Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Наилучшее приближение мономов на кубе,
Матем. сб., 2008, том 199, номер 8, 149–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4089>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:13:06

УДК 517.5

В. А. Юдин

Наилучшее приближение мономов на кубе

Рассмотрен многомерный аналог задачи Чебышёва на кубе о построении многочленов, наименее уклоняющихся от нуля. Дана классификация мономов, у которых в пространстве функций, непрерывных в единичном кубе в $\mathbb{R}^n$, многочлен наилучшего приближения единственный. Найдены точные решения в некоторых весовых пространствах L_p .

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Одна из первых задач теории приближения функций была решена Чебышёвым (см. [1]), который доказал, что

$$E(t^q) = \inf_{a_i \in \mathbb{R}} \max_{|t| \leq 1} |t^q + a_{q-1}t^{q-1} + \dots + a_0| = 2^{1-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Он установил также, что среди всех алгебраических многочленов степени q с коэффициентом при старшей степени, равным единице, наименьшее уклонение от нуля имеет многочлен

$$T_q(t) = 2^{1-q} \cos q\alpha, \quad \cos \alpha = t,$$

получивший в дальнейшем название *многочлен Чебышёва первого рода*. Имеется эквивалентная формулировка этого результата: наилучшее приближение t^q многочленом меньшей степени в пространстве $C[-1, 1]$ равно 2^{1-q} . Впоследствии в работе [2] Коркина и Золотарёва было вычислено наилучшее приближение t^q многочленом меньшей степени в пространстве $L_1(-1, 1)$:

$$\inf_{a_i \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 |t^q + a_{q-1}t^{q-1} + \dots + a_0| dt = 2^{1-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Наилучшим оказался также единственный многочлен Чебышёва второго рода

$$U_q(t) = \frac{\sin(q+1)\alpha}{2^q \sin \alpha}, \quad \cos \alpha = t.$$

В пространствах $L_p(-1, 1)$, $1 < p < \infty$, многочлен наименьшего уклонения известен только в случае $p = 2$ (многочлены Лежандра). Для широкого класса весов $\omega(t)$ Марков и Бернштейн [3] (подробности см. также в [4]) получили

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00986).

дальнейшее распространение (1) на случай весовых аппроксимаций. Найден способ вычисления

$$\inf_{a_i \in \mathbb{R}} \max_{|t| \leq 1} |\omega(t)(t^q + a_{q-1}t^{q-1} + \dots + a_0)|.$$

В частности, для $\omega(t) = \sqrt{1-t^2}$ наилучшим многочленом является $U_q(t)$ и величина наилучшего приближения оказывается в два раза меньше, чем в (1).

Рассмотрим одну из многомерных постановок задачи (1). Обозначим через P_q^n совокупность многочленов n переменных $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ степени q :

$$p(x) = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_n \leq q} a_\nu x^\nu, \quad x^\nu = x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n},$$

а через A_q^n – совокупность однородных многочленов степени q . Пусть на компактном множестве $K \subseteq \mathbb{R}^n$ задан многочлен $f(x) \in A_q^n$. Требуется вычислить

$$E(f) = \inf_{p \in P_{q-1}^n} \max_{x \in K} |f(x) - p(x)|. \quad (3)$$

Аналогично ставится задача о построении многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, с “фиксированным старшим членом $f(x)$ ” и в пространствах $L_p(K)$. Простейшим однородным многочленом является моном x^ν . Он называется *невыврожденным*, если все его показатели $\nu_1, \dots, \nu_n$ положительны. Через $Q^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq 1, \dots, |x_n| \leq 1\}$ обозначим единичный куб в $\mathbb{R}^n$. Для любого невырожденного монома (в вырожденном случае задача остается той же, но в пространстве $\mathbb{R}^m$ меньшей размерности $m < n$) в [5]–[7] получены точные значения выражения (3), если $K = Q^n$. При $q, n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{p \in P_{q-1}^n} \max_{x \in Q^n} |x^\nu - p(x)| = 2^{n-q}, \quad \nu_1 + \dots + \nu_n = q, \quad (4)$$

а в пространстве $L_1(Q^n)$ –

$$\inf_{p \in P_{q-1}^n} \int_{Q^n} |x^\nu - p(x)| dx = 2^{n-q}, \quad \nu_1 + \dots + \nu_n = q. \quad (5)$$

Равенства (4), (5) являются распространением (1), (2) на многомерный случай. В качестве многочлена наименьшего уклонения в (4), (5) можно взять произведение одномерных многочленов, т.е.

$$T_q(x) = T_{\nu_1}(x_1) \dots T_{\nu_n}(x_n), \quad U_q(x) = U_{\nu_1}(x_1) \dots U_{\nu_n}(x_n).$$

Однако имеется отличие от одномерного случая. При $n \geq 2$ для некоторых $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ в задаче (4) отсутствует единственность многочлена наилучшего приближения. Подобные факты отмечались и ранее (см. [8]). Более того, в работе [9] при $K = B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ в задаче (3) дана классификация всех мономов x^ν , у которых имеется единственность многочлена наилучшего приближения. Эти исследования были продолжены в [10] для $n \geq 2$ и $f(x) \in A_q^n$.

