Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Буяров, Е. А. Рахманов, О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 6, 11–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:42:19

УДК 517.53

В. С. Буяров, Е. А. Рахманов

О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси

Изучаются равновесная мера во внешнем поле на вещественной оси и величины, связанные с этим понятием в зависимости от массы равновесной меры.

Библиография: 7 названий.

1. При решении ряда задач конструктивного анализа фундаментальную роль играют семейства мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси. Это понятие ввел Е. А. Рахманов в работе [1] для изучения слабой (логарифмической) асимптотики многочленов, ортогональных на вещественной оси. Вопросы, связанные с предельным поведением экстремальных (в том или ином смысле) полиномов, важны как в самом анализе, так и в приложениях; поэтому большой интерес представляют общие методы исследования асимптотики таких полиномов. Основным результатом [1] является конструкция последовательности многочленов, асимптотически близких к ортогональным, для широкого класса весовых функций, и ключевую роль в этой конструкции играет семейство мер, равновесных во внешнем поле, зависящем от веса.

В общих чертах эта конструкция заключается в следующем: весовой функции h ставится в соответствие семейство равновесных мер $\mu_t = \mu_t(f)$, $\mu_t(\mathbb{R}) = t$, $t \in \mathbb{R}_+$, соответствующих внешнему полю $f = -\ln \sqrt{h}$. Для каждого натурального n строится n -точечное множество на вещественной оси, равномерно распределенное на $\mathbb{R}$ относительно меры $\mu_n(f)$; ему соответствует полином степени n с нулями на этом множестве. Для достаточно широкого класса весовых функций удастся показать (см. [1], [2]), что так построенные многочлены асимптотически близки к ортогональным.

Оказалось, что эта конструкция имеет достаточно общий характер и может быть использована для исследования широкого круга экстремальных задач. Более того, выяснилось, что на этом пути можно получать более сильные результаты, чем формулы логарифмической асимптотики и распределения нулей экстремальных полиномов. Так, Е. А. Рахманов [3], [4] и независимо Э. Сафф и Д. Любински [5] на основе этой конструкции получили формулы сильной асимптотики (формулы типа Планшереля–Ротаха) для многочленов, ортогональных относительно весов Фройда.

Работа первого автора выполнена при поддержке фонда INTAS (грант № 93-219-ext) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 96-01-00659, 96-15-96185).

Работа второго автора выполнена при поддержке NSF Grant DMS 950-1130.

В настоящей работе приводятся некоторые новые результаты о семействах равновесных мер, представляющие интерес как сами по себе, так и с точки зрения приложений.

В дальнейшем мера σ — это положительная борелевская мера на вещественной оси с компактным носителем S_σ , $V_\sigma(z)$ — ее логарифмический потенциал:

$$V_\sigma(z) = - \int \ln |x - z| d\sigma(x), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что все используемые ниже понятия и факты теории потенциала содержатся, например, в монографии [6].

Потенциал меры V_σ — супергармоническая (в частности, полунепрерывная снизу) функция в $\mathbb{C}$, гармоническая вне носителя меры. В каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ потенциал V_σ непрерывен в тонкой топологии: существует множество E_0 , разреженное в точке z_0 и такое, что

$$V_\sigma(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \notin E_0} V_\sigma(z).$$

Отметим вытекающие отсюда свойства потенциалов мер на вещественной оси. Функция $V_\sigma(x)$, $x \in \mathbb{R}$, полунепрерывна снизу на вещественной оси. Разреженное в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ множество $E_0 \subset \mathbb{R}$ имеет нулевую плотность в этой точке, поэтому функция $V_\sigma(x)$ аппроксимативно непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Из непрерывности $V_\sigma(x)$ в $x_0 \in S_\sigma$ следует непрерывность $V_\sigma(z)$ в точке x_0 .

В качестве внешних полей в задаче о равновесном распределении положительного заряда (меры) на $\mathbb{R}$ наиболее естественным, на наш взгляд, является класс $\mathcal{F}$ функций $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$, определяемый следующими условиями:

- а) f полунепрерывна снизу и тонко аппроксимативно непрерывна на вещественной оси: для любой окрестности U точки x_0 и любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{и} \quad \text{cap}\{x \in U : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\} > 0;$$

б) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln |x|} = +\infty.$

Условие а) получено существенным ослаблением отмеченных выше свойств непрерывности потенциалов мер. Очевидно, функции вида $V_\sigma + f$ ($f \in \mathcal{F}$) также принадлежат классу $\mathcal{F}$.

