Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Мильман, Абсолютно минимальные продолжения функций на метрических пространствах, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 6, 83–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 11:51:47

УДК 517.5

В. А. Мильман

Абсолютно минимальные продолжения функций на метрических пространствах

Рассматриваются продолжения действительнзначной функции с границы ∂X_0 открытого подмножества X_0 метрического пространства (X, d) на X_0 . Для введенного широкого класса исходных функций (линейно ограниченных функций) построены продолжения, локально липшицевые на X_0 и сохраняющие локализованные модули непрерывности. Среди множества таких продолжений выбирается абсолютно минимальное (а.м.) продолжение, ранее введенное Аронссоном для липшицевых исходных функций в случае $X_0 \subset \mathbb{R}^n$. Абсолютно минимальное продолжение может рассматриваться как ∞ -гармоническая функция, т.е. предел p -гармонических функций при $p \rightarrow +\infty$. Доказательство существования а.м. продолжений на метрическом пространстве с внутренней метрикой проводится методом Перрона. Для этого определяются ∞ -субгармонические, ∞ -супергармонические, ∞ -гармонические функции на метрическом пространстве и устанавливаются их свойства.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

1.1. Обозначения и некоторые определения. Рассматриваются продолжения функций с непустого замкнутого собственного подмножества Y метрического пространства (X, d) на открытое подмножество $X_0 \subset X \setminus Y$. Все функции в работе предполагаются действительнзначными. Через $\text{dom}(h)$ обозначается область определения функции h , через $h|_Y$ — сужение функции h на подмножество Y . Неравенство $h \geq h_1$ для двух функций означает, что $h(x) \geq h_1(x)$ для любого x из $\text{dom}(h) \cap \text{dom}(h_1)$. Через $\bar{Z}$ обозначается замыкание, а через ∂Z — граница подмножества $Z \subset X$.

Для расстояния между точками $x, y \in X$ используется краткое обозначение $xy = d(x, y)$. Через $d(x, Y)$ обозначается расстояние от точки $x \in X$ до подмножества Y , $d(x, Y) = \inf \{xy : y \in Y\}$. Через $B(x, r)$ обозначается замкнутый шар радиуса r с центром в $x \in X$

$$B(x, r) = \{x_1 : x_1 \in X, x_1x \leq r\}, \quad r \geq 0.$$

Метрика d в линейно связном метрическом пространстве (X, d) называется *внутренней*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ расстояние $d(x_1, x_2)$ равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих точки x_1 и x_2 [1]. Под кривой здесь понимается непрерывное отображение $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ такое, что $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$. Длину кривой γ обозначаем через $\text{len}(\gamma)$.

Следуя Н. Бурбаки, функцию $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть:

- возрастающей*, если $t_1 < t_2 \Rightarrow h(t_1) \leq h(t_2)$;
- строго возрастающей*, если $t_1 < t_2 \Rightarrow h(t_1) < h(t_2)$;
- убывающей*, если $t_1 < t_2 \Rightarrow h(t_1) \geq h(t_2)$;
- строго убывающей*, если $t_1 < t_2 \Rightarrow h(t_1) > h(t_2)$.

Через ω (возможно с индексами) везде обозначается функция, действующая из $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}^+$.

Функция ω называется *полуаддитивной*, если

$$\omega(a + b) \leq \omega(a) + \omega(b) \quad \forall a, b \geq 0.$$

Функция ω называется *модулем непрерывности*, если она возрастает, полуаддитивна и $\omega(0) = 0$. Мы не требуем, как это делается традиционно, непрерывности ω в нуле.

Липшицевой полунормой функции h называется число

$$\|h\|_{\text{Lip}} = \sup \left\{ \frac{|h(x) - h(y)|}{xy} : x, y \in \text{dom}(h), x \neq y \right\}.$$

Будем использовать класс $\text{Lip}(Y)$ липшицевых функций и класс $\text{Lip}(Y, \omega)$ функций с заданным модулем непрерывности:

$$\begin{aligned} \text{Lip}(Y) &= \{h: Y \rightarrow \mathbb{R} : \|h\|_{\text{Lip}} < +\infty\}, \\ \text{Lip}(Y, \omega) &= \{h: Y \rightarrow \mathbb{R} : |h(x) - h(y)| \leq \omega(xy) \quad \forall x, y \in Y\}. \end{aligned}$$

Функция h называется *локально липшицевой* в точке $x \in X$, если существует $r > 0$ такое, что

$$\|h|B(x, r)\|_{\text{Lip}} < +\infty.$$

Нормой градиента функции $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in X$ будем называть величину

$$\|Du(x)\| = \overline{\lim}_{z \rightarrow x} \frac{|u(z) - u(x)|}{xz}.$$

Отметим, что в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$ и функция u дифференцируема, это определение дает обычную норму градиента. Однако в общем случае градиент не определен, но норма градиента определена и служит мерой скорости изменения значения функции в точке.

1.2. Известные результаты. Любая липшицева функция $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ может быть продолжена на все пространство X с сохранением липшицевой полунормы, т.е. существует функция $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $u|Y = f$ и $\|u\|_{\text{Lip}} = \|f\|_{\text{Lip}}$.

Формулы

$$u^+(x) = \inf\{f(y) + \|f\|_{\text{Lip}}xy : y \in Y\}, \quad (1.1)$$

$$u^-(x) = \sup\{f(y) - \|f\|_{\text{Lip}}xy : y \in Y\} \quad (1.2)$$

дают два таких продолжения, называемые верхним и нижним продолжениями Макшейна [2]. Множество продолжений функции f , сохраняющих липшицеву полунорму, обозначим через Π_f . Π_f является выпуклым подмножеством в линейном пространстве $\text{Lip}(X)$. Для любого $u \in \Pi_f$ имеем $u^- \leq u \leq u^+$ [3]. В общем случае продолжение, сохраняющее липшицеву полунорму, не единственно. Аронссон [4], рассматривая продолжение функций на $\mathbb{R}^n$, предложил выбирать из Π_f продолжение, названное абсолютно минимальным. Пусть X_0 — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $Y = \partial X_0$, $X = \overline{X_0}$, и пусть в X введена внутренняя метрика (см. [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Продолжение $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ функции $f \in \text{Lip}(Y)$ называется *абсолютно минимальным* в смысле Аронссона, если для любого открытого подмножества $Z \subset X_0$ выполняется

$$\|u|_{\overline{Z}}\|_{\text{Lip}} = \|u|_{\partial Z}\|_{\text{Lip}}. \quad (1.3)$$

Смысл термина “абсолютно минимальное” становится понятным, если заметить, что любое продолжение, сохраняющее липшицеву полунорму, минимизирует функционал $I_{\text{Lip}}(f) = \|u\|_{\text{Lip}}$ на множестве всех продолжений функции f . Абсолютно минимальное (а.м.) продолжение может рассматриваться как “наилучшее” из всех продолжений, минимизирующих этот функционал. Интерес к а.м. продолжениям обусловлен их связью с рядом задач анализа и с приложениями.

К а.м. продолжениям приводит следующее рассуждение [4], [5]. Рассмотрим L_p -аналог задачи минимизации интеграла Дирихле

$$I_p(u) = \left(\int_X \|Du\|^p dx \right)^{1/p} \rightarrow \min \quad \text{при условии } u|_{\partial X_0} = f. \quad (1.4)$$

Пусть Z – произвольное открытое подмножество X_0 . Тогда решение u_p задачи (1.4) обладает следующим очевидным свойством: функция $u_p|_Z$ есть решение экстремальной задачи

$$I_p(u|_Z) = \left(\int_Z \|Du\|^p dx \right)^{1/p} \rightarrow \min \quad \text{при условии } u|_{\partial Z} = u_p. \quad (1.5)$$

Из внутреннего характера метрики в X следует равенство

$$\|u\|_{\text{Lip}} = \sup_{x \in X} \|Du(x)\|. \quad (1.6)$$

Переход к пределу при $p \rightarrow +\infty$ в (1.5) с учетом (1.6) приводит к свойству (1.3). В [5] показано, что u_p при $p \rightarrow +\infty$ сходятся к а.м. продолжению функции f .

Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала в (1.4)

$$\text{div}(\|Du_p\|^{p-2} Du_p) = 0 \quad (1.7)$$

называется p -гармоническим уравнением, а его решения – p -гармоническими функциями. Формальный переход к пределу в (1.7) при $p \rightarrow +\infty$ приводит к уравнению

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (1.8)$$

называемому ∞ -гармоническим. Его решения называются ∞ -гармоническими функциями. В [4] показано, что если а.м. продолжение функции $f \in \text{Lip}(\partial X_0)$ принадлежит $C(\overline{X_0}) \cap C^2(X_0)$, то оно удовлетворяет в X_0 уравнению (1.8). Обратно, если функция $u \in C(\overline{X_0}) \cap C^2(X_0)$ ∞ -гармонична и $u|_{\partial X_0} = f \in \text{Lip}(\partial X_0)$, то u есть а.м. продолжение функции f . Исследованию классических решений уравнения (1.8) посвящены работы [4], [6]. Однако задача Дирихле для (1.8) может не

иметь классических решений даже в случае бесконечно дифференцируемых граничных условий.

