Общероссийский математический портал

А. О. Смирнов, Двухзонные эллиптические решения уравнения Буссинеска, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 5, 139–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:18:51

УДК 517.95

А. О. Смирнов

Двухзонные эллиптические решения уравнения Буссинеска

Рассмотрены двухзонные решения уравнения Буссинеска. Доказано, что по почти любой римановой поверхности Γ рода $g = 2$, накрывающей эллиптическую, можно построить эллиптическое по x двухзонное решение уравнения Буссинеска. Также доказано существование дифференциальных операторов третьего и четвертого порядка с эллиптическими “двухзонными” потенциалами с произвольным числом полюсов. Приведен пример.

Библиография: 31 название.

Введение

Метод конечнозонного интегрирования позволяет находить точные решения ряда нелинейных дифференциальных уравнений математической физики (см., например, [1]–[6]). Однако эти точные решения достаточно трудно использовать на практике, поскольку они выражаются через тэта-функции Римана, представляющие собой многомерные ряды Фурье с коэффициентами, зависящими от периодов некоторых абелевых интегралов. В связи с этим практически сразу же возникло желание выделить из общих конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений классы более простых специальных решений таких, как периодические или эллиптические (см., например, [5], [6]).

Эллиптические конечнозонные решения интегрируемых нелинейных уравнений представляют интерес не только сами по себе как описывающие периодические (по времени и/или по координате) нелинейные процессы, они также могут быть использованы для изучения динамики интегрируемых систем частиц [7]–[10] или для исследований линейных обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений, аналогичных уравнениям Ламе или Требиха–Вердье (см., например, [5], [6], [9], [11]–[15]).

До последнего времени исследовались эллиптические решения интегрируемых нелинейных уравнений, конечнозонные решения которых строятся по гиперэллиптической поверхности [5], [6], [11]–[21]. Уравнениям, конечнозонные решения которых ассоциированы с негиперэллиптическими поверхностями, в первую очередь – это уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) [8] и Буссинеска [22], уделено гораздо меньше внимания несмотря на то, что эллиптические по x решения уравнения Буссинеска играют такую же большую роль при изучении уравнения Альфана и его аналогов [9], [22], [23], как и эллиптические решения уравнения Кор-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-01075).

тевега–де Фриза (КдФ) при исследовании оператора Шрёдингера с потенциалами Ламе и Требиха–Вердье.

В настоящей работе доказывается, что по почти любой римановой поверхности рода $g = 2$, накрывающей эллиптическую, могут быть построены двухзонные эллиптические (по любой переменной) решения уравнения Буссинеска.

Автор благодарит В. Б. Матвеева и В. З. Энольского за полезные обсуждения. Автор также благодарит А. Требиха (A. Treibich) и Ф. Гештези (F. Gesztesy) за отписки и препринты и Ю. В. Брежнева за макросы для Maple.

§ 1. Конечнзонные решения уравнения Буссинеска

Следуя И. М. Кричеверу [3], рассмотрим риманову поверхность Γ рода g с выделенной на ней точкой $\mathcal{P}_\infty$. Выберем на Γ канонический базис циклов $\gamma^t = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ с матрицей пересечения

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Ему соответствует нормированный базис голоморфных дифференциалов

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g.$$

Хорошо известно, что матрица периодов

$$B_{jk} = \oint_{b_j} d\mathcal{U}_k, \quad j, k = 1, \dots, g,$$

есть симметрическая матрица с положительно определенной мнимой частью.

По матрице периодов B построим g -мерную тэта-функцию с характеристиками $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^g$:

$$\Theta[\alpha; \beta](u | B) \equiv \Theta[\alpha; \beta](u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i \langle B(m + \alpha), m + \alpha \rangle + 2\pi i \langle m + \alpha, u + \beta \rangle\}, \quad (1.2)$$

$$\Theta[0; 0](u | B) \equiv \Theta(u | B) \equiv \Theta(u),$$

где $u \in \mathbb{C}^g$, суммирование ведется по целочисленной g -мерной решетке, а угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают евклидово скалярное произведение.

Определим на Γ нормированные абелевы интегралы второго рода $\Omega_j(\mathcal{P})$, $\mathcal{P} \in \Gamma$, с единственными полюсами в выделенной точке $\mathcal{P}_\infty$:

$$\Omega_j(\mathcal{P}) = \xi^{-j} + c_j \xi + O(\xi^2), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty, \quad (1.3)$$

$$\oint_{a_k} d\Omega_j = 0, \quad k = 1, \dots, g,$$

ξ — локальный параметр в окрестности точки $\mathcal{P}_\infty$.

Пусть функция $\Psi(\mathcal{P}, x, t_1, \dots, t_N)$ удовлетворяет следующим условиям (аксиомам Бейкера–Ахиезера):

- 1) $\Psi(\mathcal{P}, x, t_1, \dots, t_N)$ есть однозначная функция от точки $\mathcal{P}$ римановой поверхности Γ , мероморфная на Γ , за исключением точки $\mathcal{P}_\infty$, и имеющая g простых полюсов в точках $\mathcal{P}_j$, которые образуют дивизор общего положения;
- 2) $\Psi(\mathcal{P}, 0, 0, \dots, 0) = 1$;
- 3) в точке $\mathcal{P}_\infty$ функция $\Psi(\mathcal{P}, x, t_1, \dots, t_N)$ имеет существенную особенность вида

$$\Psi(\mathcal{P}, x, t_1, \dots, t_N) \sim \exp \left\{ \xi^{-1} x + \sum_{i=1}^N \xi^{-i-1} t_i \right\} \times \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x, t_1, \dots, t_N) \xi^m \right), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty.$$

Тогда она этими условиями определяется однозначно и может быть построена по формуле

$$\Psi(\mathcal{P}, x, t_1, \dots, t_N) = \exp \{ \Phi(x, t_1, \dots, t_N) \} \times \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty) + \varphi(x, t_1, \dots, t_N) + \Delta) \Theta(\Delta)}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty) + \Delta) \Theta(\varphi(x, t_1, \dots, t_N) + \Delta)}, \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x, t_1, \dots, t_N) &= \Omega_1(\mathcal{P})x + \sum_{i=1}^N \Omega_{i+1}(\mathcal{P})t_i, \\ \varphi(x, t_1, \dots, t_N) &= Ux + \sum_{i=1}^N V_i t_i, \\ \Delta &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty) - \mathcal{K} - \sum_{j=1}^g \mathcal{U}(\mathcal{P}_j), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$2\pi i U, 2\pi i V_i$ – векторы b -периодов абелевых интегралов $\Omega_1(\mathcal{P}), \Omega_{i+1}(\mathcal{P})$ соответственно; $\mathcal{K}$ – вектор римановых констант [2], [24]–[26].