Многие важные для приложений функции (например, кусочно-непрерывные функции при наличии разрывов) принадлежат классу $\mathcal{F}$, но не являются (локально) потенциалами мер. Отметим также, что слабо аппроксимативно непрерывные внешние поля, рассматривавшиеся А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым в [7], принадлежат классу $\mathcal{F}$.

Множество всех мер σ на $\mathbb{R}$ с компактным носителем мы будем обозначать M ; через M_t обозначаются меры из M , нормированные условием $\sigma(\mathbb{R}) = t$. Сходимость последовательности мер всегда будет означать слабую сходимость: $\sigma_n \rightarrow \sigma$, если $\int \varphi d\sigma_n \rightarrow \int \varphi d\sigma$ для любой непрерывной финитной функции φ .

В приложениях фундаментальную роль играют два функционала на пространстве M_t . Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}$ через $J(\sigma) = J_f(\sigma)$ мы будем обозначать энергию меры σ во внешнем поле f :

$$J(\sigma) = I(\sigma) + 2 \int f d\sigma,$$

где $I(\sigma)$ – обычная энергия меры σ :

$$I(\sigma) = \int V_\sigma d\sigma.$$

Очевидно, $-\infty < J(\sigma) \leq +\infty$, и условие а) гарантирует, что множество мер $\sigma \in M_t$ с конечной энергией $J(\sigma)$ не пусто; меры σ с конечной энергией являются s -абсолютно непрерывными, т.е. для любого борелевского множества E емкости ноль $\sigma(E) = 0$.

Каждой мере $\sigma \in M_t$ поставим в соответствие число $w(\sigma) = w(\sigma; f)$ и компакт $S^\sigma = S^\sigma(f)$:

$$w(\sigma) = \min_{x \in \mathbb{R}} (V_\sigma + f)(x) \quad \text{и} \quad S^\sigma = \{x \in \mathbb{R} : (V_\sigma + f)(x) = w(\sigma)\}.$$

Всюду в дальнейшем f – фиксированная функция из $\mathcal{F}$, и мы будем опускать зависимость от f всюду, где это не может привести к недоразумению. Следующая теорема играет центральную роль в приложениях теории потенциала.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ существует единственная мера $\lambda = \lambda_t = \lambda_t(f) \in M_t$, потенциал которой удовлетворяет условию равновесия*

$$(V_\lambda + f)(x) = w(\lambda), \quad x \in S_\lambda. \quad (1.1)$$

Мера λ является единственным решением следующих экстремальных задач:

$$J(\lambda) = \inf_{\sigma \in M_t} J(\sigma), \quad (1.2)$$

$$w(\lambda) = \sup_{\sigma \in M_t} w(\sigma). \quad (1.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из условия равновесия (1.1) следует, что потенциал V_λ непрерывен на S_λ и, тем самым, непрерывен в $\mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие равновесия может быть представлено в следующей эквивалентной форме:

$$S_\lambda \subseteq S^\lambda. \quad (1.4)$$

Подчеркнем, что соотношение (1.4) эквивалентно условию равновесия (1.1): мера λ является единственной мерой из M_t , удовлетворяющей условию (1.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Классическое робеновское распределение $\gamma = \gamma_e$ для компакта $e \Subset \mathbb{R}$ можно получить в рамках этой конструкции при $t = 1$ и $f_e = \chi_e^{-1} - 1$, где χ_e – характеристическая функция компакта e (при условии, что f_e тонко аппроксимативно непрерывна). Для потенциала робеновского распределения γ имеет место представление

$$V_\gamma(z) = -\ln \text{cap}(e) - g_e(z), \quad (1.5)$$

где $g_e(z)$ – функция Грина дополнительной области $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus e$ с полюсом в бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Очевидно, что для внешних полей f и $f + c$, где c – константа, имеем $\lambda_t(f) = \lambda_t(f + c)$, поэтому всюду в дальнейшем будем предполагать, что минимум функции f на $\mathbb{R}$ равен нулю.

