью дадим оценки сверху для $g_k(t) - g_k(1)$ на различных участках $\mathbb{R}_+$.

При $t \in [0, \sqrt{m_k}/R_k] \cup [m_k^2/R_k, +\infty)$ воспользуемся тривиальной оценкой

$$g_k(t) - g_k(1) = O(1). \quad (19.3)$$

Если $t \leq q = \frac{p-A_0}{p}$, то $R_k t \leq \frac{p-A_0}{p}(r_k + h) = m_k + O(1)$. Отсюда и из (11.3) находим

$$\varphi_k(t) \leq \frac{N(m_k + O(1))}{R_k t} = \frac{N(m_k) + O(1)}{R_k t} = \frac{O(\sqrt{m_k})}{R_k t}.$$

А так как на отрезке $[0, q]$ выполняется равенство $\psi_{A_0}(t) = 0$, то

$$g_k(t) = \frac{O(\sqrt{m_k})}{R_k t}, \quad 0 < t \leq q. \quad (20.3)$$

Если $q < t \leq \frac{p-A_0}{p-D}$, то

$$\begin{aligned} m_k &= r_k q < r_k t \leq R_k t \leq (r_k + h) \frac{p-A_0}{p-D} \\ &= \left(\frac{pm_k}{p-A_0} + h \right) \frac{p-A_0}{p-D} = \frac{pm_k}{p-D} + O(1) = \frac{m_k}{1-hD} + O(1). \end{aligned}$$

В силу этих ограничений на $R_k t$ из (11.3) и (12.3) находим

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \left(\frac{R_k t - m_k}{h} + O(\sqrt{m_k}) \right) (R_k t)^{-1} \\ &= p \left(1 - \frac{m_k}{R_k t} \right) + O \left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t} \right) = p \left(1 - \frac{q}{t} \right) + O \left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t} \right) \\ &= \psi_{A_0}(t) + O \left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t} \right). \end{aligned}$$

Поэтому приходим к равенству

$$g_k(t) = O \left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t} \right), \quad \frac{p-A_0}{p} < t \leq \frac{p-A_0}{p-D}, \quad (21.3)$$

а так как $\frac{p-A_0}{p} < 1 < \frac{p-A_0}{p-D}$, то

$$g_k(1) = O \left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k} \right). \quad (22.3)$$

Как легко видеть, постоянные в символах O зависят от чисел h и D , но не зависят ни от t , ни от k .

Если $\frac{p-A_0}{p-D} < t \leq \frac{m_k^2}{R_k}$, то $\frac{m_k}{1-hD} < R_k t \leq \frac{m_k^2}{R_k}$. Поэтому из (13.3) и (17.3) находим

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \frac{N(R_k t)}{R_k t} = \left(\frac{m_k D}{1-hD} + O(\sqrt{m_k}) + \left(R_k t - \frac{m_k}{1-hD} \right) D \right) (R_k t)^{-1} \\ &= D + O \left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$g_k(t) = O \left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t} \right), \quad \frac{p-A_0}{p-D} < t \leq \frac{m_k^2}{R_k}. \quad (23.3)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} E_{1,k} &= \left[0, \frac{\sqrt{m_k}}{R_k} \right] \cup \left[\frac{m_k^2}{R_k}, +\infty \right), \\ E_{2,k} &= \left(1 - \frac{h}{2R_k}, 1 + \frac{h}{2R_k} \right), \\ E_{3,k} &= \mathbb{R}_+ \setminus (E_{1,k} \cup E_{2,k}) \end{aligned}$$

и воспользуемся очевидным представлением

$$\int_0^{+\infty} \frac{g_k(t) - g_k(1)}{t^2 - 1} dt = I_{1,k} + I_{2,k} + I_{3,k}, \quad (24.3)$$

где

$$I_{j,k} = \int_{E_{j,k}} \frac{g_k(t) - g_k(1)}{t^2 - 1} dt.$$

Из (19.3) находим

$$I_{1,k} = O\left(\int_{E_{1,k}} \frac{dt}{|t^2 - 1|}\right) = O\left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k} + \frac{R_k}{m_k^2}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{R_k}}\right). \quad (25.3)$$

Если $t \in E_{2,k}$, то $|R_k t - R_k| \leq h/2$, а так как расстояние между соседними элементами λ не меньше h и точки R_k выбирались посередине между ними, то $N(R_k t) = N(R_k)$. Поэтому

$$\varphi_k(t) - \varphi_k(1) = \frac{N(R_k)}{R_k} \left(\frac{1}{t} - 1\right) = O(t - 1), \quad t \in E_{2,k}. \quad (26.3)$$

Из определения ψ_{A_0} находим

$$\psi_{A_0}(t) - \psi_{A_0}(1) = O(t - 1), \quad t \in E_{2,k}. \quad (27.3)$$

Вычитая (27.3) из (26.3), приходим к оценке

$$g_k(t) - g_k(1) = O(t - 1), \quad t \in E_{2,k},$$

откуда

$$I_{2,k} = O\left(\int_{E_{2,k}} \left|\frac{t-1}{t^2-1}\right| dt\right) = O\left(\frac{1}{R_k}\right). \quad (28.3)$$

Из (20.3)–(23.3) заключаем, что на множестве $E_{3,k}$ выполняется оценка $g_k(t) = O\left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k t}\right)$. Отсюда и из (22.3) получаем

$$I_{3,k} = O\left(\frac{\sqrt{m_k}}{R_k}\right) \cdot \int_{E_{3,k}} \left(1 + \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2 - 1} = O\left(\frac{\ln R_k}{\sqrt{R_k}}\right). \quad (29.3)$$

Из (24.3), (25.3), (28.3) и (29.3) следует (18.3).