ТЕОРЕМА 1 [3]. *Функция $\Psi(\mathcal{P}, x, t_1, \dots, t_N)$ является решением системы линейных дифференциальных уравнений:*

$$\partial_{t_j} \psi = \partial_x^{j+1} \psi - \sum_{m=1}^j u_{jm}(x, t_1, \dots, t_N) \partial_x^{j-m} \psi,$$

где $u_{jm}(x, t_1, \dots, t_N)$ – функции, зависящие от $x, t_1, \dots, t_N$ и не зависящие от $\mathcal{P}$.

В частности, если $N = 3$, то (при $y \equiv t_1, t \equiv t_2, z \equiv t_3$)

$$\partial_y \psi = \partial_x^2 \psi - u \psi, \quad (1.6a)$$

$$\partial_t \psi = \partial_x^3 \psi - \frac{3}{2} u \partial_x \psi - \left(\frac{3}{4} u_x + w \right) \psi, \quad (1.6b)$$

$$\partial_z \psi = \partial_x^4 \psi - 2u \partial_x^2 \psi - \left(2u_x + \frac{4}{3} w \right) \partial_x \psi - \left(\frac{5}{6} u_{xx} - \frac{1}{2} u^2 + \frac{2}{3} w_x + v \right) \psi, \quad (1.6c)$$

где

$$u(x, y, t, z) = -2\partial_x^2 \ln \Theta(Ux + V_1y + V_2t + V_3z + \Delta) + 2c_1, \quad (1.7a)$$

$$w(x, y, t, z) = -\frac{3}{2}\partial_x \partial_y \ln \Theta(Ux + V_1y + V_2t + V_3z + \Delta) + \frac{3}{2}c_2, \quad (1.7b)$$

$$v(x, y, t, z) = -\frac{4}{3}\partial_x \partial_t \ln \Theta(Ux + V_1y + V_2t + V_3z + \Delta) + \frac{4}{3}c_3. \quad (1.7c)$$

СЛЕДСТВИЕ 1 [3]. Условием совместности уравнений (1.6a) и (1.6b) является уравнение КП:

$$\begin{cases} u_y = \frac{4}{3}w_x, \\ u_t = w_y + \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uw_x. \end{cases} \quad (1.8)$$

Условиями совместности уравнений (1.6a), (1.6c) и (1.6b), (1.6c) являются “высшие” уравнения КП:

$$\begin{cases} u_y = \frac{4}{3}w_x, \\ w_y = \frac{3}{2}v_x + \frac{3}{2}uw_x - \frac{1}{4}u_{xxx}, \\ u_z = v_y + \frac{4}{9}w_{xxx} - \frac{4}{3}wu_x - \frac{4}{3}uw_x, \end{cases} \quad (1.9a)$$

$$\begin{cases} u_t = \frac{3}{2}v_x, \\ u_z = \frac{8}{9}w_t + \frac{4}{9}w_{xxx} - \frac{4}{3}wu_x - \frac{4}{3}uw_x, \\ w_z = v_t + \frac{1}{4}v_{xxx} - \frac{4}{3}ww_x + \frac{3}{2}u_x u_{xx} + \frac{3}{4}uu_{xxx} - \frac{3}{2}u^2 u_x - \frac{1}{12}u_{xxxxx}. \end{cases} \quad (1.9b)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 [3]. Пусть Γ – гиперэллиптическая поверхность, и пусть точка $\mathcal{P}_\infty$ является точкой ветвления этой поверхности. Тогда на Γ существует мероморфная функция $E(\mathcal{P})$ с единственным полюсом второго порядка в точке $\mathcal{P}_\infty$. Если мы теперь выберем в качестве локального параметра в ее окрестности величину $\xi = [E(\mathcal{P})]^{-1/2}$, то в этом случае решение уравнения КП (1.8) не будет зависеть от y :

$$\Omega_2(\mathcal{P}) = E(\mathcal{P}), \quad V_1 = 0.$$

Иначе говоря, функция

$$u_{\text{kdv}}(x, t, z) = -2\partial_x^2 \ln \Theta(Ux + V_2t + V_3z + \Delta) + 2c_1 \quad (1.7a')$$

при любом значении параметра z будет являться решением уравнения КдФ

$$4u_t - u_{xxx} + 6uu_x = 0, \quad (1.10)$$

а функции $\Psi(\mathcal{P}, x, y, t, z)$ и $\Psi_{\text{kdv}}(\mathcal{P}, x, t, z)$,

$$\Psi(\mathcal{P}, x, y, t, z) = e^{E(\mathcal{P})y} \Psi_{\text{kdv}}(\mathcal{P}, x, t, z), \quad (1.11)$$

при любых значениях y , t и z будут собственными функциями оператора Шрёдингера

$$\partial_x^2 \psi - u\psi = E\psi. \quad (1.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Края зон E_j оператора (1.12) с конечнозонным потенциалом (1.7a') являются точками ветвления канонического представления гиперэллиптической поверхности Γ :

$$\chi^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (E - E_j). \quad (1.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3 (см. [3], [22], [27]). Если же на поверхности Γ существует мероморфная функция $E(\mathcal{P})$ с единственным полюсом третьего порядка в точке $\mathcal{P}_\infty$, то, выбрав в качестве локального параметра в ее окрестности величину $\xi = [E(\mathcal{P})]^{-1/3}$, мы добьемся независимости решения уравнения КП от t :

$$\Omega_3(\mathcal{P}) = E(\mathcal{P}), \quad V_2 = 0.$$

При этом функция

$$u_{\text{bsq}}(x, y, z) = -2\partial_x^2 \ln \Theta(Ux + V_1y + V_3z + \Delta) + 2c_1 \quad (1.7'')$$

при любом значении параметра z будет являться решением уравнения Буссинеска

$$3u_{yy} + (u_{xxx} - 6uu_x)_x = 0, \quad (1.14)$$

а функции $\Psi(\mathcal{P}, x, y, t, z)$ и $\Psi_{\text{bsq}}(\mathcal{P}, x, y, z)$,

$$\Psi(\mathcal{P}, x, y, t, z) = e^{E(\mathcal{P})t} \Psi_{\text{bsq}}(\mathcal{P}, x, y, z), \quad (1.15)$$

при любых значениях y , t и z будут собственными функциями оператора третьего порядка

$$\partial_x^3 \psi - \frac{3}{2} u \partial_x \psi - \left(\frac{3}{4} u_x + w \right) \psi = E \psi. \quad (1.16)$$

Это возможно только в двух случаях:

- а) когда риманова поверхность Γ имеет род $g = 2$ и точка $\mathcal{P}_\infty$ не является точкой Вейерштрасса [28];
- б) когда поверхность Γ негиперэллиптическая, а точка $\mathcal{P}_\infty$ является точкой Вейерштрасса, допускающей существование вышеупомянутой мероморфной функции $E(\mathcal{P})$.

§ 2. Выбор локального параметра

Рассмотрим произвольную риманову поверхность Γ с выделенной точкой $\mathcal{P}_\infty$. Выберем в окрестности точки $\mathcal{P}_\infty$ какой-нибудь локальный параметр $\xi(\mathcal{P})$: $\xi(\mathcal{P}_\infty) = 0$, и построим функцию Бейкера–Ахиезера $\Psi(\mathcal{P}, x, y, t)$.