Однопараметрическое семейство мер $\lambda_t(f)$, $t \in \mathbb{R}_+$, называется семейством равновесных мер, соответствующих внешнему полю f . В данной работе исследуется зависимость семейств λ_t , S_{λ_t} и S^{λ_t} , а также экстремальной константы $w(\lambda_t)$ от параметра $t \in \mathbb{R}_+$. Основным результатом статьи в этом направлении является следующая

ТЕОРЕМА 2. *Существует не более чем счетное множество $N \subset \mathbb{R}_+$ такое, что*

- 1) *для всех $t \in \mathbb{R}_+ \setminus N$ имеем $\text{cap}(S^{\lambda_t} \setminus S_{\lambda_t}) = 0$; семейство S_{λ_t} монотонно возрастает и непрерывно слева: для всех $t \in \mathbb{R}_+$*

$$S_{\lambda_t} = \bigcup_{\tau < t} \overline{S_{\lambda_\tau}}; \quad (1.6)$$

для всех $t \in \mathbb{R}_+$ предел справа равен S^{λ_t} , т.е.

$$S^{\lambda_t} = \bigcap_{\tau > t} S_{\lambda_\tau}; \quad (1.7)$$

- 2) *экстремальная константа $w(\lambda_t)$ – выпуклая вверх на $\mathbb{R}_+$ функция, дифференцируемая на $\mathbb{R}_+ \setminus N$; для левой и правой производных справедливы формулы*

$$\partial_t w(\lambda_{t-0}) = -\ln \text{cap}(S_{\lambda_t}) \quad \text{и} \quad \partial_t w(\lambda_{t+0}) = -\ln \text{cap}(S^{\lambda_t}); \quad (1.8)$$

- 3) *семейство равновесных мер λ_t монотонно возрастает, непрерывно в слабой топологии на M и дифференцируемо по t слева и справа на $\mathbb{R}_+$; для соответствующих производных имеют место формулы*

$$\partial_t \lambda_{t-0} = \gamma_t \quad \text{и} \quad \partial_t \lambda_{t+0} = \gamma^t, \quad (1.9)$$

где γ_t и γ^t – робеновские распределения компактов S_{λ_t} и S^{λ_t} соответственно;

- 4) *для равновесной меры λ_t и экстремальной константы $w(\lambda_t)$ справедливы представления*

$$\lambda_t = \int_0^t \gamma_\tau d\tau \quad \text{и} \quad w(\lambda_t) = - \int_0^t \ln \text{cap}(S_{\lambda_\tau}) d\tau; \quad (1.10)$$

- 5) *для $x \in \bigcup_{t>0} S_{\lambda_t}$ внешнее поле f имеет представление*

$$f(x) = \int_0^\infty g_\tau(x) d\tau, \quad (1.11)$$

где $g_\tau(x)$ – функция Грина области $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_t}$ с полюсом в бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Экстремальная константа $w(\lambda_t)$ имеет предел при $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(\lambda_t) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0. \quad (1.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Потенциал равновесной меры $V_{\lambda_t}(z)$ дифференцируем по t на $\mathbb{R}_+ \setminus N$; в каждой точке $\mathbb{R}_+$ существуют правая и левая производные, для которых имеют место формулы

$$\partial_t V_{\lambda_{t-0}}(z) = -\ln \text{cap}(S_{\lambda_t}) - g_t(z) \quad \text{и} \quad \partial_t V_{\lambda_{t+0}}(z) = -\ln \text{cap}(S^{\lambda_t}) - g^t(z), \quad (1.13)$$

где $g^t(z)$ — функция Грина области $\overline{\mathbb{C}} \setminus S^{\lambda_t}$ с полюсом в бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Представления (1.10) и (1.11) останутся справедливыми, если вместо γ_τ , $\text{cap}(S_{\lambda_\tau})$ и g_τ подставить γ^τ , $\text{cap}(S^{\lambda_\tau})$ и g^τ соответственно.

Доказательство теоремы 2 мы разобьем на несколько этапов. Часть из перечисленных выше утверждений будут сформулированы в виде лемм и доказаны в п. 2. Здесь же будут доказаны леммы, представляющие и самостоятельный интерес. В п. 3 будет завершено доказательство теоремы 2.

