Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Фаминский, Смешанные задачи для уравнения Кортевега–де Фриза, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 6, 127–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:28:36

УДК 517.946

А. В. Фаминский

Смешанные задачи для уравнения Кортевега–де Фриза

В статье установлены результаты о нелокальной разрешимости и корректности в различных функциональных пространствах смешанной задачи в полуполосе $(0, T) \times (-\infty, 0)$ для уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = f(t, x).$$

Для получения некоторых априорных оценок решений рассматриваемой задачи использовано специальное решение $J(t, x)$ линейризованного уравнения КдФ типа граничного потенциала. Исследованы свойства функции J , которые существенно различны при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Применение этого граничного потенциала позволило, в частности, доказать существование обобщенных решений данной задачи при нерегулярных граничных данных.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

Уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = f(t, x) \quad (1.1)$$

(a – вещественная константа) является модельным уравнением для описания одномерных нелинейных волн в диспергирующих средах. Примером таких процессов служат волны на поверхности мелкой воды, распространяющиеся в длинном узком канале. Тогда случай “бесконечного” канала приводит к задаче Коши, а случай ограниченного (с одной или двух сторон) – к смешанным задачам.

Среди различных областей, в которых можно изучать смешанные задачи для уравнения КдФ, выделим три наиболее типичные: левую полуполосу $\Pi_T^- = (0, T) \times \mathbb{R}_-$ ($\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$), правую полуполосу $\Pi_T^+ = (0, T) \times \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$) и ограниченный прямоугольник $Q_T = (0, T) \times (0, 1)$. В каждом из этих случаев задаются начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (1.2)$$

и следующие краевые условия:

1) в Π_T^- два условия на правой границе

$$u(t, 0) = u_1(t), \quad u_x(t, 0) = u_2(t), \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01139).

2) в Π_T^+ одно условие на левой границе

$$u(t, 0) = u_3(t), \quad (1.4)$$

3) в Q_T два условия на правой и одно на левой границах

$$u(t, 1) = u_1(t), \quad u_x(t, 1) = u_2(t), \quad u(t, 0) = u_3(t). \quad (1.5)$$

Целью настоящего исследования является изучение вопросов нелокальной разрешимости и корректности указанных задач для уравнения КдФ в различных функциональных пространствах. При этом данная статья посвящена в основном задаче (1.1)–(1.3) в Π_T^- . Остальные задачи будут рассмотрены в последующих публикациях.

Первый шаг при получении результатов нелокальной разрешимости как задачи Коши (если не используется метод обратной задачи рассеяния), так и смешанных задач для уравнения КдФ состоит в оценке решения в норме L_2 . Эта оценка является аналогом соответствующего закона сохранения, и схема ее получения состоит в следующем. Пусть функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в прямоугольнике $(0, T) \times \Omega$, где Ω (здесь и далее) – некоторый интервал (ограниченный или неограниченный) на вещественной оси. Умножим (1.1) на $2u$ и проинтегрируем по Ω , тогда (если в случае неограниченной области предположить также, что u стремится на бесконечности к нулю вместе с производными) получим равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + \left(2uu_{xx} - u_x^2 + au^2 + \frac{2}{3}u^3 \right) \Big|_{\partial\Omega} = 2 \int_{\Omega} f u dx, \quad (1.6)$$

где через $\partial\Omega$ обозначена конечная часть границы интервала Ω . Наличие множителя u_{xx} показывает, что в каждой из трех рассматриваемых задач для получения из равенства (1.6) оценки интеграла от u^2 следует потребовать, чтобы $u|_{\partial\Omega} = 0$, где Ω – либо $\mathbb{R}_-$, либо $\mathbb{R}_+$, либо $(0, 1)$ соответственно. Именно в случае нулевых краевых данных в работах [1]–[3] были получены первые результаты о нелокальной разрешимости этих смешанных задач для уравнения КдФ. Отметим также статью [4], где для задачи в ограниченном прямоугольнике рассматривался случай краевых условий специального вида, отличного от (1.5), но при этом подобранных так, чтобы, в частности, обеспечить оценку в L_2 .

При изучении общего случая неоднородных краевых условий для получения оценки в L_2 необходимо, очевидно, перейти к функции $U(t, x) \equiv u(t, x) - \psi(t, x)$, где вспомогательную функцию ψ выбрать так, чтобы $U|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда U удовлетворяет уравнению

$$U_t + U_{xxx} + aU_x + UU_x + \psi U_x + \psi_x U + \psi_t + \psi_{xxx} + a\psi_x + \psi\psi_x = f. \quad (1.7)$$

Умножив (1.7) на $2U$ и проинтегрировав по Ω , получим равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} U^2 dx - U_x^2|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} \psi_x U^2 dx = 2 \int_{\Omega} (f - \psi_t - \psi_{xxx} - a\psi_x - \psi\psi_x) U dx. \quad (1.8)$$

Нетрудно видеть, что для того чтобы из (1.8) можно было получить оценку интеграла от u^2 , достаточно, чтобы

$$\psi_t + \psi_{xxx} + a\psi_x + \psi\psi_x \in L_1(0, T; L_2(\Omega)), \quad (1.9)$$

$$\psi_x \in L_1(0, T; L_\infty(\Omega)), \quad (1.10)$$

$$\psi \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad (1.11)$$

$$\psi_x|_{\partial\Omega-0} \in L_2(0, T), \quad (1.12)$$

где $\partial\Omega - 0$ обозначает правую конечную часть границы интервала Ω .

Исследованию задачи (1.1), (1.2), (1.4) в Π_T^+ в случае ненулевой функции u_3 посвящены работы [5]–[8]. В них в качестве ψ выбиралась функция вида $u_3(t)\psi_0(x)$, где ψ_0 – некоторая функция типа “срезки”. Тогда необходимость выполнения условия (1.9) потребовала от u_3 принадлежности по крайней мере пространству $W_1^1(0, T)$.

Задачи (1.1)–(1.3) в Π_T^- и (1.1), (1.2), (1.5) в Q_T исследованы значительно меньше. В работе [9] сформулированы некоторые результаты о существовании и единственности нелокальных решений этих задач при неоднородных краевых условиях. При этом от функций u_1 и u_3 также требовалась принадлежность к $W_1^1(0, T)$.

В настоящем исследовании предложен другой способ выбора функции ψ , а именно, в ее качестве используется некоторая специальная функция типа граничного потенциала для линеаризованного уравнения КдФ (умноженная в случае необходимости на функцию типа “срезки” по x). Это позволило ослабить условия на гладкость граничных данных, но потребовало специального исследования свойств этого граничного потенциала. Пусть $x \neq 0$, $t > 0$. Положим для некоторой функции $\mu(t)$

$$J(t, x; \mu) \equiv \frac{3}{4}(1 + 3 \operatorname{sign} x) \int_0^t \frac{1}{t - \tau} A''\left(\frac{x}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \mu(\tau) d\tau \quad (1.13)$$

(вопрос о существовании этого интеграла будет рассмотрен далее), где

$$A(\theta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi^3 + \theta\xi)} d\xi \quad (1.14)$$

– функция Эйри (см., например, [10]). Известно, что функция A бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой, удовлетворяет уравнению

$$A''(\theta) = \frac{1}{3} \theta A(\theta) \quad (1.15)$$

и для нее справедливы асимптотики

$$A^{(n)}(\theta) \sim \begin{cases} c_n^- |\theta|^{n/2-1/4} \sin\left(2\left|\frac{\theta}{3}\right|^{3/2} + \varphi_n\right) & \text{при } \theta \rightarrow -\infty, \\ c_n^+ \theta^{n/2-1/4} \exp\left(-2\left(\frac{\theta}{3}\right)^{3/2}\right) & \text{при } \theta \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (1.16)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, $c_n^\pm$ и φ_n – некоторые константы. В дальнейшем будет показано, что (при соответствующих условиях на μ)

$$J_t + J_{xxx} = 0 \quad \text{для } x \neq 0, \quad J|_{t=0} = 0, \quad J|_{x=0+0} = J|_{x=0-0} = \mu,$$

что оправдывает использование для функции J термина “граничный потенциал”.

Отметим, что при $x > 0$ эта функция рассматривалась ранее в работах [11], [12] и использовалась в них для построения решений смешанных задач в Π_T^+ и Q_T для линейаризованного уравнения КдФ (однако свойства типа (1.9)–(1.11) установлены не были). В случае же $x < 0$ в этих статьях была получена формула для решения соответствующей смешанной задачи в Π_T^- для линейаризованного уравнения КдФ (эта формула использовалась также для задачи в Q_T). Однако указанная формула уже содержит производные от граничных функций u_1 , u_2 и поэтому в настоящем исследовании не используется. Вместе с тем заметим, что для получения оценки решения в L_2 достаточно обнулить граничное значение только для самой функции, но не для производной. Поэтому для наших целей не надо строить решение линейной смешанной задачи в Π_T^- , а можно использовать граничный потенциал J . Необходимо только обеспечить, чтобы согласно (1.12) производная J_x имела след при $x \rightarrow 0 - 0$, принадлежащий $L_2(0, T)$.

Из (1.16) нетрудно видеть, что функция A , а следовательно, и J имеют абсолютно различное поведение на различных бесконечностях. Это приводит к отличным друг от друга методам исследования J при $x > 0$ и $x < 0$. Если при $x > 0$ быстрое убывание A позволяет изучать J аналогично тепловым потенциалам (см. [13]), исходя из самой формулы (1.13), то при $x < 0$ приходится переходить к Фурье-образам и рассматривать получающиеся осцилляторные интегралы. Некоторые из идей исследования подобных интегралов, развитые в настоящей статье, восходят к работам [14], [15].

Отметим, что для построения нелокальных обобщенных решений задачи (1.1)–(1.3) кроме оценки в L_2 используется свойство локального сглаживания решения, обнаруженное для уравнения КдФ в случае задачи Коши в работах [16], [17]. Для смешанной задачи в Π_T^+ это свойство было доказано в [6]. В случае ограниченной области локальное сглаживание переходит в глобальное; впервые оно было фактически установлено в [2] и [4].

Введем теперь некоторые обозначения. Положим $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $L_{p,+} = L_p(\mathbb{R}_+)$, $L_{p,-} = L_p(\mathbb{R}_-)$, $H_+^k = W_2^k(\mathbb{R}_+)$, $H_-^k = W_2^k(\mathbb{R}_-)$, $C_{0,+}^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Через S_+ и S_- будем обозначать сужения пространства Шварца $S(\mathbb{R})$ на $\overline{\mathbb{R}}_+$ и $\overline{\mathbb{R}}_-$ соответственно, а для любого $b > 0$ через $S_{\text{exp},+}^b$ и $S_{\text{exp},-}^b$ – сужения на $\overline{\mathbb{R}}_+$ и $\overline{\mathbb{R}}_-$ пространства $S_{\text{exp}}^b = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \|\exp(b|x|/2)f^{(m)}(x)\|_{L_2} < \infty \forall m\}$. Символом $C(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных на $\overline{\Omega}$ функций (напомним, что Ω – некоторый, вообще говоря, неограниченный интервал на $\mathbb{R}$). Кроме того, если X – некоторое нормированное или счетно-нормированное пространство, то через $C(\overline{\Omega}; X)$ обозначим пространство непрерывных ограниченных, а через $C_w(\overline{\Omega}; X)$ – слабо непрерывных отображений $\overline{\Omega}$ в X . Символы $C^\infty(\overline{\Omega}; X)$ и $L_p(\Omega; X)$ используются в общепринятом смысле.

Далее, положим

$$\lambda_0(f; T) = \sup_{n \geq 0} \left(\int_0^T \int_{-n-1}^{-n} f^2(t, x) dx dt \right)^{1/2},$$

$$\lambda_2(f; T) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{(t, x) \in [0, T] \times [-n-1, -n]} f^2(t, x) \right)^{1/2}$$

(индексы 0 и 2 здесь использованы, чтобы сохранить единообразие с обозначениями из статьи [8]),

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_T^w &= \{f \in (L_\infty \cap C_w)([0, T]; L_2, -) : \lambda_0(f; T) < \infty\}, \\ \widetilde{X}_T &= \{f \in C([0, T]; L_2, -) : \lambda_0(f; T) < \infty\}, \\ \|f\|_{\widetilde{X}_T} &= \|f\|_{\widetilde{X}_T^w} = \|f\|_{L_\infty(0, T; L_2, -)} + \lambda_0(f; T), \\ X_T &= \{f \in C([0, T]; H_-^2) : \|f\|_{X_T} = \|f\|_{C([0, T]; H_-^2)} + \lambda_0(f_{xxx}; T) + \lambda_2(f; T) < \infty\}. \end{aligned}$$

Основным пространством, применяемым в настоящей статье для описания свойств граничных функций, является пространство Слободецкого W_p^s . Пусть $1 \leq p < +\infty$, $s > 0$, s – нецелое. Тогда

$$W_p^s(\Omega) = \left\{ \mu \in W_p^{[s]}(\Omega) : \left(\iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|\mu^{([s])}(t) - \mu^{([s])}(\tau)|^p}{|t - \tau|^{1+\{s\}p}} dt d\tau \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

где $[s]$ – целая часть s , $\{s\} = s - [s]$.

Отметим, что множество функций $C_{0,+}^\infty$ всюду плотно в $W_p^s(0, T)$ при любых $T > 0$, $p \in [1, +\infty)$ и $s \in (0, 1/p)$ (см., например, [18]). При этом существует способ построения аппроксимирующих функций из $C_{0,+}^\infty$, не зависящий от выбора p и s . Например, $\mu_h(t) \equiv (\mu(t)\vartheta(t-2h))^h \rightarrow \mu(t)$ в $W_p^s(0, T)$ при $h \rightarrow 0$, где функция $\mu \in W_p^s(0, T)$ продолжена нулем при $t > T$, ϑ – функция Хевисайда, символ f^h здесь и далее обозначает среднюю функцию с параметром $h > 0$ для некоторой функции f (см., например, [19]).

Кроме W_p^s будем использовать и другой вариант пространства функций с дробными производными, а именно пространство бесселевых потенциалов

$$H_p^s = H_p^s(\mathbb{R}) = \{\mu \in S' : \mathcal{F}^{-1}[(1 + \xi^2)^{s/2} \widehat{\mu}(\xi)] \in L_p(\mathbb{R})\}$$

для $p \geq 1$ и $s \geq 0$, где здесь и далее символы $\widehat{\mu}$ (или $\mathcal{F}[\cdot]$) и $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ обозначают соответственно прямое и обратное преобразование Фурье, понимаемые как операции в S' .