В общем случае в окрестности точки $\mathcal{P}_\infty$ нет выделенного локального параметра. Выбор любого другого локального параметра $\tilde{\xi}(\mathcal{P})$: $\tilde{\xi}(\mathcal{P}_\infty) = 0$, связанного с $\xi(\mathcal{P})$ асимптотическим равенством

$$\tilde{\xi} = \xi + a_1 \xi^2 + a_2 \xi^3 + a_3 \xi^4 + a_4 \xi^5 + O(\xi^6), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty, \quad (2.1)$$

ведет к следующим преобразованиям абелевых интегралов второго рода

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \Omega_1 - a_1, & \tilde{\Omega}_2 &= \Omega_2 - 2a_1\Omega_1 + 3a_1^2 - 2a_2, \\ \tilde{\Omega}_3 &= \Omega_3 - 3a_1\Omega_2 + (6a_1^2 - 3a_2)\Omega_1 - 10a_1^3 + 12a_1a_2 - 3a_3,\end{aligned}\quad (2.2a)$$

их b -периодов

$$\tilde{U} = U, \quad \tilde{V}_1 = V_1 - 2a_1U, \quad \tilde{V}_2 = V_2 - 3a_1V_1 + (6a_1^2 - 3a_2)U \quad (2.2b)$$

и коэффициентов в асимптотике (1.3)

$$\begin{aligned}\tilde{c}_1 &= c_1 - a_1^2 + a_2, & \tilde{c}_2 &= c_2 - 2a_1c_1 + 4a_1^3 - 6a_1a_2 + 2a_3, \\ \tilde{c}_3 &= c_3 - 3a_1c_2 + (6a_1^2 - 3a_2)c_1 - 15a_1^4 + 30a_1^2a_2 - 6a_2^2 - 12a_1a_3 + 3a_4.\end{aligned}\quad (2.2c)$$

Анализируя равенства (2.2), нетрудно получить формулы для “калибровочного” преобразования функции Бейкера–Ахиезера

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(\mathcal{P}, x, y, t) &= \Psi(\mathcal{P}, x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, y - 3a_1t, t) \\ &\times \exp\{-a_1x + (3a_1^2 - 2a_2)y - (10a_1^3 - 12a_1a_2 + 3a_3)t\}\end{aligned}\quad (2.3)$$

и потенциалов

$$\tilde{u}(x, y, t) = u(x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, y - 3a_1t, t) - 2a_1^2 + 2a_2, \quad (2.4a)$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}(x, y, t) &= w(x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, y - 3a_1t, t) \\ &\quad - \frac{3}{2}a_1u(x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, y - 3a_1t, t) \\ &\quad + 6a_1^3 - 9a_1a_2 + 3a_3,\end{aligned}\quad (2.4b)$$

по-прежнему удовлетворяющих уравнению КП (1.8).

Существует также еще одно преобразование локального параметра

$$\hat{\xi} = a_0\xi,$$

ведущее к тривиальному (масштабному) преобразованию конечнозонного решения уравнения КП:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, y, t) &= \frac{1}{a_0^2} u\left(\frac{x}{a_0}, \frac{y}{a_0^2}, \frac{t}{a_0^3}\right), \\ \hat{w}(x, y, t) &= \frac{1}{a_0^3} w\left(\frac{x}{a_0}, \frac{y}{a_0^2}, \frac{t}{a_0^3}\right),\end{aligned}$$

и поэтому не представляющее большого интереса.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Обычно при изучении конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений в роли данных для обратной задачи выступает “каноническая” форма спектральной поверхности Γ с “каноническим” локальным параметром ξ в окрестности “естественной” бесконечно удаленной точки $\mathcal{P}_\infty$.

Например, для уравнения КдФ

$$\Gamma: \chi^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (E - E_j),$$

$$\mathcal{P} = (\chi, E), \quad \mathcal{P}_\infty = (\infty, \infty), \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{E}};$$

а для уравнения Буссинеска

$$\Gamma: W^3 + P_n(E)W + Q_m(E) = 0, \quad \mathcal{P} = (W, E), \quad (2.5)$$

где $P_n(E)$, $Q_m(E)$ – многочлены от переменной E такие, что уравнение (2.5) определяет связную риманову поверхность с единственной бесконечно удаленной точкой:

$$\mathcal{P}_\infty = (\infty, \infty), \quad \xi = E^{-1/3}.$$

С этой (“спектральной”) точки зрения различным бирационально эквивалентным каноническим представлениям одной и той же спектральной поверхности Γ соответствуют различные конечнозонные решения интегрируемых нелинейных уравнений.

Однако иногда бывает удобно воспользоваться другой (“геометрической”) точкой зрения, когда в роли данных для обратной задачи выступают:

- а) риманова поверхность Γ в одном из своих бирационально эквивалентных представлений;
- б) выделенная точка $\mathcal{P}_\infty \in \Gamma$, не обязательно бесконечно удаленная в координатах текущего представления Γ ;
- в) локальный параметр ξ в окрестности выделенной точки $\mathcal{P}_\infty$.

В настоящей работе мы будем придерживаться именно этой точки зрения.

ЛЕММА 1. Пусть $u_{\text{kdv}}(x, t)$ есть решение уравнения КдФ (1.10). Тогда для того чтобы $\tilde{u}(x, t)$ также было решением уравнения КдФ, необходимо и достаточно, чтобы локальные параметры были связаны асимптотическим равенством ($a_1 = 0$):

$$\tilde{\xi} = \xi + a_2 \xi^3 + a_3 \xi^4 + a_4 \xi^5 + O(\xi^6), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty. \quad (2.1')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_{\text{kdv}}(x, t)$ есть решение уравнения КдФ, для которого $\xi = 1/\sqrt{E(\mathcal{P})}$. Тогда переход (2.1) к новому локальному параметру $\tilde{\xi}$ приводит к следующим изменениям абелевых интегралов

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 &= \Omega_1 - a_1, & \tilde{\Omega}_2 &= E - 2a_1\Omega_1 + 3a_1^2 - 2a_2, \\ \tilde{\Omega}_3 &= \Omega_3 - 3a_1E + (6a_1^2 - 3a_2)\Omega_1 - 10a_1^3 + 12a_1a_2 - 3a_3, \end{aligned} \quad (2.2a')$$

их b -периодов

$$\tilde{U} = U, \quad \tilde{V}_1 = -2a_1U, \quad \tilde{V}_2 = V_2 + (6a_1^2 - 3a_2)U, \quad (2.2b')$$

функции Бейкера–Ахиезера

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(\mathcal{P}, x, y, t) &= \Psi_{\text{kdv}}(\mathcal{P}, x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, t) \\ &\times \exp\{(y - 3a_1t)E - a_1x + (3a_1^2 - 2a_2)y - (10a_1^3 - 12a_1a_2 + 3a_3)t\} \quad (2.3')\end{aligned}$$