В настоящей статье будет дана классификация мономов, у которых многочлен наилучшего приближения единственный при $K = Q^n$, $n \geq 2$, в пространстве $C[Q^n]$. Ввиду строгой выпуклости единичной сферы пространства $L_p(K)$ при $1 < p < \infty$ многочлен наилучшего приближения единственный для любой функции $f(x)$ из $L_p(K)$. Для пространств $L_1(Q^n)$ или $L_1(B^n)$ (B^n – единичный шар из $\mathbb{R}^n$) вопрос остается открытым.

§ 2. Единственность многочлена наилучшего приближения

Моном x^ν назовем *упорядоченным*, если $1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_n$, $q = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$. Без ограничения общности будем приближать на кубе Q^n лишь невырожденные и упорядоченные мономы. Разобьем их на два класса. К первому классу отнесем мономы x^ν двух переменных, у которых $\nu_1 = \nu_2 = k$, $k \in \mathbb{N}$. Ко второму классу отнесем мономы двух переменных $x^\nu = x^{\nu_1} x^{\nu_2}$, у которых $1 \leq \nu_1 < \nu_2$, и все оставшиеся мономы для размерностей $n \geq 3$. Оказывается, что для мономов из первого класса имеется единственность многочлена наилучшего приближения в (4), а для монома из второго класса она отсутствует.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n = 2$ и $f(x) = x_1^k x_2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда наилучший многочлен для $f(x)$ из P_{2k-1}^2 единственный и он равен $T_{2k}(x) = T_k(x_1)T_k(x_2)$.

Доказательство этой теоремы приведем в § 3. Разберем подробно приближения мономов из второго класса. Каждому моному x^ν , $\nu_1 + \dots + \nu_n = q$, поставим в соответствие семейство многочленов

$$p(x, \lambda) = x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} - T_{\nu_1}(x_1) \dots T_{\nu_n}(x_n) - 2^{n-q-2} \lambda(x) [1 - 2^{2\nu_1-1} T_{2\nu_1}(x_1)], \quad (6)$$

где $\lambda(x)$ – произвольный многочлен из $P_{q-2\nu_1-1}^n$, удовлетворяющий неравенству

$$\max_{x \in Q^n} |\lambda(x)| \leq 1. \quad (7)$$

Отметим, что $q - 2\nu_1 - 1 \geq 0$. Действительно, если $n = 2$ и $\nu_1 < \nu_2$, то

$$q - 2\nu_1 - 1 = \nu_1 + \nu_2 - 2\nu_1 - 1 = \nu_2 - \nu_1 - 1 \geq 0.$$

Если $n \geq 3$, то

$$q - 2\nu_1 - 1 = \nu_1 + \dots + \nu_n - 2\nu_1 - 1 \geq \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - 2\nu_1 - 1 \geq 0.$$

Кроме того, семейство многочленов (6) входит в P_{q-1}^n . Так как у многочлена Чебышёва коэффициент при старшей степени равен единице, то

$$x^\nu - T_q(x) = x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} - T_{\nu_1}(x_1) \dots T_{\nu_n}(x_n) \in P_{q-1}^n.$$

Поскольку выражение, стоящее в последнем члене формулы (6), есть произведение двух многочленов из $P_{q-2\nu_1-1}^n$ и $P_{2\nu_1}^n$, то оно также будет принадлежать P_{q-1}^n .