Согласно лемме 1 имеем

$$-\frac{\ln |L(R_k)|}{R_k} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_k(t) - \varphi_k(1)}{t^2 - 1} dt. \quad (30.3)$$

Из (30.3), (18.3) и определения g_k находим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{R_k} \ln \frac{1}{L(R_k)} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\psi_{A_0}(t) - A_0}{t^2 - 1} dt.$$

(Легко проверяется, что $\psi_A(1) = A$.) Но как раз A_0 и взято таким образом, что по лемме 3

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\psi_{A_0}(t) - A_0}{t^2 - 1} dt = J\left(\frac{1}{h}, D\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{R_k} \ln \frac{1}{L(R_k)} = J\left(\frac{1}{h}, D\right). \quad (31.3)$$

Проверим, что справедлива асимптотика

$$\ln |L(R_k)| = \ln |L'(\lambda_{\nu_k})| + O(\ln R_k). \quad (32.3)$$

Поскольку

$$L'(\lambda_m) = -2\lambda_m^{-1} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2}\right) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

а $R_k = \lambda_{\nu_k} \pm h/2$, то

$$\ln |L(R_k)| - \ln |L'(\lambda_{\nu_k})| = S_{\nu_k}(R_k) - S_{\nu_k}(\lambda_{\nu_k}) + O(\ln R_k),$$

где

$$S_m(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{\lambda_n^2} \right|.$$

Функция $S_m(x)$ на интервале $(\lambda_{m-1}, \lambda_{m+1})$ аналитична и действительнoзначна. Поэтому по теореме Лагранжа существует точка ξ_k , лежащая между λ_{ν_k} и R_k , такая, что выполняется равенство

$$|S_{\nu_k}(R_k) - S_{\nu_k}(\lambda_{\nu_k})| = \frac{h}{2} |S'(\xi_k)| = h \left| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \nu_k}}^{\infty} \frac{\xi_k}{\lambda_n^2 - \xi_k^2} \right| \leq h \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \nu_k}}^{\infty} \left| \frac{\xi_k}{\lambda_n^2 - \xi_k^2} \right|.$$

Легко устанавливается, что последняя сумма по $|\lambda_n - \xi_k| \leq \xi_k/2$ есть $O(\ln \xi_k)$, а сумма по $|\lambda_n - \xi_k| > \xi_k/2$ вносит вклад $O(1)$. Соотношение (32.3) доказано.

Из (32.3) и (31.3) получаем $\delta(\lambda) \geq J(1/h, D)$, а вследствие установленного ранее утверждения 1) имеем $\delta(\lambda) \leq J(1/h, D)$. Тем самым $\delta(\lambda) = J(1/h, D)$ и утверждение 2) доказано в случае $hD < 1$.

Если $hD = 1$, то утверждение 2) доказывается намного проще, поэтому приведем лишь краткую схему его доказательства. Вид экстремальной последовательности в этом случае таков:

$$\begin{aligned} \lambda \cap [m_k, m_k^2] &= \{m_k + \nu h : \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq D(m_k^2 - m_k)\}, \\ \lambda \cap (m_k^2, m_{k+1}) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Далее полагаем $r_k = \sqrt{2} m_k$, а R_k определяется по r_k , как и ранее. Функция ψ , которой будет приближаться $\varphi_k(t)$, имеет вид

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1/\sqrt{2}, \\ D\left(1 - \frac{1}{t\sqrt{2}}\right), & t \geq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Затем проводятся выкладки, аналогичные предыдущим, и устанавливается, что

$$\delta(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\psi(t) - \psi(1)}{t^2 - 1} dt = J(D, D) = D \ln(3 + \sqrt{8}).$$

Таким образом, для того чтобы теорема 1 была полностью доказана, осталось убедиться в справедливости лемм 1–3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Заметим сперва, что для любой абсолютно непрерывной функции f на $[\mu_1, +\infty)$, удовлетворяющей ограничениям

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x)f(x) = 0, \quad \int_{\mu_1}^{+\infty} N(x)|f'(x)| dx < +\infty,$$

справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\mu_n) = - \int_{\mu_1}^{+\infty} N(x)f'(x) dx. \quad (33.3)$$

Действительно, при любом $m \in \mathbb{N}$ имеем [12; приложение, § 1]

$$\sum_{n=1}^m f(\mu_n) = N(\mu_m)f(\mu_m) - \int_{\mu_1}^{\mu_m} N(x)f'(x) dx. \quad (34.3)$$

(В [12], правда, предполагалось, что $f \in C^1[\mu_1, \mu_m]$, но доказательство равенства (34.3) проходит без изменений и для любой функции, от которой требуется лишь абсолютная непрерывность на $[\mu_1, \mu_m]$.) Переходя в соотношении (34.3) к пределу при $m \rightarrow +\infty$, получаем (33.3).