В [5], [7] показано, что существует решение задачи Дирихле для уравнения (1.8) с граничным условием $u|_{\partial X_0} = f \in \text{Lip}(\partial X_0)$ в классе “вязких” решений и это решение является а.м. продолжением функции f . В [7] показана единственность этого решения. О “вязких” решениях см. [8].

Другие результаты об а.м. продолжениях см. в [9]–[12]. Приложения а.м. продолжений в механике рассмотрены в [5]. Функции, эквивалентные а.м. продолжениям, использовались в [13] для описания элементов рельефа местности.

Заметим, что определение абсолютной минимальности применимо к продолжениям функций на любом метрическом пространстве. В то же время все упомянутые результаты получены при условиях $X \subset \mathbb{R}^n$, где X ограничено, и доказательства опираются на эти условия. Этот факт нами рассматривается как недостаток существующей теории.

1.3. Цель и содержание работы. Цель работы – распространить теорию а.м. продолжений в двух направлениях. Во-первых, продолжения рассматриваются на метрическом пространстве с внутренней метрикой, без условий компактности и ограниченности. Во-вторых, допускаются исходные функции значительно более общие, чем липшицевы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f , определенная на метрическом пространстве, называется *линейно ограниченной*, если для некоторого $y_0 \in \text{dom}(f)$ выполняется

$$b = \sup \left\{ \frac{|f(y)|}{1 + y_0 y} : y \in \text{dom}(f) \right\} < +\infty. \quad (1.9)$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Условие (1.9) эквивалентно неравенству

$$|f(y)| \leq b(1 + y_0 y) \quad \forall y \in \text{dom}(f). \quad (1.10)$$

2. Нетрудно показать, что если функция линейно ограничена, то для любого $y_0 \in \text{dom}(f)$ число $b = b(f, y_0)$, определяемое формулой (1.9), конечно.

Линейно ограниченная функция может быть разрывной. Ограниченная функция заведомо линейно ограничена. Легко показывается, что любой модуль непрерывности линейно ограничен. Класс всех линейно ограниченных функций, определенных на Y , образует линейное пространство и включает в себя классы $\text{Lip}(Y)$ и $\text{Lip}(Y, \omega)$, где ω – модуль непрерывности.

Далее везде предполагается, что функция $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ линейно ограничена. Рассматривая ее продолжение, естественно интересоваться скоростью изменения продолжения в окрестности точки $y \in Y$. Эта скорость изменения характеризуется посредством локализованных модулей непрерывности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функции

$$\begin{aligned} \omega_y^+(t) &= (\sup\{f(y_1) - f(y) : y y_1 \leq t, y_1 \in Y\})^*, \\ \omega_y^-(t) &= (\sup\{f(y) - f(y_1) : y y_1 \leq t, y_1 \in Y\})^*, \end{aligned}$$

где $t \geq 0$, назовем верхним и нижним *локализованными модулями непрерывности* функции f в точке $y \in Y$. Здесь $(h)^*$ означает наименьшую вогнутую мажоранту функции h (см. п. 2.1).

Заметим, что эти модули непрерывности могут иметь разрыв в нуле, если функция f разрывна в точке y . Очевидно выполнение неравенств

$$-\omega_y^-(y_1 y) \leq f(y_1) - f(y) \leq \omega_y^+(y_1 y) \quad \forall y, y_1 \in Y.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что продолжение u функции f *сохраняет локализованные модули непрерывности*, если выполняются неравенства

$$-\omega_y^-(xy) \leq u(x) - u(y) \leq \omega_y^+(xy) \quad \forall y \in Y, \quad \forall x \in \text{dom}(u). \quad (1.11)$$

Вопрос о существовании таких продолжений положительно решен в [14] (см. также [15] для случая ограниченного множества Y). Отметим, что продолжение, сохраняющее локализованные модули непрерывности, обеспечивает поточечное сохранение показателей Гёльдера при продолжении гёльдеровых функций с переменным показателем [16].

ЗАМЕЧАНИЕ. В [2], [3], [17] получены обобщения формул (1.1), (1.2) для продолжения функций из класса $\text{Lip}(Y, \omega)$, обеспечивающие сохранение модуля непрерывности. Простые примеры показывают, что при этом сохранение локализованных модулей непрерывности не гарантируется (см. [14], [15]).

В §2 строятся верхнее и нижнее продолжения, сохраняющие локализованные модули непрерывности и являющиеся локально липшицевыми на X_0 . В дальнейшем на этих продолжениях основывается построение а.м. продолжений. В §3 вводятся ∞ -субгармонические и ∞ -супергармонические функции и устанавливаются некоторые их свойства. Это вспомогательные результаты, но они представляют и самостоятельный интерес. В §4 дается определение а.м. продолжения линейно ограниченной функции. Доказывается существование продолжения и сохранение локализованных модулей непрерывности. Доказательство основано на предлагаемой версии метода Перрона. В §5 рассмотрены свойства а.м. продолжений. В частности, получена оценка сверху нормы градиента а.м. продолжения, усиливающая результаты работ [10], [11]. В §6 дается определение продолжений в смысле Аронссона, обобщающее приведенное выше определение на случай линейно ограниченных исходных функций. Показана эквивалентность введенных в §4 а.м. продолжений и продолжений Аронссона.

Отметим прикладное значение полученных результатов. Легко видеть, что в одномерном случае (т.е. при $X = \mathbb{R}^1$) а.м. продолжениями являются сплайны первой степени, т.е. кусочно линейные функции. Поэтому в общем случае есть основания считать а.м. продолжения обобщением сплайнов первой степени. Из теорем §5 следуют свойства стабильности, самовоспроизводимости и локальности а.м. продолжений, введенные в [18], [19]. Это делает а.м. продолжения перспективным средством в некоторых задачах интерполяции, возникающих, например, в науках о Земле. Однако прикладные вопросы выходят за рамки настоящей статьи.

§ 2. Верхний и нижний операторы продолжения

2.1. Наименьшая вогнутая мажоранта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть h — линейно ограниченная функция на $\mathbb{R}_+$. *Наименьшая вогнутая мажоранта* функции h обозначается через $(h)^*$ и определяется посредством формулы (см. [20])

$$(h)^*(t) = \sup \left\{ \frac{(t-t_1)h(t_2) + (t_2-t)h(t_1)}{t_2-t_1} : 0 \leq t_1 \leq t \leq t_2, t_2 \neq t_1 \right\}.$$

Конечность $(h)^*$ непосредственно следует из линейной ограниченности h .

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства наименьшей вогнутой мажоранты:

- 1) если h возрастает, то $(h)^*$ возрастает;
- 2) $h_1 \leq h_2 \Rightarrow (h_1)^* \leq (h_2)^*$ (монотонность);
- 3) если $c_1 \geq 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$, то $(c_1 h + c_2)^* = c_1 (h)^* + c_2$;
- 4) $\sup_{t \geq 0} h(t) = \sup_{t \geq 0} (h)^*(t)$ (сохранение верхней (конечной или бесконечной) границы значений функции);
- 5) если h вогнута, то $(h)^* = h$;
- 6) $(h)^*(0) = h(0)$, $\lim_{t \rightarrow +0} (h)^*(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \sup \{h(s) : 0 \leq s \leq t\}$.

Пусть функция ω вогнута и возрастает. Тогда функция ω полуаддитивна и является модулем непрерывности, а функция $\omega(t)/t$ убывает. Отсюда сразу следует, что ω линейно ограничена. Такую функцию ω будем называть вогнутым модулем непрерывности. Если $t_2 \geq t_1 > 0$, то справедливо неравенство

$$\omega(t_2) - \omega(t_1) = t_2 \frac{\omega(t_2)}{t_2} - \omega(t_1) \leq t_2 \frac{\omega(t_1)}{t_1} - \omega(t_1) = \frac{\omega(t_1)}{t_1} (t_2 - t_1). \quad (2.1)$$

Отсюда сразу следует непрерывность функции $\omega(t)$ при $t > 0$.

Большинство указанных свойств хорошо известно (см., например, [20]), другие доказываются очевидным образом. Отметим, что из этих свойств следуют свойства локализованного (верхнего либо нижнего) модуля непрерывности ω :

- 1) $\omega(0) = 0$;
- 2) $\omega(t)$ возрастает;
- 3) $\omega(t)/t$ убывает.

2.2. Верхний и нижний операторы продолжения. В этом пункте (X, d) — произвольное метрическое пространство, $X_0 = X \setminus Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Верхний оператор продолжения* E^+ и *нижний оператор продолжения* E^- определяются формулами

$$\begin{aligned} E^+ f(x) &= \inf \{f(y) + \omega_y^+(xy) : y \in \text{dom}(f)\}, \\ E^- f(x) &= \sup \{f(y) - \omega_y^-(xy) : y \in \text{dom}(f)\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ω_y^+ , ω_y^- — локализованные модули непрерывности функции f .