Теорема 1 хорошо известна (см., например, [7]). Обычно ее формулируют и доказывают для непрерывных (или аппроксимативно непрерывных, как в [7]) классов внешних полей. Так как для доказательства в нашем случае не требуется привлекать принципиально новые соображения, то мы не приводим доказательство этой теоремы.

2. В этом пункте изучается зависимость λ_t , S_{λ_t} и $w(\lambda_t)$ от параметра $t \in \mathbb{R}_+$. Прежде всего мы упростим наши обозначения, а именно, всюду в дальнейшем для понятий, связанных с равновесной мерой λ_t , будут использоваться следующие обозначения:

$$V_t = V_{\lambda_t}, \quad S_t = S_{\lambda_t}, \quad S^t = S^{\lambda_t} \quad \text{и} \quad w(t) = w(\lambda_t).$$

Напомним, что через γ_t и γ^t мы обозначаем робеновские распределения компактов S_t и S^t соответственно, а через g_t и g^t — функции Грина областей $\Omega_t = \overline{\mathbb{C}} \setminus S_t$ и $\Omega^t = \overline{\mathbb{C}} \setminus S^t$ с полюсом в бесконечности.

Прежде всего мы рассмотрим еще один важный функционал, характеризующий экстремальные свойства носителя равновесной меры. Для произвольного компакта $e \in \mathbb{R}$ положительной емкости через $\omega(e) = \omega(e; t) = \omega_f(e; t)$ обозначим следующий функционал:

$$\omega(e) = -t \ln \text{cap}(e) + \int f d\gamma, \quad \gamma = \gamma_e.$$

Очевидно, $-\infty < \omega(e) \leq +\infty$, причем $\omega(e) = +\infty$, если f не интегрируема по мере γ_e ; через e' будет обозначаться носитель робеновского распределения компакта e : $e' = S_{\gamma_e}$. Ясно, что $e' \subseteq e$ и $\omega(e') = \omega(e)$.

ЛЕММА 1. Для любого компакта e на вещественной оси

$$w(t) \leq \omega(e), \quad (2.1)$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$S_t \subseteq e' \subseteq S^t. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\omega(e) = +\infty$, то доказываемое утверждение очевидно; поэтому можно считать, что $\omega(e) < +\infty$. Из условия равновесия (1.1) следует неравенство

$$w(t) \leq \int (V_t + f) d\gamma_e.$$

Правая часть полученного неравенства может быть представлена следующим образом:

$$\int (V_t + f) d\gamma_e = \int V_{\gamma_e} d\lambda_t + \int f d\gamma_e.$$

Но согласно (1.5) $V_{\gamma_e}(x) = -\ln \text{cap}(e) - g_e(x)$ и, следовательно,

$$w(t) \leq \int (V_t + f) d\gamma_e = \omega(e) - \int g_e d\lambda_t \leq \omega(e). \quad (2.3)$$

Тем самым неравенство (2.1) доказано. Предположим, что в (2.1) имеет место знак равенства; тогда из (2.3) следует, что

$$\int g_e d\lambda_t = \int_{e'} g_e d\lambda_t + \int_{\mathbb{R} \setminus e'} g_e d\lambda_t = 0.$$

Так как мера λ_t c -абсолютно непрерывна, то первый из интегралов в последнем равенстве равен нулю, и так как $g_e(x) > 0$ вне e' , то $\lambda_t(\mathbb{R} \setminus e') = 0$. Отсюда следует, что $\lambda_t(e') = t$ и, значит, $S_t \subseteq e'$. С другой стороны, из (2.3) следует, что $\gamma_e(S^t) = 1$, что эквивалентно включению $e' \subseteq S^t$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы нетрудно получить следующую оценку:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} w(t) \leq 0. \quad (2.4)$$

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ компакт $e_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \varepsilon\}$ (напомним, мы предполагаем, что минимум f равен нулю) имеет положительную емкость, поэтому

$$w(t) \leq \omega(e_\varepsilon) \leq -t \ln \text{cap}(e_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Из полученного неравенства следует (2.4).