ТЕОРЕМА 2. Для любого упорядоченного монома x^ν , $n \geq 3$, или $x^\nu = x^{\nu_1} x^{\nu_2}$, $\nu_1 < \nu_2$, $n = 2$, семейство многочленов (6) наилучшим образом приближает x^ν в $C[Q^n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $x \in Q^n$ имеем

$$\begin{aligned} I(x) &= |x^\nu - p(x, \lambda)| = |T_{\nu_1}(x_1) \cdots T_{\nu_n}(x_n) - 2^{n-q-2} \lambda(x) [1 - 2^{2\nu_1-1} T_{2\nu_1}(x_1)]| \\ &\leq |T_{\nu_1}(x_1)| \cdots |T_{\nu_n}(x_n)| + 2^{n-q-2} |\lambda(x)| \cdot |1 - 2^{2\nu_1-1} T_{2\nu_1}(x_1)|. \end{aligned}$$

Так как $|T_r(t)| \leq 2^{1-r}$, $-1 \leq t \leq 1$, то в силу (7) находим, что

$$I(x) \leq |T_{\nu_1}(x_1)| \cdot 2^{n-1-\nu_2-\cdots-\nu_n} + 2^{n-q-1} \cdot \frac{1 - 2^{2\nu_1-1} T_{2\nu_1}(x_1)}{2}.$$

Поскольку $T_{\nu_1}(x_1) = 2^{1-\nu_1} \cos \nu_1 \alpha_1$, то

$$\frac{1}{2}(1 - 2^{2\nu_1-1} T_{2\nu_1}(x_1)) = \sin^2 \nu_1 \alpha_1,$$

следовательно,

$$I(x) \leq 2^{n-q} |\cos \nu_1 \alpha_1| + 2^{n-q-1} \cdot \sin^2 \nu_1 \alpha_1 = 2^{n-q} \left\{ |\cos \nu_1 \alpha_1| + \frac{1}{2} \sin^2 \nu_1 \alpha_1 \right\}.$$

Используя очевидное неравенство

$$|\cos \alpha| + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \leq 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

получаем оценку сверху $I(x) \leq 2^{n-q}$, которая совпадает с (4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предложенное доказательство конструктивно. Для монома x^ν явно строилось семейство (6) многочленов наилучшего приближения, причем с ростом q количество свободных параметров увеличивалось. Представляет интерес описание всей совокупности многочленов наилучшего приближения, поскольку оно отсутствует. Отметим лишь, что, кроме конструкции (6) многочленов при $n \geq 3$ и при некоторых ограничениях на ν_1, ν_2 , можно построить и иные семейства многочленов.

Рассмотрим частный случай, когда $n = 2$ и $x^\nu = x_1^1 x_2^2$. Из конструкции многочленов (6) и доказательства теоремы получаем, что при любом $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leq 1/4$, семейство многочленов $[x_1 + \lambda(1 - x_1^2)]/2$ наилучшим образом на Q^2 приближает $x_1^2 x_2$, т.е.

$$\max_{x \in Q^2} \left| x_1 x_2^2 - \frac{1}{2} x_1 - \lambda(1 - x_1^2) \right| \leq \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Легко показать, что пределы изменения λ , $-1/4 \leq \lambda \leq 1/4$, увеличить нельзя. Доказательство неединственности проводилось конструктивно посредством (6). Вопрос о том, можно ли расширить это семейство, остался невыясненным.

§ 3. Приближение функций тригонометрическими полиномами

В случае одного переменного хорошо известна тесная связь между приближениями функций многочленами на отрезке и тригонометрическими полиномами на торе. Она прослеживается и в многомерном случае. Обозначим через X одно из пространств функций $L_p(T^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, заданных на торе

$T^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$, с нормой

$$\|f(\alpha)\|_p = \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} |f(\alpha)|^p d\alpha \right\}^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \max_{\alpha \in T^n} |f(\alpha)|.$$

Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Рассмотрим решетку L , порожденную n линейно-независимыми векторами $e_1 = (\nu_1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, \nu_n)$. Положим

$$kL = \left\{ \mu \in L : \frac{\mu}{k} \in L \right\}, \quad k \in \mathbb{N}; \quad L \setminus 2L = \{\mu \in L : 2\mu \notin L\}.$$

Введем следующее обозначение: будем писать $\text{sp } f \subset M$, $M \subset \mathbb{Z}^n$, если ряд Фурье функции $f(x)$ из X имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{\mu \in M} \hat{f}_\mu e^{i\mu x}, \quad \hat{f}_\mu = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(x) e^{-i\mu x} dx,$$

т.е. все коэффициенты Фурье $\{\hat{f}_\mu\}_{\mu \in \mathbb{Z}^n}$ с индексами, не принадлежащими M , равны нулю. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Для любых двух функций $f(\alpha)$, $g(\alpha)$ из X , удовлетворяющих условиям

$$\text{sp } f \subset L \setminus 2L, \quad (L \setminus 2L) \cap \text{sp } g = \emptyset, \quad (10)$$

выполняется неравенство

$$\|f(\alpha) + g(\alpha)\|_X \geq \|f(\alpha)\|_X. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \in \mathbb{N}$. Для любой функции $h(\alpha)$ из X одного переменного α положим

$$(U^j h)(\alpha) = h\left(\alpha + \frac{j\pi}{q}\right), \quad j = 0, 1, \dots, 2q-1,$$