В статье будут применяться пространства W_p^s и H_p^s только при $p = 1$ и $p = 2$. В этих случаях между этими пространствами существует тесная связь, а именно $W_2^s(\mathbb{R}) = H_2^s(\mathbb{R})$, $H_1^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}) \subset W_1^s(\mathbb{R}) \subset H_1^s(\mathbb{R})$ для любых $\varepsilon > 0$ и нецелом $s > 0$ (см. [18], [20]).

Введем теперь еще одно специальное пространство. Для любого $\varepsilon \in (0, 1/6)$ и целого $k \geq 0$ положим

$$\Gamma_{k+\varepsilon}(\Omega) = W_1^{k+5/6+\varepsilon}(\Omega) \cap W_2^{k+1/3}(\Omega).$$

Заметим, что из сказанного выше следует, что $C_{0,+}^\infty$ всюду плотно в $\Gamma_\varepsilon(0, T)$ для любого $T > 0$.

Введем также некоторые вспомогательные функции. Через $\eta(x)$ обозначим убывающую функцию из $C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\eta(x) = 0$ при $x \leq 1/4$, $\eta(x) = 1$ при $x \geq 3/4$, $\eta'(x) > 0$ при $1/4 < x < 3/4$, $\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 1$.

Положим также $\eta_0(x) \equiv \eta(2 - |x|)$, $\eta_k(x) \equiv \eta(2^{k+1} - |x|)\eta(|x| - 2^k + 1)$ для натуральных k . Нетрудно видеть, что система функций $\{\eta_k, k = 0, 1, \dots\}$ образует разбиение единицы.

Статья состоит из пяти параграфов. Исследование свойств граничного потенциала J проведено в § 2. В § 3 изучена смешанная задача в Π_T^- для линейаризованного уравнения КдФ. В частности, установлена ее разрешимость в пространствах $\tilde{X}_T$ и X_T .

Обобщенные решения самой задачи (1.1)–(1.3) рассмотрены в § 4. Сначала доказана корректность данной задачи в пространстве X_T (теорема 4.1). Далее установлены существование (теорема 4.2) и единственность (теорема 4.3) решений в пространстве $\tilde{X}_T^w$. В теореме 4.3 доказана также непрерывная зависимость решений из $\tilde{X}_T^w$ от данных задачи в некотором более слабом смысле.

В § 5 доказаны результаты о корректности задачи (1.1)–(1.3) в пространствах более гладких функций (теоремы 5.1 и 5.2).

§ 2. Свойства граничного потенциала для линейаризованного уравнения КдФ

Рассмотрим функцию J , формально заданную равенством (1.13), сначала при $x > 0, t > 0$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mu \in L_1(0, T)$ для некоторого $T > 0$. Тогда

- 1) функция $J(t, x; \mu)$ определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0, t \in [0, T]$;
- 2) для любого $c_0 \in [0, 2/3^{3/2})$

$$\|\exp(c_0 T^{-1/2} x^{3/2}) J\|_{L_1(0, T; L_{2,+})} \leq c(T, c_0) \|\mu\|_{L_1(0, T)} \quad (2.1)$$

и $|\exp(c_0 T^{-1/2} x^{3/2}) D_t^m D_x^l J| \leq c(T, c_0, m, l, x_0) \|\mu\|_{L_1(0, T)}$ при $x \geq x_0, t \in [0, T]$ для любого $x_0 > 0$ и целых неотрицательных m и l ;

- 3) функция J является в Π_T^+ обобщенным решением задачи

$$v_t + v_{xxx} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v|_{x=0} = \mu, \quad (2.2)$$

в следующем смысле: для любой функции $\varphi \in C^\infty([0, T]; S_+)$ такой, что $\varphi|_{x=0} = \varphi_x|_{x=0} = \varphi|_{t=T} = 0$,

$$\iint_{\Pi_T^+} J(\varphi_t + \varphi_{xxx}) dx dt + \int_0^T \mu \varphi_{xx}|_{x=0} dt = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1) и 2) вытекают из асимптотик функции $A(\theta)$ и ее производных при $\theta \rightarrow +\infty$. Например, используя неравенство Минковского и замену $\theta = x/(t - \tau)^{1/3}$, выводим, что

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}_+} J^2 e^{2c_0 T^{-1/2} x^{3/2}} dx \right)^{1/2} \\ & \leq \int_0^t \frac{3}{(t - \tau)^{5/6}} |\mu(\tau)| \left(\int_{\mathbb{R}_+} (A''(\theta))^2 e^{2c_0 \theta^{3/2}} d\theta \right)^{1/2} d\tau, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $A''(\theta) \exp(c_0 \theta^{3/2}) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ в силу (1.16). Проинтегрировав (2.3) по t , получим (2.1). Кроме того, согласно [6] при $\mu \in C_0^\infty(0, T)$ функция J принадлежит пространству $C^\infty([0, T]; S_{\text{exp},+}^b)$ для любого $b > 0$ и является классическим решением задачи (2.2). Лемма доказана.

В отличие от положительной полуоси, где быстрое убывание функции $A(\theta)$ при $\theta \rightarrow +\infty$ обеспечивает сходимость интеграла (1.13) даже для негладкой функции μ , в случае $x < 0$ прежде всего необходимо решить вопрос о существовании функции J , так как $A''(\theta)$ не ограничена при $\theta \rightarrow -\infty$. В этих целях проведем следующую выкладку, в которой для простоты предположим, что $\mu \in C_{0,+}^\infty$. Пусть $\tilde{A}_-(\theta)$ и $\tilde{A}_+(\theta)$ — первообразные функции A такие, что $\tilde{A}_-(-\infty) = 0$, $\tilde{A}_+(+\infty) = 0$ (существующие в силу (1.16)). Тогда, используя (1.15), выводим из (1.13), что при $x \neq 0$

$$J(t, x; \mu) = -c_\pm \int_0^t \tilde{A}_\pm \left(\frac{x}{(t - \tau)^{1/3}} \right) \mu'(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

где $c_+ = 3$ для $x > 0$, $c_- = -3/2$ для $x < 0$. Тем самым, по крайней мере для $\mu \in C_{0,+}^\infty$ функция J при $x < 0$, $t > 0$ также существует.

Прежде чем продолжить изучение свойств функции J , установим две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 2.2. Пусть $b \in \mathbb{R}$, $s > 0$, а ограниченная измеримая функция ν удовлетворяет неравенству $0 \leq \nu(\lambda) \leq \min(1, |\lambda - b|)$ для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\nu(\lambda)}{(1 + \lambda^2)^{s/2} |\lambda - b|} d\lambda \leq c(s) \frac{1 + \ln(1 + b^2)}{(1 + b^2)^{s/2}}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|b| \leq 1$, то

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\nu(\lambda)}{(1 + \lambda^2)^{s/2} |\lambda - b|} d\lambda \leq 3 \int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda}{(1 + \lambda^2)^{s/2} (|\lambda| + 1)} = c(s).$$

Пусть теперь $|b| \geq 1$. Тогда так как $1 + \lambda^2 \geq b^2/2$ при $|\lambda - b| \leq 1/2$, то

$$\int_{|\lambda - b| \leq 1/2} \frac{\nu(\lambda)}{(1 + \lambda^2)^{s/2} |\lambda - b|} d\lambda \leq 2^{s/2} |b|^{-s}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
& \int_{|\lambda-b| \geq 1/2} \frac{\nu(\lambda)}{(1+\lambda^2)^{s/2}|\lambda-b|} d\lambda \\
& \leq |b|^{-s} \int_{|\theta-1| \geq 1/(2|b|)} \frac{d\theta}{|\theta|^s|\theta-1|} \\
& \leq |b|^{-s} \left(2^s \int_{1/(2|b|) \leq |\theta-1| \leq 1/2} \frac{d\theta}{|\theta-1|} + 5 \int_{|\theta-1| \geq 1/2} \frac{d\theta}{(1+|\theta|)|\theta|^s} \right) \\
& \leq c(s)(1+\ln b)|b|^{-s}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Рассмотрим для некоторой функции $h(\xi) \in C^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$, целого $k \geq 0$ и $t \neq 0$ интеграл

$$H_k(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\xi^3)} \eta_k(\xi) h(\xi) d\xi. \quad (2.6)$$

Тогда если функция h удовлетворяет неравенствам

$$|h(\xi)| \leq h_0 \left(1 + \xi^2 + \frac{1}{|t|} \right)^{(1-3\varepsilon)/2} [1 + \ln(1 + \xi^2)], \quad (2.7)$$

$$|h'(\xi)| \leq h_0 (1 + \xi^2)^{-3\varepsilon/2} [1 + \ln(1 + \xi^2)] \quad (2.8)$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}$ и некоторых констант $h_0 > 0$, $\varepsilon \in (0, 1/3)$, то для любого $x_0 > 0$ при $|x| \leq x_0$

$$|H_k(x)| \leq ch_0 2^{-\varepsilon k} (k+1) [1 + |t|^{\varepsilon-1}], \quad (2.9)$$

где константа c зависит от ε и x_0 .

Если же вместо (2.7) и (2.8) функция h удовлетворяет неравенствам

$$|h(\xi)| \leq h_0 \left(1 + \xi^2 + \frac{1}{|t|} \right)^{(3-6\varepsilon)/4} [1 + \ln(1 + \xi^2)], \quad (2.10)$$

$$|h'(\xi)| \leq h_0 \left(1 + \xi^2 + \frac{1}{|t|} \right)^{(1-6\varepsilon)/4} [1 + \ln(1 + \xi^2)] \quad (2.11)$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}$ и некоторых констант $h_0 > 0$, $\varepsilon \in (0, 1/6)$, то для любых $0 < x_1 < x_0$ при $x_1 \leq |x| \leq x_0$ для функции H_k выполнено неравенство (2.9) с константой c , зависящей от ε , x_0 и x_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что для $k = 0$ оценка (2.9) в обоих случаях очевидна, поэтому в дальнейшем будем считать $k \geq 1$. Заметим, что тогда $|\xi| \geq 1$ при $\xi \in \text{supp } \eta_k$.

Пусть для функции h выполнены неравенства (2.7), (2.8). Разобьем область интегрирования в (2.6) на две части: $\Omega_1 = \{\xi : |\xi| < |x_0/t|^{1/2}\}$, $\Omega_2 = \mathbb{R} \setminus \Omega_1$. Тогда в силу (2.7)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_1} \right| &\leq ch_0 \sup_{\xi \in \text{supp } \eta_k} [|\xi|^{-\varepsilon} (1 + \ln |\xi|)] \sup_{\xi \in \Omega_1} \left(\xi^2 + \frac{1}{|t|} \right)^{1-\varepsilon} \\ &\leq c(\varepsilon, x_0) h_0 2^{-\varepsilon k} (k+1) (1 + |t|^{\varepsilon-1}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Далее, если $\xi \in \Omega_2$, то $|x + 3t\xi^2| \geq |t|\xi^2 + x_0$ при $|x| \leq x_0$. Тогда, интегрируя по частям и применяя (2.7) и (2.8), получим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_2} \right| &\leq c \sup_{\xi \in \Omega_2 \cap \text{supp } \eta_k} \frac{|h|}{|x + 3t\xi^2|} + c \int_{\Omega_2} \frac{(|h'| + |h/\xi|)}{|x + 3t\xi^2|} \eta_k d\xi \\ &\leq c(x_0) h_0 \sup_{\xi \in \text{supp } \eta_k} [|\xi|^{-\varepsilon} (1 + \ln |\xi|)] \left[\sup_{\xi \in \Omega_2} \frac{|\xi|^{1-2\varepsilon}}{|t|\xi^2 + x_0} + \int_{\Omega_2} \frac{|\xi|^{-2\varepsilon}}{|t|\xi^2 + x_0} d\xi \right] \\ &\leq c(\varepsilon, x_0) h_0 2^{-\varepsilon k} (k+1) (1 + |t|^{\varepsilon-1}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где мы использовали неравенство $|t|\xi^2 + x_0 \geq c(\varepsilon) x_0^\varepsilon (|t|\xi^2)^{1-\varepsilon}$. Объединяя (2.12) и (2.13), выводим неравенство (2.9).

Пусть теперь для функции h выполнены неравенства (2.10) и (2.11). Используем другое разбиение числовой оси: $\Omega_3 = \{\xi : |x_1/(6t)|^{1/2} < |\xi| < |x_0/t|^{1/2}\}$, $\Omega_4 = \mathbb{R} \setminus \Omega_3$. Для оценки интеграла по Ω_3 воспользуемся леммой Ван-дер-Корпута (см., например, [21]):

$$\left| \int_{\Omega_3} \right| \leq c \left(\inf_{\xi \in \Omega_3} |(x\xi + t\xi^3)_{\xi\xi}| \right)^{-1/2} (\|\eta_k h\|_{L_\infty(\Omega_3)} + \|(\eta_k h)'\|_{L_1(\Omega_3)}). \quad (2.14)$$

Здесь $|(x\xi + t\xi^3)_{\xi\xi}| = 6|t\xi| \geq (6|x_1|)^{1/2} |t|^{1/2}$,

$$\begin{aligned} &\|\eta_k h\|_{L_\infty(\Omega_3)} + \|(\eta_k h)'\|_{L_1(\Omega_3)} \\ &\leq c(x_0, x_1) h_0 \sup_{\xi \in \text{supp } \eta_k} [|\xi|^{-\varepsilon} (1 + \ln |\xi|)] \left[\sup_{\xi \in \Omega_3} |\xi|^{(3-4\varepsilon)/2} + \int_{\Omega_3} |\xi|^{(1-4\varepsilon)/2} d\xi \right] \\ &\leq c(\varepsilon, x_0, x_1) h_0 2^{-\varepsilon k} (k+1) (1 + |t|^{(4\varepsilon-3)/4}), \end{aligned}$$

и тогда из (2.14) следует, что

$$\left| \int_{\Omega_3} \right| \leq c(\varepsilon, x_0, x_1) h_0 2^{-\varepsilon k} (k+1) (1 + |t|^{\varepsilon-1}). \quad (2.15)$$

Далее, нетрудно показать, что если $\xi \in \Omega_4$, то $|x + 3t\xi^2| \geq (|t|\xi^2 + |x_1|)/4$ при $|x_1| \leq |x| \leq |x_0|$, и тогда аналогично (2.13) выводим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_4} \right| &\leq c(x_0, x_1) h_0 \sup_{\xi \in \text{supp } \eta_k} [|\xi|^{-\varepsilon} (1 + \ln |\xi|)] \\ &\quad \times \left[\sup_{\xi \in \Omega_4} \frac{(\xi^2 + |t|^{-1})^{(3-4\varepsilon)/4}}{|t|\xi^2 + x_1} + \int_{\Omega_4} \frac{(\xi^2 + |t|^{-1})^{(1-4\varepsilon)/4}}{|t|\xi^2 + x_1} d\xi \right] \\ &\leq c(\varepsilon, x_0, x_1) h_0 2^{-\varepsilon k} (k+1) (1 + |t|^{\varepsilon-1}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Объединяя (2.15) и (2.16), выводим неравенство (2.9). Лемма доказана.