и потенциалов

$$\tilde{u}(x, y, t) = u_{\text{kdv}}(x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, t) - 2a_1^2 + 2a_2, \quad (2.4a')$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}(x, y, t) &= \frac{3}{2}c_2 - \frac{3}{2}a_1u_{\text{kdv}}(x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, t) \\ &+ 6a_1^3 - 9a_1a_2 + 3a_3. \quad (2.4b')\end{aligned}$$

Подставив равенства (2.3') и (2.4') в уравнения (1.6а) и (1.8) и выполнив элементарные преобразования, нетрудно получить, что при любых y и t функция $\tilde{\Psi}(\mathcal{P}, x, y, t)$ является собственной функцией оператора

$$\partial_x^2\psi + 2a_1\partial_x\psi - \tilde{u}\psi = \tilde{E}\psi, \quad (2.6)$$

где

$$\tilde{E} = E + a_1^2 - 2a_2,$$

а функция $\tilde{u}(x, y, t)$ при любом y является решением уравнения

$$4\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xxx} + 6\tilde{u}\tilde{u}_x = 12a_1^2\tilde{u}_x. \quad (1.10')$$

Легко видеть, что потенциал (2.4а') удовлетворяет уравнению КдФ (1.10) тогда и только тогда, когда

$$a_1 = 0,$$

$$\tilde{E}(\mathcal{P}) = E(\mathcal{P}) - 2a_2, \quad (2.7)$$

$$\tilde{u}(x, t) = u_{\text{kdv}}(x - 3a_2t, t) + 2a_2. \quad (2.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Со “спектральной” точки зрения бирациональному преобразованию (2.7) спектральной поверхности Γ (1.13) соответствует преобразование (2.8) конечнозонного решения уравнения КдФ.

СЛЕДСТВИЕ 2 [29]. Если какое-либо конечнозонное решение $u_{\text{kdv}}(x, t)$ уравнения КдФ (1.10) периодически по x , то и все остальные конечнозонные решения $\tilde{u}(x, t)$ (2.8) будут также периодическими по x и с тем же периодом. Если конечнозонное решение уравнения КдФ является периодической функцией по переменной t , то в общем случае ни одно из решений $\tilde{u}(x, t)$ уже не будет обладать этим свойством. Исключение составляют лишь периодические и по x , и по t решения

$$u(x + X, t) = u(x, t + T) = u(x, t),$$

для которых существует счетное множество также периодических и по x , и по t решений $\tilde{u}(x, t)$.

ЛЕММА 2. Пусть $u_{\text{bsq}}(x, y)$ есть решение уравнения Буссинеска (1.14), построенное по римановой поверхности рода $g \geq 2$. Тогда для того чтобы $\tilde{u}(x, y)$ также было решением уравнения Буссинеска, необходимо и достаточно, чтобы локальные параметры были связаны асимптотическим равенством ($a_1 = a_2 = 0$):

$$\tilde{\xi} = \xi + a_3 \xi^4 + a_4 \xi^5 + O(\xi^6), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty. \quad (2.1'')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_{\text{bsq}}(x, y)$ есть решение уравнения Буссинеска, для которого $\xi = \{E(\mathcal{P})\}^{-1/3}$. Тогда преобразование (2.1) локального параметра ξ приводит к следующим изменениям абелевых интегралов

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 &= \Omega_1 - a_1, & \tilde{\Omega}_2 &= \Omega_2 - 2a_1\Omega_1 + 3a_1^2 - 2a_2, \\ \tilde{\Omega}_3 &= E - 3a_1\Omega_2 + (6a_1^2 - 3a_2)\Omega_1 - 10a_1^3 + 12a_1a_2 - 3a_3, \end{aligned} \quad (2.2a'')$$

их b -периодов

$$\tilde{U} = U, \quad \tilde{V}_1 = V_1 - 2a_1U, \quad \tilde{V}_2 = -3a_1V_1 + (6a_1^2 - 3a_2)U, \quad (2.2b'')$$

функции Бейкера–Ахиезера

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathcal{P}, x, y, t) &= \Psi_{\text{bsq}}(\mathcal{P}, x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, y - 3a_1t) \\ &\times \exp\{tE - a_1x + (3a_1^2 - 2a_2)y - (10a_1^3 - 12a_1a_2 + 3a_3)t\} \end{aligned} \quad (2.3'')$$

и потенциалов

$$\tilde{u}(x, y, t) = u_{\text{bsq}}(x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, y - 3a_1t) - 2a_1^2 + 2a_2, \quad (2.4a'')$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, y, t) &= w_{\text{bsq}}(x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, y - 3a_1t) \\ &\quad - \frac{3}{2}a_1u_{\text{bsq}}(x - 2a_1y + (6a_1^2 - 3a_2)t, y - 3a_1t) \\ &\quad + 6a_1^3 - 9a_1a_2 + 3a_3, \end{aligned} \quad (2.4b'')$$

$$w_{\text{bsq}}(x, y) = -\frac{3}{2}\partial_x\partial_y \ln \Theta(Ux + V_1y + \Delta) + \frac{3}{2}c_2. \quad (1.7b'')$$

После несложных вычислений получаем, что при любых y и t функция $\tilde{\Psi}(\mathcal{P}, x, y, t)$ является собственной функцией оператора

$$\partial_x^3\psi + 3a_1\partial_x^2\psi - \frac{3}{2}(\tilde{u} - 2a_2)\partial_x\psi - \left(\frac{3}{4}\tilde{u}_x + \tilde{w} + 3a_1\tilde{u}\right)\psi = \tilde{E}\psi, \quad (2.9)$$

где

$$\tilde{E} = E - a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3,$$

а функция $\tilde{u}(x, y, t)$ при любом t удовлетворяет уравнению

$$3\tilde{u}_{yy} + \{\tilde{u}_{xxx} - 6\tilde{u}\tilde{u}_x + 12a_1\tilde{u}_y - 12(2a_1^2 - a_2)\tilde{u}_x\}_x = 0. \quad (1.14')$$

Очевидно, что потенциал (2.4a'') удовлетворяет уравнению Буссинеска (1.14) тогда и только тогда, когда

$$a_1 = a_2 = 0,$$

$$\tilde{E}(\mathcal{P}) = E(\mathcal{P}) - 3a_3, \quad (2.10)$$

$$\tilde{u}(x, y) = u_{\text{bsq}}(x, y), \quad \tilde{w}(x, y) = w_{\text{bsq}}(x, y) + 3a_3. \quad (2.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Со “спектральной” точки зрения бирациональному преобразованию (2.10) спектральной поверхности Γ (2.5) соответствует преобразование (2.11) конечнозонного решения уравнения Буссинеска.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если какое-либо конечнозонное решение $u_{\text{bsq}}(x, y)$ уравнения Буссинеска (1.14) периодически по x (или по y), то и все остальные конечнозонные решения $\tilde{u}(x, y)$ (2.11) будут также периодическими по x (или по y) и с тем же периодом.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из (2.11) вытекает, что решение уравнения Буссинеска $\tilde{u}(x, y)$ не зависит от выбора (2.1'') локального параметра в окрестности бесконечно удаленной точки.