Из определения ω_y^+ и ω_y^- получим

$$\begin{aligned}\omega_y^+(t) &= (\sup\{f(y_1) - f(y) : yy_1 \leq t, y_1 \in Y\})^* \\ &= (\sup\{f(y_1) : yy_1 \leq t, y_1 \in Y\})^* - f(y), \\ \omega_y^-(t) &= f(y) + (\sup\{-f(y_1) : yy_1 \leq t, y_1 \in Y\})^*.\end{aligned}$$

Следовательно, верхний и нижний операторы продолжения можно представить эквивалентными формулами

$$E^+f(x) = \inf_{y \in Y} \{(\sup\{f(y_1) : y_1y \leq t, y_1 \in Y\})_{t=xy}^*\}, \quad (2.3)$$

$$E^-f(x) = - \inf_{y \in Y} \{(\sup\{-f(y_1) : y_1y \leq t, y_1 \in Y\})_{t=xy}^*\}. \quad (2.4)$$

Покажем, что E^+ и E^- являются действительно операторами продолжения и установим некоторые их свойства. Доказательства даются, как правило, только для верхних операторов, поскольку доказательства для нижних операторов аналогичны.

ТЕОРЕМА 2.1. *Функции $u^+ = E^+f$ и $u^- = E^-f$ являются продолжениями функции f , сохраняют локализованные модули непрерывности, и справедливы неравенства*

$$u^-(x) \leq u(x) \leq u^+(x) \quad \forall x \in X, \quad (2.5)$$

где u – произвольное продолжение, сохраняющее локализованные модули непрерывности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $u^+ = E^+f$ есть продолжение функции f . Пусть $z \in Y$. Тогда $u^+(z) \leq f(z) + \omega_z^+(0) = f(z)$. Очевидно, что для любого $y \in Y$ выполняется

$$(\sup\{f(y_1) : y_1y \leq t, y_1 \in Y\})_{t=zy}^* \geq \sup\{f(y_1) : y_1y \leq zy, y_1 \in Y\} \geq f(z).$$

Из (2.3) получаем $u^+(z) \geq f(z)$. В итоге имеем $u^+(z) = f(z)$.

Докажем неравенство $u^- \leq u^+$. Пусть $y, z \in Y$. Используя монотонность функций $\omega_y^+(t)$, $\omega_z^-(t)$, $\omega_y^+(t)/t$, $\omega_z^-(t)/t$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\omega_y^+(yx)}{yx} &\geq \frac{\omega_y^+(yx + zx)}{yx + zx} \geq \frac{\omega_y^+(yz)}{yx + zx} \geq \frac{f(z) - f(y)}{yx + zx}, \\ \frac{\omega_z^-(zx)}{zx} &\geq \frac{\omega_y^-(yx + zx)}{yx + zx} \geq \frac{\omega_z^-(yz)}{yx + zx} \geq \frac{f(z) - f(y)}{yx + zx}.\end{aligned}$$

Умножим первое неравенство на yx , а второе – на zx . Суммируя полученные неравенства, имеем

$$\omega_y^+(yx) + \omega_z^-(zx) \geq f(z) - f(y),$$

откуда легко получается неравенство $u^- \leq u^+$. С помощью этого неравенства и неравенств (1.11) легко показывается справедливость (2.5), а также сохранение локализованных модулей непрерывности продолжениями u^+ и u^- . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1. Пусть $y_0 \in \partial X_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \inf \{f(y) : y_0 y \leq t, y \in Y\} &\leq \varliminf_{x \rightarrow y_0} u^-(x) \\ &\leq \varlimsup_{x \rightarrow y_0} u^+(x) \leq \lim_{t \rightarrow +0} \sup \{f(y) : y_0 y \leq t, y \in Y\}. \end{aligned}$$

Если f непрерывна в точке $y_0 \in Y$, то продолжения u^+ и u^- непрерывны в этой точке.

ЛЕММА 2.2. Пусть ω_y^+ – верхний локализованный модуль непрерывности функции f относительно точки $y \in Y$. Пусть $x, x_1 \in X_0$, $x_1 x \leq \frac{1}{2}d(x, Y)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\omega_y^+(x_1 y + \varepsilon) - \omega_y^+(x_1 y) \leq K(x) \cdot \varepsilon, \quad (2.6)$$

где $K(x) = \left(5 + \frac{4(1 + x y_0)}{d(x, Y)}\right)b$, $y_0 \in Y$, $b = b(f, y_0)$ определено в (1.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.1) следует неравенство

$$\omega_y^+(x_1 y + \varepsilon) - \omega_y^+(x_1 y) \leq \frac{\omega_y^+(x_1 y)}{x_1 y} \cdot \varepsilon. \quad (2.7)$$

Оценим сверху величину $\omega_y^+(x_1 y)/(x_1 y)$. Пользуясь (1.10), для произвольных $y_1, y \in Y$ имеем

$$|f(y_1) - f(y)| \leq |f(y_1)| + |f(y)| \leq b(2 + y_0 y_1 + y_0 y) \leq b(2 + 2y_0 y + y y_1).$$

Поэтому $\omega_y^+(t) \leq 2b(1 + y_0 y) + b \cdot t$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{b^{-1}\omega_y^+(x_1 y)}{x_1 y} &\leq 1 + \frac{2(1 + y_0 y)}{x_1 y} \\ &\leq 1 + \frac{2(1 + y_0 x + x x_1 + x_1 y)}{x_1 y} \leq 5 + \frac{4(1 + y_0 x)}{d(x, Y)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Мы использовали неравенства $x_1 y \geq xy - x_1 x \geq \frac{1}{2}d(x, Y)$. Из (2.7) и (2.8) получается требуемое неравенство. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $u^+ = E^+ f$, $x \in X_0$. Тогда функция u^+ локально липшицева в точке x и

$$\|u^+ | B(x, \frac{1}{2}d(x, Y))\|_{\text{Lip}} \leq K(x), \quad (2.9)$$

где $K(x)$ определено в лемме 2.2.

Если ω – вогнутый модуль непрерывности и $f \in \text{Lip}(Y, \omega)$, то $u^+ \in \text{Lip}(X, \omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $u^+(x_2) \geq u^+(x_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} u^+(x_2) - u^+(x_1) &= \inf_{y \in Y} (f(y) + \omega_y^+(x_2 y)) - \inf_{y \in Y} (f(y) + \omega_y^+(x_1 y)) \\ &\leq \sup_{y \in Y} (\omega_y^+(x_2 y) - \omega_y^+(x_1 y)) \\ &\leq \sup_{y \in Y} (\omega_y^+(x_1 x_2 + x_1 y) - \omega_y^+(x_1 y)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Пусть $x_1, x_2 \in B(x, \frac{1}{2}d(x, Y))$. Применив лемму 2.2, получим

$$u^+(x_2) - u^+(x_1) \leq K(x) \cdot x_1 x_2.$$

Тем самым неравенство (2.9) доказано.

Из (2.10) и полуаддитивности функции ω_y^+ следует, что

$$u^+(x_2) - u^+(x_1) \leq \sup_{y \in Y} (\omega_y^+(x_2 x_1)).$$

Пусть $f \in \text{Lip}(Y, \omega)$. Тогда $\omega_y^+(t) \leq \omega(t)$ и $u^+(x_2) - u^+(x_1) \leq \omega(x_2 x_1)$, т.е. $u^+ \in \text{Lip}(X, \omega)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть f, f_1 — линейно ограниченные функции, определенные на Y , и пусть $c_1 \geq 0, c_2 \in \mathbb{R}$. Операторы E^+, E^- имеют следующие свойства (через E обозначается E^+ либо E^-):

- 1) E^+, E^- сохраняют границы (конечные либо бесконечные) значений исходной функции, т.е.

$$\inf\{f(y) : y \in Y\} \leq Ef(x) \leq \sup\{f(y) : y \in Y\};$$

- 2) E^+, E^- монотонны, т.е.

$$f \leq f_1 \Rightarrow Ef \leq Ef_1;$$

- 3) E^+, E^- положительно однородны и аддитивны по отношению к константам, т.е.

$$E(c_1 f + c_2) = c_1 Ef + c_2, \quad E^+(-f) = -E^- f;$$

- 4) E^+, E^- непрерывны относительно $\sup$ -нормы, т.е.

$$\sup\{|f(y) - f_1(y)| : y \in Y\} \leq \varepsilon \Rightarrow \sup\{|Ef(x) - Ef_1(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1), 2), 3) следуют из (2.3), (2.4) и свойств наименьшей вогнутой мажоранты (см. п. 2.1). Докажем свойство 4). Пусть

$$-\varepsilon \leq f(y) - f_1(y) \leq \varepsilon \quad \forall y \in Y.$$

Используя свойства 2) и 3), имеем

$$\begin{aligned} E^+ f_1 - \varepsilon &\leq E^+ f \leq E^+ f_1 + \varepsilon, \\ -\varepsilon &\leq E^+ f - E^+ f_1 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.5. *Продолжения $u^+ = E^+ f$ и $u^- = E^- f$ линейно ограничены, и выполняются неравенства*

$$-b(1 + y_0 x) \leq u^-(x) \leq u^+(x) \leq b(1 + y_0 x) \quad \forall x \in X, \quad (2.11)$$

где $y_0 \in Y$, а $b = b(f, y_0)$ определено в (1.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.10) имеем $f(y) \leq b + b \cdot f_1(y)$ для любого $y \in Y$, где $f_1(y) = y_0 y$. Согласно (2.3) имеем $E^+ f_1(x) \leq y_0 x$. Из свойств 2) и 3) оператора E^+ получим

$$u^+(x) \leq b + bE^+ f_1(x) \leq b(1 + y_0 x).$$

Аналогично устанавливается оценка $-b(1 + y_0 x) \leq u^-(x)$. Пользуясь теоремой 2.1, получаем (2.11). Теорема доказана.

