Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Пример резонансного рассеяния для одномерного волнового уравнения, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 6, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:35:46

УДК 517.95

А. А. Арсеньев

Пример резонансного рассеяния для одномерного волнового уравнения

Приведен пример одномерного волнового уравнения, для которого задача рассеяния эквивалентна квантовомеханической задаче рассеяния на ловушечном потенциале.

Библиография: 9 названий.

1. Работа посвящена задаче рассеяния для одномерного волнового уравнения

$$\partial_{tt}^2 u = \partial_x (c^2(x) \partial_x u), \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < t < \infty. \quad (1)$$

Мы будем предполагать, что коэффициент $c(x)$ в (1) удовлетворяет условиям

$$(*) \quad 0 < c(x) \leq 1; \quad c(-x) = c(x); \quad c(x) \equiv 1 \quad \text{при} \quad |x| > r; \quad c(x) \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Уравнение (1) описывает распространение волны в неоднородной среде, причем неоднородность сосредоточена в ограниченной области. Если коэффициент $c(x)$ в (1) резко изменяется в окрестностях точек A и B (позже это понятие будет формализовано), то за счет отражения волн от точек A и B между указанными точками могут установиться стоячие волны. По аналогии с квантовой механикой можно ожидать, что возникновение стоячих волн приведет к резко выраженному резонансному характеру отражения волны от препятствия и прохождения волны через него. В нашей работе мы приведем пример, когда задача рассеяния для волнового уравнения (1) с резко меняющимся коэффициентом $c(x)$ может быть сведена к квантовомеханической задаче рассеяния на “ловушечном” потенциале и рассеяние для уравнения (1) действительно имеет резонансный характер. Основной результат изложен в теореме 1.

2. Напомним постановку задачи рассеяния для волнового уравнения. Обычно [1], [2] волновое уравнение сводится к системе уравнений первого порядка по времени во вспомогательном гильбертовом пространстве. Это можно сделать многими способами. Мы выберем следующий. Положим

$$z(y) = \operatorname{sign}(y) \int_0^{|y|} c^{-1}(x) dx, \quad -\infty < y < \infty. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 96-01-00084, 97-01-00787).

Пусть $z \mapsto y(z)$ – функция, обратная к (2). Рассмотрим унитарное отображение

$$U: L^2(\mathbb{R}, dy) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dz), \quad (Uf)(z) = f(y(z))(y'(z))^{1/2}. \quad (3)$$

На функции, носитель которых расположен в области $|y| > r$, отображение U действует как сдвиг аргумента. Преобразование (3) фактически является подстановкой Лиувилля, в спектральной теории оно использовалось К. О. Фридрихсом (см. обсуждение в [3; гл. 13, § 7, 8]). С вероятностной точки зрения для соответствующего уравнения диффузии преобразование (3) есть вариант случайной замены времени.

Простая выкладка (см. [3; гл. 13, § 7]) показывает, что

$$H \equiv U(-\partial_x c^2(x)\partial_x)U^{-1} = -\partial_z^2 + q, \quad (4)$$

где q – оператор умножения на функцию

$$q(z) = Q(y(z)), \quad Q(y) = \frac{1}{4}(c'(y))^2 + \frac{1}{2}c''(y)c(y). \quad (5)$$

В дальнейшем символом H мы будем обозначать самосопряженное расширение в $L^2(\mathbb{R}, dz)$ оператора (4). Ясно, что оператор H неотрицателен.

При отображении (3) уравнение (1) переходит в уравнение

$$\partial_{tt}^2 u = -Hu,$$

которое подстановкой $v = \partial_t u \oplus H^{1/2}u$ преобразуется в уравнение первого порядка по времени

$$i\partial_t v = Lv \quad (6)$$

в гильбертовом пространстве

$$h = L^2(\mathbb{R}, dz) \oplus L^2(\mathbb{R}, dz). \quad (7)$$

В уравнении (6) оператор имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -iH^{1/2} \\ iH^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

При записи операторов в матричном виде предполагается фиксированным представление (7).