§3. Редукция гэта-функций

Пусть риманова поверхность Γ_1 является n -листным накрытием над эллиптической поверхностью Γ_0 ($\mathfrak{s}: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$),

$$\Gamma_0 : \{\wp'(\alpha)\}^2 = 4\wp^3(\alpha) - g_2\wp(\alpha) - g_3 \equiv 4 \prod_{j=1}^3 (\wp(\alpha) - e_j). \quad (3.1)$$

Отображение $\mathfrak{s}$ порождает отображения гомологий и якобианов

$$\widehat{\mathfrak{s}}\gamma_1 = \begin{pmatrix} S & P \\ Q & R \end{pmatrix} \gamma_0, \quad \mathfrak{s}^* d\mathcal{U}^0 = \langle T, d\mathcal{U}^1 \rangle,$$

удовлетворяющие следующим условиям [5], [6], [30]:

$$\begin{aligned} T &= S + B_0 P, & \langle S, R \rangle - \langle Q, P \rangle &= n, \\ B_1 S - Q &= B_0 (R - B_1 P), \end{aligned}$$

где B_1, B_0 — матрицы периодов поверхностей Γ_1 и Γ_0 соответственно.

ТЕОРЕМА 2 [30]. Пусть на Γ_1 и Γ_0 существуют абелевы дифференциалы второго рода $d\Omega^1$ и $d\Omega^0$, нормированные в соответствующих базисах циклов, с векторами b -периодов $2\pi i U^1$ и $2\pi i U^0$, связанные соотношением

$$\mathfrak{s}^* d\Omega^0 \equiv d\Omega^1 + 2\pi i U^0 \langle P, d\mathcal{U}^1 \rangle \quad (3.2)$$

с точностью до дифференциала от мероморфной функции.

Тогда верны следующие равенства:

$$\Theta(U^1 z + \Delta | B_1) = \mu \exp\{a(U^0 z)^2 + bU^0 z\} \prod_{j=1}^n \Theta(U^0 z + Z_j | B_0), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Theta(U^1 z + \Delta | B_1) &= \exp\{a(U^0 z)^2 + bU^0 z\} \\ &\times \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \Theta[j/n; 0](nU^0 z + \delta | nB_0), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где n — число листов накрытия,

$$a = \pi i \langle P, R - B_1 P \rangle, \quad b = \pi i \langle P, 2\Delta - R \rangle, \quad \sum_{j=1}^n Z_j - \delta \in \mathbb{Z},$$

$$\delta = \langle S + B_0 P, \Delta \rangle + \frac{1}{2} \{ \langle S, Q \rangle - B_0 \langle P, R \rangle \},$$

μ, μ_j — некоторые постоянные.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если вектор U^1 пропорционален одному из векторов b -периодов — U или V_1 (1.5), то функции $u(x, y)$ (1.7a) и $w(x, y)$ (1.7b) будут эллиптическими функциями по переменной x или y .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Нетрудно показать, что для различных абелевых дифференциалов второго рода $d\Omega^0$ векторы b -периодов соответствующих абелевых дифференциалов $\mathfrak{s}^* d\Omega^0$ могут отличаться только числовым множителем.

§ 4. Двухзонные решения уравнения Буссинеска

Рассмотрим риманову поверхность $\Gamma = \{(\chi, \lambda)\}$ рода $g = 2$, задаваемую уравнением:

$$\chi^2 = \lambda^6 + \sum_{j=2}^6 \gamma_j \lambda^{6-j}. \quad (4.1)$$

На этой поверхности существуют две бесконечно удаленные точки $\mathcal{P}_\infty^\pm$:

$$\chi = \pm \left(\lambda^3 + \frac{1}{2} \gamma_2 \lambda + \frac{1}{2} \gamma_3 + O(\lambda^{-1}) \right), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm.$$

Легко видеть, что на Γ (4.1) существует мероморфная функция

$$E(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \left(\chi + \lambda^3 + \frac{1}{2} \gamma_2 \lambda + \frac{1}{4} \gamma_3 \right) \quad (4.2)$$

с единственным полюсом третьего порядка в точке $\mathcal{P}_\infty^+$. И, следовательно, выбрав локальный параметр ξ в окрестности этой точки так, чтобы

$$E(\mathcal{P}) = \frac{1}{\xi^3}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^+,$$

по любой поверхности Γ вида (4.1) можно построить двухзонное решение уравнения Буссинеска.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Поскольку по поверхности Γ (4.1) может быть построено конечное решение уравнения Буссинеска, то на Γ должна существовать функция $W(\mathcal{P})$ такая, что в переменных (W, E) уравнение поверхности Γ примет вид (2.5). В данном случае эта функция имеет единственный полюс четвертого порядка в точке $\mathcal{P}_\infty^+$ и равна

$$W(\mathcal{P}) = \lambda \left(E + \frac{1}{8} \gamma_3 \right) - \frac{1}{48} \gamma_2^2 + \frac{1}{12} \gamma_4. \quad (4.3)$$

При этом каноническое уравнение (2.5) римановой поверхности Γ имеет вид:

$$W^3 + (A_1 E^2 + A_2 E + A_3)W - (E^4 + B_1 E^2 + B_2 E + B_3) = 0, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\gamma_2, & A_2 &= \frac{1}{4}\gamma_5, \\ A_3 &= -\frac{1}{768}\gamma_2^4 - \frac{1}{128}\gamma_2\gamma_3^2 + \frac{1}{96}\gamma_2^2\gamma_4 - \frac{1}{48}\gamma_4^2 + \frac{1}{32}\gamma_3\gamma_5, \\ B_1 &= -\frac{1}{96}\gamma_2^3 - \frac{1}{32}\gamma_3^2 + \frac{1}{24}\gamma_2\gamma_4 - \frac{1}{4}\gamma_6, & B_2 &= -\frac{1}{192}\gamma_2^2\gamma_5 + \frac{1}{48}\gamma_4\gamma_5 - \frac{1}{16}\gamma_3\gamma_6, \\ B_3 &= \frac{1}{55296}\gamma_2^6 + \frac{1}{6144}\gamma_2^3\gamma_3^2 + \frac{1}{4096}\gamma_3^4 - \frac{1}{4608}\gamma_2^4\gamma_4 - \frac{1}{1536}\gamma_2\gamma_3^2\gamma_4 \\ &\quad + \frac{1}{1152}\gamma_2^2\gamma_4^2 - \frac{1}{864}\gamma_4^3 - \frac{1}{1536}\gamma_2^2\gamma_3\gamma_5 + \frac{1}{384}\gamma_3\gamma_4\gamma_5 - \frac{1}{256}\gamma_3^2\gamma_6. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Поскольку на Γ существует мероморфная функция $W(\mathcal{P})$ (4.3) с единственным полюсом четвертого порядка в точке $\mathcal{P}_\infty^+$, то нетрудно показать, что абелев интеграл второго рода $\Omega_4(\mathcal{P})$ (1.3) равен

$$\Omega_4(\mathcal{P}) = W(\mathcal{P}) + \varepsilon_1 \Omega_2(\mathcal{P}), \quad (4.5)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma_2}{6}. \quad (4.6)$$