§ 3. ∞ -субгармонические и ∞ -супергармонические функции и продолжения

Везде далее предполагаем следующее: метрическое пространство (X, d) — линейно связное с внутренней метрикой, X_0 — открытое непустое собственное подмножество X . Функция f задана на $Y = \partial X_0$, рассматривается продолжение f на множество X_0 . Через Z везде далее обозначаются непустые открытые подмножества X .

Заметим, что ограничение на $\text{dom}(f)$ не является существенным, так как, во-первых, $\partial X_0 \neq \emptyset$ в силу связности X , во-вторых, все рассматриваемые далее продолжения не зависят от значений исходной функции во внутренних точках ее области определения.

Введем операторы на классе линейно ограниченных функций, определенных на $\overline{X_0}$, с помощью формул:

$$\begin{aligned} E^+[Z]u(x) &= \begin{cases} u(x), & \text{если } x \in \overline{X_0} \setminus Z, \\ E^+(u|_{\partial Z})(x), & \text{если } x \in Z; \end{cases} \\ E^-[Z]u(x) &= \begin{cases} u(x), & \text{если } x \in \overline{X_0} \setminus Z, \\ E^-(u|_{\partial Z})(x), & \text{если } x \in Z; \end{cases} \\ E_{\min}^+[Z]u &= \min\{u, E^+[Z]u\}; \\ E_{\max}^-[Z]u &= \max\{u, E^-[Z]u\}, \end{aligned}$$

где $Z \subset X_0$. Верхнее и нижнее продолжения функции f на X_0 обозначим через $E^+[X_0]f$ и $E^-[X_0]f$.

3.1. Вспомогательные результаты.

ЛЕММА 3.1. Пусть $x_1 \in Z$, $x_2 \in X \setminus Z$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $z \in \partial Z$ такая, что $\varepsilon + x_1 x_2 \geq x_1 z + x_2 z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x_2 \in \partial Z$, то положим $z = x_2$ и доказательство закончено. Предположим, что $x_2 \in X \setminus \overline{Z}$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Из определения внутренней метрики следует существование кривой $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ такой, что $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$, $x_1 x_2 + \varepsilon \geq \text{len}(\gamma)$. По теореме о переходе через таможенную [21; гл. 2, § 9] существует точка $z \in \gamma([0, 1]) \cap \partial Z$. Очевидное неравенство $\text{len}(\gamma) \geq x_1 z + x_2 z$ завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 3.2. Пусть ω – вогнутый модуль непрерывности, $y \in X \setminus Z$, $u(x) = \omega(xy)$. Тогда

$$E^+[Z]u(x) \leq \omega(xy) \quad \forall x \in X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varepsilon > 0$ и $x \in Z$. С учетом леммы 3.1 возьмем точку $z \in \partial Z$ такую, что $xy + \varepsilon \geq xz + zy$. Используя (2.3), получим

$$\begin{aligned} E^+[Z]u(x) &\leq (\sup\{\omega(yz_1) : zz_1 \leq t, z_1 \in \partial Z\})_{t=zx}^* \\ &\leq (\sup\{\omega(yz + zz_1) : zz_1 \leq t, z_1 \in \partial Z\})_{t=zx}^* \\ &\leq (\omega(yz + t))_{t=zx}^* = \omega(yz + zx) \leq \omega(xy + \varepsilon). \end{aligned}$$

Так как ε может быть взято произвольно малым, а функция $\omega(t)$ непрерывна при $t > 0$, лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.1. Пусть $y \in X \setminus Z$, $u(x) = xy$. Тогда $E^+[Z]u(x) \leq xy$ и $E^-[Z](-u)(x) \geq -xy \quad \forall x \in X$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.2. Пусть функция u линейно ограничена на $\overline{X_0}$, $Z \subset X_0$, $u^+ = E^+[X_0]u$, $u^- = E^-[X_0]u$. Тогда $E^+[Z]u^+(x) \leq u^+(x)$ и $E^-[Z]u^-(x) \geq u^-(x) \quad \forall x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только первое неравенство. Через ω_z^+ обозначим верхний локализованный модуль непрерывности функции $u|_{\partial X_0}$ относительно точки $z \in \partial X_0$. Возьмем $x \in Z$. Пользуясь монотонностью E^+ и леммой 3.2, получим

$$E^+[Z]u^+(x) \leq E^+[Z](u(z) + \omega_z^+(xz))(x) \leq u(z) + \omega_z^+(xz),$$

где $z \in \partial X_0$. Взяв нижнюю грань по $z \in \partial X_0$, получим требуемое неравенство.

3.2. ∞ -субгармонические и ∞ -супергармонические функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $u: \overline{X_0} \rightarrow \mathbb{R}$ называется ∞ -субгармонической (∞ -супергармонической) на X_0 , если она непрерывна на X_0 , линейно ограничена на $\overline{X_0}$ и для каждого открытого $Z \subset X_0$ и $x \in Z$ выполняется неравенство $u(x) \leq E^+[Z]u(x)$ ($u(x) \geq E^-[Z]u(x)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $u: \overline{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ называется ∞ -гармонической на X_0 если она одновременно ∞ -супергармонична и ∞ -субгармонична на X_0 .

Определяя субгармонические функции или их обобщения, обычно требуют только полунепрерывность этих функций и допускают бесконечные значения функций. Для целей настоящей работы достаточно приведенного определения с более жесткими ограничениями. Свойства ∞ -супергармонических (∞ -субгармонических) функций подобны свойствам обычных супергармонических (субгармонических) функций. Установим некоторые свойства.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть функция u ∞ -супергармонична на X_0 , пусть $Z \subset X_0$. Тогда функция $v = E_{\min}^+[Z]u$ ∞ -супергармонична на X_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что v не ∞ -супергармонична. Это означает, что существуют открытое подмножество $Z_0 \subset X_0$ и $x_0 \in Z_0$ такие, что

$$E^-[Z_0]v(x_0) > v(x_0).$$

Из ∞ -супергармоничности функции u и монотонности оператора E^- имеем

$$u(x) \geq E^-[Z_0]u(x) \geq E^-[Z_0]v(x) \quad \forall x \in \overline{X}_0. \quad (3.1)$$

Следовательно, $u(x_0) > v(x_0)$ и $v(x_0) = E^+[Z]u(x_0)$. Определим функцию v_1 и множество Z_1 :

$$v_1 = E^-[Z_0]v, \quad Z_1 = \{z : v(z) < v_1(z)\}.$$

Это множество непусто, так как $x_0 \in Z_1$.

Сравним функции $v|_{\partial Z_1}$ и $v_1|_{\partial Z_1}$. Если $z \in \partial Z_1 \setminus \partial X_0$, то функции v , v_1 непрерывны в точке z и, следовательно, $v_1(z) = v(z)$. Если $z \in \partial Z_1 \cap \partial X_0$, то $v(z) = v_1(z) = u(z)$ по определению функций v , v_1 . В итоге имеем $v|_{\partial Z_1} = v_1|_{\partial Z_1}$.

Очевидно, что $Z_1 \subset Z_0$. Используя следствие 3.2.2, получим

$$E^-[Z_1]v(x_0) = E^-[Z_1]v_1(x_0) \geq v_1(x_0) = E^-[Z_0]v(x_0) > v(x_0).$$

Из (3.1) следует, что $Z_1 \subset Z$. Используя следствие 3.2.2, монотонность оператора E^+ и теорему 2.1, имеем

$$v(x_0) = E^+[Z]u(x_0) \geq E^+[Z_1](E^+[Z]u)(x_0) \geq E^+[Z_1]v(x_0) \geq E^-[Z_1]v(x_0).$$

Получено противоречие. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть V – множество ∞ -супергармонических на X_0 функций u

$$\|v|_{B(x, \frac{1}{2}d(x, \partial X_0))}\|_{\text{Lip}} \leq k(x) \quad \forall v \in V, \quad \forall x \in X_0,$$

где $0 < k(x) < +\infty \quad \forall x \in X_0$. Пусть функция $u(x) = \inf\{v(x) : v \in V\}$ линейно ограничена на $\overline{X}_0$. Тогда функция u ∞ -супергармонична на X_0 и

$$\|u|_{B(x, \frac{1}{2}d(x, \partial X_0))}\|_{\text{Lip}} \leq k(x) \quad \forall x \in X_0.$$

Аналогичное утверждение верно для множества V ∞ -субгармонических функций и функции $u(x) = \sup\{v(x) : v \in V\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем открытое подмножество $Z \subset X_0$, точку $x \in Z$ и число $\varepsilon > 0$. Существует функция $v \in V$ такая, что

$$u(x) \leq v(x) \leq u(x) + \varepsilon.$$

Следовательно, $E^-[Z]u(x) \leq E^-[Z]v(x) \leq v(x) \leq u(x) + \varepsilon$. Так как ε может быть выбрано произвольно малым, имеем $E^-[Z]u(x) \leq u(x)$. Чтобы установить ∞ -супергармоничность функции u , осталось показать ее непрерывность на X_0 .