Теперь вернемся к оценкам функции J . Не ограничивая общности, будем сначала их формулировать для $\mu \in C_{0,+}^\infty$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mu \in C_{0,+}^\infty$. Тогда для любых $T > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\|J\|_{C([0,T];L_{2,+})} \leq c(T, \varepsilon) \|\mu\|_{L_{6+\varepsilon}(0,T)}, \quad (2.17)$$

$$\|J\|_{C([0,T];L_{2,-})} \leq c(T, \varepsilon) \|\mu\|_{H_1^{5/6+\varepsilon}}. \quad (2.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (2.17) вытекает из неравенства (2.3).

Чтобы рассмотреть случай $x < 0$, введем функцию типа J с постоянным числовым коэффициентом, а именно положим для $x \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$

$$\tilde{J}(t, x; \mu) \equiv - \int_0^t \frac{1}{t-\tau} A'' \left(\frac{x}{(t-\tau)^{1/3}} \right) \mu(\tau) d\tau. \quad (2.19)$$

Тогда поскольку согласно (1.14) $A(\theta) = \mathcal{F}^{-1}[e^{i\xi^3}]$, то в S' для $t \geq 0$

$$\tilde{J} = - \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{F}^{-1}(e^{i(t-\tau)\xi^3}) \mu(\tau) d\tau = \mathcal{F}^{-1} \left[\xi^2 \int_0^t \mu(\tau) e^{i(t-\tau)\xi^3} d\tau \right]. \quad (2.20)$$

Нетрудно получить, что

$$\int_0^t \mu(\tau) e^{i(t-\tau)\xi^3} d\tau = \frac{1}{2\pi i} e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}(\lambda) \frac{e^{it(\lambda-\xi^3)} - 1}{\lambda - \xi^3} d\lambda, \quad (2.21)$$

и поэтому для $s \in (0, 1)$

$$\left| \int_0^t \mu(\tau) e^{i(t-\tau)\xi^3} d\tau \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\hat{\mu}(\lambda) (1 + \lambda^2)^{s/2}| \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{it(\lambda-\xi^3)} - 1|}{(1 + \lambda^2)^{s/2} |\lambda - \xi^3|} d\lambda. \quad (2.22)$$

Заметим, что $|e^{it(\lambda-\xi^3)} - 1| \leq c(T) \min(1, |\lambda - \xi^3|)$ при $t \in [0, T]$. Тогда из леммы 2.2, оценки (2.22) и равенства Парсеваля следует, что

$$\|\tilde{J}\|_{L_2} \leq c(T, s) \|\mu\|_{H_1^s} \left\| \xi^2 \frac{[1 + \ln(1 + \xi^6)]}{(1 + \xi^6)^{s/2}} \right\|_{L_2},$$

откуда для $s > 5/6$ вытекает неравенство (2.18). Принадлежность функции J пространствам $C([0, T]; L_{2,\pm})$ легко следует из формулы (2.4). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\mu \in C_{0,+}^\infty$. Тогда для любых $T > 0$, $\varepsilon > 0$ и $x_0 > 0$

$$\|J_x\|_{L_1(0,T;C(\overline{\mathbb{R}}_+))} \leq c\|\mu\|_{W_1^{1/3}(0,T)}, \quad (2.23)$$

$$\|J_x\|_{L_1(0,T;C[-x_0,0])} \leq c(T, \varepsilon, x_0)\|\mu\|_{H_1^{2/3+\varepsilon}}. \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $x > 0$. Тогда согласно (1.13)

$$\begin{aligned} J_x(t, x; \mu) &= \int_0^t \frac{3}{(t-\tau)^{4/3}} A''' \left(\frac{x}{(t-\tau)^{1/3}} \right) \mu(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{3}{(t-\tau)^{4/3}} A''' \left(\frac{x}{(t-\tau)^{1/3}} \right) (\mu(\tau) - \mu(t)) d\tau - \frac{3\mu(t)}{t^{1/3}} A \left(\frac{x}{t^{1/3}} \right), \end{aligned}$$

и тогда так как $|A'''(\theta)| \leq \text{const}$ при $\theta \geq 0$, то

$$\int_0^T \sup_{x \geq 0} |J_x| dt \leq c \int_0^T \int_0^t \frac{|\mu(t) - \mu(\tau)|}{(t-\tau)^{4/3}} d\tau dt + c \int_0^T \frac{|\mu(t)|}{t^{1/3}} dt \leq c_1 \|\mu\|_{W_1^{1/3}(0,T)},$$

где при оценке последнего интеграла использована лемма из [13].

Для получения оценки (2.24) (как и при доказательстве леммы 2.4) воспользуемся функцией $\tilde{J}$ (см. (2.19)). Тогда согласно (2.20) и (2.21)

$$\begin{aligned} \tilde{J}_x &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^{-1} \left[\xi^3 e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}(\lambda) \frac{e^{it(\lambda-\xi^3)} - 1}{\lambda - \xi^3} d\lambda \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mu_s(\tau) \mathcal{F}^{-1} \left[\eta_k(\xi) \xi^3 e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{it(\lambda-\xi^3)} - 1)e^{-i\tau\lambda}}{(\lambda - \xi^3)(1 + \lambda^2)^{s/2}} d\lambda \right] d\tau, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $s \in (0, 1)$, $\mu_s \equiv \mathcal{F}^{-1}[(1 + \lambda^2)^{s/2} \hat{\mu}(\lambda)]$. Положим

$$I(\xi; t, \tau) \equiv \xi^3 e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{it(\lambda-\xi^3)} - 1)e^{-i\tau\lambda}}{(\lambda - \xi^3)(1 + \lambda^2)^{s/2}} d\lambda. \quad (2.26)$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \xi^3 e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{it(\lambda-\xi^3)} - \eta_0(\lambda - \xi^3))e^{-i\tau\lambda}}{(\lambda - \xi^3)(1 + \lambda^2)^{s/2}} d\lambda \\ &\quad + \widetilde{\text{sign } \xi} (1 + \xi^6)^{1/2} e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\eta_0(\lambda - \xi^3) - 1)e^{-i\tau\lambda}}{(\lambda - \xi^3)(1 + \lambda^2)^{s/2}} d\lambda \\ &\quad + [\xi^3 - \widetilde{\text{sign } \xi} (1 + \xi^6)^{1/2}] e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\eta_0(\lambda - \xi^3) - 1)e^{-i\tau\lambda}}{(\lambda - \xi^3)(1 + \lambda^2)^{s/2}} d\lambda \\ &\equiv I_1(\xi; t, \tau) + I_2(\xi; t, \tau) + I_3(\xi; t, \tau), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $\widetilde{\text{sign } \xi}$ – неубывающая нечетная функция из $C^\infty(\mathbb{R})$, равная $\text{sign } \xi$ при $|\xi| \geq 1$. Заметим, что в силу (2.5) для $j = 1, 2$

$$|I_j| \leq c(T, s)(1 + \xi^2)^{3(1-s)/2} (1 + \ln(1 + \xi^2)). \quad (2.28)$$

Далее,

$$I_1 = e^{i(t-\tau)\xi^3} h_1(\xi; t, \tau) - B_s(t - \tau) + 2\pi e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} B_s(\tau - \theta) e^{-i\theta\xi^3} \widehat{\eta}_0(\theta) d\theta, \quad (2.29)$$

где

$$h_1 \equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{it\theta} - \eta_0(\theta))(\theta + \xi^3) e^{-i\tau\theta}}{\theta(1 + (\theta + \xi^3)^2)^{s/2}} d\theta,$$

а $B_s \equiv 2\pi \mathcal{F}^{-1}[(1 + \lambda^2)^{-s/2}]$ — потенциал Бесселя (см., например, [22]). Используя равенство (2.29), оценку (2.28) и свойства потенциала Бесселя, получаем, что

$$|h_1| \leq c(T, s)(1 + \xi^2)^{3(1-s)/2} (1 + \ln(1 + \xi^2)) + c(s)(1 + |t - \tau|^{s-1}). \quad (2.30)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial h_1}{\partial \xi} = 3\xi^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{it\theta} - \eta_0(\theta)) e^{-i\tau\theta}}{\theta(1 + (\theta + \xi^3)^2)^{s/2}} d\theta - 3s\xi^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{it\theta} - \eta_0(\theta))(\theta + \xi^3)^2 e^{-i\tau\theta}}{\theta(1 + (\theta + \xi^3)^2)^{s/2+1}} d\theta,$$

и тогда в силу (2.5)

$$\left| \frac{\partial h_1}{\partial \xi} \right| \leq c(T, s)(1 + \xi^2)^{(2-3s)/2} (1 + \ln(1 + \xi^2)). \quad (2.31)$$

Далее,

$$I_2 = e^{it\xi^3} h_2(\xi; \tau) + \widetilde{\text{sign}} \xi (1 + \xi^6)^{(1-s)/2} e^{i(t-\tau)\xi^3} \pi i [\text{sign } \tau - 2\pi(\text{sign } \theta * \widehat{\eta}_0)(\tau)], \quad (2.32)$$

где

$$h_2 \equiv \widetilde{\text{sign}} \xi (1 + \xi^6)^{(1-s)/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{[(1 + \lambda^2)^{s/2} - (1 + \xi^6)^{s/2}](1 - \eta_0(\lambda - \xi^3)) e^{-i\tau\lambda}}{(\lambda - \xi^3)(1 + \lambda^2)^{s/2}} d\lambda.$$

Для функции h_2 , очевидно, справедлива та же оценка (2.28), что и для I_2 . Кроме того, используя элементарное неравенство

$$|(1 + \lambda^2)^{s/2} - (1 + b^2)^{s/2}| \leq c(s)|\lambda - b|(1 + b^2)^{(s-1)/2},$$

справедливое для $s \in (0, 1)$ и любых вещественных λ и b , выводим, что для $\partial h_2 / \partial \xi$ справедлива оценка (2.31).

Наконец, так как $|\xi^3 - \widetilde{\text{sign}} \xi (1 + \xi^6)^{1/2}| \leq \text{const}$, то в силу (2.5)

$$|I_3| \leq c(s)(1 + \xi^2)^{-3s/2} (1 + \ln(1 + \xi^2)). \quad (2.33)$$

Объединяя равенства (2.25)–(2.27), (2.29) и (2.32), выводим, что

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_x &= -\frac{1}{2\pi} (\mu_s * B_s)(t) \delta(x) \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mu_s(\tau) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + (t-\tau)\xi^3)} \eta_k \widetilde{h}_1 d\xi + \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + t\xi^3)} \eta_k h_2 d\xi \right. \\ &\left. + 2\pi \int_{\mathbb{R}} B_s(\tau - \theta) \widehat{\eta}_0(\theta) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + (t-\theta)\xi^3)} \eta_k d\xi d\theta + \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \eta_k I_3 d\xi \right] d\tau, \quad (2.34) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{h}_1(\xi; t, \tau) \equiv h_1 + \widetilde{\text{sign}} \xi (1 + \xi^6)^{(1-s)/2} \pi i [\text{sign } \tau - 2\pi (\text{sign } \theta * \hat{\eta}_0)(\tau)]. \quad (2.35)$$

Заметим, что при $s = 2/3 + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, 1/3)$, для функций $\tilde{h}_1$ и h_2 справедливы неравенства (2.7), (2.8) с $h_0 = c(T, \varepsilon)$. Кроме того, эти неравенства, очевидно, также выполнены для $h \equiv 1$. Тогда в силу леммы 2.3 из (2.34) (с учетом также (2.33)) следует, что

$$\tilde{J}_x = -\frac{1}{2\pi} \mu(t) \delta(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mu_s(\tau) J_k(x; t, \tau) d\tau, \quad (2.36)$$

где

$$|J_k| \leq c(T, \varepsilon, x_0) 2^{-\varepsilon k} (k+1) (1 + |t - \tau|^{\varepsilon-1} + |t|^{\varepsilon-1}), \quad (2.37)$$

откуда и вытекает оценка (2.24). Принадлежность J_x указанным пространствам вытекает из формулы (2.4). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\mu \in C_{0,+}^{\infty}$. Тогда для любых $T > 0$, $\varepsilon > 0$ и $0 < x_1 < x_0$,

$$\|J_{xx}\|_{L_1(0,T;C[-x_0,-x_1])} \leq c(T, \varepsilon, x_0, x_1) \|\mu\|_{H_1^{5/6+\varepsilon}}. \quad (2.38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично (2.25)

$$\tilde{J}_{xx} = \frac{i}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mu_s(\tau) \mathcal{F}^{-1}[\eta_k(\xi) \xi I(\xi; t, \tau)] d\tau,$$

где функция I определена формулой (2.26). Воспользовавшись равенствами (2.27), (2.29), (2.32) и (2.35), находим аналогично (2.34), что

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{xx} = & -\frac{1}{2\pi} (\mu_s * B_s)(t) \delta'(x) \\ & + \frac{i}{4\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mu_s(\tau) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + (t-\tau)\xi^3)} \eta_k \xi \tilde{h}_1 d\xi + \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + t\xi^3)} \eta_k \xi h_2 d\xi \right. \\ & \left. + 2\pi \int_{\mathbb{R}} B_s(\tau - \theta) \hat{\eta}_0(\theta) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + (t-\theta)\xi^3)} \eta_k \xi d\xi d\theta + \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \eta_k \xi I_3 d\xi \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Нетрудно видеть, что при $s = 5/6 + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, 1/6)$, для функций $\xi \tilde{h}_1$ и ξh_2 справедливы неравенства (2.10), (2.11) с $h_0 = c(T, \varepsilon)$. Кроме того, эти неравенства, очевидно, выполнены и для $h \equiv \xi$. Тогда в силу леммы 2.3 аналогично (2.36), (2.37) из равенства (2.39) выводим, что

$$\tilde{J}_{xx} = -\frac{1}{2\pi} \mu(t) \delta'(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mu_s(\tau) \tilde{J}_k(x; t, \tau) d\tau, \quad (2.40)$$