где $\{U^j\}_{j=0}^{2q-1}$ – циклическая группа сдвигов на T^1 . Положим

$$\begin{aligned} (V_q h)(\alpha) &= \frac{1}{2q} \left[h(\alpha) - h\left(\alpha + \frac{\pi}{q}\right) + h\left(\alpha + \frac{2\pi}{q}\right) - \dots - h\left(\alpha + \frac{\pi(2q-1)}{q}\right) \right] \\ &= \left[\frac{1-U}{2q} \cdot (1 + U^2 + \dots + U^{2q-2}) h \right](\alpha). \end{aligned} \quad (12)$$

Так как норма функции из X инвариантна относительно сдвига, $\|h(\alpha + t)\|_X = \|h(\alpha)\|_X$, то по неравенству Минковского из (12) найдем, что

$$\|(V_q h)(\alpha)\|_X \leq \|h(\alpha)\|_X. \quad (13)$$

Пусть $\mu \in \mathbb{Z}$. По формулам тригонометрии из (12) найдем, что

$$V_q(e^{i\mu\alpha}) = \begin{cases} e^{i\mu\alpha}, & \text{если } \mu \equiv q \pmod{2q}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (14)$$

Полагая $q = \nu_1, \dots, \nu_n$, определяем оператор V_ν как следующее произведение:

$$V_\nu = V_{\nu_1} \cdots V_{\nu_n}.$$

Оператор V_ν действует на функциях $f(\alpha) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из X так: U_1 – оператор сдвига на π/ν_1 по первой переменной α_1 , ..., U_n – оператор сдвига на π/ν_n по последней переменной α_n ; операторы $V_{\nu_1}, \dots, V_{\nu_n}$ определяются посредством (12).

Из (14) находим, что для любого $\mu \in \mathbb{Z}^n$

$$V_\nu(e^{i\mu\alpha}) = \begin{cases} e^{i\mu\alpha}, & \text{если } \mu_j \equiv \nu_j \pmod{2\nu_j}, \quad j = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, из (10), (13), (14) вытекают тождества

$$(V_\nu g)(\alpha) \equiv 0, \quad (V_\nu f)(\alpha) \equiv f(\alpha). \quad (15)$$

По неравенству (13) и тождествам (15) найдем, что

$$\|f(\alpha)\|_X = \|(V_\nu f)(\alpha)\|_X = \|V_\nu(f + g)(\alpha)\|_X \leq \|f + g\|_X.$$

Теорема доказана.

Пусть

$$D_q = \{\nu \in \mathbb{Z}^n : |\nu_1| + \dots + |\nu_n| \leq q\}, \quad \Gamma_q = \{\nu \in \mathbb{Z}^n : |\nu_1| + \dots + |\nu_n| = q\}.$$

Обозначим через

$$E_{q-1}(f)_X = \inf_{t: \text{sp } t \subset D_{q-1}} \|f(\alpha) - t(\alpha)\|_X, \quad q \in \mathbb{N},$$

последовательность наилучших приближений функции $f(\alpha)$ из X .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ и тригонометрический полином $f(\alpha)$ таков, что его спектр сосредоточен в 2^n точках $M = \{\pm\nu_1, \dots, \pm\nu_n\}$. Тогда

$$E(f)_X = E_{q-1}(f)_X = \|f(\alpha)\|_X. \quad (16)$$

Оценка сверху $E(f)_X \leq \|f\|_X$ очевидна: выбираем $t(\alpha) = 0$. Для получения оценки снизу воспользуемся (10), (11), где полагаем $g(\alpha) = t(\alpha)$, а $t(\alpha)$ – произвольный тригонометрический полином, спектр которого содержится в D_{q-1} , $q = |\nu_1| + \dots + |\nu_n|$. Так как $M \cap D_{q-1} = \emptyset$, то, умножая любую координату точки из M на нечетное число, получаем, что

$$D_{q-1} \cap (L \setminus 2L) = \emptyset.$$

Следовательно, для любого тригонометрического полинома $t(\alpha)$ такого, что $\text{sp } t(\alpha) \subset D_{q-1}$, из (11) вытекает оценка снизу

$$\|f(\alpha)\|_X \leq \|f(\alpha) - t(\alpha)\|_X.$$

Перейдем к алгебраическому случаю. Дадим новый способ доказательства равенства (4).