Оценим разность $u(x_2) - u(x_1)$, где $x_1, x_2 \in B(x, \frac{1}{2}d(x, \partial X_0))$:

$$\begin{aligned} u(x_2) - u(x_1) &= \inf\{v(x_2) : v \in V\} - \inf\{v(x_1) : v \in V\} \\ &\leq \sup\{v(x_2) - v(x_1) : v \in V\} \leq k(x)x_1x_2. \end{aligned}$$

Значит, $\|u\|_{B(x, \frac{1}{2}d(x, \partial X_0))} \leq k(x)$. Теорема доказана.

3.3. ∞ -субгармонические и ∞ -супергармонические продолжения.

Продолжение $u: \bar{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ функции $f: \partial X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть ∞ -супергармоническим (∞ -субгармоническим), если функция u ∞ -супергармонична (∞ -субгармонична) на X_0 .

Получим примеры ∞ -субгармонического и ∞ -супергармонического продолжений, а затем покажем, что ∞ -субгармонические и ∞ -супергармонические продолжения, сохраняющие локализованные модули непрерывности, локально липшицевы на X_0 .

ЛЕММА 3.5. *Продолжение $u^+ = E^+[X_0]f$ ∞ -супергармоническое, продолжение $u^- = E^-[X_0]f$ ∞ -субгармоническое.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z \subset X_0$, $x \in Z$. Используя теорему 2.1 и следствие 3.2.2, получим

$$\begin{aligned} E^-[Z]u^+(x) &\leq E^+[Z]u^+(x) \leq u^+(x), \\ E^+[Z]u^-(x) &\geq E^-[Z]u^-(x) \geq u^-(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3.5 используется в следующем параграфе.

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть u — ∞ -супергармоническое продолжение функции f , сохраняющее локализованные модули непрерывности. Тогда функция u локально липшицева в точке $x \in X_0$ и*

$$\|u\|_{B(x, \frac{1}{2}d(x, Y))} \leq b + \frac{8b(1 + 2xy_0)}{d(x, Y)}, \quad (3.2)$$

где $y_0 \in Y = \partial X_0$, а $b = b(f, y_0)$ определено в (1.9). Аналогичное утверждение справедливо для ∞ -субгармонического продолжения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0, x_1 \in X_0$, $x_0 \neq x_1$. Начнем с доказательства неравенства

$$\frac{u(x_0) - u(x_1)}{x_0 x_1} \leq b + \frac{4b(1 + x_0 y_0)}{d(x_0, Y)}. \quad (3.3)$$

Предположим, что это неравенство не выполняется. Тогда существует число $m \geq 0$ такое, что

$$\frac{u(x_0) - u(x_1)}{x_0 x_1} > m > b + \frac{4b(1 + x_0 y_0)}{d(x_0, Y)}.$$

Определим функцию v и множество Z :

$$v(z) = u(x_0) - m \cdot x_0 z, \quad Z = \{z : v(z) > u(z)\}.$$

Множество Z непусто, так как $x_1 \in Z$.

Покажем, что $Z \subset B(x_0, \frac{1}{2}d(x_0, Y))$. Пусть $x_0 z \geq \frac{1}{2}d(x_0, Y)$. Пользуясь неравенствами (2.5) и (2.11), получим

$$\begin{aligned} v(z) - u(z) &\leq u^+(x_0) - m \cdot x_0 z - u^-(z) \leq b(1 + y_0 x_0) + b(1 + y_0 z) - m \cdot x_0 z \\ &\leq 2b(1 + x_0 y_0) + (b - m)x_0 z \leq 2b(1 + x_0 y_0) + \frac{1}{2}(b - m)d(x_0, Y) < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $Z \subset B(x_0, \frac{1}{2}d(x_0, Y))$ и $\overline{Z} \subset X_0$. Так как функции u, v непрерывны на X_0 , то $u|_{\partial Z} = v|_{\partial Z}$. Из следствия 3.2.1 для $z \in Z$ получим

$$\begin{aligned} E^-[Z]u(z) &= E^-[Z]v(z) = E^-[Z](u(x_0) - m \cdot x_0 z)(z) \\ &= u(x_0) + mE^-[Z](-x_0 z)(z) \geq u(x_0) + m(-x_0 z) = v(z) > u(z). \end{aligned}$$

Это означает, что функция u не ∞ -супергармоническая, что противоречит условию теоремы. Значит, неравенство (3.3) справедливо.

Пусть теперь $x_0, x_1 \in B(x, \frac{1}{2}d(x, Y))$. Тогда

$$\begin{aligned} x_0 y_0 &\leq x x_0 + x y_0 \leq \frac{1}{2}d(x, Y) + x y_0 \leq 2x y_0, \\ d(x_0, Y) &\geq d(x, Y) - x_0 x \geq \frac{1}{2}d(x, Y). \end{aligned}$$

Неравенство (3.2) следует из последних неравенств и неравенства (3.3). Теорема доказана.

§ 4. Абсолютно минимальные продолжения

4.1. Верхние и нижние классы продолжений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс U продолжений функции f на X_0 называется *верхним*, если он обладает следующими тремя свойствами:

- 1) класс U содержит верхнее продолжение, т.е.

$$E^+[X_0]f \in U; \quad (4.1)$$

- 2) класс U замкнут относительно взятия нижних огибающих, т.е.

$$V \subset U \Rightarrow u(x) = \inf\{v(x) : v \in V\} \in U; \quad (4.2)$$

- 3) класс U замкнут относительно оператора $E_{\min}^+[Z]$ для каждого открытого подмножества $Z \subset X_0$, т.е.

$$u \in U \Rightarrow E_{\min}^+[Z]u \in U. \quad (4.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс U продолжений функции f на X_0 называется *нижним*, если он обладает следующими тремя свойствами:

- 1) класс U содержит нижнее продолжение

$$E^-[X_0]f \in U;$$

- 2) класс U замкнут относительно взятия верхних огибающих, т.е.

$$V \subset U \Rightarrow u(x) = \sup\{v(x) : v \in V\} \in U;$$

- 3) класс U замкнут относительно оператора $E_{\max}^-[Z]$ для каждого открытого подмножества $Z \subset X_0$, т.е.

$$u \in U \Rightarrow E_{\max}^-[Z]u \in U.$$

Укажем верхний и нижний классы продолжений, которые будут использованы для построения абсолютно минимальных продолжений.

ЛЕММА 4.1. Пусть u_0 — ∞ -субгармоническое продолжение функции f , сохраняющее локализованные модули непрерывности. Класс U^+ всех ∞ -супергармонических локально липшицевых на X_0 продолжений функции f , удовлетворяющих неравенствам

$$u_0 \leq u \leq E^+[X_0]f, \quad (4.4)$$

является верхним.

Пусть u_1 — ∞ -супергармоническое продолжение функции f , сохраняющее локализованные модули непрерывности. Класс U^- всех ∞ -субгармонических локально липшицевых на X_0 продолжений функции f , удовлетворяющих неравенствам $u_1 \geq u \geq E^-[X_0]f$, является нижним.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только первое утверждение. Покажем, что класс U^+ является верхним, т.е. обладает свойствами (4.1)–(4.3).

Покажем, что $E^+[X_0]f \in U^+$. Неравенство $u_0 \leq E^+[X_0]f$ следует из ∞ -субгармоничности продолжения u_0 . В силу леммы 3.5 продолжение $E^+[X_0]f$ ∞ -супергармоническое. В силу теоремы 2.3 функция $E^+[X_0]f$ локально липшицева на X_0 .

Покажем, что U^+ обладает свойством (4.2). Пусть $V \subset U^+$ — подмножество локально липшицевых и ∞ -супергармонических на X_0 функций, удовлетворяющих неравенствам (4.4). Тогда

$$E^+[X_0]f \geq u(x) = \inf\{v(x) : v \in V\} \geq u_0(x).$$

В силу теоремы 3.6 множество V удовлетворяет условиям теоремы 3.4. Следовательно, продолжение u ∞ -супергармонично и локально липшицево на X_0 .

Покажем, что U^+ обладает свойством (4.3). Пусть продолжение $u_2 \in U^+$ ∞ -супергармонично и локально липшицево на X_0 . Пусть $u_0 \leq u_2 \leq E^+[X_0]f$ и $Z \subset X_0$. Тогда продолжение $u = E_{\min}^+[Z]u_2$ ∞ -супергармонично в силу теоремы 3.3 и локально липшицево на X_0 (в силу теорем 2.3 и 3.6). Покажем, что $u \geq u_0$. Из ∞ -субгармоничности продолжения u_0 и монотонности оператора E^+ получим

$$u_0 \leq E^+[Z]u_0 \leq E^+[Z]u_2.$$

Так как $u_0 \leq u_2$, имеем $u = \min\{u_2, E^+[Z]u_2\} \geq u_0$. Таким образом, требуемые свойства доказаны и класс U^+ является верхним. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Минимальным верхним (нижним) классом* продолжений функции f , обозначаемым через Upp_f (Low_f), называется пересечение всех верхних (нижних) классов продолжений этой функции.