где для функций $\tilde{J}_k$ выполнены неравенства (2.37), но с константой, зависящей также и от x_1 . Кроме того, продифференцировав дважды равенство (2.4) по x , получим, что J_{xx} принадлежит указанному пространству. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из (2.36), (2.37) и (2.40) следует, что оценки (2.24) и (2.38) можно немного усилить, а именно заменить в их левых частях нормы $L_1(0, T; C[\cdot])$ на $L_p(0, T; C[\cdot])$, где $p < 1/(1 - \varepsilon)$.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\mu \in C_{0,+}^\infty$. Тогда существуют такие положительные константы c_1 , c_2 и c_3 , что

$$\|J_x\|_{L_2(\mathbb{R}_+^t \times \mathbb{R}_+^x)} = c_1 \| |\xi|^{1/6} \widehat{\mu}(\xi) \|_{L_2}, \quad (2.41)$$

для любого $x \leq 0$

$$c_2 \| |\xi|^{1/3} \widehat{\mu}(\xi) \|_{L_2} \leq \|J_x\|_{L_2(\mathbb{R}_+^t)} \leq c_3 \| |\xi|^{1/3} \widehat{\mu}(\xi) \|_{L_2} \quad (2.42)$$

и при этом J принадлежит пространству $C(\overline{\mathbb{R}}_-^x; L_2(\mathbb{R}_+^t))$ (как функция аргумента x со значениями в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ по переменной t).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим функцию J нулем при $t < 0$. Тогда согласно (2.4) при любом $x \neq 0$ в пространстве S' (по t)

$$J_x = -c_\pm D_t (G(\cdot, x) \vartheta(\cdot) * \mu)(t),$$

где $G(t, x) \equiv t^{-1/3} A(xt^{-1/3})$ при $t > 0$, $\vartheta(t)$ — функция Хевисайда. Рассмотрим преобразование Фурье функции J_x по переменной t при фиксированном x . Тогда поскольку согласно (1.14)

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t\xi^3 + x\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{6\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t\lambda + x\lambda^{1/3})} \lambda^{-2/3} d\lambda \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{F}_t^{-1} [\lambda^{-2/3} e^{ix\lambda^{1/3}}], \end{aligned}$$

то (см. [19])

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t[J_x](\lambda) &= -c_\pm i \lambda \mathcal{F}_t[G(\cdot, x) \vartheta(\cdot)](\lambda) \widehat{\mu}(\lambda) \\ &= \frac{2\pi c_\pm}{3} \left\{ -i\pi \lambda^{1/3} e^{ix\lambda^{1/3}} + \lambda \text{ v. p. } \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^{-2/3} e^{ix\xi^{1/3}}}{\xi - \lambda} d\xi \right\} \widehat{\mu}(\lambda). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Последний интеграл можно вычислить методами комплексного анализа с использованием леммы Жордана. При $x \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} &\text{v. p. } \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^{-2/3} e^{ix\xi^{1/3}}}{\xi - \lambda} d\xi \\ &= 3 \text{ v. p. } \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixz}}{z^3 - \lambda} dz \\ &= \pi i \operatorname{sign} x (\lambda^{-2/3} e^{ix\lambda^{1/3}} - \lambda^{-2/3} e^{-(ix\lambda^{1/3} + \sqrt{3}|x\lambda^{1/3}|)/2} (1 - i\sqrt{3} \operatorname{sign} \lambda \operatorname{sign} x)). \end{aligned}$$

Продолжая с помощью полученной формулы равенство (2.43), находим, что при $x > 0$

$$\mathcal{F}_t[J_x](\lambda) = -2\pi^2 i \lambda^{1/3} e^{-(ix\lambda^{1/3} + \sqrt{3}x|\lambda^{1/3}|)/2} (1 - i\sqrt{3} \operatorname{sign} \lambda) \widehat{\mu}(\lambda), \quad (2.44)$$

а при $x < 0$

$$\mathcal{F}_t[J_x](\lambda) = \pi^2 i \{ 2\lambda^{-2/3} e^{ix\lambda^{1/3}} - \lambda^{1/3} e^{(-ix\lambda^{1/3} + \sqrt{3}x|\lambda^{1/3}|)/2} (1 + i\sqrt{3} \operatorname{sign} \lambda) \} \widehat{\mu}(\lambda). \quad (2.45)$$

Таким образом, применяя равенство Парсеваля, из (2.44) выводим, что

$$\begin{aligned} \|J_x\|_{L_2(\mathbb{R}_+^t \times \mathbb{R}_+^x)}^2 &= 8\pi^3 \int_{\mathbb{R}} \lambda^{2/3} |\widehat{\mu}(\lambda)|^2 \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\sqrt{3}x|\lambda^{1/3}|} dx d\lambda \\ &= c_1 \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{1/3} |\widehat{\mu}(\lambda)|^2 d\lambda, \end{aligned}$$

а из (2.45) – что при $x < 0$

$$\|J_x\|_{L_2(\mathbb{R}_+^t)}^2 = 2\pi^3 \int_{\mathbb{R}} \lambda^{2/3} \left| 1 - \frac{1}{2} e^{(-3ix\lambda^{1/3} + \sqrt{3}x|\lambda^{1/3}|)/2} (1 + i\sqrt{3} \operatorname{sign} \lambda) \right|^2 |\widehat{\mu}(\lambda)|^2 d\lambda,$$

откуда, очевидно, следуют (2.41), (2.42). Принадлежность J_x указанному пространству вытекает из (2.4). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Оценка (2.41) является аналогом оценки для теплового потенциала, полученной в [13].

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если $\mu \in C_{0,+}^\infty$, то для любого $T > 0$

$$\|J_x\|_{L_2(\Pi_T^+)} \leq c \|\mu\|_{W_2^{1/6}(0,T)}, \quad (2.46)$$

$$\sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}_-} \|J_x\|_{L_2(0,T)} \leq c \|\mu\|_{W_2^{1/3}(0,T)}. \quad (2.47)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В силу леммы 2.1 оценки (2.17), (2.23) и (2.46), очевидно, справедливы, если функция μ принадлежит тем пространствам, нормы которых присутствуют в их правых частях.

Теперь, после получения необходимых оценок, можно перейти к определению потенциала J при $x < 0$ для негладкой функции μ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mu \in \Gamma_\varepsilon(0, T)$ для некоторых $T > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1/6)$. Пусть $\{\mu_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность функций из $C_{0,+}^\infty$, сходящаяся к μ в $\Gamma_\varepsilon(0, T)$. Тогда определим $J(t, x; \mu)$ в Π_T^- как функцию такую, что

$$\begin{aligned} J &= \lim_{n \rightarrow \infty} J(t, x; \mu_n) \quad \text{в } C([0, T]; L_2, -), \\ J_x &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_x(t, x; \mu_n) \quad \text{в } C(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(0, T)). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. В силу доказанного выше указанная в определении 2.1 функция J существует, не зависит от выбора последовательности μ_n , для нее справедливо неравенство (2.47) и, кроме того, для данных $T > 0$, $\varepsilon > 0$ и произвольных $0 < x_1 < x_0$,

$$\|J\|_{C([0,T];L_2,-)} \leq c(T,\varepsilon)\|\mu\|_{W_1^{5/6+\varepsilon}(0,T)}, \quad (2.48)$$

$$\|J_x\|_{L_1(0,T;C[-x_0,0])} \leq c(T,\varepsilon,x_0)\|\mu\|_{W_1^{2/3+\varepsilon}(0,T)}, \quad (2.49)$$

$$\|J_{xx}\|_{L_1(0,T;C[-x_0,-x_1])} \leq c(T,\varepsilon,x_0,x_1)\|\mu\|_{W_1^{5/6+\varepsilon}(0,T)}. \quad (2.50)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Формулы (2.41) и (2.42) означают точность полученных в лемме 2.7 оценок J_x в норме L_2 . Приведем теперь пример, показывающий точность некоторых других установленных оценок по крайней мере в шкалах рассматриваемых в них пространств. Положим $\mu(t) = 1$ при $t \in [0, \delta]$, $\mu(t) = 0$ при $t > \delta$ для некоторого $\delta \in (0, 1)$. Тогда нетрудно получить, что для $T \geq \delta$

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{L_p(0,T)} &= \delta^{1/p} && \text{при } 1 \leq p \leq +\infty; \\ \|\mu\|_{W_p^s(0,T)} &\leq c(T,p,s)\delta^{1/p-s} && \text{при } 0 < s < 1, 1 \leq p < +\infty, sp < 1; \\ \|\mu\|_{H_1^s} &\leq c(s)\delta^{1-s} && \text{при } 0 < s < 1. \end{aligned}$$

Далее, для данной функции μ при $t \in [0, \delta]$

$$\begin{aligned} J(t, x; \mu) &= -3\tilde{A}_+ \left(\frac{x}{t^{1/3}} \right) && \text{при } x > 0, \\ J(t, x; \mu) &= \frac{3}{2}\tilde{A}_- \left(\frac{x}{t^{1/3}} \right) && \text{при } x < 0 \end{aligned}$$

(см. (1.13) и (2.4)). Пусть $\Omega_{x_0,+} = (0, x_0)$, $\Omega_{x_0,-} = (-x_0, 0)$ для любого $x_0 \in (0, +\infty]$. Тогда

$$\|J\|_{C([0,T];L_2(\Omega_{x_0,\pm}))} \geq \|J|_{t=\delta}\|_{L_2(\Omega_{x_0,\pm})} = c\left\|\tilde{A}_\pm \left(\frac{x}{\delta^{1/3}} \right)\right\|_{L_2(\Omega_{x_0,\pm})} \geq c(x_0)\delta^{1/6}.$$

Следовательно, в неравенствах (2.17), (2.18) и (2.48) нормы μ в $L_{6+\varepsilon}(0, T)$, $H_1^{5/6+\varepsilon}$ и $W_1^{5/6+\varepsilon}(0, T)$ нельзя заменить на нормы в $L_{6-\varepsilon}(0, T)$, $H_1^{5/6-\varepsilon}$ и $W_1^{5/6-\varepsilon}(0, T)$ соответственно. Кроме того,

$$\|J_x\|_{L_1(0,T;C(\overline{\mathbb{R}}_+))} \geq \|J_x\|_{L_1(0,\delta;C(\overline{\mathbb{R}}_+))} = 3 \int_0^\delta \frac{1}{t^{1/3}} \sup_{x \geq 0} A \left(\frac{x}{t^{1/3}} \right) dt = \frac{9}{2} A(0) \delta^{2/3},$$

откуда следует, что в оценке (2.24) норму μ в $W_1^{1/3}(0, T)$ нельзя заменить на норму в $W_1^{1/3-\varepsilon}(0, T)$.

В заключение этого параграфа приведем еще одну лемму о свойствах потенциала J при $x < 0$.

ЛЕММА 2.8. Пусть $\mu \in \Gamma_\varepsilon(0, T)$ для некоторых $T > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1/6)$. Тогда для любой функции $\varphi(t, x)$ из пространства $C^\infty([0, T]; S_{\text{exp}}^b, -)$ при некотором $b > 0$ такой, что $\varphi|_{x=0} = \varphi|_{t=T} = 0$, справедливо равенство

$$\iint_{\Pi_T^-} J(\varphi_t + \varphi_{xx}) dx dt + \int_0^T (J_x(t, 0; \mu)\varphi_x(t, 0) - \mu(t)\varphi_{xx}(t, 0)) dt = 0. \quad (2.51)$$

Для доказательства достаточно считать в силу определения 2.1, что $\mu \in C_{0,+}^\infty$, воспользоваться формулой (2.4) и учесть тот факт, что согласно [11] $\tilde{A}_-(0) = 2/3$.

§ 3. Смешанная задача для линеаризованного уравнения КдФ

Рассмотрим смешанную задачу в полуполосе Π_T^- для линеаризованного уравнения КдФ

$$v_t + v_{xxx} + av_x = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_T^-, \quad (3.1)$$

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad v|_{x=0} = v_1(t), \quad v_x|_{x=0} = v_2(t). \quad (3.2)$$

Пусть $v_0 \in (S_{\text{exp}, -}^b)'$, $f \in (C^\infty([0, T]; S_{\text{exp}, -}^b))'$ для некоторого $b > 0$, $v_1, v_2 \in L_1(0, T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функцию $v(t, x) \in (C^\infty([0, T]; S_{\text{exp}, -}^b))'$ будем называть *обобщенным решением* задачи (3.1), (3.2), если для любой функции $\varphi \in C^\infty([0, T]; S_{\text{exp}, -}^b)$ такой, что $\varphi|_{x=0} = 0$, $\varphi|_{t=T} = 0$, справедливо равенство

$$\langle v, \varphi_t + \varphi_{xxx} + a\varphi_x \rangle + \langle f, \varphi \rangle + \langle v_0, \varphi(0, x) \rangle + \int_0^T (v_2 \varphi_x(t, 0) - v_1 \varphi_{xx}(t, 0)) dt = 0. \quad (3.3)$$

ЛЕММА 3.1. *Обобщенное решение задачи (3.1), (3.2) единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сопряженную смешанную задачу в Π_T^-

$$\varphi_t + \varphi_{xxx} + a\varphi_x = g(t, x), \quad \varphi|_{t=T} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = 0,$$

где $g \in C_0^\infty(\Pi_T^-)$. Согласно [6] существует решение этой задачи $\varphi(t, x) \in C^\infty([0, T]; S_{\text{exp}, -}^b)$ для любого $b > 0$. Тогда, применяя стандартные рассуждения метода Хольмгрена, получаем требуемое утверждение.

Введем теперь следующие обозначения. Положим

$$V(t, x) \equiv v(t, x) - J(t, x; v_1) \eta_0(x).$$

Будем называть $\rho(x)$ допустимой весовой функцией, если $\rho \in C^3(\overline{\mathbb{R}}_-)$, $\rho(x) > 0$, $\rho'(x) \geq 0$, $|\rho^{(j)}(x)| \leq \beta \rho(x)$ для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}_-$, $j = 1, 2, 3$ и некоторой константы β . Условимся для удобства также считать, что $\rho(0) \leq \beta$.

Наконец, положим $\tilde{\Phi}_0(x) \equiv v_0(x)$, а для натуральных m

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_m(x) &\equiv D_t^{m-1} f(0, x) - \tilde{\Phi}_{m-1}'''(x) - a\tilde{\Phi}_{m-1}'(x) \\ &= (-1)^m (D_x^3 + aD_x)^m v_0(x) + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l-1} (D_x^3 + aD_x)^{m-l-1} D_t^l f(0, x). \end{aligned}$$

Перейдем к вопросам существования решения.