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ и любого $x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$ верно равенство

$$E(x^\nu) = 2^{n-q}, \quad q = \nu_1 + \cdots + \nu_n.$$

Оценка $E(x^\nu)$ сверху очевидна. Наибольшую трудность представляют оценки снизу $E(x^\nu)$. Произведем замену $x_1 = \cos \alpha_1, \dots, x_n = \cos \alpha_n$ (в дальнейшем будет использоваться краткая запись $x = \cos \alpha$). При любом $\alpha \in T^n$ точка x принадлежит кубу Q^n . Поскольку

$$x^\nu|_{x=\cos \alpha} = \cos^{\nu_1} \alpha_1 \cdots \cos^{\nu_n} \alpha_n, \quad (17)$$

то по формуле тригонометрии

$$\cos^q \alpha = 2^{1-q} \left[\cos q\alpha + \binom{q}{1} \cos(q-2)\alpha + \cdots \right]$$

находим, что

$$x^\nu|_{x=\cos \alpha} = 2^{n-q} \cos \nu_1 \alpha_1 \cdots \cos \nu_n \alpha_n + t_1(\alpha),$$

где $\text{sp } t_1(\alpha) \subset D_{q-1}$. Спектр тригонометрического полинома $t_2(\alpha) = p(\cos \alpha)$ для любого многочлена p из P_{q-1}^n также принадлежит D_{q-1} . Следовательно, из (11) получаем, что

$$E_{q-1}(x^\nu) \geq \max_{\alpha \in T^n} |2^{n-q} \cos \nu_1 \alpha_1 \cdots \cos \nu_n \alpha_n| = 2^{n-q}.$$

Отметим, что в пространстве $C[T^n]$ для некоторых тригонометрических полиномов $f(\alpha)$ наблюдается также неединственность.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, $\nu_1 + \cdots + \nu_n = q \geq 3$, удовлетворяющего соотношениям $1 = \nu_1 \leq \cdots \leq \nu_n$, $2\nu_1 + r \leq q - 1$, семейство тригонометрических полиномов

$$g(\alpha) = \frac{1}{2} \sin^2 \nu_1 \alpha_1 H(\alpha), \quad \text{sp } H(\alpha) \subset D_r, \quad \|H(\alpha)\|_{C[T^n]} \leq 1,$$

наилучшим образом приближает $f(\alpha) = \cos \nu_1 \alpha_1 \cdots \cos \nu_n \alpha_n$.

Доказательство во многом сходно с доказательством теоремы 2. Из (16) вытекает, что $E(f) = 1$.

Оценим сверху уклонение тригонометрического полинома $g(\alpha)$ от $f(\alpha)$. Для любого α из T^n в силу неравенства (9) верно

$$\left| \cos \nu_1 \alpha_1 \cdots \cos \nu_n \alpha_n - \frac{1}{2} \sin^2 \nu_1 \alpha_1 H(\alpha) \right| \leq |\cos \nu_1 \alpha_1| + \frac{1}{2} \sin^2 \nu_1 \alpha_1 \leq 1.$$

Осталось показать, что $\text{sp } g(\alpha) \subset D_{q-1}$. Так как $\text{sp } \sin^2 \nu_1 \alpha_1 \subset D_{2\nu_1}$ и $\text{sp } H \subset D_r$, а спектр произведения двух тригонометрических полиномов содержится в сумме Минковского этих множеств, то $\text{sp } g(\alpha) \subset D_{q-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим противное: многочлен $T(x) = T_k(x_1)T_k(x_2)$ не есть единственный многочлен наименьшего уклонения. Найдется многочлен $h(x)$ из P_{2k-1}^2 , $h(x) \not\equiv 0$, такой, что сумма $T(x) + h(x)$ будет также многочленом наименьшего уклонения. Рассмотрим следующую систему, состоящую из $(k+1)^2$ точек, расположенных на Q^2 :

$$\mu_j = \left(\cos \frac{j_1 \pi}{k}, \cos \frac{j_2 \pi}{k} \right), \quad 0 \leq j_1, j_2 \leq k.$$

Тогда в силу следствия 2 для каждого $j = (j_1, j_2)$

$$|T(\mu_j) + h(\mu_j)| \leq 4^{1-k}.$$

Поскольку $T(\mu_j) = (-1)^{j_1+j_2} \cdot 4^{1-k}$, то

$$|1 + 4^{k-1}(-1)^{j_1+j_2}h(\mu_j)| \leq 1,$$

или

$$(-1)^{j_1+j_2}h(\mu_j) \leq 0. \quad (18)$$

В первом тождестве из (15) положим $n = 2$ и $\nu_1 = \nu_2 = k$. Для любого $\alpha \in T^2$ найдем

$$\frac{1}{4k^2} \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq k \\ 0 \leq j_2 \leq k}} (-1)^{j_1+j_2} h \left[\cos \left(\alpha_1 + \frac{j_1 \pi}{k} \right), \cos \left(\alpha_2 + \frac{j_2 \pi}{k} \right) \right] \equiv 0.$$