Минимальные верхний и нижний классы непусты, так как

$$E^+[X_0]f \in \text{Upp}_f, \quad E^-[X_0]f \in \text{Low}_f. \quad (4.5)$$

Легко проверяется, что класс Upp_f верхний, а класс Low_f нижний. Очевидно, что $\text{Upp}_f \subset U^+$ и $\text{Low}_f \subset U^-$, где U^+ и U^- определены в условии леммы 4.1. Следовательно, все продолжения из Upp_f (Low_f) локально липшицевы на X_0 и ∞ -супергармоничны (∞ -субгармоничны).

4.2. Абсолютно минимальные продолжения. Определение и доказательство существования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Продолжение $u: \overline{X_0} \rightarrow \mathbb{R}$ функции f называется *абсолютно минимальным* (а.м.) (или ∞ -гармоническим), если оно одновременно ∞ -супергармонично и ∞ -субгармонично.

Эквивалентность а.м. продолжений в смысле данного определения и а.м. продолжений в смысле Аронссона показана в §6.

Определим две функции

$$\begin{aligned} u_a^+(x) &= \inf\{u(x) : u \in \text{Upp}_f\}, \\ u_a^-(x) &= \sup\{u(x) : u \in \text{Low}_f\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.2. *Функции u_a^- , u_a^+ являются а.м. продолжениями функции f . Если u_a — а.м. продолжение функции f , то оно локально липшицево на X_0 , сохраняет локализованные модули непрерывности и справедливы неравенства*

$$E^-[X_0]f \leq u_a^- \leq u_a \leq u_a^+ \leq E^+[X_0]f. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только ту часть утверждений, которая касается функции u_a^+ . Очевидно, что $u_a^+ \in \text{Upp}_f$ и, следовательно, продолжение u_a^+ локально липшицево и ∞ -субгармонично.

Докажем ∞ -субгармоничность u_a^+ . Возьмем открытое подмножество $Z \subset X_0$. Пусть $u_1 = E_{\min}^+[Z]u_a^+$. Тогда $E^+[Z]u_a^+ \geq u_1$. Но $u_1 \in \text{Upp}_f$ и, следовательно, $u_1 \geq u_a^+$. Получаем $E^+[Z]u_a^+ \geq u_a^+$, что означает ∞ -субгармоничность продолжения u_a^+ .

Используя лемму 4.1 и включения (4.5), получим

$$E^-[X_0]f \leq u_1 \leq u_a \leq u_2 \leq E^+[X_0]f \quad \forall u_1 \in \text{Low}_f, \quad \forall u_2 \in \text{Upp}_f,$$

откуда следует (4.6). Теорема доказана.

Естественно поставить вопрос об условиях, при которых а.м. продолжение единственно, т.е. $u_a^- = u_a^+$. Здесь имеется аналогия с вопросом *разрешимости* функций в теории потенциала [22]. R. Jensen [7] доказал единственность для случая, когда X_0 — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и исходная функция f липшицева. В более общей ситуации условия единственности пока не получены. Пример неединственности дает продолжение функции Дирихле (равной 1 в рациональных точках и равной 0 в иррациональных) с действительной оси на комплексную плоскость. Любая постоянная функция со значением из $[0, 1]$ будет а.м. продолжением.

§ 5. Некоторые свойства абсолютно минимальных продолжений

5.1. Операторы а.м. продолжения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Операторы, определяемые формулами

$$E_a^+ f(x) = \inf \{u(x) : u \in \text{Upp}_f\},$$

$$E_a^- f(x) = \sup \{u(x) : u \in \text{Low}_f\},$$

называются *верхним и нижним операторами а.м. продолжения* соответственно.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть функции f, f_1 линейно ограничены, и пусть $c_1 \geq 0, c_2 \in \mathbb{R}$. Операторы E_a^+, E_a^- имеют следующие свойства (через E обозначается E_a^+ либо E_a^-):

- 1) E_a^+, E_a^- сохраняют границы (конечные либо бесконечные) значений функции, т.е.

$$\inf \{f(y) : y \in \partial X_0\} \leq Ef(x) \leq \sup \{f(y) : y \in \partial X_0\}, \quad x \in X_0;$$

- 2) E_a^+, E_a^- монотонны, т.е. $f \leq f_1 \Rightarrow Ef \leq Ef_1$;
- 3) E_a^+, E_a^- положительно однородны и аддитивны по отношению к константам, т.е.

$$E(c_1 f + c_2) = c_1 Ef + c_2, \quad E_a^+(-f) = -E_a^- f;$$

- 4) E_a^+, E_a^- непрерывны в $\sup$ -норме, т.е.

$$\sup \{|f(y) - f_1(y)| : y \in \partial X_0\} \leq \varepsilon \Rightarrow \sup \{|Ef(x) - Ef_1(x)| : x \in X_0\} \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 1) следует из теоремы 4.2 и свойства 1) операторов E^+ , E^- в теореме 2.4. Свойства 2), 3) следуют из соответствующих свойств операторов E^+ , E^- . Свойство 4) следует из свойств 2) и 3). Теорема доказана.

Пусть $Z \subset X_0$. Введем операторы на классе линейно ограниченных функций, определенных на $\overline{X_0}$:

$$\begin{aligned} E_a^+[Z]u(x) &= \begin{cases} u(x), & \text{если } x \in \overline{X_0} \setminus Z, \\ E_a^+(u|_{\partial Z})(x), & \text{если } x \in Z; \end{cases} \\ E_a^-[Z]u(x) &= \begin{cases} u(x), & \text{если } x \in \overline{X_0} \setminus Z, \\ E_a^-(u|_{\partial Z})(x), & \text{если } x \in Z. \end{cases} \end{aligned}$$

Установим свойство сужений верхнего и нижнего а.м. продолжений на открытое подмножество $Z \subset X_0$, названное в [19] локальностью.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $Z \subset X_0$, $u_a^+ = E_a^+f$. Тогда

$$u_a^+ = E_a^+[Z]u_a^+.$$

Нижний оператор а.м. продолжения обладает аналогичным свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем обозначение

$$u_a^{++} = E_a^+[Z]u_a^+.$$

Очевидно, что функция u_a^+ — ∞ -гармоническая на Z и $u_a^+|_{\overline{Z}}$ является а.м. продолжением функции $u_a^+|_{\partial Z}$ на множество Z . В силу теоремы 4.2 выполняется неравенство $u_a^{++} \geq u_a^+$.

Покажем, что $u_a^+ \geq u_a^{++}$. Установим, что класс U_1 всех продолжений функции f , удовлетворяющих неравенству $u \geq u_a^{++}$, является верхним. Отсюда сразу можно будет заключить, что любое продолжение из минимального верхнего класса Upp_f (в том числе и u_a^+) удовлетворяет последнему неравенству.

Рассмотрим продолжение $E^+[X_0]f$. Из ∞ -субгармоничности а.м. продолжения u_a^+ следует, что

$$E^+[X_0]f(x) \geq u_a^+(x) = E^+[Z]u_a^+(x) \quad \forall x \notin Z.$$

Пользуясь следствием 3.2.2, монотонностью оператора E^+ и последним неравенством, получим

$$E^+[X_0]f \geq E^+[Z](E^+[X_0]f) \geq E^+[Z]u_a^+ \geq u_a^{++}.$$

Значит, $E^+[X_0]f \in U_1$.

Замкнутость класса U_1 относительно взятия нижних огибающих очевидна.

Покажем наличие у класса U_1 свойства (4.3). Пусть $u \in U_1$, $u \geq u_a^{++}$ и Z_0 — открытое непустое подмножество множества X_0 . Пользуясь монотонностью $E^+[Z_0]$, имеем

$$E^+[Z_0]u \geq E^+[Z_0]u_a^{++} \geq E^+[Z_0]u_a^+ \geq u_a^+.$$

Учитывая, что при $z \in \overline{X}_0 \setminus Z$ $u_a^+(x) = u_a^{++}(x)$, получим

$$E^+[Z_0]u(x) \geq u_a^{++}(x) \quad \forall x \in \overline{X}_0 \setminus Z.$$

Приняв во внимание, что

$$E^+[Z_0]u(x) = u(x) \geq u_a^{++}(x) \quad \forall x \in \overline{X}_0 \setminus Z_0,$$

имеем

$$E^+[Z_0]u(x) \geq u_a^{++}(x) \quad \forall x \in \overline{X}_0 \setminus (Z \cap Z_0).$$

Пользуясь следствием 3.2.2 и монотонностью оператора E^+ , получим

$$E^+[Z_0]u \geq E^+[Z \cap Z_0](E^+[Z_0]u) \geq E^+[Z \cap Z_0]u_a^{++} \geq u_a^{++}.$$

Следовательно, $E_{\min}^+[Z_0]u = \min\{u, E^+[Z_0]u\} \geq u_a^{++}$.

Таким образом, показано, что класс U_1 является верхним и, следовательно, $u_a^+ \geq u_a^{++}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.2.1. Пусть Z — линейно связная компонента множества X_0 . Тогда функция $(E_a^+ f)|_{\overline{Z}}$ есть верхнее а.м. продолжение функции $f|_{\partial Z}$ на множество Z . Аналогичное утверждение справедливо для нижних а.м. продолжений.

5.2. Сохранение модуля непрерывности. Докажем, что а.м. продолжение сохраняет модуль непрерывности исходной функции. Начнем с предварительных результатов.