ЛЕММА 3.2. Пусть для некоторых $T > 0$, $\varepsilon \in (0, 1/6)$ и целого $k \geq 0$ функция $v_0 \in H_-^{3k}$, $v_1 \in \Gamma_{k+\varepsilon}(0, T)$, $v_2 \in H^k(0, T)$, $D_t^m f \in C([0, T]; H_-^{3(k-m-1)})$ для $0 \leq m \leq k-1$, $D_t^k f \in L_1(0, T; L_2, -)$, $\tilde{\Phi}_m(0) = v_1^{(m)}(0)$, $\tilde{\Phi}'_m(0) = v_2^{(m)}(0)$ для $0 \leq m \leq k-1$. Тогда существует (единственное) решение $v(t, x)$ задачи (3.1), (3.2) такое, что при $0 \leq m \leq k$ функция $D_t^m v \in C([0, T]; H_-^{3(k-m)})$ и является решением задачи типа (3.1), (3.2), где f , v_0 , v_1 , v_2 заменены на $D_t^m f$, $\tilde{\Phi}_m$, $v_1^{(m)}$, $v_2^{(m)}$ соответственно. Кроме того, $v_x(\rho')^{1/2} \in L_2(\Pi_T^-)$ для любой допустимой весовой функции ρ и при $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_-} V^2(t, x) \rho dx + 3 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} V_x^2 \rho' dx d\tau \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_-} v_0^2 \rho dx + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} f V \rho dx d\tau + c \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} V^2 \rho dx d\tau \\ & \quad + c \|v_1\|_{W_2^{1/3}(0, t)}^2 + c \|v_2\|_{L_2(0, t)}^2 \\ & \quad + c \sup_{\tau \in (0, t)} \left(\int_{\mathbb{R}_-} V^2 \rho dx \right)^{1/2} \|v_1\|_{W_1^{5/6+\varepsilon}(0, t)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где константа c зависит от T , a , ε и β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$F(t, x) \equiv f - 3J_{xx}\eta'_0 - 3J_x\eta''_0 - J\eta'''_0 - aJ_x\eta_0 - aJ\eta'_0, \quad V_2(t) \equiv v_2 - J_x|_{x=0},$$

где $J \equiv J(t, x; v_1)$. В силу (2.47)–(2.50) $F \in L_1(0, T; L_2, -)$, $V_2 \in L_2(0, T)$. Рассмотрим смешанную задачу в Π_T^-

$$V_t + V_{xxx} + aV_x = F, \quad V|_{t=0} = v_0, \quad V|_{x=0} = 0, \quad V_x|_{x=0} = V_2. \quad (3.5)$$

Пусть $\{\varphi_j(x), j = 1, 2, \dots\}$ – линейно независимая система функций из $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_-})$, полная в пространстве функций $\{\varphi \in H_-^3 : \varphi(0) = 0\}$. Будем искать приближенное решение V_n задачи (3.5) в виде суммы

$$V_n = \sum_{j=1}^n c_{nj}(t) \varphi_j(x),$$

исходя из условий

$$\int_{\mathbb{R}_-} [V_{nt}\varphi_m - V_n\varphi_m''' - aV_n\varphi_m' - F\varphi_m] dx - V_2(t)\varphi_m'(0) = 0 \quad (3.6)$$

для $t \in [0, T]$, $m = 1, 2, \dots, n$; $V_n(0, x) \rightarrow v_0$ в L_2 .

Очевидно, что такая функция V_n существует. Умножив (3.6) на $2c_{nm}$ и просуммировав по m , получим, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_-} V_n^2 dx + V_{nx}^2|_{x=0} - 2 \int_{\mathbb{R}_-} F V_n dx - 2 V_2 V_{nx}|_{x=0} = 0,$$

откуда следует, что

$$\|V_n\|_{L_\infty(0,T;L_2,-)} \leq c. \quad (3.7)$$

Выделим согласно (3.7) подпоследовательность $n_k \rightarrow \infty$ такую, что

$$V_{n_k} \rightarrow V \quad * \text{-слабо в } L_\infty(0,T;L_2,-).$$

Очевидно, что функция V является решением задачи (3.5) в смысле соответствующего интегрального тождества типа (3.3). Воспользовавшись леммой 2.8, выводим, что соответствующая функция v является решением задачи (3.1), (3.2) из пространства $L_\infty(0,T;L_2,-)$.

Для каждого $0 \leq m \leq k$ рассмотрим задачу

$$v_{mt} + v_{mxxx} + av_{mx} = D_t^m f, \quad v_m|_{t=0} = \tilde{\Phi}_m, \quad v_m|_{x=0} = v_1^{(m)}, \quad v_{mx}|_{x=0} = v_2^{(m)}. \quad (3.8)$$

Заметим, что $\tilde{\Phi}_m \in H_-^{3(k-m)}$. Поэтому, как доказано выше, существует решение $v_m(t, x) \in L_\infty(0,T;L_2,-)$ каждой из этих задач. Используя определение $\tilde{\Phi}_m$, условия согласования и лемму 3.1, нетрудно получить, что $v_m = D_t^m v$. Таким образом, функция v обладает для $0 \leq m \leq k$ производными $D_t^m v \in L_\infty(0,T;L_2,-)$, являющимися решениями задач (3.8).

Докажем неравенство (3.4) в предположении, что решение $v \in C^\infty([0,T];H_-^\infty)$. Умножая (3.5) на $2V(t, x)\rho(x)$ и интегрируя по $\mathbb{R}_-$, получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_-} V^2 \rho dx + 3 \int_{\mathbb{R}_-} V_x^2 \rho' dx - \int_{\mathbb{R}_-} V^2 \rho''' dx \\ - V^2 \rho(0) + a \int_{\mathbb{R}_-} V^2 \rho' dx = 2 \int_{\mathbb{R}_-} FV \rho dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Используя определение функций F и V_2 , а также оценки (2.47)–(2.50) (заметим, что $\text{supp } \eta'_0 \subset [-2, -1]$), выводим из (3.9) неравенство (3.4).

Возвращаясь к негладкому случаю, для любого $h > 0$ рассмотрим функции $v_{0h}(x) \equiv v_0^h(x)\eta(-x/h)$, $v_{1h}(t) \equiv v_1^h(t)\eta(t/h)$, $v_{2h}(t) \equiv v_2^h(t)\eta(t/h)$, $f_h(t, x) \equiv f^h(t, x)\eta(t/h)$. Нетрудно видеть, что для задачи типа (3.1), (3.2), где v_j, f заменены на v_{jh}, f_h , выполнены условия леммы 3.2 для любого k и, следовательно, существует решение этой задачи $v_h(t, x)$ такое, что $D_t^m v_h \in L_\infty(0,T;L_2,-)$ для любого m . Используя само уравнение (3.1), находим, что $v_h \in C^\infty([0,T];H_-^\infty)$. Перейдя к пределу при $h \rightarrow 0$, получим, что $v \in C([0,T];L_2,-)$, $v_x(\rho')^{1/2} \in L_2(\Pi_T^-)$ для любой допустимой весовой функции ρ и справедливо неравенство (3.4).

Осталось показать, что $D_t^m v \in C([0,T];H_-^{3(k-m)})$ для $0 \leq m \leq k$. Для этого докажем индукцией по $j = k - m$, что $D_t^l v \in C([0,T];H_-^{3(k-m)})$ для $0 \leq l \leq m \leq k$. При $j = 0$ это утверждение уже доказано. Далее, при $j \geq 1$

$$D_t^l v_{xxx} = -D_t^{l+1} v - aD_t^l v_x + D_t^l f. \quad (3.10)$$

В силу индуктивного предположения правая часть (3.10) принадлежит $C([0,T];H_-^{3(k-m-1)-1})$, откуда следует, что $D_t^l v \in C([0,T];H_-^{3(k-m-1)+2})$. Еще раз используя (3.10), завершаем доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Предположим, что $v_0 \in L_{2,-}$, $v_1 \in \Gamma_\varepsilon(0, T)$, $v_2 \in L_2(0, T)$, $f \in L_1(0, T; L_{2,-})$ для некоторых $T > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1/6)$. Тогда существует решение $v(t, x)$ задачи (3.1), (3.2) из пространства $\tilde{X}_T$ и для любого $t_0 \in (0, T]$*

$$\|v\|_{\tilde{X}_{t_0}} \leq c(T, a, \varepsilon) (\|v_0\|_{L_{2,-}} + \|v_1\|_{\Gamma_\varepsilon(0, T)} + \|v_2\|_{L_2(0, T)} + \|f\|_{L_1(0, t_0; L_{2,-})}). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение вытекает из леммы 3.2 при $k = 0$, если в неравенстве (3.4) в качестве весовой функции ρ выбрать функцию $\tilde{\rho}_n(x) \equiv 1 + \eta((2x + 2n + 5)/8)$ для любого целого $n \geq 0$ (тогда $\tilde{\rho}'_n(x) \geq \text{const} > 0$ при $x \in [-n - 1, -n]$), и оценок (2.47), (2.48).

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пусть $v_0 \exp(bx) \in L_{2,-}$, $v_1 \in \Gamma_\varepsilon(0, T)$, $v_2 \in L_2(0, T)$, $f \exp(bx) \in L_1(0, T; L_{2,-})$ для некоторых $T > 0$, $b > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1/6)$. Тогда существует (единственное) решение задачи (3.1), (3.2) такое, что $v \exp(bx) \in C([0, T]; L_{2,-})$, $v_x \exp(bx) \in L_2(\Pi_T^-)$ и при $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_-} V^2(t, x) e^{2bx} dx + 6b \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} V_x^2 e^{2bx} dx d\tau \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_-} v_0^2 e^{2bx} dx + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} f V e^{2bx} dx d\tau \\ & \quad + c \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} V^2 e^{2bx} dx d\tau + c \|v_1\|_{W_2^{1/3}(0, t)}^2 + c \|v_2\|_{L_2(0, t)}^2 \\ & \quad + c \sup_{\tau \in (0, t)} \left(\int_{\mathbb{R}_-} V^2 e^{2bx} dx \right)^{1/2} \|v_1\|_{W_1^{5/6+\varepsilon}(0, t)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $c = c(T, a, \varepsilon, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $n \geq 1$ положим $f_n(t, x) \equiv f(t, x)\eta(x + n)$, $v_{0n}(x) \equiv v_0(x)\eta(x + n)$ и рассмотрим задачу

$$v_t + v_{xxx} + av_x = f_n, \quad v|_{t=0} = v_{0n}, \quad v|_{x=0} = v_1, \quad v_x|_{x=0} = v_2. \quad (3.13)$$

Заметим, что $f_n \in L_1(0, T; L_{2,-})$, $v_{0n} \in L_{2,-}$, и поэтому согласно лемме 3.2 существует решение $v_n(t, x)$ задачи (3.13), причем $v_n \in C([0, T]; L_{2,-})$, $v_{nx} \exp(bx) \in L_2(\Pi_T^-)$ (очевидно, что $\exp(2bx)$ — допустимая весовая функция). Кроме того, для v_n справедливо неравенство (3.4) с $\rho \equiv \exp(2bx)$. Тогда

$$\|v_n e^{bx}\|_{C([0, T]; L_{2,-})} + \|v_{nx} e^{bx}\|_{L_2(\Pi_T^-)} \leq c$$

и предельным переходом при $n \rightarrow +\infty$ получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 3.3. Пусть $v_0 \in H_-^2$, $v_1 \in H^1(0, T)$, $v_2 \in W_{4/3}^1(0, T)$, $f \in L_2(0, T; H_-^2)$, $v_0(0) = v_1(0)$, $v_0'(0) = v_2(0)$ для некоторого $T > 0$. Тогда существует (единственное) решение $v(t, x)$ задачи (3.1), (3.2) такое, что $v \in C([0, T]; H_-^2)$ и $v_{xxx}(\rho')^{1/2} \in L_2(\Pi_T^-)$ для любой допустимой весовой функции ρ . При этом если ρ – допустимая весовая функция такая, что $\rho(x) \geq 1$ для любого $x \leq 0$ и $\rho'(x) \geq \beta_1$ при $x \in [-x_0, 0]$ для некоторых $x_0 > 0$, $\beta_1 > 0$, то при $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2(t, x) \rho dx + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} v_{xxx}^2 \rho' dx d\tau \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_-} v_{0xx}^2 \rho dx + c \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho dx d\tau + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} f_{xx} v_{xx} \rho dx d\tau \\ & \quad + c \int_0^t f^2(\tau, 0) d\tau + c \int_0^t ((v_1')^2 + v_2^2) d\tau \\ & \quad + c \int_0^t (|v_2'|^{4/3} + |f_x(\tau, 0)|^{4/3}) \left(\int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho dx \right)^{1/3} d\tau, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $c = c(T, a, \beta, x_0, \beta_1)$. Кроме того, при $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & \frac{5}{6} \int_{\mathbb{R}_-} v^2(t, x) v_{xx}(t, x) \rho dx - 5 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} v_x v_{xx}^2 \rho dx d\tau \\ & \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} v_{xxx}^2 \rho' dx d\tau + \int_0^t \left(\sup_{x \in \mathbb{R}_-} f^2(\tau, x) + \int_{\mathbb{R}_-} f^2(\tau, x) dx \right) d\tau \\ & \quad + c \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho dx d\tau + c, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $c = c(T, a, \beta, x_0, \beta_1, \|v_0\|_{H_-^2}, \|v_1\|_{H^1(0, T)}, \|v_2\|_{W_{4/3}^1(0, T)}, \|v\|_{C([0, T]; L_2, -)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует решение v задачи (3.1), (3.2) из пространства $C^\infty([0, T]; H^\infty)$, и докажем для него оценки (3.14), (3.15). Умножив (3.1) на $2v_{xxx}(t, x)\rho(x)$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}_-$, получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho dx + 3 \int_{\mathbb{R}_-} v_{xxx}^2 \rho' dx - \int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho''' dx \\ & - a \int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho' dx + 2(v_t v_{xxx} \rho - v_{tx} v_{xx} \rho - v_t v_{xx} \rho')|_{x=0} \\ & + (v_{xxx}^2 \rho - 4v_{xxx} v_{xx} \rho' + v_{xx}^2 \rho'' + 2av_{xxx} v_x \rho - av_{xx}^2 \rho - 2av_{xx} v_x \rho')|_{x=0} \\ & = 2 \int_{\mathbb{R}_-} f_{xx} v_{xx} \rho dx + 2(f v_{xxx} \rho - f_x v_{xx} \rho - f v_{xx} \rho')|_{x=0}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Если ρ обладает указанными дополнительными свойствами, то

$$|v_{xx}|_{x=0} \leq c(x_0, \beta_1) \left[\left(\int_{\mathbb{R}_-} v_{xxx}^2 \rho' dx \right)^{1/4} \left(\int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho dx \right)^{1/4} + \left(\int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho dx \right)^{1/2} \right], \quad (3.17)$$

и тогда, в частности,

$$\begin{aligned} |2(v_{tx}v_{xx}\rho + v_tv_{xx}\rho')|_{x=0}| &\leq \delta \int_{\mathbb{R}_-} v_{xxx}^2 \rho' dx + c(\delta)|v_2'|^{4/3} \left(\int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho dx \right)^{1/3} \\ &\quad + c(\delta) \int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho dx + c(\delta)(v_1')^2, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Аналогично оценивается

$$2(f_x v_{xx}\rho + f v_{xx}\rho')|_{x=0}.$$

Тогда из (3.16) следует неравенство (3.14).