Выбирая $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получим

$$\sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq k \\ 0 \leq j_2 \leq k}} (-1)^{j_1+j_2} h(\mu_j) = 0,$$

откуда из (18) заключаем, что для любой точки μ_j

$$h(\mu_j) = 0. \quad (19)$$

Следовательно, на каждом горизонтальном отрезке $-1 \leq x_1 \leq 1$, $x_2 = \cos j_2 \pi / k$, $j_2 = 0, \dots, k$, алгебраический многочлен одного переменного $T_k(x_1) \cdot (-1)^{j_2} + h(x_1, \cos j_2 \pi / k)$ поочередно в точках $x_1 = \cos j_1 \pi / k$, $j_1 = 0, \dots, k$, принимает свое наибольшее (4^{1-k}) и наименьшее ($(-4)^{1-k}$) значения. Следовательно, в каждой точке μ_j , $j_1 = 1, \dots, k-1$, выполняется равенство

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} (T(x) + h(x)) \right|_{M_j} = 0.$$

Так как производная многочлена Чебышёва $T_k(x_1)$ в каждой внутренней точке интервала $(-1, 1)$ обращается в нуль, то

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x_1} \right|_{\mu_j} = 0, \quad j_1 = 1, \dots, k-1.$$

С учетом кратности у многочлена $h(x_1, \cos j_2\pi/k)$ из P_{2k-1}^1 имеется $2 + 2(k-1)$ нуля. Следовательно, по основной теореме алгебры

$$h\left(x_1, \cos \frac{j_2\pi}{k}\right) \equiv 0, \quad j_2 = 0, \dots, k. \quad (20)$$

Аналогично получаем, что

$$h\left(\cos \frac{j_2\pi}{k}, x_2\right) \equiv 0, \quad j_1 = 0, \dots, k. \quad (21)$$

Покажем, как из (20), (21) вывести равенство $h(x) = 0$. С этой целью представим $h(x)$ в виде

$$h(x) = a_0x_2^{2k-1} + a_1x_2^{2k-2} + \dots + a_{2k-1}, \quad a_i = a_i(x_1) \in P_i^1.$$

По теореме Безу из (20) получаем, что

$$h(x) = \prod_{j_2=0}^k \left(x_2 - \cos \frac{j_2\pi}{k}\right) h_1(x),$$

где $h_1 \in P_{k-1}^2$. Из (21) получим представление h в форме

$$h(x) = \prod_{j_1=0}^k \left(x_1 - \cos \frac{j_1\pi}{k}\right) \prod_{j_2=0}^k \left(x_2 - \cos \frac{j_2\pi}{k}\right) h_2(x).$$

Поскольку многочлен $h_2(x) \not\equiv 0$, то $h_2(x)$ имеет ненулевой коэффициент при мономе, оба показателя которого не менее k , что невозможно, так как $h \in P_{2k-1}^2$. Получено противоречие. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Равенства (19) были известны давно для более широкого класса многочленов $h(x)$ (см. [8]). Они получены методом экстремальных сигнатур [11].

§ 4. Приближение функций алгебраическими многочленами в весовых пространствах

ТЕОРЕМА 4. Для любых $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ и любого монома $f = x^\nu$, $\nu_1 + \dots + \nu_n = q$,

$$\begin{aligned} E(f) &= \inf_{p \in P_{q-1}^n} \int_{Q^n} |x^\nu - p(x)|^p (1 - x_1^2)^{(p-1)/2} \dots (1 - x_n^2)^{(p-1)/2} dx \\ &= 2^{-qp} \left(\int_0^\pi \sin^p \alpha d\alpha \right)^n. \end{aligned} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим оценку снизу для $E(f)$. Пусть

$$T_+^n = \{\alpha \in T^n : 0 \leq \alpha_1 \leq \pi, \dots, 0 \leq \alpha_n \leq \pi\}.$$

Сделаем замену $x = \cos \alpha$. Для любого многочлена $p(x)$ из P_{q-1}^n найдем

$$\begin{aligned} I &= \int_{Q^n} |x^\nu - p(x)|^p (1 - x_1^2)^{(p-1)/2} \cdots (1 - x_n^2)^{(p-1)/2} dx \\ &= \int_{T_+^n} |\cos^{\nu_1} \alpha_1 \cdots \cos^{\nu_n} \alpha_n \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_n - p(\cos \alpha) \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_n|^p d\alpha. \end{aligned}$$