Теперь возьмем произвольное положительное число ε , которое меньше расстояния от R до ближайшего элемента последовательности μ , и положим

$$f_{R,\varepsilon}(x) = \begin{cases} \ln \left| 1 - \frac{R^2}{x^2} \right|, & x \in (0, +\infty) \setminus (R - \varepsilon, R + \varepsilon), \\ f_{R,\varepsilon}(R - \varepsilon) + (x - (R - \varepsilon)) \frac{f_{R,\varepsilon}(R + \varepsilon) - f_{R,\varepsilon}(R - \varepsilon)}{2\varepsilon}, & \\ & x \in (R - \varepsilon, R + \varepsilon). \end{cases} \quad (35.3)$$

Из (35.3) видно, что функция f непрерывна на $(0, +\infty)$, линейна на отрезке $[R - \varepsilon, R + \varepsilon]$ и имеет непрерывную производную всюду, за исключением разве лишь двух точек: $R - \varepsilon$ и $R + \varepsilon$. Из сказанного вытекает, что функция $f_{R,\varepsilon}$ является абсолютно непрерывной на $(0, +\infty)$. Ввиду (1.3) $\lim_{x \rightarrow \infty} N(x)f_{R,\varepsilon}(x) = 0$ и интеграл $\int_{\mu_1}^{+\infty} N(x)f'_{R,\varepsilon}(x) dx$ абсолютно сходится. Следовательно,

$$\ln |L(R)| = \sum_{n=1}^{\infty} f_{R,\varepsilon}(\mu_n) = - \int_{\mu_1}^{+\infty} N(x)f'_{R,\varepsilon}(x) dx. \quad (36.3)$$

Вычисляя $f'_{R,\varepsilon}(x)$ и учитывая равенство $N(x) = 0$ при $0 < x < \mu_1$, из (36.3) находим

$$-\ln |L(R)| = \int_{\mathbb{R}_+ \setminus [R-\varepsilon, R+\varepsilon]} \frac{N(x)}{x} \cdot \frac{2R^2}{x^2 - R^2} dx + N(R)(f_{R,\varepsilon}(R+\varepsilon) - f_{R,\varepsilon}(R-\varepsilon)).$$

Сделав в интеграле замену переменного $x = Rt$ и вычислив разность $f_{R,\varepsilon}(R+\varepsilon) - f_{R,\varepsilon}(R-\varepsilon)$, получим

$$-\frac{\ln |L(R)|}{2R} = \int_{G_\varepsilon} \frac{\varphi_R(t) dt}{t^2 - 1} + \frac{\varphi_R(1)}{2} \ln \left(\frac{2R + \varepsilon}{2R - \varepsilon} \left(\frac{R - \varepsilon}{R + \varepsilon} \right)^2 \right), \quad (37.3)$$

где $G_\varepsilon = G(R, \varepsilon) = [0, 1 - \varepsilon/R] \cup [1 + \varepsilon/R, +\infty)$, а функция φ_R определена в формулировке леммы 1. Нетрудно сосчитать, что

$$\int_{G_\varepsilon} \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon/(2R)}{1 - \varepsilon/(2R)} \right). \quad (38.3)$$

Соотношения (37.3) и (38.3) приводят нас к равенству (R фиксировано, $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$-\frac{\ln |L(R)|}{2R} = \int_{G_\varepsilon} \frac{\varphi_R(t) - \varphi_R(1)}{t^2 - 1} dt + O(\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем утверждение леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Так как

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = D, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h,$$

то существует такой номер n_0 , что при всех $n > n_0$ выполняются неравенства

$$\frac{n}{\lambda_n} < B, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n > \frac{1}{p}. \quad (39.3)$$

Для любого $m > n_0 + 1$ определим последовательность

$$\mu = \mu(m) = \{\lambda_n : n \geq n_0 + 1, n \neq m\}.$$

Получившуюся последовательность $\mu(m)$ занумеруем в порядке возрастания μ_1, μ_2, μ_3 и т. д. Положим

$$F_m = \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{R^2}{\mu_n^2} \right|.$$

Через $N(x) = N(x, m)$ обозначим считающую функцию последовательности μ : $N(x) = \sum_{\mu_n \leq x} 1$. Из определения последовательности μ , функции L и величин F_m вытекает асимптотика

$$\ln L'(\lambda_m) = \ln F_m + O(\ln \lambda_m) \quad (m \rightarrow +\infty),$$

откуда заключаем, что для доказательства леммы 2 достаточно установить справедливость неравенства

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \ln \frac{1}{F_m} \leq J(p, B). \quad (40.3)$$

Обозначим $R = \lambda_m$. С учетом введенных обозначений и леммы 1 справедливо представление

$$-\frac{\ln F(R)}{R} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_R(t) - \varphi_R(1)}{t^2 - 1} dt, \quad (41.3)$$

где $\varphi_R(t) = \frac{N(Rt)}{Rt}$.

Из (39.3) и определения последовательности μ находим

$$\frac{n}{\mu_n} \leq B, \quad \mu_{n+1} - \mu_n > \frac{1}{p} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и расстояние от R до ближайшего к нему элемента последовательности μ не меньше $1/p$. Ввиду сказанного при любом $y > 0$ имеем

$$N(R + y) \leq N(R) + py, \quad (42.3)$$

$$N(R) \leq N(R - y) + py. \quad (43.3)$$

При $t > 1$ из (42.3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{N(Rt)}{Rt} &\leq \frac{N(R) + p(Rt - R)}{Rt} = \frac{N(R)}{Rt} + \frac{N(R)}{R} - \frac{N(R)}{R} + p\left(1 - \frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{N(R)}{R} + \frac{N(R)}{R} \left(\frac{1}{t} - 1\right) + p\left(1 - \frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Или же в других обозначениях

$$\varphi_R(t) \leq \varphi_R(1) + (p - \varphi_R(1)) \left(1 - \frac{1}{t}\right) \quad \forall t \in (1, +\infty). \quad (44.3)$$