ЛЕММА 5.3. Пусть Z — открытое подмножество X_0 , $x \in Z$, ω — вогнутый модуль непрерывности.

Если функция u ∞ -субгармоническая на Z и для любого $z \in \partial Z$ выполняется $u(z) - u(x) \leq \omega(xz)$, то это неравенство справедливо для любого $z \in Z$.

Если функция u ∞ -супергармоническая на Z и для любого $z \in \partial Z$ выполняется $u(x) - u(z) \leq \omega(xz)$, то это неравенство справедливо для любого $z \in Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только первую часть. Определим множество $Z_1 = Z \setminus \{x\}$ и функцию $u_1 = u|_{\partial Z_1}$. Построим ω_x^+ — верхний локализованный модуль непрерывности функции u_1 относительно точки x . Из условия теоремы следует, что $\omega_x^+ \leq \omega$. Из ∞ -субгармоничности функции u на Z следует, что для любого $z \in Z$

$$u(z) \leq E^+[Z_1]u(z) \leq u(x) + \omega_x^+(xz) \leq u(x) + \omega(xz).$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.3.1. Пусть $x \in X_0$, $x_1 \in X$, $x \neq x_1$, u — а.м. продолжение функции f . Тогда верны неравенства

$$-\sup_{y \in \partial X_0} \frac{u(x) - f(y)}{xy} \leq \frac{u(x_1) - u(x)}{x_1 x} \leq \sup_{y \in \partial X_0} \frac{f(y) - u(x)}{xy}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 5.3, взяв

$$\omega(t) = t \cdot \sup \left\{ \frac{u(x) - f(y)}{xy} : y \in \partial X_0 \right\}$$

для первого неравенства и

$$\omega(t) = t \cdot \sup \left\{ \frac{f(y) - u(x)}{xy} : y \in \partial X_0 \right\}$$

для второго.

Докажем основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть ω – вогнутый модуль непрерывности, u – а.м. продолжение функции f на X_0 и $f \in \text{Lip}(\partial X_0, \omega)$. Тогда $u \in \text{Lip}(\overline{X}_0, \omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как а.м. продолжение сохраняет локализованные модули непрерывности, которые не превосходят ω , то справедливы неравенства

$$f(y) - u(x) \leq \omega(xy), \quad u(x) - f(y) \leq \omega(xy) \quad \forall y \in \partial X_0, \quad \forall x \in X_0.$$

Применяя лемму 5.3, получим требуемый результат. Теорема доказана.

5.3. Оценка нормы градиента.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть u – а.м. продолжение функции f , $x \in X_0$. Тогда

$$\|Du(x)\| \leq L(x) = \sup \left\{ \frac{f(y_2) - f(y_1)}{xy_1 + xy_2} : y_1, y_2 \in \partial X_0 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1 \in X_0$, $x_1 \neq x$. Обозначим

$$c = \frac{u(x_1) - u(x)}{x_1 x}.$$

Из следствия 5.3.1 получаем

$$c \leq \sup_{y_2 \in \partial X_0} \frac{f(y_2) - u(x)}{xy_2}, \quad - \sup_{y_1 \in \partial X_0} \frac{u(x_1) - f(y_1)}{x_1 y_1} \leq -c.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют $y_1, y_2 \in \partial X_0$ такие, что

$$c - \varepsilon \leq \min \left\{ \frac{f(y_2) - u(x)}{xy_2}, \frac{u(x_1) - f(y_1)}{x_1 y_1} \right\}.$$

Используя неравенство

$$\min \left\{ \frac{c_1}{c_2}, \frac{c_3}{c_4} \right\} \leq \frac{c_1 + c_3}{c_2 + c_4},$$

где $c_1, c_3 \geq 0$, $c_2, c_4 > 0$, получим

$$\begin{aligned} c - \varepsilon &\leq \frac{f(y_2) - u(x) + u(x_1) - f(y_1)}{xy_2 + x_1y_1} \\ &\leq \frac{f(y_2) - f(y_1)}{xy_2 + xy_1} \cdot \frac{xy_2 + xy_1}{xy_2 + x_1y_1} + \frac{|u(x) - u(x_1)|}{d(x, \partial X_0)} \\ &\leq L(x) \cdot \left(1 + \frac{xx_1}{d(x, \partial X_0)}\right) + \frac{|u(x) - u(x_1)|}{d(x, \partial X_0)}. \end{aligned}$$

Переходя к верхнему пределу при $x_1 \rightarrow x$ и учитывая, что ε можно выбрать произвольно малым, имеем

$$\overline{\lim}_{x_1 \rightarrow x} \frac{u(x_1) - u(x)}{x_1x} \leq L(x).$$

Аналогично показывается, что

$$\overline{\lim}_{x_1 \rightarrow x} \frac{u(x) - u(x_1)}{x_1x} \leq L(x).$$

Теорема доказана.

§ 6. Эквивалентность а.м. продолжений и продолжений Аронссона

В этом параграфе рассматривается соотношение двух определений а.м. продолжений — определения Аронссона (см. п. 1.2) и определения из п. 4.2. Определение из п. 1.2 пригодно для липшицевых исходных функций. Мы даем более общее определение, пригодное для линейно ограниченных исходных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Продолжение $u: \overline{X_0} \rightarrow \mathbb{R}$ линейно ограниченной функции $f: \partial X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *продолжением Аронссона*, если выполняются условия:

- а) u непрерывно на X_0 ;
- б) для любого открытого подмножества $Z \subset X_0$ и для любой точки $z_0 \in \partial Z$ справедливы неравенства

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in Z} u(z) \geq \lim_{t \rightarrow +0} \inf \{u(z) : z_0z \leq t, z \in \partial Z\}, \quad (6.1)$$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0, z \in Z} u(z) \leq \lim_{t \rightarrow +0} \sup \{u(z) : z_0z \leq t, z \in \partial Z\}; \quad (6.2)$$

- в) для любого открытого подмножества $Z \subset X_0$ выполняется

$$\|u|_{\overline{Z}}\|_{\text{Lip}} = \|u|_{\partial Z}\|_{\text{Lip}}, \quad (6.3)$$

где обе части равенства могут одновременно принимать значение $+\infty$.

Термин “а.м. продолжение” употребляем в смысле определения из п. 4.2. Цель настоящего параграфа – показать эквивалентность продолжений Аронссона и а.м. продолжений.

Легко видеть, что а.м. продолжение есть продолжение Аронссона. Действительно, непрерывность u следует из определения а.м. продолжения, неравенства (6.1), (6.2) получаются из следствия 2.1.1 и теоремы 4.2. Если u есть а.м. продолжение функции f , то для любого $Z \subset X_0$ функция $u|_{\overline{Z}}$ ∞ -гармонична на Z . В силу теоремы 5.4 функция $u|_{\overline{Z}}$ сохраняет модуль непрерывности функции $u|_{\partial Z}$ и, следовательно, сохраняет липшицеву полунорму последней функции. Значит, выполняется (6.3) и u есть продолжение Аронссона. Осталось доказать, что продолжение Аронссона есть а.м. продолжение.

6.1. Леммы о среднем значении. Нам понадобятся некоторые результаты типа теоремы о среднем значении в форме неравенства (см. [23; п. 8.5]).

ЛЕММА 6.1. Пусть кривая γ соединяет точки $x_1, x_2 \in X$. Тогда

$$u(x_1) - u(x_2) \leq \sup\{\|Du(x)\| : x \in \gamma([0, 1])\} \cdot \text{len}(\gamma).$$

Результат непосредственно следует из [24] или [25; лемма 5.1].

ЛЕММА 6.2. Пусть $x, z_0 \in X$, $0 \leq r_1 < \dots < r_n = xz_0$, $m_2 \geq m_3 \geq \dots \geq m_n$, функция u непрерывна на $\{x : x \in X, xz_0 \geq r_1\}$ и

$$\|Du(z)\| \leq m_i, \quad \text{если} \quad r_{i-1} < xz \leq r_i, \quad i = 2, \dots, n.$$

Тогда

$$u(x) - \sup\{u(z) : z \in B(z_0, r_1)\} \leq \sum_{i=2}^n m_i(r_i - r_{i-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varepsilon > 0$. Из определения внутренней метрики следует существование кривой γ такой, что

$$\gamma(0) = z_0, \quad \gamma(1) = x, \quad \text{len}(\gamma) \leq xz_0 + \varepsilon.$$

Определим числа t_i и точки z_i :

$$t_i = \inf\{t : \gamma([t, 1]) \cap B(z_0, r_i) = \emptyset\}, \quad z_i = \gamma(t_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ t_0 = 0, \quad t_n = 1, \quad z_n = x.$$

Пользуясь непрерывностью γ , легко показать, что $z_i z_0 = r_i$. Через γ_i обозначим участок кривой $\gamma : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow X$, соединяющий точки $z_{i-1} = \gamma(t_{i-1})$ и $z_i = \gamma(t_i)$. Тогда

$$\text{len}(\gamma([0, t_i])) \leq r_i + \varepsilon, \quad \text{len}(\gamma_i) \leq (r_i - r_{i-1}) + \varepsilon.$$

Пользуясь леммой 6.1, получим

$$u(x) - \sup\{u(z) : z \in B(z_0, r_1)\} \leq u(x) - u(z_1) = \sum_{i=2}^n (u(z_i) - u(z_{i-1})) \\ \leq \sum_{i=2}^n m_i \cdot \text{len}(\gamma_i) \leq \sum_{i=2}^n m_i(r_i - r_{i-1}) + \varepsilon \cdot nm_2.$$

Так как ε может быть выбрано произвольно малым, лемма доказана.