Далее, умножив (3.1) на $\frac{5}{3}(v_x^2(t, x) + 2v(t, x)v_{xx}(t, x))\rho(x)$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}_-$, получим равенство

$$\begin{aligned} &\frac{5}{6} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_-} v^2 v_{xx} \rho dx - 5 \int_{\mathbb{R}_-} v_x v_{xx}^2 \rho dx + 5 \int_{\mathbb{R}_-} v v_x v_{xxx} \rho' dx - \frac{5}{6} \int_{\mathbb{R}_-} v^2 v_{xx} \rho''' dx \\ &+ \frac{5}{6} \int_{\mathbb{R}_-} (4v v_x \rho' + v^2 \rho'')(av_x - f) dx + \frac{5}{3} a \int_{\mathbb{R}_-} v_x (v_x^2 + 2v v_{xx}) \rho dx \\ &+ \frac{5}{6} (2v v_t v_x \rho - v^2 v_{tx} \rho + v^2 v_t \rho' + v^2 v_{xx} \rho'' - 2v v_x v_{xx} \rho' + 2v_x^2 v_{xx} \rho + 2v v_{xx}^2 \rho)|_{x=0} \\ &= \frac{5}{3} \int_{\mathbb{R}_-} f(v_x^2 + 2v v_{xx}) \rho dx. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Нетрудно показать, что любой из интегралов, входящих в равенство (3.18), кроме первых двух в его левой части, может быть оценен через

$$\begin{aligned} &\delta \int_{\mathbb{R}_-} v_{xxx}^2 \rho' dx + c(\delta, a, \beta) \left[\int_{\mathbb{R}_-} v_{xx}^2 \rho dx + \left(\int_{\mathbb{R}_-} v^2 dx \right)^5 \right. \\ &\quad \left. + \sup_{x \in \mathbb{R}_-} f^2 \int_{\mathbb{R}_-} v^2 dx + \int_{\mathbb{R}_-} f^2 dx + 1 \right], \end{aligned}$$

где $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Применяя неравенство (3.17) для оценки внеинтегральных членов, содержащих v_{xx} , выводим из (3.18) неравенство (3.15).

Возвращаясь к негладкому случаю, для любого $h > 0$ положим

$$v_{0h}(x) \equiv (v_0(x) - (v_0(0) + v_0'(0)x)\eta_0(x))^h \eta(-x/h) + (v_0(0) + v_0'(0)x)\eta_0(x),$$

$v_{jh}(t) \equiv (v_j(t) - v_j(0))^h \eta(t/h) + v_j(0)$ для $j = 1, 2$, $f_h(t, x) \equiv f^h(t, x)\eta(t/h)$ и рассмотрим семейство решений $v_h(t, x)$ соответствующих задач типа (3.1), (3.2), где v_j, f заменены на v_{jh}, f_h . Тогда, используя неравенства (3.14), (3.15) для гладких решений, предельным переходом при $h \rightarrow 0$ получаем утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть выполнены условия леммы 3.3. Тогда существует решение $v(t, x)$ задачи (3.1), (3.2) из пространства X_T и для любого $t_0 \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \|v\|_{X_{t_0}} \leq c(T, a) & (\|v_0\|_{H_-^2} + \|v_1\|_{H^1(0, T)} + \|v_2\|_{W_{4/3}^1(0, T)} \\ & + \|f\|_{L_1(0, t_0; H_-^2)} + \|f|_{x=0}\|_{L_2(0, t_0)} + \|f_x|_{x=0}\|_{L_{4/3}(0, t_0)}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(t, x) \in C([0, T]; H_-^2)$ – решение задачи (3.1), (3.2), построенное в лемме 3.3. Тогда, положив в неравенстве (3.14)

$$\rho(x) = \rho_n(x) \equiv 1 + \eta\left(\frac{2x+5}{8}\right) + \eta\left(\frac{2x+2n+5}{8}\right),$$

находим, что $\|v_{xx}\|_{C([0, t_0]; L_{2,-})}$ и $\lambda_0(v_{xxx}; t_0)$ оцениваются через правую часть неравенства (3.19).

Осталось оценить $\lambda_2(v; t_0)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \lambda_2(v; t_0) & \leq \sup_{(t,x) \in [0, t_0] \times [-1, 0]} |v(t, x)| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{(t,x) \in [0, t_0] \times [-n-1, -n]} v^2(t, x) \right)^{1/2} \\ & \equiv \lambda_{2,0}(v; t_0) + \lambda_{2,1}(v; t_0). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\lambda_{2,0}(v; t_0) \leq c\|v\|_{C([0, t_0]; H_-^2)}.$$

Положим $\tilde{v}(t, x) \equiv v(t, x)\eta(-x)$, тогда функция $\tilde{v}$ во всей полосе $(0, T) \times \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{v}_t + \tilde{v}_{xxx} = \tilde{f} \equiv f\eta(-x) - av_x\eta(-x) - 3v_{xx}\eta'(-x) + 3v_x\eta''(-x) - v\eta'''(-x).$$

Заметим, что

$$\|\tilde{f}\|_{L_1(0, t_0; H^1)} \leq c\|f\|_{L_1(0, t_0; H_-^1)} + c(T) \left[\|v\|_{C([0, T]; H_-^2)} + \left(\int_0^{t_0} \int_{-1}^0 v_{xxx}^2 dx dt \right)^{1/2} \right].$$

Тогда, используя соответствующую оценку решения задачи Коши для линеаризованного уравнения КдФ из статьи [14], получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda_{2,1}(v; t_0) & = \lambda_{2,1}(\tilde{v}; t_0) \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sup_{(t,x) \in [0, t_0] \times [n, n+1]} \tilde{v}^2(t, x) \right)^{1/2} \\ & \leq c(T) (\|v_0\|_{H_-^1} + \|f\|_{L_1(0, t_0; H_-^1)} + \|v\|_{C([0, t_0]; H_-^2)} + \lambda_0(v_{xxx}; t_0)). \end{aligned}$$

С учетом того, что $\|v\|_{C([0, t_0]; H_-^2)}$ и $\lambda_0(v_{xxx}; t_0)$ уже оценены, получаем требуемую оценку для $\lambda_2(v; t_0)$. Следствие доказано.

§ 4. Обобщенные решения смешанной задачи для уравнения КдФ

Рассмотрим смешанную задачу (1.1)–(1.3) в полуполосе Π_T^- . Дадим прежде всего определение обобщенного решения. Пусть $u_0 \in L_{2,-}$, $u_1, u_2 \in L_1(0, T)$, $f \in L_1(0, T; L_{2,-})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функция $u(t, x) \in L_\infty(0, T; L_{2,-})$ называется *обобщенным решением* задачи (1.1)–(1.3), если для любой функции $\varphi(t, x)$ такой, что $\varphi, \varphi_t, \varphi_{xxx} \in L_\infty(0, T; L_{2,-})$, $\varphi|_{t=T} = 0$, $\varphi|_{x=0} = 0$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_T^-} \left(u\varphi_t + u\varphi_{xxx} + au\varphi_x + \frac{1}{2}u^2\varphi_x + f\varphi \right) dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}_-} u_0\varphi(0, x) dx + \int_0^T (u_2\varphi_x(t, 0) - u_1\varphi_{xx}(t, 0)) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из равенства (4.1) следует, что обобщенное решение в смысле определения 4.1 можно таким образом изменить на множестве нулевой меры, чтобы $u \in C_w([0, T]; L_{2,-})$. При этом $u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ слабо в $L_{2,-}$ при $t \rightarrow +0$.

Введем следующее обозначение. Положим

$$U(t, x) \equiv u(t, x) - J(t, x; u_1)\eta_0(x).$$

Установим априорные оценки решений.

ЛЕММА 4.1. Пусть $u_0 \in H_-^2$, $u_1 \in H^1(0, T)$, $u_2 \in W_{4/3}^1(0, T)$, $f \in L_2(0, T; H_-^2)$ для некоторого $T > 0$. Предположим, что для некоторого $T' \in (0, T]$ функция $u(t, x)$ является в $\Pi_{T'}^-$ решением задачи (1.1)–(1.3) и, кроме того, $u \in X_{T'}$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/6)$

$$\|u\|_{\tilde{X}_{T'}} \leq c(T, a, \varepsilon, \|u_0\|_{L_{2,-}}, \|u_1\|_{H^1(0, T)}, \|u_2\|_{L_2(0, T)}, \|f\|_{L_1(0, T; L_{2,-})}), \quad (4.2)$$

$$\|u\|_{C([0, T']; H_-^2)} \leq c(T, a, \|u_0\|_{H_-^2}, \|u_1\|_{H^1(0, T)}, \|u_2\|_{W_{4/3}^1(0, T)}, \|f\|_{L_2(0, T; H_-^2)}). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $u \in X_{T'}$, то $uu_x \in L_2(0, T'; H_-^2)$, так как

$$\|uu_x\|_{L_2(0, T'; H_-^2)} \leq c_1(\|u\|_{C([0, T']; H_-^2)}^2 + \lambda_2(u; T')\lambda(u_{xxx}; T')) \leq c_2\|u\|_{X_{T'}}^2. \quad (4.4)$$

Функцию u можно рассматривать как решение линейной задачи типа (3.1), (3.2), где f заменено на $(f - uu_x)$. Тогда очевидно, что для этой задачи выполнены условия леммы 3.2 при $k = 0$ и леммы 3.3. Воспользуемся неравенством (3.4), тогда при $t \in [0, T']$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_-} U^2(t, x)\rho dx + 3 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} U_x^2 \rho' dx d\tau \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_-} u_0^2 \rho dx + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} (f - uu_x)U\rho dx d\tau \\ & + c \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} U^2 \rho dx d\tau + c\|u_1\|_{W_2^{1/3}(0, t)}^2 + c\|u_2\|_{L_2(0, t)}^2 \\ & + c \sup_{\tau \in (0, t)} \left(\int_{\mathbb{R}_-} U^2 \rho dx \right)^{1/2} \|u_1\|_{W_1^{5/6+\varepsilon}(0, t)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-} uu_x U \rho \, dx &= -\frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}_-} U^3 \rho' \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_-} (J\eta_0)_x U^2 \rho \, dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_-} J\eta_0 U^2 \rho' \, dx + \int_{\mathbb{R}_-} J\eta_0 (J\eta_0)_x U \rho \, dx. \end{aligned}$$

Полагая в (4.5) $\rho(x) \equiv 1$ и используя оценки (2.48), (2.49), выводим, что

$$\|u\|_{C([0,T'];L_{2,-})} \leq c. \quad (4.6)$$

Еще раз воспользуемся неравенством (4.5), на этот раз для

$$\rho(x) = \tilde{\rho}_n(x) \equiv 1 + \eta\left(\frac{2x + 2n + 5}{8}\right)$$

при любом целом $n \geq 0$. Тогда поскольку с учетом уже доказанной оценки (4.6)

$$\left| \int_{\mathbb{R}_-} U^3 \tilde{\rho}'_n \, dx \right| \leq c \sup_{x \in \mathbb{R}_-} |U(\tilde{\rho}'_n)^{1/2}| \int_{\mathbb{R}_-} U^2 \, dx \leq c_1 \left(\int_{\mathbb{R}_-} U_x^2 \tilde{\rho}_n \, dx \right)^{1/4} + c_2,$$

получаем, что

$$\lambda_0(u_x; T') \leq c. \quad (4.7)$$

Объединяя (4.6) и (4.7), выводим оценку (4.2).

Теперь воспользуемся для функции u неравенствами (3.14) и (3.15), где положим

$$\rho(x) = \rho_n(x) \equiv 1 + \eta\left(\frac{2x + 5}{8}\right) + \eta\left(\frac{2x + 2n + 5}{8}\right)$$

для любого целого $n \geq 0$. Тогда при $t \in [0, T']$ согласно (3.14)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_-} u_{xx}^2(t, x) \rho_n \, dx + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_{xxx}^2 \rho'_n \, dx \, d\tau \\ &\leq c \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_{xx}^2 \rho_n \, dx \, d\tau \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} (uu_x)_{xx} u_{xx} \rho_n \, dx \, d\tau + c \sup_{\tau \in (0, t)} \left(\int_0^t u_{xx}^2 \rho_n \, dx \right)^{1/3} \\ &\quad + c \int_0^t |(uu_x)_x|_{x=0}|^{4/3} \left(\int_{\mathbb{R}_-} u_{xx}^2 \rho_n \, dx \right)^{1/3} d\tau + c, \end{aligned} \quad (4.8)$$

а согласно (3.15) с учетом уже доказанной оценки (4.6)

$$\begin{aligned} &\frac{5}{6} \int_{\mathbb{R}_-} u^2(t, x) u_{xx}(t, x) \rho_n \, dx - 5 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_x u_{xx}^2 \rho_n \, dx \, d\tau \\ &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_{xxx}^2 \rho'_n \, dx \, d\tau + c \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_{xx}^2 \rho_n \, dx \, d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left(\sup_{x \in \mathbb{R}_-} (u^2 u_x^2) + \int_{\mathbb{R}_-} u^2 u_x^2 \, dx \right) d\tau + c, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где c зависит от T , a и соответствующих норм функций u_0 , u_1 , u_2 и f . Заметим, что

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} (uu_x)_{xx} u_{xx} \rho_n dx d\tau \\ & = -5 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_x u_{xx}^2 \rho_n dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u u_{xx}^2 \rho'_n dx d\tau - \int_0^t u_1 u_{xx}^2(\tau, 0) \rho_n(0) d\tau. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Нетрудно видеть, что с учетом (4.6)

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u u_{xx}^2 \rho'_n dx d\tau \right| \\ & \leq \int_0^t \sup_{x \in \mathbb{R}_-} |u_{xx}(\rho'_n)^{1/2}| \left(\int_{\mathbb{R}_-} u_{xx}^2 \rho'_n dx \right)^{1/2} d\tau \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_{\mathbb{R}_-} u^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq \delta \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_{xxx}^2 \rho'_n dx d\tau + c(\delta) \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_{xx}^2 \rho_n dx d\tau, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Тогда, складывая (4.8)–(4.10) (и применяя также (3.17) для оценки $u_{xx}|_{x=0}$), выводим неравенство (4.3). Лемма доказана.