Аналогично при $t \in (0, 1)$ из (43.3) находим

$$\frac{N(R)}{Rt} \leq \frac{N(Rt)}{Rt} + p\left(\frac{1}{t} - 1\right)$$

или же в других обозначениях

$$\frac{\varphi_R(1)}{t} \leq \varphi_R(t) + p\left(\frac{1}{t} - 1\right). \quad (45.3)$$

Представляя левую часть (45.3) в виде $\varphi_R(1)/t = \varphi_R(1) + \varphi_R(1)(1/t - 1)$ и перенося второе слагаемое в правую часть, приходим к неравенству

$$\varphi_R(1) \leq \varphi_R(t) + (p - \varphi_R(1)) \left(\frac{1}{t} - 1\right) \quad \forall t \in (0, 1). \quad (46.3)$$

Обозначая $\varphi_R(1) = A$ и учитывая оценку сверху $\varphi_R(t) \leq B$ ($\forall t > 0$), которая является тривиальным следствием неравенства $n/\mu_n \leq B$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), из (44.3) получаем

$$\begin{aligned}\varphi_R(t) &\leq \min\left(B, A + (p - A)\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right) \\ &= \min\left(B, p\left(1 - \frac{p - A}{pt}\right)\right) \quad \forall t \in (1, +\infty).\end{aligned}\quad (47.3)$$

С другой стороны, из (4.3) следует тождество

$$\psi_A(t) = \min\left(B, p\left(1 - \frac{p - A}{pt}\right)\right) \quad \forall t > 1,$$

которое вместе с (47.3) приводит к неравенству

$$\varphi_R(t) \leq \psi_A(t) \quad \forall t > 1.$$

А так как $\psi_A(1) = A = \varphi_R(1)$, то получаем

$$\varphi_R(t) - \varphi_R(1) \leq \psi_A(t) - A \quad \forall t > 1. \quad (48.3)$$

Используя очевидную оценку $\varphi_R(t) \geq 0$, из (46.3) и (4.3) при $t \in (0, 1)$ находим

$$\begin{aligned}\varphi_R(1) - \varphi_R(t) &\leq \min\left(A, (p - A)\left(\frac{1}{t} - 1\right)\right) \\ &= \min\left(A, A + \frac{p - A}{t} - p\right) \\ &= A + \min\left(0, p\left(\frac{p - A}{pt} - 1\right)\right) \\ &= A - \max\left(0, p\left(1 - \frac{p - A}{pt}\right)\right) = A - \psi_A(t).\end{aligned}\quad (49.3)$$

Из (48.3) и (49.3) следуют неравенства

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_R(t) - \varphi_R(1)}{t^2 - 1} &\leq \frac{\psi_A(t) - A}{t^2 - 1} \quad \forall t > 1, \\ \frac{\varphi_R(1) - \varphi_R(t)}{1 - t^2} &\leq \frac{A - \psi_A(t)}{1 - t^2} \quad \forall t \in (0, 1).\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\frac{\varphi_R(t) - \varphi_R(1)}{t^2 - 1} \leq \frac{\psi_A(t) - A}{t^2 - 1} \quad \forall t \in (0, +\infty), \quad t \neq 1,$$

где $A = \varphi_R(1)$. Интегрируя это неравенство от 0 до ∞ , с учетом (41.3) находим

$$-\frac{\ln F(R)}{R} \leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(t) - A}{t^2 - 1} dt. \quad (50.3)$$

Величина, стоящая в правой части (50.3), в формулировке леммы 2 обозначена через $J(p, B)$. Следовательно,

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \ln \frac{1}{F_m} \leq \sup_{0 \leq A \leq B} J(p, B, A) = J(p, B).$$

Тем самым неравенство (40.3) установлено, а как отмечалось выше, это доказывает лемму 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Вычислим интеграл $J(p, B, A)$. Исходя из определения функции $\psi_A(t)$ находим

$$\begin{aligned} J(p, B, A) &= \int_0^{\frac{p-A}{p}} \frac{-2A}{t^2-1} dt + 2(p-A) \int_{\frac{p-A}{p}}^{\frac{p-A}{p-B}} \frac{1-1/t}{t^2-1} dt + 2 \int_{\frac{p-A}{p-B}}^{+\infty} \frac{B-A}{t^2-1} dt \\ &= A \ln \frac{1+t}{1-t} \Big|_0^{\frac{p-A}{p}} + 2(p-A) \ln \frac{t}{t+1} \Big|_{\frac{p-A}{p}}^{\frac{p-A}{p-B}} + (B-A) \ln \frac{t-1}{t+1} \Big|_{\frac{p-A}{p-B}}^{+\infty} \\ &= A \ln \frac{2p-A}{A} + 2(p-A) \ln \frac{2p-A}{2p-A-B} + (B-A) \ln \frac{2p-A-B}{B-A}. \end{aligned} \quad (51.3)$$

Из (51.3) видно, что при фиксированных B и p (напомним, что $0 < B < p$) функция $f(A) = J(p, B, A)$ является непрерывной на отрезке $[0, B]$, имеет непрерывную производную на интервале $(0, B)$ и

$$\lim_{A \rightarrow +0} f'(A) = +\infty, \quad \lim_{A \rightarrow B-0} f'(A) = -\infty.$$