В следующей лемме носитель равновесной меры характеризуется с другой точки зрения, а именно мы покажем, что для любой меры σ , отличной от равновесной, минимум $V_\sigma + f$ может достигаться только на носителе равновесной меры. Напротив, для самой равновесной меры множество S^t содержит носитель λ_t (см. (1.4)), причем, как можно видеть на простых примерах, может быть существенно шире, чем S_t . Следствием этого является определенная неустойчивость носителя равновесной меры (разрывность S_t как функции от t).

ЛЕММА 2. Для любой меры $\sigma \in M_t$, $\sigma \neq \lambda_t$, имеет место соотношение

$$S^\sigma \subseteq S_t. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной меры σ рассмотрим функцию

$$G(z) = (V_\sigma(z) - w(\sigma)) - (V_t(z) - w(t)).$$

Очевидно, G – супергармоническая функция в области $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus S_\lambda$ и для всех $x \in S_\lambda$

$$\lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega} G(z) \geq (V_\sigma + f)(x) - w(\sigma) \geq 0.$$

Из принципа минимума для супергармонических функций следует, что $G(z) > 0$, если $\sigma \neq \lambda$. С другой стороны, для $x \in S^\sigma$ имеем

$$G(x) = -(V_t(x) + f(x) - w(t)) \leq 0.$$

Отсюда следует, что S^σ не пересекается с Ω_t и, значит, $S^\sigma \subseteq S_t$. Лемма доказана.

В следующей лемме функции $F_z(t) = V_t(z) - w(t)$ и $w(t)$ характеризуются как функции от $t \in \mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 3. Для всех $z \in \mathbb{C}$ функция $F_z(t)$ вогнутая, а экстремальная константа $w(t)$ – выпуклая на $\mathbb{R}_+$ функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные t_1, t_2 , $0 < t_1 < t_2$, и положим $t = (t_1 + t_2)/2$. Рассмотрим функцию

$$G(z) = F_z(t_1) + F_z(t_2) - 2F_z(t)$$

как функцию от $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Очевидно, функция G непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}$ и супергармонична в области $\Omega_t = \overline{\mathbb{C}} \setminus S_t$. Для $x \in S_t$ имеем

$$G(x) = (V_{t_1}(x) + f(x) - w(t_1)) + (V_{t_2}(x) + f(x) - w(t_2)) \geq 0.$$

Из принципа минимума следует, что

$$F_z(t_1) + F_z(t_2) - 2F_z(t) \geq 0 \quad \text{для } z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Полагая в этом неравенстве $z = \infty$, получим

$$2w(t) \geq w(t_1) + w(t_2),$$

что и доказывает лемму.

Из свойств вогнутых и выпуклых функций следует, что $F_z(t)$ и $w(t)$ – непрерывные функции, дифференцируемые всюду за исключением не более чем счетного множества точек $t \in \mathbb{R}_+$, в которых $F_z(t)$ и $w(t)$ имеют правую и левую производные, причем левая производная непрерывна слева, а правая – справа.

ЛЕММА 4. Для любых $t, \delta \in \mathbb{R}_+$ имеют место соотношения

$$S_t \subseteq S^t \subseteq S_{t+\delta}. \quad (2.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Из приводимого ниже доказательства леммы 4 будет следовать, что семейство равновесных мер λ_t монотонно возрастает

$$\lambda_{t+\delta} - \lambda_t \in M_\delta,$$

и, значит, семейство λ_t непрерывно в слабой топологии на M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $S_0 = S_0(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ и докажем, что для всех $t > 0$

$$S_0 \subseteq S_t. \quad (2.7)$$

Пусть $\sigma = t\gamma_e$, где $e = e_\rho = [-\rho, \rho]$; прежде всего докажем, что существует такое ρ , что

$$S_0 = S^\sigma.$$

Для этого оценим потенциал меры σ на $\mathbb{R}$:

$$V_\sigma(x) = -t \left(\ln \frac{\rho}{2} + g_e(x) \right).$$

Из свойств функции Грина следует оценка при $\rho \geq 2$

$$g_e(x) < \ln |x| \quad \text{для } |x| > 1,$$

и, следовательно, при $|x| \geq \rho$ имеет место оценка

$$V_\sigma(x) > -2t \ln |x|.$$

Выберем теперь $\rho \geq 2$ так, чтобы $f(x) > 2t \ln |x|$ при $|x| \geq \rho$ и $S_0 \subset e_\rho$ (в силу свойств функции f это всегда можно сделать). Теперь для $|x| \geq \rho$ имеем

$$(V_\sigma + f)(x) > 0.$$

С другой стороны, для $x \in e_\rho$ имеет место равенство

$$(V_\sigma + f)(x) = -t \ln \frac{\rho}{2} + f(x)$$

и, следовательно, $w(\sigma) = -t \ln(\rho/2) < 0$ и $S_0 = S^\sigma$.

Из леммы 2 следует, что $S^\sigma \subseteq S_t$, и, значит, $S_0 \subseteq S_t$. Кроме того, так как $w(t) > w(\sigma)$, то

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(t) \geq \lim_{t \rightarrow 0} w(\sigma) = 0. \quad (2.8)$$

Положим $f_t(x) = (V_{\lambda_t} + f)(x) - w(t)$; очевидно, $f_t \in \mathcal{F}$, $f_t(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}$ и $f_t(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in S^t$. Следовательно,

$$S_0(f_t) = S^t. \quad (2.9)$$

Пусть μ — равновесная мера на $\mathbb{R}$ массы δ во внешнем поле f_t , т.е. $\mu = \lambda_\delta(f_t)$:

$$(V_\mu + f_t)(x) = w(\mu; f_t), \quad x \in S_\mu. \quad (2.10)$$

Из (2.7) и (2.9) следует, что

$$S_t \subseteq S_0(f_t) \subseteq S_\mu. \quad (2.11)$$

Пусть $\nu = \lambda_t + \mu$; тогда $\nu \in M_{t+\delta}(\mathbb{R})$ и $S_\nu = S_\mu$; с учетом определения f_t условие равновесия (2.10) может быть переписано следующим образом:

$$(V_\nu + f)(x) = w(\nu; f), \quad x \in S_\nu.$$

Отсюда следует, что ν – равновесная мера на $\mathbb{R}$ во внешнем поле f и массы $t + \delta$, т.е. $\nu = \lambda_{t+\delta}(f)$. Таким образом, (2.6) вытекает из (2.9) и (2.11). Кроме того, имеем

$$\lambda_{t+\delta} - \lambda_t = \mu \in M_\delta.$$

Лемма доказана.

Отметим, что из (2.4) и (2.8) следует утверждение, сформулированное в замечании 5.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из леммы 4 следует, что S_t – монотонно возрастающее семейство. Таким образом, возрастающая функция $\text{cap}(S_t)$ имеет не более чем счетное множество точек разрыва N . Фиксируем произвольные $t \in \mathbb{R}_+$ и $\Lambda = \Lambda_t$ – возрастающую последовательность положительных чисел, стремящихся к t ; пусть $e = \bigcup_{\tau \in \Lambda} S_\tau$. Через $\bar{e}$ обозначим замыкание множества e ; очевидно, $\bar{e} \subseteq S_t$. Так как e – множество типа F_σ , то (см. [6; лемма 2.10])

$$\lim_{\tau \in \Lambda} \text{cap}(S_\tau) = \text{cap}(e) \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \in \Lambda} \gamma_\tau = \gamma_e,$$

где γ_e – робеновское распределение множества e . Пусть $e' = S_{\gamma_e}$ – носитель робеновского распределения множества e ; очевидно, $e' \subseteq \bar{e}$, $\gamma_{e'} = \gamma_e$ и $\text{cap}(e') = \text{cap}(e)$. В силу непрерывности $w(\tau)$ на $\mathbb{R}_+$ имеем

$$\lim_{\tau \in \Lambda} w(\tau) = \lim_{\tau \in \Lambda} \omega_f(S_\tau; \tau) = -t \ln \text{cap}(e') + \int f d\gamma_{e'} = w(t).$$