Отсюда вытекает, что двухзонное решение уравнения Буссинеска, построенное по поверхности (4.1), удовлетворяет следующим “вышим” стационарным уравнениям КП:

$$\varepsilon_1 w_x = \frac{1}{3} w_{xxx} - w_x u - w u_x, \quad (4.7a)$$

$$\varepsilon_1 (6u u_x - u_{xxx}) = 6u_x u_{xx} + 3u u_{xxx} - 6u^2 u_x - \frac{1}{3} u_{xxxx} - \frac{16}{3} w w_x, \quad (4.7b)$$

а соответствующая ψ -функция является собственной функцией следующего оператора четвертого порядка:

$$\partial_x^4 \psi - (2u + \varepsilon_1) \partial_x^2 \psi - \left(2u_x + \frac{4}{3}w\right) \partial_x \psi - \left(\frac{5}{6}u_{xx} - \frac{1}{2}u^2 + \frac{2}{3}w_x - \varepsilon_1 u\right) \psi = W \psi. \quad (4.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Любую гиперэллиптическую поверхность рода 2

$$\Gamma : \chi^2 = \prod_{j=1}^6 (\lambda - \lambda_j) \quad (4.9)$$

с помощью сдвига переменной λ можно привести к виду (4.1). При этом бесконечно удаленная точка $\mathcal{P}_\infty^+$ сохранит свое местоположение.

Воспользуемся теперь “геометрической” точкой зрения и поместим “бесконечно удаленную” точку $\mathcal{P}_\infty$ в произвольную точку $\mathcal{P}_0 = (\chi_0, \lambda_0)$ римановой поверхности Γ (4.9). Если точка $\mathcal{P}_0$ не является точкой ветвления Γ ($\lambda_0 \neq \lambda_j$, $\chi_0 \neq 0$), то существуют мероморфные функции

$$E(\mathcal{P}) = \frac{\chi + \chi_0 + \chi_1(\lambda - \lambda_0) + \chi_2(\lambda - \lambda_0)^2 + \chi_3(\lambda - \lambda_0)^3}{2\chi_0(\lambda - \lambda_0)^3} + E_\infty^-, \quad (4.10)$$

$$W(\mathcal{P}) = \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_0} + \frac{\chi_1}{3\chi_0} \right) (E - E_\infty^-) + \frac{\chi_4}{6\chi_0} \quad (4.11)$$

такие, что в координатах (W, E) (4.10), (4.11) уравнение поверхности Γ (4.9) примет вид (4.4). Здесь

$$E_\infty^- = -\frac{\chi_1^3}{54\chi_0^3} + \frac{\chi_1\chi_2}{2\chi_0^2} - \frac{\chi_3}{4\chi_0},$$

а коэффициенты χ_j определяются из асимптотики функции $\chi(\mathcal{P})$ в окрестности точки $\mathcal{P}_0$:

$$\chi = \chi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(\lambda - \lambda_0)^j, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_0.$$

Естественно, и для такого выбора “бесконечно удаленной” точки двухзонное решение уравнения Буссинеска будет удовлетворять стационарным “высшим” уравнениям КП (4.7), но уже с другой постоянной

$$\varepsilon_1 = \frac{\chi_2}{3\chi_0} - \frac{\chi_1^2}{9\chi_0^2}. \quad (4.6')$$

Как уже было показано ранее (см. замечание 7), конечнозонное решение уравнения Буссинеска не зависит от выбора локального параметра в окрестности бесконечно удаленной точки. Для того чтобы найти зависимость двухзонного решения уравнения Буссинеска от положения выделенной точки $\mathcal{P}_\infty$, воспользуемся билинейными соотношениями Римана [2], [6], [25], [26], [31] и вычислим линейно независимые векторы b -периодов абелевых интегралов $\Omega_1(\mathcal{P})$ и $\Omega_2(\mathcal{P})$:

1) в случае $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_\infty^+$ (4.2), (4.3)

$$U = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} e_{22} \\ -e_{21} \end{pmatrix}, \quad V_1 = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -e_{12} \\ e_{11} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

где

$$D = e_{22}e_{11} - e_{12}e_{21}, \quad D \neq 0, \\ e_{ij} = \oint_{a_i} \frac{\lambda^{2-j} d\lambda}{\chi}, \quad i, j = 1, 2;$$

2) в случае $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_0$ (4.10), (4.11)

$$\tilde{U} = -\frac{1}{D\chi_0} \begin{pmatrix} \lambda_0 e_{22} - e_{12} \\ -\lambda_0 e_{21} + e_{11} \end{pmatrix}, \quad (4.13a)$$

$$\tilde{V}_1 = \frac{1}{3D\chi_0^2} \begin{pmatrix} (\chi_1\lambda_0 - 3\chi_0)e_{22} - \chi_1 e_{12} \\ -(\chi_1\lambda_0 - 3\chi_0)e_{21} + \chi_1 e_{11} \end{pmatrix}. \quad (4.13b)$$

Сравнивая (4.12) и (4.13), легко видеть, что b -периоды абелевых интегралов $\Omega_j(\mathcal{P})$ и $\tilde{\Omega}_j(\mathcal{P})$ связаны между собой следующими равенствами

$$\tilde{U} = -\frac{\lambda_0}{\chi_0}U - \frac{1}{\chi_0}V_1, \quad (4.14)$$

$$\tilde{V}_1 = \frac{\chi_1\lambda_0 - 3\chi_0}{3\chi_0^2}U + \frac{\chi_1}{3\chi_0^2}V_1. \quad (4.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В том случае, когда “бесконечно удаленная” точка совпадает с точкой ветвления $\mathcal{P}_j = (0, \lambda_j)$, b -период абелева интеграла $\tilde{\Omega}_1(\mathcal{P})$ равен:

$$\tilde{U} = -\frac{2\lambda_j}{\tilde{\chi}_0}U - \frac{2}{\tilde{\chi}_0}V_1, \quad (4.16)$$

где $\tilde{\chi}_0$ есть первый коэффициент в асимптотическом разложении функции $\chi(\mathcal{P})$ вблизи точки ветвления $\mathcal{P}_j$ ($\lambda - \lambda_j = \xi^2$):

$$\chi(\mathcal{P}) = \tilde{\chi}_0\xi + O(\xi^3), \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_j. \quad (4.17)$$

ТЕОРЕМА 3. По почти любой римановой поверхности Γ рода $g = 2$, покрывающей эллиптическую, можно построить эллиптическое по x двухзонное решение уравнения Буссинеска (1.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ покрывает тор Γ_0 (3.1). Возьмем на Γ_0 произвольный абелев дифференциал второго рода $d\Omega^0$ и построим по нему на Γ дифференциал $d\Omega^1$:

$$d\Omega^1 = \mathfrak{s}^*d\Omega^0 - 2\pi i U^0 \langle P, d\mathcal{U}^1 \rangle. \quad (3.2')$$

Разложим вектор b -периодов $U^1 \in \mathbb{C}^2$ абелева интеграла $\Omega^1(\mathcal{P})$ по линейно независимым векторам U и V_1 (4.12):

$$U^1 = \alpha U + \beta V_1. \quad (4.18)$$

В зависимости от коэффициентов α и β возможны три случая.