Оператор L может быть диагонализирован не зависящей от H матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad FLF^{-1} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -H \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В дальнейшем величины, отвечающие по приведенным выше построениям функции $c(x) \equiv 1$, мы будем помечать индексом 0. Определим волновые операторы

$$W_{\pm}(L, L_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itL} e^{-itL_0}$$

и матрицу рассеяния

$$S(L, L_0) = W_+^*(L, L_0)W_-(L, L_0).$$

Из (8) следует, что

$$FS(L, L_0)F^{-1} = \begin{pmatrix} S(H, H_0) & 0 \\ 0 & S^*(H, H_0) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $S(H, H_0)$ – матрица рассеяния для операторов H, H_0 . Она, естественно, есть оператор в $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Напомним, как действует оператор $S(H, H_0)$. Пусть

$$\hat{f}(k) = \int e^{-ikx} f(x) dx$$

– преобразование Фурье функции $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$. Преобразование

$$U: L^2(\mathbb{R}, dx) \rightarrow L^2([0, \infty) \rightarrow C^2, d\lambda),$$

$$(Uf)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \lambda^{-1/4} \{ \hat{f}(\sqrt{\lambda}) \oplus \hat{f}(-\sqrt{\lambda}) \},$$

является унитарным отображением, которое диагонализует оператор H_0 . В пространстве $L^2([0, \infty) \rightarrow C^2, d\lambda)$ оператор $S(H, H_0)$ есть оператор умножения на унитарную матрицу

$$S(H, H_0)(\lambda) = \begin{pmatrix} T(\lambda) & R^-(\lambda) \\ R^+(\lambda) & T(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $T(\lambda), R^\pm(\lambda)$ – коэффициенты прохождения и отражения (в квантовомеханической интерпретации). Они удовлетворяют равенствам

$$|R^+(\lambda)| = |R^-(\lambda)|, \quad |T(\lambda)|^2 + |R^\pm(\lambda)|^2 = 1.$$

Формулы (9), (10) сводят задачу вычисления матрицы рассеяния для волнового уравнения к вычислению коэффициентов $T(\lambda), R^\pm(\lambda)$.

3. Формализуем понятие “резкого изменения” коэффициента $c(x)$. Рассмотрим последовательность функций $c_n(x)$, каждая из которых удовлетворяет условиям (*) (с фиксированным r) и таких, что при некотором $l > 0$ выполнены следующие условия:

(**) при всех $\delta > 0$ на множестве $\{x : ||x| - l| \geq \delta\}$ равномерно по x :

$$c_n(x) \rightarrow c_\infty(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad c_\infty(x) \geq C(\delta) > 0$$

(сходимость вместе с производными);

(***) существует такое $\delta_0 > 0$, что на множестве $\{x : ||x| - l| < \delta_0\}$ справедливо представление

$$c_n(x) = a((|x| - l)^2 + n^{-2})^{\alpha/2} (1 + \varphi_n(x)), \quad a > 0, \quad \frac{2}{3} < \alpha < 1,$$

$$\varphi_n(x) \rightarrow +0, \quad n \rightarrow \infty \quad (11)$$

(сходимость вместе с производными).

Из (11) следует, что на множестве $\{x : ||x| - l| < \delta_0\}$

$$c_\infty(x) = a||x| - l|^\alpha, \quad \frac{2}{3} < \alpha < 1, \quad (12)$$

В точках $x = \mp l$ функция $c_\infty(x)$ обращается в нуль, а ее график имеет вертикальную касательную, и в этом смысле функция $c_\infty(x)$ резко меняется в окрестностях точек $x = \mp l$. О функции $c_n(x)$ с достаточно большим номером n мы также будем говорить, что она резко меняется в окрестностях точек $x = \mp l$.

В дальнейшем все величины, соответствующие по приведенным выше построениям функции $c_n(x)$, мы будем помечать индексом n .

4. Изучим поведение введенных в (5) функций $q(z)$, $Q(y)$ для потенциала V_n при $n \rightarrow \infty$. Очевидна

ЛЕММА 1. При всех $\delta > 0$ равномерно по y на множестве $\{y : ||y| - l| \geq \delta\}$

$$Q_n(y) \rightarrow Q_\infty(y), \quad n \rightarrow \infty,$$

где функция $Q_\infty(y)$ бесконечно дифференцируема вне точек $y = \mp l$. На множестве $\{y : ||y| - l| \leq \delta_0\}$ справедливо представление

$$\begin{aligned} Q_n(y) &= a^2 \frac{\alpha}{2} (||y| - l|^2 + n^{-2})^{\alpha-2} \\ &\times \left(\left(\frac{3}{2}\alpha - 1 \right) (||y| - l|^2 (1 + o_+(1)) + n^{-2} (1 + o_+(1))) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где $o_+(1) \rightarrow +0$, $n \rightarrow \infty$, равномерно по y .