Из леммы 1 следует, что $S_t \subseteq e'$; таким образом, для любой возрастающей последовательности Λ_t

$$\bar{e} = S_t.$$

Тем самым (1.6) доказано. Приведенные рассуждения доказывают также, что

$$\text{cap}(S_{t-0}) = \text{cap}(S_t).$$

Пусть теперь $e = \bigcap_{\tau > t} S_\tau$; очевидно, $S^t \subseteq e$. Из непрерывности емкости сверху следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow t, \tau > t} \text{cap}(S_\tau) = \text{cap}(e).$$

Из непрерывности экстремальной константы и принципа понижения следует, что для каждого $x \in e$ при $\tau \rightarrow t, \tau > t$

$$(V_\tau + f)(x) \rightarrow \omega(t) = (V_t + f)(x)$$

и, следовательно, $e \subseteq S^t$, что доказывает (1.7), а также соотношение

$$\text{cap}(S_{t+0}) = \text{cap}(S^t).$$

Тем самым утверждение 1) доказано.

По лемме 3 экстремальная константа $w(t)$ является выпуклой вверх функцией и поэтому дифференцируема по t в каждой точке из $\mathbb{R}_+$ за исключением некоторого не более чем счетного множества N_0 ; кроме того, левая и правая производные непрерывны слева и справа соответственно. Поэтому достаточно найти производную $w(t)$ в точке, в которой она дифференцируема. Для произвольного $t \in \mathbb{R}_+ \setminus N$ и достаточно малого ε из леммы 1 легко получаются следующие неравенства:

$$w(t + \varepsilon) \leq \omega(S_t; t + \varepsilon) = w(t) - \varepsilon \ln \text{cap}(S_t), \quad (3.1)$$

$$w(t) \leq \omega(S_{t+\varepsilon}; t) = w(t + \varepsilon) + \varepsilon \ln \text{cap}(S_{t+\varepsilon}). \quad (3.2)$$

Из полученных неравенств следует, что

$$-\varepsilon \ln \text{cap}(S_{t+\varepsilon}) \leq w(t + \varepsilon) - w(t) \leq -\varepsilon \ln \text{cap}(S_t).$$

Теперь, так как $\text{cap}(S_t) = \text{cap}(S^t)$ для $t \notin N$, то в этой точке

$$w'(t) = -\ln \text{cap}(S_t).$$

Тем самым $N_0 = N$ и утверждения 2) следуют из доказанных выше свойств функции $\text{cap}(S_t)$.

Для $t \in \mathbb{R}_+ \setminus N$ рассмотрим следующие функции:

$$G_1(z) = (V_{t+\varepsilon} - V_t + \varepsilon g_t)(z) \quad \text{и} \quad G_2(z) = (V_t - V_{t+\varepsilon} - \varepsilon g_{t+\varepsilon})(z).$$

Функции G_1 и G_2 супергармоничны в областях Ω_t и $\Omega_{t+\varepsilon}$ соответственно. Для значений $G_1(x)$ и $G_2(x)$ на границах соответствующих областей из условий равновесия и неравенств (3.1) и (3.2) имеем

$$G_1(x) = w(t + \varepsilon) - w(t) \geq -\varepsilon \ln \text{cap}(S_{t+\varepsilon}), \quad x \in S_t, \quad (3.3)$$

$$G_2(x) \geq w(t) - w(t + \varepsilon) \geq \varepsilon \ln \text{cap}(S_t), \quad x \in S_{t+\varepsilon}. \quad (3.4)$$

Из принципа минимума для супергармонических функций следует, что неравенства (3.3) и (3.4) справедливы для всех $z \in \mathbb{C}$, и тем самым имеем

$$-\varepsilon \ln \text{cap}(S_{t+\varepsilon}) - \varepsilon g_t(z) \leq (V_{t+\varepsilon} - V_t)(z) \leq -\varepsilon \ln \text{cap}(S_t) - \varepsilon g_{t+\varepsilon}(z).$$

Отсюда получаем, что для любого $z \in \mathbb{C}$ потенциал $V_t(z)$ имеет производную в точке t и

$$\frac{d}{dt} V_t(z) = -\ln \text{cap}(S_t) - g_t(z) = V_{\gamma_t}(z). \quad (3.5)$$

Так как $V_t(z) = F_z(t) + w(t)$, то из леммы 3 следует, что $V_t(z)$ имеет в каждой точке $\mathbb{R}_+$ правую и левую производные, для которых имеют место представления (1.13). Теперь утверждения 3) вытекают из (3.5) и леммы 4.