- 1) $\beta = 0$. Вектор U^1 пропорционален вектору U , следовательно, решение уравнения Буссинеска является эллиптической функцией по переменной x при $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_\infty^+$ (см. следствие 3.1).
- 2) $\beta \neq 0$, $\alpha/\beta \neq \lambda_j$. Вектор U^1 пропорционален вектору $\tilde{U}$ при $\lambda_0 = \alpha/\beta$. Решение уравнения Буссинеска является эллиптической функцией по переменной x при $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_0$.
- 3) $\beta \neq 0$, $\alpha/\beta = \lambda_j$. Вектор U^1 пропорционален вектору $\tilde{U}$ при $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_j$. По поверхности Γ можно построить эллиптическое по x решение уравнения КдФ (1.10).

Таким образом, по почти любой римановой поверхности Γ рода $g = 2$, покрывающей эллиптическую, можно построить эллиптическое по x двухзонное решение уравнения Буссинеска. Исключениями могут быть только накрытия, ассоциированные с эллиптическими по x решениями уравнения КдФ.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Утверждение, аналогичное теореме 3, можно доказать и для двухзонных эллиптических по y решений уравнения Буссинеска. Однако в этом случае в зависимости от коэффициентов α и β возможны следующие варианты.

- 1) $\alpha = 0$. Вектор U^1 пропорционален вектору V_1 . Решение уравнения Буссинеска является эллиптической функцией по переменной y при $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_\infty^+$ и при $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_0^m$. Здесь $\mathcal{P}_0^m = (\chi_0^m, \lambda_0^m)$, $\lambda_0^m \neq 0$ – корень уравнения

$$\lambda \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\prod_{j=1}^6 (\lambda - \lambda_j) \right) = 6 \prod_{j=1}^6 (\lambda - \lambda_j). \quad (4.19)$$

- 2) $\beta = 0$. Вектор U^1 пропорционален вектору $\tilde{V}_1$ при $\lambda = \lambda_0^m$, где λ_0^m – корень уравнения

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\prod_{j=1}^6 (\lambda - \lambda_j) \right) = 0. \quad (4.20)$$

Решение уравнения Буссинеска является эллиптической функцией по переменной y при $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_0^m$.

- 3) $\beta \neq 0$. Вектор U^1 пропорционален вектору $\tilde{V}_1$ при $\lambda = \lambda_0^m$, где $\lambda_0^m \neq \lambda_j$ есть корень уравнения

$$\left(\lambda - \frac{\alpha}{\beta} \right) \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\prod_{j=1}^6 (\lambda - \lambda_j) \right) = 6 \prod_{j=1}^6 (\lambda - \lambda_j). \quad (4.21)$$

Решение уравнения Буссинеска является эллиптической функцией по переменной y при $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_0^m$.

ЛЕММА 3 [5], [6]. Если один из голоморфных абелевых дифференциалов гиперэллиптической поверхности Γ рода 2 редуцируется до эллиптического, то редуцируется также и другой, линейно независимый с первым. Оба накрытия имеют одинаковое число листов n .

СЛЕДСТВИЕ 5. По почти любой римановой поверхности Γ рода $g = 2$, накрывающей эллиптическую, можно построить два эллиптических по x двухзонных решения уравнения Буссинеска.

СЛЕДСТВИЕ 6. По любой римановой поверхности Γ рода $g = 2$, накрывающей эллиптическую, можно построить от восьми до двенадцати эллиптических по y двухзонных решений уравнения Буссинеска.

ЛЕММА 4 [5], [6]. Для любого n и для почти любой пары эллиптических поверхностей существует n -листная риманова поверхность рода 2, накрывающая данные эллиптические поверхности.

СЛЕДСТВИЕ 7. Для любого n и для почти любой $\wp$ -функции Вейерштрасса существует оператор третьего порядка (1.16) с “двухзонным” n -эллиптическим потенциалом:

$$u(x, y) = 2 \sum_{j=1}^n \wp(x - x_j(y)) + \text{const}, \quad (4.22)$$

$$w(x, y) = -\frac{3}{2} \sum_{j=1}^n p_j(y) \wp(x - x_j(y)) + \text{const}_1. \quad (4.23)$$

СЛЕДСТВИЕ 8. Для любого n и для почти любой $\wp$ -функции Вейерштрасса существует оператор четвертого порядка (4.8) с “двухзонным” n -эллиптическим потенциалом (4.22), (4.23).

§ 5. Двухполюсный “двухзонный” эллиптический потенциал

Проиллюстрируем следствия 7 и 8 на примере двухполюсного потенциала. Для этого воспользуемся методом анзаца Кричевера–Эрмита [5], [6], [8], [9] и будем искать решение уравнения (1.16) с потенциалом

$$u(x, 0) = 2\wp(x) + 2\wp(x - \delta) - 2c, \quad (5.1a)$$

$$w(x, 0) = \frac{3}{2}b\wp(x) + \frac{3}{2}b_1\wp(x - \delta) \quad (5.1b)$$

в виде

$$\psi(x, E(k, \alpha)) = (\Phi(x, \alpha) + a\Phi(x - \delta, \alpha))e^{kx}. \quad (5.2)$$

Здесь k, α – дополнительные спектральные параметры,

$$\Phi(x, \alpha) = \frac{\sigma(\alpha - x)}{\sigma(\alpha)\sigma(x)} e^{\zeta(\alpha)x},$$

σ, ζ – функции Вейерштрасса, a, b, b_1, c – некоторые постоянные.

Подставляя асимптотики функций (5.1), (5.2) в окрестности полюсов $x = 0$ и $x = \delta$ в уравнение (1.16) и приравнявая к нулю коэффициенты при отрицательных степенях x и $(x - \delta)$, получаем уравнения, решая которые находим:

а) уравнение спектральной кривой Γ в переменных (k, α) ,

$$\Gamma: k^2 - \wp(\alpha) + c = 0; \quad (5.3)$$

б) выражение для спектрального параметра $E(\mathcal{P})$,

$$E(\mathcal{P}) = 4k\wp(\alpha) - 2\wp'(\alpha) + 2ck; \quad (5.4)$$

в) ограничения на постоянные a, b_1, c ,

$$a = \frac{b - 2k}{2\Phi(-\delta, \alpha)}, \quad (5.5a)$$

$$b_1 = -b, \quad c = \wp(\delta) - \frac{b^2}{4}. \quad (5.5b)$$

Поскольку кривая Γ (5.3) при $c \neq e_j$ ($j = 1, 2, 3$) имеет род $g = 2$, то ψ -функция (5.2), (5.5a) является также собственной функцией оператора (4.8) с потенциалами (5.1), (5.5b). Поэтому, подставляя асимптотики функций (5.1), (5.2) в (4.8), легко найти значение постоянной ε_1 ,

$$\varepsilon_1 = 2c,$$

и выражение для спектрального параметра $W(\mathcal{P})$,

$$W(\mathcal{P}) = -4k\wp'(\alpha) + 8\wp^2(\alpha) - 4c\wp(\alpha) - \frac{1}{3}g_2^2 - 3c^2. \quad (5.6)$$