Теперь установим первый результат о нелокальной разрешимости и корректности.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $u_0 \in H_-^2$, $u_1 \in H^1(0, T)$, $u_2 \in W_{4/3}^1(0, T)$, $f \in L_2(0, T; H_-^2)$ для некоторого $T > 0$, $u_0(0) = u_1(0)$, $u'_0(0) = u_2(0)$. Тогда существует единственное обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) из пространства X_T . При этом отображение $(u_0, u_1, u_2, f) \mapsto u$ непрерывно в норме отображения $H_-^2 \times H^1(0, T) \times W_{4/3}^1(0, T) \times L_2(0, T; H_-^2)$ в X_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.1 достаточно доказать локальный результат, а именно существование $t_0 \in (0, T]$, зависящего от T , a , $\|u_0\|_{H_-^2}$, $\|u_1\|_{H^1(0, T)}$, $\|u_2\|_{W_{4/3}^1(0, T)}$ и $\|f\|_{L_2(0, T; H_-^2)}$, такого, что в $\Pi_{t_0}^-$ существует единственное решение u рассматриваемой задачи из пространства X_{t_0} и соответствующее отображение непрерывно.

Введем множество функций

$$Y_{t_0} = \{u \in X_{t_0} : u|_{x=0} = u_1, u_x|_{x=0} = u_2\}$$

и определим на нем отображение Λ следующим способом: $v = \Lambda u$, если $v \in Y_{t_0}$ и является решением линейной задачи

$$v_t + v_{xxx} + av_x = f - uu_x, \quad v|_{t=0} = u_0, \quad v|_{x=0} = u_1, \quad v_x|_{x=0} = u_2. \quad (4.11)$$

Как уже было показано в доказательстве леммы 4.1, если $u \in X_{t_0}$, то $uu_x \in L_2(0, T; H_-^2)$. Тогда в силу следствия 3.3 искомое решение v задачи (4.11) существует и согласно неравенству (3.19)

$$\begin{aligned} \|v\|_{X_{t_0}} &\leq c(T, a) (\|u_0\|_{H_-^2} + \|u_1\|_{H^1(0, T)} + \|u_2\|_{W_{4/3}^1(0, T)} + \|f\|_{L_2(0, T; H_-^2)} \\ &+ \|uu_x\|_{L_1(0, t_0; H_-^2)} + \|u_1 u_2\|_{L_2(0, T)} + \|u_2^2\|_{L_{4/3}(0, T)} + \|u_1 u_{xx}(t, 0)\|_{L_{4/3}(0, t_0)}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Используя неравенство (4.4), находим, что

$$\|uu_x\|_{L_1(0, t_0; H_-^2)} \leq ct_0^{1/2} \|u\|_{X_{t_0}}^2.$$

Кроме того, согласно (3.17)

$$\|u_{xx}(t, 0)\|_{L_{4/3}(0, t_0)} \leq ct_0^{1/2} \|u\|_{X_{t_0}}.$$

Таким образом, из (4.12) следует, что

$$\|u\|_{X_{t_0}} \leq c(1 + t_0^{1/2} \|u\|_{X_{t_0}}^2), \quad (4.13)$$

где c зависит от тех же величин, что указаны в начале доказательства. Пусть $Y_{t_0, A} = \{u \in Y_{t_0} : \|u\|_{X_{t_0}} \leq A\}$. Тогда согласно (4.13) существуют $A > 0$ и $t_0^* \in (0, T]$, зависящие от тех же величин, что и c , такие, что для любого $t_0 \in (0, t_0^*]$ отображение Λ преобразует $Y_{t_0, A}$ в себя.

Теперь рассмотрим две функции u и $\tilde{u}$ из $Y_{t_0, A}$ для некоторого $t_0 \in (0, t_0^*]$. Пусть $v = \Lambda u$, $\tilde{v} = \Lambda \tilde{u}$, $w = u - \tilde{u}$, $\tilde{w} = v - \tilde{v}$. Тогда $\tilde{w}$ является решением задачи

$$\tilde{w}_t + \tilde{w}_{xxx} + a\tilde{w}_x = -(\tilde{u}w_x + u_x w), \quad \tilde{w}|_{t=0} = \tilde{w}|_{x=0} = \tilde{w}_x|_{x=0} = 0.$$

Аналогично (4.12)

$$\|\tilde{w}\|_{X_{t_0}} \leq c(T, a) (\|\tilde{u}w_x + u_x w\|_{L_1(0, t_0; H_-^2)} + \|u_1 w_{xx}(t, 0)\|_{L_{4/3}(0, t_0)}),$$

откуда аналогично (4.13) находим, что

$$\|\tilde{w}\|_{X_{t_0}} \leq ct_0^{1/2} \|w\|_{X_{t_0}} (1 + \|u\|_{X_{t_0}} + \|\tilde{u}\|_{X_{t_0}}).$$

Таким образом, при достаточно малых t_0 отображение Λ является сжимающим на множестве $Y_{t_0, A}$ в норме X_{t_0} , откуда следует однозначная разрешимость.

Непрерывная зависимость устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Теперь перейдем к изучению рассматриваемой задачи в пространствах менее гладких функций. Начнем с результата о существовании решения.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $u_0 \in L_2, -$, $u_1 \in \Gamma_\varepsilon(0, T)$, $u_2 \in L_2(0, T)$, $f \in L_1(0, T; L_2, -)$ для некоторых $T > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1/6)$. Тогда существует решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) из пространства $\tilde{X}_T^w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое решение будем строить как предел последовательности решений $u_h(t, x)$ гладких задач типа (1.1)–(1.3), где u_0, u_1, u_2 и f заменены на $u_{0h} \equiv u_0^h(x)\eta(-x/h)$, $u_{1h} \equiv u_1^h(t)\eta(t/h)$, $u_{2h} \equiv u_2^h(t)\eta(t/h)$, $f_h \equiv f^h(t, x)$. Тогда в силу теоремы 4.1 подобные решения $u_h \in X_T$ существуют. Согласно неравенству (4.2)

$$\|u_h\|_{L_\infty(0,T;L_{2,-})} + \lambda_0(u_h; T) \leq c. \quad (4.14)$$

С учетом неравенства (4.14), используя само уравнение (1.1), находим, что при $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$

$$\|u_h(t_2, \cdot) - u_h(t_1, \cdot)\|_{H_-^{-3}} \leq \omega(t_2 - t_1), \quad (4.15)$$

где $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$ и ω не зависит от h .

Оценки (4.14) и (4.15) позволяют построить искомое решение предельным переходом при $h \rightarrow 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В условиях теоремы 4.2 можно также доказать, что

$$\|u(t, \cdot) - u_0\|_{L_{2,-}} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +0.$$

Действительно, возвращаясь к неравенству (4.5), с учетом уже полученной оценки (4.6) выводим, что $\|u(t, \cdot)\|_{L_{2,-}}^2 \leq \|u_0\|_{L_{2,-}}^2 + \omega(t)$, где $\omega \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$. Объединяя это неравенство со слабой сходимостью $u(t, \cdot)$ к u_0 в $L_{2,-}$, получаем требуемое утверждение.

Перед тем как перейти к вопросам единственности, докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 4.2. Пусть $u_0 \in L_{2,-}$, $u_1 \in \Gamma_\varepsilon(0, T)$, $u_2 \in L_2(0, T)$, $f \in L_1(0, T; L_{2,-})$ для некоторых $T > 0$, $\varepsilon \in (0, 1/6)$, а $u(t, x)$ – решение задачи (1.1)–(1.3) из пространства $\tilde{X}_T^w$. Тогда $\exp(bx) \in C([0, T]; L_{2,-})$ для любого $b > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $b > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}_-} u_x^2 e^{2bx} dx \right)^{1/2} dt &\leq \int_0^T \sup_{x \in \mathbb{R}_-} (|u| e^{bx/2}) \left(\int_{\mathbb{R}_-} u_x^2 e^{bx} dx \right)^{1/2} dt \\ &\leq c(b) \iint_{\Pi_T^-} (u_x^2 + u^2) e^{bx} dx dt \\ &\leq c_1(b) [\lambda_0(u_x; T) + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{2,-})}]. \end{aligned}$$

Следовательно, так как функция u является решением задачи типа (3.1), (3.2), где f заменено на $(f - uu_x)$, то, применяя лемму 3.1 и следствие 3.2, получаем требуемое утверждение.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $u_{0j} \in L_{2,-}$, $u_{1j} \in \Gamma_\varepsilon(0, T)$, $u_{2j} \in L_2(0, T)$, $f_j \in L_1(0, T; L_{2,-})$ для некоторых $T > 0$, $\varepsilon \in (0, 1/6)$ и $j = 1, 2$. Предположим также, что функции $u_j(t, x)$ являются решениями соответствующих задач типа (1.1)–(1.3) из пространства $\tilde{X}_T^w$. Тогда для любого $b > 0$

$$\begin{aligned} &\|(u_1 - u_2)e^{bx}\|_{C([0,T];L_{2,-})} + b\|(u_1 - u_2)_x e^{bx}\|_{L_2(\Pi_T^-)} \\ &\leq c(T, a, \varepsilon, b, \|u_j\|_{L_\infty(0,T;L_{2,-})}) \\ &\quad \times [\|(u_{01} - u_{02})e^{bx}\|_{L_{2,-}} + \|u_{11} - u_{12}\|_{\Gamma_\varepsilon(0,T)} \\ &\quad + \|u_{21} - u_{22}\|_{L_2(0,T)} + \|(f_1 - f_2)e^{bx}\|_{L_1(0,T;L_{2,-})}]. \quad (4.16) \end{aligned}$$

В частности, обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) единственно в пространстве $\tilde{X}_T^w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(t, x) \equiv u_1(t, x) - u_2(t, x)$, $v_0(x) \equiv u_{01}(x) - u_{02}(x)$, $v_1(t) \equiv u_{11}(t) - u_{12}(t)$, $v_2(t) \equiv u_{21}(t) - u_{22}(t)$, $f(t, x) \equiv f_1(t, x) - f_2(t, x)$. Тогда при любом $b > 0$ для функции $V(t, x) \equiv v(t, x) - J(t, x; v_1)$ справедливо неравенство (3.12), в правую часть которого добавлено слагаемое

$$-2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} (u_1 u_{1x} - u_2 u_{2x}) V e^{2bx} dx d\tau.$$

Очевидно, что для вывода неравенства (4.16) достаточно должным образом оценить этот интеграл. Имеем

$$u_1 u_{1x} - u_2 u_{2x} = (V + J(t, x; v_1) \eta_0)_x u_2 + (V + J(t, x; v_1) \eta_0) u_{1x}$$

и тогда (используя также (2.48), (2.49)) находим, что

$$\begin{aligned} & \left| 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_2 (V + J \eta_0)_x V e^{2bx} dx d\tau \right| \\ & \leq c \|u_2\|_{L_\infty(0, T; L_2, -)} \int_0^t \sup_{x \in \mathbb{R}_-} |V e^{bx}| \left(\int_{\mathbb{R}_-} (V_x^2 + J_x^2 + J^2) e^{2bx} dx \right)^{1/2} d\tau \\ & \leq b \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} V_x^2 e^{2bx} dx d\tau + c_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} V^2 e^{2bx} dx d\tau + c_1 \|v_1\|_{\Gamma_\varepsilon(0, T)}^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Интегрируя по частям, находим, что

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_{1x} (V + J \eta_0) V e^{2bx} dx d\tau = 4 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_1 V_x V e^{2bx} dx d\tau \\ & + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_1 (J \eta_0 V)_x e^{2bx} dx d\tau + 4b \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_1 (V + J \eta_0) V e^{2bx} dx d\tau. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Нетрудно видеть, что интегралы в правой части (4.18) оцениваются аналогично (4.17). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Из доказательства теоремы 4.3 следует, что решение задачи (1.1)–(1.3) единственно в классе функций u таких, что $u \in L_\infty(0, T; L_2, -)$ и $u_x \exp(bx) \in L_2(\Pi_T^-)$ для некоторого $b > 0$.

§ 5. Гладкие решения смешанной задачи для уравнения КдФ

Введем некоторые новые функциональные пространства. Пусть k – натуральное число. Положим

$$\begin{aligned} X_{T, k} &= \{u : D_t^m u \in X_T \cap C([0, T]; H_-^{3(k-m)+2}) \text{ для } 0 \leq m \leq k\}, \\ \tilde{X}_{T, k} &= \{u : D_t^m u \in X_T \cap C([0, T]; H_-^{3(k-m)}) \text{ для } 0 \leq m \leq k-1, D_t^k u \in \tilde{X}_T\}, \\ B_{T, k} &= \{f : D_t^m f \in C([0, T]; H_-^{3(k-m)-1}) \text{ для } 0 \leq m \leq k-1, \\ & \quad D_t^k f \in L_2(0, T; H_-^2)\}, \\ \tilde{B}_{T, k} &= \{f : D_t^m f \in C([0, T]; H_-^{3(k-m-1)}) \text{ для } 0 \leq m \leq k-1, \\ & \quad D_t^{k-1} f \in L_2(0, T; H_-^2), D_t^k f \in L_1(0, T; L_2, -)\}. \end{aligned}$$

Введем также следующие обозначения. Положим $\Phi_0(x) \equiv u_0(x)$, а для натуральных m

$$\Phi_m(x) \equiv D_t^{m-1} f(0, x) - \Phi_{m-1}'''(x) - a\Phi_{m-1}'(x) - \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l \Phi_l(x) \Phi_{m-l-1}'(x).$$

Установим две леммы об априорных оценках решений в пространствах гладких функций.