Так как выпуклая функция является абсолютно непрерывной, то из (1.8) с учетом (1.12) находим

$$w(t) = - \int_0^t \ln \operatorname{cap}(S_\tau) d\tau.$$

Пусть μ_t – мера, определяемая соотношением

$$\mu_t = \int_0^t \gamma_t dt.$$

Для всех $z \in \mathbb{C}$ потенциал $V_{\mu_t}(z)$ дифференцируем по t на $\mathbb{R}_+ \setminus N$, и для производной имеет место формула

$$\frac{d}{dt} V_{\mu_t}(z) = - \ln \operatorname{cap}(S_t) - g_t(z). \quad (3.6)$$

В самом деле, из определения μ_t следует, что

$$(V_{\mu_{t+\varepsilon}} - V_{\mu_t})(z) = \int_t^{t+\varepsilon} V_{\gamma_\tau}(z) d\tau = - \int_t^{t+\varepsilon} (\ln \operatorname{cap}(S_\tau) + g_\tau(z)) d\tau, \quad (3.7)$$

откуда и получаем (3.6). Пусть $e = \bigcap_{\tau > 0} S_\tau$, тогда для всех $x \in e$ $g_t(x) = 0$ и из (3.7) вытекает, что существует конечный предел u_0 потенциала $V_{\lambda_t}(x)$ при $t \rightarrow 0$, не зависящий от $x \in e$, и

$$V_{\mu_t}(x) = u_0 + w(t) \quad \text{для } x \in e.$$

Пусть $u(z) = (V_{\mu_t} - V_t)(z)$, тогда из (3.5) и (3.6) получаем, что $u(z)$ не зависит от t . Так как функция u является гармонической в $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_t$, то она гармоническая в $\overline{\mathbb{C}} \setminus e$, и на e , очевидно, $u(x) = u_0$. Из принципа максимума для гармонических функций следует, что $u(z) \equiv u_0$, но $u(\infty) = 0$ и, значит, $u(z) \equiv 0$. Отсюда имеем равенства $V_t(z) = V_{\mu_t}(z)$ и $\lambda_t = \mu_t$; тем самым утверждения 4) доказаны.

Из (3.7) получаем для $x \in \mathbb{R}$

$$V_t(x) = w(t) - \int_0^t g_\tau(x) d\tau = w(t) - \int_0^\infty g_\tau(x) d\tau + \int_t^\infty g_\tau(x) d\tau.$$

Второй интеграл в правой части последнего равенства, очевидно, равен нулю для $x \in S_t$ и больше или равен нулю при $x \notin S_t$. Таким образом, так как λ_t – равновесная мера во внешнем поле f , то

$$f(x) = \int_0^\infty g_\tau(x) d\tau \quad \text{для } x \in S_t, \quad t > 0,$$

что доказывает (1.11) и завершает доказательство теоремы.

1. *Рахманов Е. А.* Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси // Матем. сб. 1982. Т. 119 (161). С. 169–203.
2. *Буяров В. С.* О логарифмической асимптотике для полиномов, ортогональных на $\mathbb{R}$ с несимметрическими весами // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 2. С. 28–36.
3. *Lopez G., Rakhmanov E. A.* Rational approximations, orthogonal polynomials and equilibrium distributions. Proc. Int. Symp., Segovia/Spain (1986) // Lecture Notes in Math. V. 1329, 1988. P. 125–157.
4. *Rakhmanov E. A.* Strong asymptotics for orthogonal polynomials with exponential weights on $\mathbb{R}$. Selected papers of international seminars on “Methods of Approximation Theory in Complex Analysis and Mathematical Physics” held in Leningrad, May 13–26, 1991 // Lecture Notes in Math. / ed. A. A. Gonchar, E. B. Saff. V. 1550, 1993. P. 71–97.
5. *Lubinsky D. S., Saff E. B.* Strong asymptotics for extremal polynomials associated with weights on $\mathbb{R}$ // Lecture Notes in Math. V. 1305, 1988.
6. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
7. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 1. С. 117–127.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Университет Южной Флориды, г. Тампа