Исключая из уравнений (5.6), (5.4) с помощью равенств (3.1), (5.3) дополнительные спектральные параметры k и α , получаем каноническое уравнение спектральной кривой, ассоциированной с двухзонным эллиптическим решением уравнения Буссинеска с начальными данными (5.1), (5.5b):

$$W^3 + \left(6cE^2 - 3c^4 + 2g_2c^2 - \frac{1}{3}g_2^2\right)W - E^4 + (10c^3 - 2g_2c - 4g_3)E^2 + 2c^6 - 2g_2c^4 + \frac{2}{3}g_2^2c^2 - \frac{2}{27}g_2^3 = 0. \quad (4.4')$$

Анализируя равенства (4.2), (4.3) и (5.4), (5.6), нетрудно заметить, что можно ввести новые переменные

$$\lambda = 2k, \quad \chi = -4\wp'(\alpha),$$

в которых уравнение спектральной кривой Γ (5.3) примет канонический вид гиперэллиптической кривой

$$\chi^2 = \lambda^6 + 12c\lambda^4 + 4(12c^2 - g_2)\lambda^2 + 16(4c^3 - g_2c - g_3). \quad (4.1')$$

Эта кривая имеет род $g = 2$ при условии отсутствия кратных корней, т.е. при $c \neq e_j$ ($j = 1, 2, 3$).

§ 6. Заключительные замечания

В общем случае для любого n существует по крайней мере одно однопараметрическое семейство римановых поверхностей рода $g = 2$, накрывающих эллиптическую поверхность. Параметром является отношение b -периодов нормированных голоморфных дифференциалов пары накрываемых эллиптических поверхностей.

При некоторых значениях параметра накрывающая поверхность вырождается до эллиптической. В этих случаях по данной поверхности невозможно построить ни одного двухзонного эллиптического по x решения уравнения Буссинеска.

Для любого $n > 2$ существует конечное множество значений параметра, при которых по накрывающей поверхности может быть построено одно двухзонное эллиптическое по x решение уравнения КдФ и одно двухзонное эллиптическое по x решение уравнения Буссинеска.

Если с накрытием ассоциировано двухзонное эллиптическое по x решение уравнения КдФ, то существует конечное множество значений инвариантов накрываемой эллиптической поверхности (с точностью до соотношений однородности), при

которых по данному накрытию может быть построено два двухзонных эллиптических по x решения уравнения КдФ и ни одного двухзонного эллиптического по x решения уравнения Буссинеска. Например, по хорошо известной гиперэллиптической поверхности, ассоциированной с двухзонным потенциалом Ламе:

$$\chi^2 = (E^2 - 3g_2)(E + 3e_1)(E + 3e_2)(E + 3e_3),$$

невозможно построить двухзонное эллиптическое по x решение уравнения Буссинеска при $g_3 = 0$ (лемнискатный и псевдолемнискатный случаи).

Во всех остальных случаях по накрытию может быть построено два двухзонных эллиптических по x решения уравнения Буссинеска.

Список литературы

1. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 55–136.
2. Matveev V. B. Abelian functions and solitons // Preprint № 373, Univ. of Wrocław, 1976.
3. Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН. 1977. Т. 32. № 6. С. 183–208.
4. Захаров В. Е., Манакон С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
5. Белоколов Е. Д., Бобенко А. И., Матвеев В. Б., Энольский В. З. Алгебро-геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений // УМН. 1986. Т. 41. № 2. С. 3–42.
6. Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. Algebro-geometrical approach to nonlinear evolution equations. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
7. Airault H., McKean H. P., Moser J. Rational and elliptic solutions of the KdV equation // Comm. Pure Appl. Math. 1977. V. 30. P. 95–148.
8. Кричевер И. М. Эллиптические решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили и интегрируемые системы частиц // Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 4. С. 45–54.
9. Eilbeck J. C., Enol'skii V. Z. Elliptic Baker-Akhiezer functions and application to an integrable dynamical system // J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 3. P. 1192–1201.
10. Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
11. Treibich A., Verdier J.-L. Solitons elliptiques // Progr. Math. 1990. V. 88. P. 437–480.
12. Смирнов А. О. Эллиптические решения уравнения Кортевега-де Фриза // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 6. С. 66–73.
13. Белоколов Е. Д., Энольский В. З. Эллиптические солитоны Вердье и теория редукции Вейерштрасса // Функц. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. № 1. С. 57–58.
14. Belokolos E. D., Enol'skii V. Z. Reduction of theta function and elliptic finite-gap potentials // Acta Appl. Math. 1994. V. 36. № 1–2. P. 87–117.
15. Smirnov A. O. Finite-gap elliptic solutions of the KdV equation // Acta Appl. Math. 1994. V. 36. P. 125–166.
16. Смирнов А. О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 8. С. 103–114.
17. Смирнов А. О. Двухзонные эллиптические решения интегрируемых нелинейных уравнений // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 1. С. 86–97.
18. Смирнов А. О. Вещественные эллиптические решения уравнений, связанных с уравнением sine-Gordon // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 3. С. 196–211.
19. Gesztesy F., Weikard R. Treibich-Verdier potentials and the stationary (m) KDV hierarchy // Math. Z. 1995. V. 219. № 3. P. 451–476.
20. Gesztesy F., Weikard R. A characterization of all elliptic solutions of the AKNS hierarchy // Preprint, 1997.

21. *Gesztesy F., Holden H.* A local sine-Gordon hierarchy and its algebro-geometric solutions // Preprint, 1997.
22. *Смирнов А. О.* Об одном классе эллиптических решений уравнения Буссинеска // ТМФ. 1996. Т. 109. № 3. С. 347–356.
23. *Brezhnev Yu. V.* Darboux transformation and some multi-phase solutions of the Dodd–Bullough–Tzitzeica equation: $U_{xt} = e^U - e^{-2U}$ // Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 94–100.
24. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26. № 1. С. 113–179.
25. *Igusa J.* Theta functions. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. V. 194. Berlin: Springer-Verlag, 1972.
26. *Fay J. D.* Theta-functions on Riemann surfaces // Lect. Notes in Math. 1973. V. 352.
27. *Матвеев В. Б., Смирнов А. О.* О простейших тригональных решениях уравнений Буссинеска и Кадомцева–Петвиашвили // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 78–82.
28. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1960.
29. *Смирнов А. О.* Эллиптические по t решения уравнения КдФ // ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 183–198.
30. *Смирнов А. О.* Эллиптические решения интегрируемых нелинейных уравнений // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 5. С. 100–102.
31. *Курант А., Гурвиц Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения
E-mail: smirnov@as.stoic.spb.su

Поступила в редакцию
20.04.1998