Из сказанного заключаем, что функция f на отрезке $[0, B]$ достигает своего максимума и точка максимума лежит на интервале $(0, B)$. Вычисляя производную f , находим

$$\begin{aligned} f'(A) &= \ln \frac{2p-A}{A} - 2 \ln \frac{2p-A}{2p-A-B} - \ln \frac{2p-A-B}{B-A} \\ &= \ln \frac{(2p-A-B)(B-A)}{A(2p-A)}, \quad 0 < A < B. \end{aligned} \quad (52.3)$$

(Непосредственно проверяется, что рациональные слагаемые, получающиеся в результате дифференцирования по A выражения (51.3), в сумме дают тождественный нуль.) Из (52.3) следует, что уравнение $f'(A) = 0$ равносильно квадратному уравнению

$$(2p-A-B)(B-A) = A(2p-A),$$

которое на интервале $(0, B)$ имеет единственный корень

$$A_0(p, B) = p - \sqrt{p^2 - pB + B^2/2}. \quad (53.3)$$

Следовательно, функция $f(A)$ достигает максимума на отрезке $[0, B]$ именно в этой точке и этот максимум, обозначенный через $J(p, B)$, равен

$$\begin{aligned} J(p, B) &= J(p, B, A_0(p, B)) \\ &= B \left(\frac{A_0}{B} \ln \frac{2p/B - A_0/B}{A_0/B} + 2 \left(\frac{p}{B} - \frac{A_0}{B} \right) \ln \frac{2p/B - A_0/B}{2p/B - A_0/B - 1} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{A_0}{B} \right) \ln \frac{2p/B - 1 - A_0/B}{1 - A_0/B} \right). \end{aligned}$$

Согласно (53.3) имеем $A_0/B = s - \sqrt{s^2 - s + 1/2} \stackrel{\text{def}}{=} a$, где $s = p/B$ (см. (6.3)). С учетом этих обозначений находим

$$J(p, B) = B \left(a \ln \frac{s-a}{a} + 2(s-a) \ln \frac{2s-a}{2s-a-1} + (1-a) \ln \frac{2s-a-1}{1-a} \right),$$

а это и требовалось установить. Тем самым лемма 3, а вместе с ней и теорема 1 полностью доказаны.

§ 4. Доказательства следствий 1–4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Выводить следствие 1 из явной формулы (1.2) технически сложно. Поэтому воспользуемся доказанным соотношением (7.3), согласно которому $\Delta(h, D) = J(1/h, D)$. Сначала установим строгое возрастание $J(p, D)$ по D на $[0, p]$ при фиксированном p . В силу непрерывности $J(p, D)$ достаточно сделать это на интервале $(0, p)$. Пусть $0 < B_1 < B_2 < p$. Покажем, что

$$J(p, B_1) < J(p, B_2). \quad (1.4)$$

Положим $A = A_0(p, B_1)$ (см. (5.3)). Именно в этой точке $J(p, B_1, A)$ достигает своего максимума.

Ввиду (3.3) имеем

$$J(p, B_1, A) = J(p, B_1), \quad J(p, B_2, A) \leq J(p, B_2).$$

Поэтому для доказательства (1.4) достаточно установить неравенство

$$J(p, B_1, A) < J(p, B_2, A), \quad (2.4)$$

т.е.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p, B_1, t) - A}{t^2 - 1} dt < \int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p, B_2, t) - A}{t^2 - 1} dt.$$

Из определения функций $\psi_A(p, B, t)$, данного формулами (2.4), следуют соотношения

$$\begin{aligned} \psi_A(p, B_1, t) &= \psi_A(p, B_2, t), & t \in \left[0, \frac{p-A}{p-B_1}\right], \\ \psi_A(p, B_1, t) &= B_1 < \psi_A(p, B_2, t), & t > \frac{p-A}{p-B_1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вычтя из обеих частей (3.4) число A и разделив разность на $t^2 - 1$ (при этом знак неравенства сохранится: так как $\frac{p-A}{p-B_1} > 1$, следовательно, при $t > \frac{p-A}{p-B_1}$ выражение $t^2 - 1$ положительно), находим

$$\begin{aligned} \frac{\psi_A(p, B_1, t) - A}{t^2 - 1} &= \frac{\psi_A(p, B_2, t) - A}{t^2 - 1}, & t \in \left[0, \frac{p-A}{p-B_1}\right], \\ \frac{\psi_A(p, B_1, t) - A}{t^2 - 1} &< \frac{\psi_A(p, B_2, t) - A}{t^2 - 1}, & t > \frac{p-A}{p-B_1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (4.4) получаем неравенство (2.4) для интегралов

$$J(p, B_1, A) = \int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p, B_1, t) - A}{t^2 - 1} dt < \int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p, B_2, t) - A}{t^2 - 1} dt = J(p, B_2, A),$$

из которого, как отмечалось выше, следует (1.4).