ЛЕММА 5.1. Пусть $u_0 \in H_-^{3k}$, $u_1 \in \Gamma_{k+\varepsilon}(0, T)$, $u_2 \in H^k(0, T)$, $f \in \tilde{B}_{T,k}$ для некоторых $T > 0$, натурального k и $\varepsilon \in (0, 1/6)$. Предположим, что для некоторого $T' \in (0, T]$ функция $u(t, x)$ является решением задачи (1.1)–(1.3) из пространства $\tilde{X}_{T',k}$. Тогда при $0 \leq m \leq k$

$$\begin{aligned} & \|D_t^m u\|_{C([0, T]; H_-^{3(k-m)})} \\ & \leq c(T, a, k, \varepsilon, \|u_0\|_{H_-^{3k}}, \|u_1\|_{\Gamma_{k+\varepsilon}(0, T)}, \|u_2\|_{H^k(0, T)}, \|f\|_{\tilde{B}_{T,k}}, \|u\|_{X_{T',k-1}}). \end{aligned} \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если $u \in \tilde{X}_{T',k}$, то $uu_x \in \tilde{B}_{T',k}$. Пусть $J_m \equiv J(t, x; u_1^{(m)})$, $U_m(t, x) \equiv D_t^m u(t, x) - J_m \eta_0(x)$. Тогда, применяя лемму 3.2, выводим из неравенства (3.4), где $\rho \equiv 1$, что для $1 \leq m \leq k$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-} U_m^2 dx & \leq \int_{\mathbb{R}_-} \Phi_m^2 dx - 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} D_\tau^m (uu_x) U_m dx d\tau \\ & + c \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} U_m^2 dx d\tau + c \sup_{\tau \in (0, t)} \left(\int_{\mathbb{R}_-} U_m^2 dx \right)^{1/2} + c, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где c зависит от T, a, k и соответствующих норм функций u_1, u_2 и f . Заметим, что

$$uD_t^m u_x + u_x D_t^m u = uU_{mx} + u_x U_m + (uJ_m \eta_0)_x,$$

и тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} (uU_{mx} + u_x U_m) U_m dx d\tau \right| & = \frac{1}{2} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_x U_m^2 dx d\tau \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \sup_{(t,x) \in \Pi_{T'}^-} |u_x| \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} U_m^2 dx d\tau \\ & \leq c(\|u\|_{X_{T',k-1}}) \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} U_m^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что остальные слагаемые, возникающие при оценке интеграла от $D_\tau^m (uu_x) U_m$, не превосходят

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} U_m^2 dx d\tau + c(\|u\|_{X_{T',k-1}}, \|u_1^{(m)}\|_{\Gamma_\varepsilon(0, T)}).$$

Таким образом, из (5.2) следует, что при $1 \leq m \leq k$

$$\|D_t^m u\|_{C([0, T]; L_{2,-})} \leq c,$$

где c зависит от тех же величин, что и в (5.1). Применяя само уравнение (1.1) для оценки производных функции u по t , выводим оценку (5.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть $u_0 \in H_-^{3k+2}$, $u_1 \in H^{k+1}(0, T)$, $u_2 \in W_{4/3}^{k+1}(0, T)$, $f \in B_{T,k}$ для некоторых $T > 0$ и натурального k . Предположим, что для некоторого $T' \in (0, T]$ функция $u(t, x)$ является решением задачи (1.1)–(1.3) из пространства $X_{T',k}$. Тогда при $0 \leq m \leq k$

$$\begin{aligned} & \|D_t^m u\|_{C([0, T']; H_-^{3(k-m)+2})} \\ & \leq c(T, a, k, \|u_0\|_{H_-^{3k+2}}, \|u_1\|_{H^{k+1}(0, T)}, \|u_2\|_{W_{4/3}^{k+1}(0, T)}, \|f\|_{B_{T,k}}, \|u\|_{\tilde{X}_{T',k}}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, что если $u \in X_{T',k}$, то $uu_x \in B_{T',k}$. Используя для $D_t^m u$, где $1 \leq m \leq k$, неравенство (3.14) с $\rho(x) \equiv 1 + \eta((2x+5)/8)$, получим неравенство, аналогичное (4.8). Оценим интеграл от нелинейного члена:

$$-2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} D_\tau^m (uu_x)_{xx} D_\tau^m u_{xx} \rho \, dx \, d\tau.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u D_\tau^m u_{xxx} D_\tau^m u_{xx} \rho \, dx \, d\tau \right| \\ & \leq c \sup_{(t,x) \in \Pi_{T'}^-} (|u_x| + |u|) \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} (D_\tau^m u_{xx})^2 \rho \, dx \, d\tau \\ & \leq c(\|u\|_{X_{T',k-1}}) \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} (D_\tau^m u_{xx})^2 \rho \, dx \, d\tau, \\ & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} u_{xxx} D_\tau^m u D_\tau^m u_{xx} \rho \, dx \, d\tau \right| \\ & \leq c \sup_{t \in [0, T']} \left(\int_{\mathbb{R}_-} u_{xxx}^2 \, dx \right)^{1/2} \int_0^t \sup_{x \in \mathbb{R}_-} |D_\tau^m u| \left(\int_{\mathbb{R}_-} (D_\tau^m u_{xx})^2 \rho \, dx \right)^{1/2} d\tau \\ & \leq c(\|u\|_{\tilde{X}_{T',k}}) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_-} (D_\tau^m u_{xx})^2 \rho \, dx \, d\tau. \end{aligned}$$

Аналогичные неравенства справедливы и для остальных возникающих здесь слагаемых. Таким образом, получаем, что при $1 \leq m \leq k$

$$\|D_t^m u_{xx}\|_{C([0, T']; L_2, -)} \leq c,$$

где c зависит от тех же величин, что и в (5.3). Окончание доказательства леммы проводится аналогично окончанию доказательства предыдущей леммы.

Перейдем к результатам о нелокальной разрешимости и корректности в пространствах гладких функций.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $u_0 \in H_-^{3k}$, $u_1 \in \Gamma_{k+\varepsilon}(0, T)$, $u_2 \in H^k(0, T)$, $f \in \tilde{B}_{T,k}$ для некоторых $T > 0$, натурального k и $\varepsilon \in (0, 1/6)$, причем $u_1^{(m)}(0) = \Phi_m(0)$, $u_2^{(m)}(0) = \Phi'_m(0)$ для $0 \leq m \leq k-1$. Тогда существует единственное решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) из пространства $\tilde{X}_{T,k}$. При этом отображение $(u_0, u_1, u_2, f) \mapsto u$ непрерывно в норме отображения $H_-^{3k} \times \Gamma_{k+\varepsilon}(0, T) \times H^k(0, T) \times \tilde{B}_{T,k}$ в $\tilde{X}_{T,k}$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $u_0 \in H_-^{3k+2}$, $u_1 \in H^{k+1}(0, T)$, $u_2 \in W_{4/3}^{k+1}(0, T)$, $f \in B_{T,k}$ для некоторых $T > 0$ и натурального k , причем $u_1^{(m)}(0) = \Phi_m(0)$, $u_2^{(m)}(0) = \Phi'_m(0)$ для $0 \leq m \leq k$. Тогда существует единственное решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) из пространства $X_{T,k}$. При этом отображение $(u_0, u_1, u_2, f) \mapsto u$ непрерывно в норме отображения $H_-^{3k+2} \times H^{k+1}(0, T) \times W_{4/3}^{k+1}(0, T) \times B_{T,k}$ в $X_{T,k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 5.1 и 5.2. Сначала для каждой из них аналогично теореме 4.1 установим результат о локальной разрешимости и непрерывной зависимости.

В случае теоремы 5.1 для $t_0 \in (0, T]$ введем множество функций

$$\tilde{Y}_{t_0,k} = \{u \in \tilde{X}_{t_0,k} : D_t^m u|_{t=t_0} = \Phi_m \text{ для } 0 \leq m \leq k-2, u|_{x=0} = u_1, u_x|_{x=0} = u_2\},$$

а в случае теоремы 5.2 – множество функций

$$Y_{t_0,k} = \{u \in X_{t_0,k} : D_t^m u|_{t=t_0} = \Phi_m \text{ для } 0 \leq m \leq k-1, u|_{x=0} = u_1, u_x|_{x=0} = u_2\}$$

и определим на них отображение Λ таким же способом, как и в доказательстве теоремы 4.1, а именно $v = \Lambda u$ – решение задачи (4.11), при этом $v \in \tilde{Y}_{t_0,k}$ для теоремы 5.1 и $v \in Y_{t_0,k}$ для теоремы 5.2. Заметим, что если $u \in \tilde{X}_{t_0,k}$, то $uu_x \in \tilde{B}_{t_0,k}$, а если $u \in X_{t_0,k}$, то $uu_x \in B_{t_0,k}$. Кроме того, граничные условия, накладываемые на функции из классов $\tilde{Y}_{t_0,k}$ и $Y_{t_0,k}$, обеспечивают выполнение необходимых условий согласования для задачи (4.11). Поэтому соответствующее решение v в обоих случаях существует.

Положим для теоремы 5.1

$$\tilde{\beta}_k(u; t_0) = \sum_{m=0}^{k-1} \|D_t^m u\|_{X_{t_0}} + \|D_t^k u\|_{\tilde{X}_{t_0}},$$

а для теоремы 5.2

$$\beta_k(u; t_0) = \sum_{m=0}^k \|D_t^m u\|_{X_{t_0}}.$$

Применив следствия 3.1 и 3.3, выводим для $\tilde{\beta}_k$ и β_k неравенства, аналогичные (4.13). Тогда аналогично доказательству теоремы 4.1 получаем, что в случае теоремы 5.1 существует $t_0 \in (0, T]$, зависящее от $T, a, k, \varepsilon, \|u_0\|_{H_-^{3k}}, \|u_1\|_{\Gamma_{k+\varepsilon}(0, T)}, \|u_2\|_{H^k(0, T)}, \|f\|_{\tilde{B}_{T,k}}$, такое, что в $\Pi_{t_0}^-$ существует единственное решение $u(t, x)$

задачи (1.1)–(1.3), для которого $D_t^m u \in X_{t_0}$ при $0 \leq m \leq k-1$, $D_t^k u \in \tilde{X}_{t_0}$, а в случае теоремы 5.2 существует $t_0 \in (0, T]$, зависящее от T , a , k , $\|u_0\|_{H_-^{3k+2}}$, $\|u_1\|_{H^{k+1}(0, T)}$, $\|u_2\|_{W_{4/3}^{k+1}(0, T)}$, $\|f\|_{B_{T,k}}$, такое, что в $\Pi_{t_0}^-$ существует единственное решение $u(t, x)$ этой же задачи, для которого $D_t^m u \in X_{t_0}$ при $0 \leq m \leq k$. Используя само уравнение (1.1), находим, что в случае теоремы 5.1 $u \in \tilde{X}_{t_0, k}$, а в случае теоремы 5.2 $u \in X_{t_0, k}$.

Для завершения доказательства рассматриваемых теорем осталось использовать леммы 5.1 и 5.2 и индукцию по k , причем для теоремы 5.1 в качестве индуктивного предположения принимается выполнение теоремы 5.2 при $(k-1)$, а для теоремы 5.2 – выполнение теоремы 5.1 для того же k .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. При доказательстве теорем 5.1 и 5.2 существенно использовалась непустота множеств $\tilde{Y}_{t_0, k}$ и $Y_{t_0, k}$. Обосновать этот факт можно, например, следующим образом. Продолжим функции u_0 и f на положительную полуось с сохранением класса и рассмотрим соответствующую задачу Коши для уравнения КдФ. Тогда методом, использованным при доказательстве теорем 5.1 и 5.2, можно доказать существование решений этой задачи из пространств $\tilde{X}_{T, k}$ и $X_{T, k}$ (при этом отсутствие необходимости соблюдения условий согласования позволяет в качестве “начальных” множеств типа $\tilde{Y}_{t_0, k}$ и $Y_{t_0, k}$ выбирать сами пространства $\tilde{X}_{t_0, k}$ и $X_{t_0, k}$, а точнее – их аналоги для случая всей полосы; непустота же этих пространств очевидна). Применив к полученным решениям задачи Коши отображение Λ , получим искомые функции из пространств $\tilde{Y}_{T, k}$ и $Y_{T, k}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $f \equiv 0$. Тогда при выполнении условий теоремы 5.1 $D_t^m D_x^l u \in X_T$ для $0 \leq m \leq k-1$, $0 \leq l \leq 3(k-m-1)$ и $D_t^m D_x^l u \in \tilde{X}_T$ для $m = k$, $l = 0$ или $0 \leq m \leq k-1$, $3(k-m)-2 \leq l \leq 3(k-m)$, а при выполнении условий теоремы 5.2 $D_t^m D_x^l u \in X_T$ для $0 \leq m \leq k$, $0 \leq l \leq 3(k-m)$.

Список литературы

1. Bui An Ton. Initial boundary-value problems for the Korteweg–de Vries equation // J. Differential Equations. 1977. V. 25. №3. P. 288–310.
2. Хаблов В. В. О некоторых корректных постановках граничных задач для уравнения Кортевега–де Фриза // Препринт Ин-та матем. СО АН СССР. Новосибирск, 1979.
3. Кружков С. Н., Фаминский А. В. Обобщенные решения уравнения Кортевега–де Фриза // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. №6. С. 1296–1298.
4. Бубнов Б. А. Разрешимость в целом нелинейных граничных задач для уравнения Кортевега–де Фриза в ограниченной области // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. №1. С. 34–41.
5. Bona J. L., Winther R. The Korteweg–de Vries equation, posed in a quarter-plane // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14. №6. P. 1056–1106.
6. Фаминский А. В. Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений // Труды ММО. 1988. Т. 51. С. 54–94.
7. Bona J. L., Winther R. The Korteweg–de Vries equation in a quarter-plane, continuous dependence results // Differential Integral Equations. 1989. V. 2. №2. P. 228–250.
8. Faminskii A. V. Nonlocal well-posedness of a mixed problem in a half-strip for the Korteweg–de Vries equation // Вестн. РУДН. Сер. матем. 1996. Т. 3. №1. С. 156–176.

9. *Фаминский А. В.* Нелокальная корректность краевых задач для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений // Материалы Международной конференции и Чебышёвских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышёва. Т. 2. М.: Изд-во МГУ, 1996. С. 341–344.
10. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
11. *Cattabriga L.* Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fiz. Mat. 1959. V. 13. №2. P. 163–203.
12. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.
13. *Солонников В. А.* Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа // Труды МИАН. 1964. Т. 70. С. 133–212.
14. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg–de Vries equation // J. Amer. Math. Soc. 1991. V. 4. №2. P. 323–347.
15. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg–de Vries equation via the contraction principle // Comm. Pure Appl. Math. 1993. V. 43. P. 527–620.
16. *Кружков С. Н., Фаминский А. В.* Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза // Матем. сб. 1983. Т. 120. №3. С. 396–425.
17. *Kato T.* On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg–de Vries equation // Appl. Math., Suppl. Stud. 1983. V. 8. P. 93–128.
18. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
19. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
20. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные неравенства. Введение. М.: Мир, 1980.
21. *Stein E. M.* Oscillatory integrals in Fourier analysis // Beijing lectures in harmonic analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1986. P. 307–355.
22. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.