Из интегрального представления (2) следует

ЛЕММА 2. В области $\{z : ||z| - z_\infty(l)| \geq \delta\}$

$$y_n(z) \rightarrow y_\infty(z), \quad n \rightarrow \infty,$$

где функция $y_\infty(z)$ бесконечно дифференцируема при $z \neq \mp z_\infty(l)$, а сходимость равномерна по z вместе с производными. На множестве $\{z : |z - z_\infty(l)| < \delta, z > 0\}$ при достаточно малых δ справедливо представление

$$y_n(z) = l + \text{sign}(z - z_n(l)) (a(1 - \alpha)|z - z_n(l)| + o_+(1))^{1/(1-\alpha)}, \quad (14)$$

где $o_+(1) \rightarrow +0$, $n \rightarrow \infty$, равномерно по z .

Комбинируя леммы 1 и 2, мы получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3. При всех $\delta > 0$ на множестве $\{z : ||z| - z_\infty(l)| \geq \delta\}$ равномерно по z

$$q_n(z) \rightarrow q_\infty(z), \quad n \rightarrow \infty$$

(сходимость вместе с производными). На множестве $\{z : ||z| - z_\infty(l)| < \delta\}$ при достаточно малых δ справедливо представление

$$q_n(z) = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{3}{2}\alpha - 1 \right) (1 - \alpha)^{-2} (||z| - z_\infty(l)|^{2/(1-\alpha)} + o_+(1))^{\alpha-1}, \quad (15)$$

где $o_+(1) \rightarrow +0$, $n \rightarrow \infty$, равномерно по z . Функция $q_\infty(z)$ бесконечно дифференцируема при $z \neq \mp z_\infty(l)$. На множестве $\{z : ||z| - z_\infty(l)| < \delta\}$ при достаточно малых δ справедливо представление

$$q_\infty(z) = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{3}{2}\alpha - 1 \right) (1 - \alpha)^{-2} (||z| - z_\infty(l)|^{-2}. \quad (16)$$

Существует такая константа $M < \infty$, что при всех n и z выполнено неравенство

$$q_n(z) > -M. \quad (17)$$

Неравенство (17) есть тривиальное следствие остальных утверждений леммы, но для нас оно будет очень важно. Интересно отметить, что коэффициент в (15) не зависит от параметра a , а показатель степени не зависит от α .

5. Пусть $G_n(\zeta, \eta, t)$ – интегральное ядро оператора

$$G_n(t) = e^{-tH_n}.$$

Функция $G_n(\zeta, \eta, t)$ есть функция Грина задачи

$$\partial_t G_n(\zeta, \eta, t) = \partial_{\zeta\zeta}^2 G_n(\zeta, \eta, t) - q_n(\zeta) G_n(\zeta, \eta, t), \quad G_n(\zeta, \eta, +0) = \delta(\zeta - \eta).$$

ЛЕММА 4. 1) Справедлива оценка

$$0 < G_n(\zeta, \eta, t) \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp \left(Mt - \frac{(\zeta - \eta)^2}{4t} \right); \quad (18)$$

2) при любом $t > 0$ поточечно в $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\zeta, \eta, t) = G_\infty(\zeta, \eta, t); \quad (19)$$

3) при любых фиксированных $t > 0$ и $\delta > 0$ на множестве

$$\{\zeta, \eta : \min(|\zeta| - z_\infty(l), |\eta| - z_\infty(l)) > \delta\}$$

сходимость в (19) равномерна;

4) при любом фиксированном $t > 0$ существуют такие константы b_1, b_2 , что

$$|G_n(\zeta, \eta, t) - G_0(\zeta, \eta, t)| < b_1 \exp(-b_2(\zeta^2 + \eta^2)). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение есть следствие принципа максимума и неравенства (17). Для доказательства второго утверждения воспользуемся представлением функции Грина через математическое ожидание от функционала броуновской траектории $\tau \rightarrow x(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$. Справедливо равенство

$$G_n(\zeta, \eta, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(\zeta - \eta)^2}{4t}\right) \times \mathbb{E} \left\{ \exp\left(-t \int_0^1 q_n(2\sqrt{t}(x(\tau) - \tau x(1)) + \zeta + (\eta - \zeta)\tau) d\tau\right) \right\}. \quad (21)$$