Теперь установим, что при $0 < h_1 < h_2 < 1/D$ выполняется неравенство $\Delta(h_1, D) > \Delta(h_2, D)$, т.е.

$$J(p_2, D) < J(p_1, D), \quad D < p_2 < p_1. \quad (5.4)$$

Положим $A = A_0(p_2, D)$. Тогда

$$J(p_2, D, A) = J(p_2, D), \quad J(p_1, D, A) \leq J(p_1, D).$$

Поэтому для доказательства (5.4) достаточно установить неравенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p_2, D, t) - A}{t^2 - 1} dt < \int_0^{+\infty} \frac{\psi_A(p_1, D, t) - A}{t^2 - 1} dt. \quad (6.4)$$

Из (2.4) следуют тождества

$$\begin{aligned} \frac{\psi_A(p, D, t) - A}{t^2 - 1} &= \frac{\min(A, (p - A)(1/t - 1))}{1 - t^2}, \quad 0 \leq t < 1, \\ \frac{\psi_A(p, D, t) - A}{t^2 - 1} &= \frac{\min(D - A, (p - A)(1/t - 1))}{1 - t^2}, \quad t > 1, \end{aligned}$$

которые в силу неубывания по p при фиксированных значениях D, A, t их правых частей убеждают нас в справедливости неравенства

$$\frac{\psi_A(p_2, D, t) - A}{t^2 - 1} \leq \frac{\psi_A(p_1, D, t) - A}{t^2 - 1} \quad (7.4)$$

при всех $t \geq 0$ (в точке $t = 1$ обе части неравенства (7.4) непрерывны). При этом в достаточно малой окрестности точки $t = 1$, где $|(p_1 - A)/t| < \min(A, D - A)$, неравенство (7.4) превращается в строгое. Поэтому справедливо строгое неравенство (6.4) между интегралами, откуда вытекает (5.4). Следствие 1 полностью доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Преобразуем выражение (1.2). Имеем

$$\frac{1}{D} \Delta(h, D) = a \ln \frac{1}{a} + (1 - a) \ln \frac{1}{1 - a} + \ln(2s - a) + (2s - a - 1) \ln \frac{2s - a}{2s - a - 1}. \quad (8.4)$$

Ввиду очевидных соотношений

$$\begin{aligned} \max_{0 < x < 1} \left(x \ln \frac{1}{x} + (1 - x) \ln \frac{1}{1 - x} \right) &= \ln 2, \\ y \ln \frac{1 + y}{y} &< 1 \quad \forall y > 0 \quad (\text{здесь } y = 2s - a - 1), \\ 2s - a &= s + \sqrt{s^2 - s + 1/2} \end{aligned}$$

приходим к (2.2). Неравенства (3.2) тривиально получаются из (2.2). Следствие 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Подставляя значение $s = 1$ в правую часть (1.2) и производя несложные вычисления, получаем (4.2).

Теперь на луче $s \geq 1$ рассмотрим функции

$$g(s) = \ln(3 + \sqrt{8}) + \ln s,$$

$$f(s) = a \ln \frac{1}{a} + (1 - a) \ln \frac{1}{1 - a} + \ln(2s - a) + (2s - a - 1) \ln \frac{2s - a}{2s - a - 1},$$

где $a = a(s) = s - \sqrt{s^2 - s + 1/2}$. Из (8.4) видно, что неравенство (5.2) можно переписать в эквивалентной форме:

$$f(s) > g(s) \quad \forall s > 1.$$

Выше было показано, что $f(1) = g(1)$, а так как функции f и g непрерывно дифференцируемы на $[1, +\infty)$, то достаточно установить справедливость неравенства

$$f'(s) > g'(s) = \frac{1}{s} \quad \forall s > 1. \quad (9.4)$$

Несложно проверить, что функции

$$f_1(x) = x \ln \frac{1}{x} + (1 - x) \ln \frac{1}{1 - x} \quad \text{и} \quad f_2(y) = y \ln \left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

имеют положительную производную на промежутках $(0, 1/2)$ и $(0, +\infty)$ соответственно. Имеем также

$$a'(s) = 1 - \frac{s - 1/2}{\sqrt{s^2 - s + 1/2}} = \frac{1}{4\sqrt{s^2 - s + 1/2}(\sqrt{s^2 - s + 1/2} + s - 1/2)}, \quad (10.4)$$

$a(1) = 1 - 1/\sqrt{2}$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} a(s) = 1/2$. Таким образом, при $s > 1$ функция $a(s)$ имеет положительную производную и принимает значения только на интервале $(1 - 1/\sqrt{2}, 1/2)$. Ввиду сказанного, обозначая $y(s) = 2s - a - 1$, находим

$$\frac{d}{ds} f_1(a) = \frac{df_1(a)}{da} a'(s) > 0 \quad \forall s > 1,$$

$$\frac{d}{ds} f_2(y) = \frac{df_2(y)}{dy} y'(s) = (2 - a'(s)) f_2'(y) > 0 \quad \forall s > 1.$$

Отсюда видно, что для доказательства (9.4) достаточно установить, что

$$\frac{d \ln(2s - a)}{ds} > \frac{1}{s} \quad \forall s > 1.$$

Несложные преобразования показывают, что последнее неравенство равносильно следующему:

$$s a'(s) < a(s) \quad \forall s > 1. \quad (11.4)$$

На основании (10.4) заключаем, что функция $sa'(s)$ убывает на $[1, +\infty)$, $a(s)$ возрастает на этом луче и $a'(1) = a(1)$. Поэтому приходим к (11.4) и тем самым (5.2) доказано.

Положим $g_1(s) = 2 + \ln s$. Тогда неравенство (6.2) переписется в виде $f(s) > g_1(s)$. Так как $g_1'(s) = 1/s < f'(s)$, то достаточно проверить, что $f(2) > g_1(2)$. Имеем $a(2) = 2 - \sqrt{2.4} = a_0$,

$$\begin{aligned} f(2) &= a_0 \ln \frac{1}{a_0} + (1 - a_0) \ln \frac{1}{1 - a_0} + \ln(4 - a_0) + (3 - a_0) \ln \frac{4 - a_0}{3 - a_0} \\ &> 2.02 + \ln 2 > 2 + \ln 2 = g_1(2). \end{aligned}$$

Следствие 3 полностью доказано.