Из формулы (17) и формулы тригонометрии

$$\cos \nu \beta \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin (\nu + 1) \beta - \sin (\nu - 1) \beta)$$

вытекает, что

$$\cos^{\nu_1} \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdots \cos^{\nu_n} \alpha_n \cdot \sin \alpha_n = 2^q \sin (\nu_1 + 1) \alpha_1 \cdots \sin (\nu_n + 1) \alpha_n + t_1(\alpha),$$

где $t_1(\alpha)$ – тригонометрический полином, раскладывающийся только по синусам, и $\text{sp } t_1(\alpha) \subset D_{q+n-1}$. Так как $\text{sp } p(\cos \alpha) \subset D_{q-1}$, а $\text{sp}(\sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_n) \subset D_n$, то для произведения $t_2(\alpha) = p(\cos \alpha) \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_n$ выполняется вложение $\text{sp } t_2(\alpha) \subset D_{q+n-1}$ и тригонометрический полином $t_2(\alpha)$ будет также иметь разложение в ряд Фурье только по синусам. В итоге для суммы $t(\alpha) = t_1(\alpha) + t_2(\alpha)$ установлены следующие два свойства:

- 1) $t(\alpha)$ – нечетный тригонометрический полином по каждой переменной $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
- 2) $\text{sp } t(\alpha) \subset D_{q+n-1}$.

Продолжим оценивание I . Из свойств 1) и 2) получаем, что

$$\begin{aligned} I &= 2^{-qp} \int_{T_+^n} |\sin (\nu_1 + 1) \alpha_1 \cdots \sin (\nu_n + 1) \alpha_n - 2^q t(\alpha)|^p d\alpha \\ &= 2^{-n-qp} \int_{T^n} |\sin (\nu_1 + 1) \alpha_1 \cdots \sin (\nu_n + 1) \alpha_n - 2^q t(\alpha)|^p d\alpha. \end{aligned}$$

Полагая в (11) $f(\alpha) = \sin (\nu_1 + 1) \alpha_1 \cdots \sin (\nu_n + 1) \alpha_n$, найдем

$$\begin{aligned} I &= 2^{-n-qp} \int_{T^n} |\sin (\nu_1 + 1) \alpha_1 \cdots \sin (\nu_n + 1) \alpha_n - 2^q t(\alpha)|^p d\alpha \\ &\geq 2^{-n-qp} \prod_{j=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} |\sin (\nu_j + 1) \alpha_j|^p d\alpha_j. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin (k\beta)|^p d\beta = 2 \int_0^{\pi} \sin^p \beta d\beta, \quad k \in \mathbb{N},$$

то

$$I \geq 2^{-qp} \left(\int_0^{\pi} \sin^p \beta d\beta \right)^n.$$

Оценка снизу получена. Оценка сверху стандартна. Подберем $p(x) \in P_{q-1}$ так, чтобы

$$x^\nu - p(x) = U_{\nu_1}(x_1) \cdots U_{\nu_n}(x_n) = 2^{-q} \cdot \frac{\sin (\nu_1 + 1) \alpha_1}{\sin \alpha_1} \cdots \frac{\sin (\nu_n + 1) \alpha_n}{\sin \alpha_n}.$$

После замены $x = \cos \alpha$ имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{Q^n} |x^\nu - p(x)|^p (1 - x_1^2)^{(p-1)/2} \cdots (1 - x_n^2)^{(p-1)/2} dx \\ &= \prod_{j=1}^n \int_0^\pi |2^{-\nu_j} \sin(\nu_j + 1) \alpha_j|^p d\alpha_1 \cdots d\alpha_n = 2^{-qp} \left(\int_0^\pi \sin^p \alpha d\alpha \right)^n. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

При $p = 1$, $n \in \mathbb{N}$ получаем уже известные ранее результаты (2) (см. [2], [7]). Полагая в (22) $p = \infty$, $n = 1$, для любого $q \in \mathbb{N}$ имеем

$$\inf_{p \in P_{q-1}^1} \max_{x \in [-1, 1]} |(x^q - p(x)) \sqrt{1 - x^2}| = 2^{-q}. \quad (23)$$