Если траектория

$$\tau \rightarrow \beta(\zeta, \eta, \tau) = 2\sqrt{t}(x(\tau) - \tau x(1)) + \zeta + (\eta - \zeta)\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

не задевает точек $\mp l$, т.е. $\inf_{\tau} |\beta(\zeta, \eta, \tau) - l| > 0$, то, очевидно, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 q_n(\beta(\zeta, \eta, \tau)) d\tau = \int_0^1 q_{\infty}(\beta(\zeta, \eta, \tau)) d\tau.$$

Если существует такое $\tau^* \in [0, 1]$, что $|\beta(\zeta, \eta, \tau^*)| = l$, то с вероятностью единица существуют такие константы $C < \infty$, $\varepsilon > 0$, что

$$|\beta(\zeta, \eta, \tau) - l| < C(|\tau^* - \tau| |\ln |\tau^* - \tau||)^{1/2}, \quad |\tau^* - \tau| < \varepsilon.$$

На основе оценок (15) и (17) отсюда получим, что

$$\int_0^1 q_n(\beta(\zeta, \eta, \tau)) d\tau \geq -M + \text{const} \int_0^{\varepsilon} ((\tau |\ln \tau|)^{1/(1-\alpha)} + o_+(1))^{\alpha-1} d\tau \rightarrow +\infty, \\ n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, с вероятностью единица существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-t \int_0^1 q_n(\beta(\zeta, \eta, \tau)) d\tau\right).$$

Оценка (17) позволяет применить к правой части (21) теорему Лебега и утверждать существование предела. Остальные утверждения леммы – стандартные следствия первых двух и представления функции Грина через тепловые потенциалы двойного слоя.

Из леммы 4 вытекает

ЛЕММА 5. Полугруппа самосопряженных в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ операторов $G_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ сильно сходится к полугруппе самосопряженных операторов $G_\infty(t)$, определяемых как операторы с интегральным ядром (19). Полугруппа $G_\infty(t)$ есть полугруппа класса C_0 с инфинитезимальным оператором

$$-H_\infty = \partial_t G_\infty(t)|_{t=0},$$

который самосопряжен и на гладких функциях с носителем, не пересекающим точек $z = \mp l$, задается формулой

$$H_\infty \varphi = -\partial_{zz}^2 \varphi + q_\infty \varphi. \quad (22)$$

Заметим, что оператор (22), вообще говоря, может иметь много самосопряженных расширений, но мы рассматриваем то, которое есть инфинитезимальный оператор предельной полугруппы $G_\infty(t)$. Оценки леммы 4 позволяют нам применить результаты работ [6], [7]. Положим

$$b_m = \inf_z q_\infty(z), \quad ||z| - z_\infty(l)| \leq 2^{-m}.$$

Из (16) следует, что

$$4^{-m} b_m \geq \text{const} > 0,$$

поэтому на основе теоремы 3 работы [7] мы можем утверждать, что каждое из пространств

$$L^2((-\infty, -z_\infty(l)], dz), \quad L^2([-z_\infty(l), z_\infty(l)], dz), \quad L^2([z_\infty(l), \infty), dz)$$

приводит полугруппу $G_\infty(t)$, а область определения оператора H_∞ есть прямая сумма областей определения инфинитезимальных операторов сужения полугруппы $G_\infty(t)$ на эти пространства. В $L^2([-z_\infty(l), z_\infty(l)], dz)$ полугруппа $G_\infty(t)$ состоит из вполне непрерывных операторов, поэтому спектр сужения оператора H_∞ на $L^2([-z_\infty(l), z_\infty(l)], dz)$ дискретен. Обозначим его через $\{\lambda_j\}$. Так как H_∞ положителен, то $\lambda_j > 0$. В силу следствия из [7] все собственные значения λ_j простые. На основе лемм 3.2, 5.1 и теоремы 5.2 из [6] мы можем утверждать, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. Если выполнены условия $(*)-(***)$, то для каждого λ_j существуют такие $n_j < \infty$, $\varepsilon_j > 0$, что при $n > n_j$ в круге $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon_j$ матрица рассеяния $S(H_n, H_0)(\lambda)$ имеет полюс $\lambda_{j,n}$, $\text{Im } \lambda_{j,n} < 0$, $\lambda_{j,n} \rightarrow \lambda_j$, $n \rightarrow \infty$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda) = 0, \quad \lambda \neq \lambda_j, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(\text{Re } \lambda_{j,n})| = 1. \quad (23)$$