Следствие 4 легко выводится из (8.4) и известных асимптотик логарифмической и степенной функций.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Возьмем произвольное $D \in (0, 1/6]$ и зафиксируем его. Положим $m = [4/D] - 3$,

$$\begin{aligned} u &= \frac{4}{m+3} \ln \frac{m+3}{\pi \sqrt[4]{2}}, \quad \alpha = \frac{4\pi}{m+3}, \\ \theta_1 &= \arccos \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right), \quad \theta_2 = \arccos \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right), \quad (1.5) \\ P(z) &= \frac{e^{mz} (e^{2z} - 2e^{z+u} \cos \theta_1 + e^{2u}) (e^{2z} - 2e^{z+u} \cos \theta_2 + e^{2u})}{(1 + 2e^u \cos \theta_1 + e^{2u})(1 + 2e^u \cos \theta_2 + e^{2u})}, \\ f(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (P(z))^k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Имеем очевидные соотношения

$$(P(z))^k = \sum_{\nu=mk!}^{(m+4)k!} c_{\nu} e^{\nu z}, \quad (3.5)$$

$$\max_{\nu \in \mathbb{R}} |P(iy)| = |P(\pi i)| = 1, \quad (4.5)$$

$$|P(iy)| < 1, \quad \text{если } y \in \mathbb{R} \setminus \{\pi(2n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (5.5)$$

Из (2.5) и (3.5) находим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n z), \quad (6.5)$$

где

$$\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{N} \cap [mk!, (m+4)k!]).$$

Из (3.5) и (5.5) получаем оценку $|c_{\nu}| < 1$ для всех $\nu \in \lambda$, а поскольку спектры полиномов из экспонент $(P(z))^k$ при $k \in \mathbb{N}$ не пересекаются (ввиду (1.5) при

$D \leq 1/6$ имеем $m \geq 21$ и, следовательно, $m(k+1)! > (m+4)k!$ при любых $k \geq 1$), то приходим к неравенству

$$|a_n| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.5)$$

Из (7.5) следует, что абсцисса сходимости ряда (6.5) неотрицательна; но в точке $z = \pi i$ он расходится, так как этим свойством ввиду (4.5) обладает ряд (2.5). Из сказанного заключаем, что абсцисса сходимости ряда (6.5) равна нулю.

Сейчас мы установим, что область сходимости ряда (2.5) значительно шире, чем у ряда (6.5). С этой целью докажем неравенство

$$\max_{z \in \Pi} |P(z)| < 1, \quad (8.5)$$

где $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq u, |\operatorname{Im} z| \leq \alpha\}$. Из (8.5) очевидным образом вытекает равномерная сходимость ряда (1.5) в некоторой окрестности прямоугольника Π , и, следовательно, $f(z)$ допускает на Π аналитическое продолжение из левой полуплоскости.¹ Верхняя плотность последовательности λ равна $4/(m+4) < D$, а высота прямоугольника Π равна $2\alpha \geq 2\pi D$. Поэтому исходя из определения $l(D)$ и аналитичности f на Π (можно дополнить λ до последовательности верхней плотности D , а коэффициенты при экспонентах с новыми показателями положить нулями) заключаем, что

$$l(D) > u \geq D \ln \frac{\sqrt[4]{128}}{\pi D}$$

и требуемая оценка снизу тем самым будет получена.

Перейдем к доказательству (8.5). Нетрудно убедиться в том, что при $z = u + iy$, $y \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ справедливо тождество

$$|e^{2z} - 2e^{u+z} \cos \theta + e^{2u}| = 2e^{2u} |\cos y - \cos \theta|. \quad (9.5)$$

Из (9.5) вытекает, что

$$|P(u + iy)| = \frac{4e^{(m+4)u} |(\cos y - \cos \theta_1)(\cos y - \cos \theta_2)|}{(1 + 2e^u \cos \theta_1 + e^{2u})(1 + 2e^u \cos \theta_2 + e^{2u})}.$$

Из (1.5) видно, что функция $(\cos y - \cos \theta_1)(\cos y - \cos \theta_2)$ на отрезке $[0, \alpha]$ достигает максимума в точках 0 и α , а минимума – в точке $\arccos(\cos^2(\alpha/2))$. При этом ее значения в трех упомянутых точках равны между собой по абсолютной величине и

$$(\cos \alpha - \cos \theta_1)(\cos \alpha - \cos \theta_2) = \frac{1}{2} \sin^4 \frac{\alpha}{2}.$$

¹Этот способ построения “далеко продолжаемых” рядов экспонент и степенных рядов с верхней плотностью показателей, меньшей их максимальной плотности (см. [3], [7]), основанный на явлении сверхсходимости (сходимости некоторой подпоследовательности частичных сумм ряда в некоторой области, принадлежащей множеству расходимости самого ряда), использовался Фабером, Поля, Мандельбройтом и другими математиками. Функции $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (Q(z))^k$, где Q – специально подобранный для решаемой задачи полином, встречались в их работах. Заслуга автора здесь состоит лишь в отыскании полинома из экспонент P , в некотором смысле близкого к оптимальному для рассматриваемой задачи – оценки снизу $l(D)$.