По сравнению с (1) наличие веса приводит к уменьшению наилучшего приближения в два раза. Для одного переменного весовые аппроксимации развиты в работах Маркова и Бернштейна (см. [4]; там же дан вывод (23) методами теории функций комплексного переменного). В многомерном случае из (22) при $p = \infty$ выводим, что для любого монома x^ν , $\nu_1 + \cdots + \nu_n = q$, верна оценка

$$\inf_{p \in P_{q-1}^n} \max_{x \in Q^n} |x^\nu - p(x)| \sqrt{1 - x_1^2} \cdots \sqrt{1 - x_n^2} = 2^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

Рассмотрим семейство многочленов

$$H(x, \lambda) = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} - U_{\nu_1}(x_1) \cdots U_{\nu_n}(x_n) + \lambda(x) T_{\nu_1+1}^2(x_1), \quad (25)$$

где $\lambda(x)$ – произвольный многочлен из P_r^n , $r = q - 3 - 2\nu_1$, удовлетворяющий неравенству

$$\max_{x \in Q^n} |h(x)| \leq 2^{-q-1+2\nu_1}. \quad (26)$$

Так как коэффициент при старшей степени у многочлена Чебышёва второго рода выбран равным единице, то разность первых двух слагаемых (20) является многочленом из P_{q-1}^n . Поскольку $\lambda(x) \in P_{q-3-2\nu_1}^n$, а $T_{\nu_1+1}^2(x_1) \in P_{2\nu_1+2}^1$, то их произведение входит в P_{q-1}^n . Таким образом, семейство (25) многочленов принадлежит P_{q-1}^n . Покажем, что оно наилучшим образом аппроксимирует моном x^ν на кубе Q^n с весом $\omega(x) = (1 - x_1^2)^{1/2} \cdots (1 - x_n^2)^{1/2}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для любых $n \geq 2$, $q - 3 - 2\nu_1 \geq 0$ и любого упорядоченного монома x^ν выполняется неравенство

$$\max_{x \in Q^n} |x^\nu - H(x, \lambda)| \omega(x) \leq 2^{-q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замены $x = \cos \alpha$ из (25) найдем

$$\begin{aligned} I &= |x^\nu - H(x, \lambda)| \omega(x) = 2^{-q} |\sin(\nu_1 + 1) \alpha_1 \cdots \sin(\nu_n + 1) \alpha_n \\ &\quad - 2^{q-2\nu_1} \lambda(\cos \alpha) \cdot \cos^2(\nu_1 + 1) \alpha_1 \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_n|, \end{aligned}$$

откуда в соответствии с неравенством (26) получим, что для любого $x \in Q^n$

$$I \leq 2^q \left\{ |\sin(\nu_1 + 1) \alpha_1| + \frac{1}{2} \cos^2(\nu_1 + 1) \alpha_1 \right\}.$$

Используя неравенство (8) и заменяя α на $\alpha - \pi/2$, получаем следующую оценку сверху: $I \leq 2^{-q}$. Нижняя оценка (24) получена ранее.

В заключение автор выражает благодарность В. М. Федорову за сделанные замечания.

Список литературы

- [1] П. Л. Чебышёв, *Собрание сочинений*, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1944–1951.
- [2] Е. И. Золотарёв, “Sur un certain minimum”, *Полное собрание сочинений*, т. 1, Изд-во АН СССР, Л., 1931, 138–153.
- [3] С. Н. Бернштейн, *Полное собрание сочинений*, т. 1, 2, Изд-во АН СССР, М., 1952–1954.
- [4] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.
- [5] J. M. Sloss, “Chebyshev approximation to zero”, *Pacific J. Math.*, **15**:1 (1965), 305–313.
- [6] H. Ehlich, K. Zeller, “Čebyšev-Polynome in mehreren Veränderlichen”, *Math. Z.*, **93**:2 (1966), 142–143.
- [7] J. Fromm, “ L_1 -approximation to zero”, *Math. Z.*, **151**:1 (1976), 31–33.
- [8] M. Reimer, “On multivariate polynomials of least deviation from zero on the unit cube”, *J. Approx. Theory*, **23**:1 (1978), 65–69.
- [9] W. B. Gearhart, “Some Chebyshev approximations by polynomials in two variables”, *J. Approximation Theory*, **8**:3 (1973), 195–209.
- [10] В. А. Юдин, “О многочленах наилучшего приближения”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 631–636; англ. пер.: V. A. Yudin, “On polynomials of best approximation”, *Math. Notes*, **82**:3–4 (2007), 564–568.
- [11] T. J. Rivlin, H. S. Shapiro, “A unified approach to certain problems of approximation and minimization”, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **9**:4 (1961), 670–699.

В. А. Юдин (V. A. Yudin)

Московский энергетический институт (технический университет)

E-mail: vlayudin@mtu-net.ru

Поступила в редакцию

15.11.2007 и 27.02.2008