Из (23) следует, что при достаточно большом n коэффициент прохождения $T_n(\lambda)$ имеет резкий скачок в окрестности точки λ_j : его модуль почти равен единице в резонансе и нулю – вне резонанса. Заметим, что при этом коэффициент $c_\infty(x)$ в достаточной степени произволен вне окрестностей точек $x = \mp l$.

Естественно возникает интерпретация соотношений (23) как утверждения о том, что волновые пакеты с резонансными частотами проходят через препятствия без изменения амплитуды, а волновые пакеты со всеми другими частотами отражаются. Однако отметим, что локализованный в пространстве волновой пакет должен иметь разброс частот, а “физическая” интерпретация матрицы рассеяния для волнового уравнения отличается от ее интерпретации для уравнения Шрёдингера. Поэтому приведенное выше толкование соотношений (23) нуждается в дополнительном асимптотическом анализе и проверке численным экспериментом.

6. Сделаем несколько заключительных замечаний. Часто рассматривается волновое уравнение в форме

$$\partial_{tt}^2 u = c^2(x) \partial_{xx}^2 u. \quad (24)$$

Если применить изложенную выше схему к уравнению (24), то оказывается, что возникающий при этом потенциал $q_n(z)$ не ограничен снизу, и это сильно усложняет задачу. Мы ограничимся замечанием, что уравнение (24) подстановкой $\partial_x u \mapsto u$ сводится к (1).

От четности функции $c(x)$ можно, конечно, отказаться. Но тогда второе из соотношений (23) заменяется более сложным утверждением теоремы 5.1 из [6].

Сходимость операторов H_n может быть доказана методом форм Дирихле [8], а сходимость полугрупп $G_n(t)$ можно вывести из теоремы единственности Ямада–Ватанабе [9]. Так можно получить сходимость матриц рассеяния. Но точки λ_j не есть полюсы матрицы рассеяния $S(H_\infty, H_0)(\lambda)$, и из сходимости матриц рассеяния $S(H_n, H_0)(\lambda)$ не следует существование у них резонансных полюсов. Для доказательства последнего утверждения решающим фактом является равномерная по n оценка функции $G_n(\zeta, \eta, t)$. Конечно, остается открытым вопрос о том, при каких достаточно общих условиях на $c(x)$ оператор $-\partial_x(c^2(x)\partial_x)$ (или $-c^2(x)\partial_{xx}^2$ в $L^2(\mathbb{R}, c^{-2}(x) dx)$) является “ловущечным”.

ПРИМЕЧАНИЕ. В работе [7] в двух формулах по моей вине допущены ошибки. Формулу (17) нужно читать так:

$$\sum 4^{-n} q_n(x_0) = \infty,$$

а последнюю в доказательстве леммы 5 формулу нужно читать так:

$$v_n(2^{-n-1}\delta) = \frac{\text{ch}(2^{-n-1}\delta q_n^{1/2})}{\text{ch}(2^{-n}\delta q_n^{1/2})} v_{n-1}(2^{-n}\delta).$$

Я приношу свои извинения читателям и редакции журнала.

Список литературы

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
2. Яфаев Д. Р. Математическая теория рассеяния. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1994.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2. М.: Мир, 1996.
4. Додд Р., Эйбек Дж., Гиббон Дж., Морис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
5. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985.
6. Арсеньев А. А. Резонансные свойства матрицы рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера с ловущечным потенциалом // Матем. сб. 1996. Т. 187. №6. С. 3–20.
7. Арсеньев А. А. Оценка решения задачи рассеяния на одномерном ловущечном потенциале // Матем. сб. 1977. Т. 188. №12. С. 3–10.
8. Albeverio Sergio, Kusuoka Shigeo, Streit Ludwig. Convergence of Dirichlet forms and associated Schrödinger operators // J. Fund. Anal. 1986. V. 68. №2. P. 130–142.
9. Ватанабе С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.