Ввиду (1.5) имеем также

$$e^{(m+3)u} = \frac{1}{2} \left(\frac{m+3}{\pi} \right)^4.$$

Из сказанного заключаем, что

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq y \leq \alpha} |P(u + iy)| &= |P(u + i\alpha)| \\ &= \left(\frac{m+3}{\pi} \right)^4 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cdot e^4 (1 + 2e^u \cos \theta_1 + e^{2u})^{-1} (1 + 2e^u \cos \theta_2 + e^{2u})^{-1}. \end{aligned}$$

В силу (1.5) и ограничения $D \leq 1/6$ выполняются неравенства

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \alpha \leq \frac{\pi}{6}, \quad u \geq \frac{\alpha}{3},$$

откуда находим

$$\cos \theta_j e^u \geq \cos \alpha \exp \frac{\alpha}{3} \geq 1.$$

Следовательно,

$$|P(u + i\alpha)| < \left(\frac{m+3}{\pi} \right)^4 \left(\frac{\alpha}{2} \right)^4 e^4 (3 + e^{2u})^{-2} = \left(\frac{4e^{u/2}}{3 + e^{2u}} \right)^2.$$

Но $4e^{u/2} < 3 + e^{2u}$ при всех $u > 0$. Окончательно получаем

$$\max_{0 \leq y \leq \alpha} |P(u + iy)| = |P(u + i\alpha)| < 1. \quad (10.5)$$

Для оценки $|P(z)|$ на верхней стороне прямоугольника Π воспользуемся тождеством

$$|e^{2t} - e^{t+i\alpha} \cos \theta + e^{2i\alpha}|^2 = 4e^{2t} (\operatorname{ch} t - \cos(\alpha - \theta)) (\operatorname{ch} t - \cos(\alpha + \theta)), \quad \alpha, \theta, t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} U(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{P(u - t + i\alpha)}{P(u + i\alpha)} \right|^2 \\ &= e^{-2(m+2)t} \prod_{j=1}^2 \frac{(\operatorname{ch} t - \cos(\alpha - \theta_j)) (\operatorname{ch} t - \cos(\alpha + \theta_j))}{(1 - \cos(\alpha - \theta_j)) (1 - \cos(\alpha + \theta_j))}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Докажем неравенство

$$U(t) < 1, \quad 0 < t \leq u. \quad (12.5)$$

Используя тождество

$$\operatorname{ch} t - \cos w = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{t}{2} + 2 \sin^2 \frac{w}{2}$$

и логарифмируя (11.5), получаем неравенство, равносильное (12.5):

$$\begin{aligned} U_1(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^2 \left(\ln \left(1 + \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\sin \frac{\alpha - \theta_j}{2}} \right)^2 \right) + \ln \left(1 + \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\sin \frac{\alpha + \theta_j}{2}} \right)^2 \right) \right) \\ &< 2(m+2)t, \quad 0 < t \leq u. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Поскольку $\frac{\ln(1+p^2)}{p} < 0.81$ при всех $p > 0$, то при любом $t > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} U_1(t) &< 0.81 \operatorname{sh} \frac{t}{2} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha - \theta_j}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\alpha + \theta_j}{2}} \right) \\ &= 0.81 \operatorname{sh} \frac{t}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta_j}{2}}{\cos \theta_j - \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Ввиду (1.5) имеем

$$\cos \theta_j - \cos \alpha = \left(1 - \frac{(-1)^j}{\sqrt{2}} \right) \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad j = 1, 2. \quad (15.5)$$

Из (14.5) и (15.5) находим

$$U_1(t) < \frac{3.24 \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \leq \frac{1.08 t}{\alpha} \cdot 12 M_1 M_2, \quad (16.5)$$

где

$$M_1 = \max_{0 \leq \alpha \leq \pi/6} \frac{\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} < \frac{\pi}{3}, \quad M_2 = \max_{0 \leq t \leq 1/3} \frac{2 \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{t} < 1.01.$$

Очевидно, что при $0 < D \leq 1/6$ выполняются неравенства $0 < \alpha < \pi/6$ и $0 < u \leq 1/3$. Таким образом, из (16.5) и (1.5) получаем

$$U_1(t) < \frac{14 t}{\alpha} < 1.2 t(m+3) < 2t(m+2).$$

Тем самым неравенство (13.5), а значит, и (12.5) доказано. Из (12.5) и определения функции U получаем

$$\max_{0 \leq x \leq u} |P(x + i\alpha)| = |P(u + i\alpha)|. \quad (17.5)$$

Из (5.5), (10.5), (17.5) и принципа симметрии ($P(z)$ принимает на $\mathbb{R}$ действительные значения) получаем, что неравенство $|P(z)| < 1$ выполняется на всей границе прямоугольника Π . Следовательно, по принципу максимума справедливо (8.5), а это, как отмечалось выше, доказывает теорему 3.

Список литературы

1. Мандельброт С. Ряды Дирихле, принципы и методы. М.: Мир, 1973.
2. Леонтьев А. Ф. Дирихле ряд // Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Сов. энциклопедия, 1979. С. 183–186.
3. *Polya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. 1 // Math. Z. 1929. V. 29. P. 549–640; 2 // Ann. of Math. (2). 1933. V. 34. P. 731–777.
4. *Bernstein V.* Alcune osservazioni sopra un teorema di Fabry // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (6). 1935. V. 21. № 6. P. 780–785.
5. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
6. Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
7. Биберах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
9. Братищев А. В. Возникновение и развитие понятия индекса конденсации // Актуальные вопросы теории функций. Ростов: Изд-во Ростовского ун-та, 1987. С. 50–56.
10. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
11. Левин Б. Я. Дополнения и исправления к книге “Распределение корней целых функций” // Препринт ФТИНТ АН УССР. Харьков, 1978.
12. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
04.06.1998