Введем обозначение: $\overline{u(z_0)} = \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} u(z)$.

ЛЕММА 6.3. Пусть $x, z_0 \in X$, $x \neq z_0$, ω – вогнутый модуль непрерывности, функция $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$\|Du(z)\| \leq \omega'(z_0 z) \quad \forall z \in X \setminus \{z_0\},$$

где ω' – левая производная функции ω . Тогда

$$u(x) - \overline{u(z_0)} \leq \omega(z_0 x) - \omega(+0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем число r_1 такое, что $|\sup\{u(z) : z \in B(z_0, r_1)\} - \overline{u(z_0)}| < \varepsilon$ и $0 < r_1 < xz_0$. Функция $\omega'(r)$ конечна и убывает на $[r_1, xz_0]$. Существует кусочно постоянная, убывающая мажоранта β функции ω'

$$\beta(r) = m_{i+1}, \quad \text{если } r_i \leq r < r_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad r_n = xz_0,$$

такая, что

$$0 \leq \beta(r) - \omega'(r) < \varepsilon \quad \forall r \in [r_1, xz_0].$$

На основании леммы 6.2 имеем

$$\begin{aligned} u(x) - \overline{u(z_0)} &\leq \sum_{i=2}^n m_i(r_i - r_{i-1}) + \varepsilon \leq \int_{r_1}^{r_n} \beta(r) dr + \varepsilon \\ &\leq \int_{r_1}^{xz_0} (\omega'(r) + \varepsilon) dr + \varepsilon \leq \omega(xz_0) - \omega(+0) + \varepsilon \cdot xz_0 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как ε может быть выбрано произвольно малым, лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.3.1. Пусть $x_0, z_0 \in X$, $x_0 \neq z_0$, ω – вогнутый модуль непрерывности, функция $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$\overline{u(z_0)} \leq u(z_0) + \omega(+0), \quad u(z_0) + \omega(z_0 x_0) < u(x_0).$$

Тогда существует точка $x_1 \in X$ такая, что

$$\|Du(x_1)\| > \omega'(z_0 x_1), \quad u(x_1) > u(z_0) + \omega(z_0 x_1),$$

где ω' – левая производная функции ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем число $c_0 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$u(x_0) - u(z_0) > \omega(z_0 x_0) + 2c_0. \quad (6.4)$$

Обозначим $m = c_0 / (x_0 z_0)$. Определим функции

$$v(z) = u(z_0) + m \cdot z_0 z + \omega(z_0 z), \quad w(z) = \max\{u(z), v(z)\}.$$

Тогда $\overline{w(z_0)} = \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} w(z) = u(z_0) + \omega(+0)$, $w(x_0) = u(x_0)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \|Dw(z)\| &\leq \|Du(z)\|, & \text{если } u(z) > v(z); \\ \|Dw(z)\| &= \|Dv(z)\| \leq m + \omega'(z_0 z), & \text{если } u(z) < v(z); \\ \|Dw(z)\| &\leq \max\{\|Du(z)\|, m + \omega'(z_0 z)\}, & \text{если } u(z) = v(z). \end{aligned}$$

Если теперь предположить, что $\|Du(z)\| \leq m + \omega'(z_0 z)$ при $u(z) \geq v(z)$, то, пользуясь леммой 6.3, получим

$$\begin{aligned} u(x_0) - (u(z_0) + \omega(+0)) &= w(x_0) - \overline{w(z_0)} \\ &\leq \omega(z_0 x_0) - \omega(+0) + m \cdot z_0 x_0 = \omega(z_0 x_0) - \omega(+0) + c_0, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (6.4). Значит, существует точка $x_1 \in \overline{Z}$, $x_1 \neq z_0$, такая, что

$$\begin{aligned} \|Du(x_1)\| &> m + \omega'(z_0 x_1), \\ u(x_1) &\geq v(x_1) = u(z_0) + m \cdot z_0 x_1 + \omega(z_0 x_1) > u(z_0) + \omega(z_0 x_1). \end{aligned}$$

Следствие доказано.

6.2. Некоторые свойства продолжений Аронссона. Установим ряд свойств продолжений Аронссона. Некоторые аналогичные свойства ранее установлены для а.м. продолжений.

ЛЕММА 6.4. Пусть $Z_0 \subset X_0$, Z_0 открыто, u — продолжение Аронссона функции f . Определим функцию $v(z) = a_v + b_v \cdot x_0 z$, где $a_v \in \mathbb{R}$, $b_v \geq 0$, $z \in X$. Пусть верно неравенство $v|_{\partial Z_0} \geq u|_{\partial Z_0}$. Пусть в случае $x_0 \in \overline{Z_0}$ выполняется $a_v = v(x_0) \geq u(x_0)$.

Тогда $v(z) \geq u(z)$ для любого $z \in Z_0$. Аналогичный результат справедлив, если все знаки неравенств заменить на обратные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение леммы не выполняется. Это означает, что существует $\delta > 0$ такое, что множество

$$Z = \{z : u(z) > v(z) + \delta, z \in Z_0\}$$

непусто. Покажем, что $\partial Z \subset Z_0$. Из $Z \subset Z_0$ следует $\partial Z \subset \overline{Z_0}$. Если $z_0 \in \partial Z \cap \partial Z_0$, то

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0, z \in Z} u(z) &\geq \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0, z \in Z} v(z) + \delta = v(z_0) + \delta \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \sup\{v(z) : z_0 z \leq t, z \in \partial Z_0\} + \delta \\ &\geq \lim_{t \rightarrow +0} \sup\{u(z) : z_0 z \leq t, z \in \partial Z_0\} + \delta, \end{aligned}$$

что противоречит (6.2). Значит, $\partial Z \subset Z_0 \subset X_0$.

Сравним функции $u|_{\partial Z}$ и $(v + \delta)|_{\partial Z}$. Так как $\partial Z \subset X_0$, функции v , u непрерывны в точке $z_0 \in \partial Z$ и, следовательно, $u(z_0) = v(z_0) + \delta$. Имеем $u|_{\partial Z} = v|_{\partial Z} + \delta$. Из (6.3) получаем

$$\|u|_{\overline{Z}}\|_{\text{Lip}} = \|v|_{\partial Z}\|_{\text{Lip}} \leq b_v.$$

Поэтому $\|Du(z)\| \leq b_v$ для любого $z \in Z$.

Определим функцию

$$w(z) = \begin{cases} v(z) + \delta, & \text{если } x \in X \setminus Z, \\ u(z), & \text{если } x \in Z. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\|Dw(z)\| \leq b_v$ для любого z . Из условия леммы следует, что $x_0 \notin Z$ и, следовательно $w(x_0) = a_v + \delta$. Пользуясь леммой 6.2, для произвольного $z \in Z_0$ получим

$$u(z) \leq w(z) = w(z) - w(x_0) + w(x_0) \leq b_v \cdot x_0 z + a_v + \delta = v(z) + \delta.$$

Это означает, что множество Z пусто. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.5. *Продолжение Аронссона и линейно ограниченной функции f линейно ограничено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $y_0 \in \partial X_0$ и определим $b = b(y_0, f)$ посредством (1.9), напомним, что $Y = \partial X_0$. Определим функцию $v(x) = b + b \cdot y_0 x$. Легко проверить, что для функции v и множества X_0 выполнены условия леммы 6.4, откуда следует, что $u(x) \leq v(x)$ для любого $x \in X_0$. Аналогично получается нижняя оценка для $u(x)$. В результате имеем $|u(x)| \leq v(x) \leq b(1 + y_0 x)$ для любого $x \in X_0$, что означает линейную ограниченность u . Лемма доказана.

ЛЕММА 6.6. *Пусть $x_0 \in X_0$, u — продолжение Аронссона функции f . Обозначим*

$$M_1 = \overline{\lim}_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{u(x_0) - u(x_1)}{x_1 x_0}, \quad M_2 = \overline{\lim}_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{u(x_1) - u(x_0)}{x_1 x_0}.$$

Тогда $M_1 = M_2 \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $M_1 \geq 0$. Предположим, что $M_1 < 0$. Пусть $m = \min\{|M_1|/2, 1\}$. Возьмем $r > 0$ настолько малым, чтобы $B(x_0, 2r) \subset X_0$ и

$$\frac{u(x_0) - u(x_1)}{x_1 x_0} < -m \quad \forall x_1 \in B(x_0, 2r).$$

Тогда

$$u(x_1) > u(x_0) + m \cdot x_0 x_1 \quad \forall x_1 \in B(x_0, 2r),$$

т.е. функция u имеет в точке x_0 строгий локальный минимум. Обозначим через Z_0 ту связную компоненту множества

$$\{z : u(z) < u(x_0) + rm/2\},$$

которая содержит точку x_0 . Очевидно, что $Z_0 \subset B(x_0, r)$.

Функция u непрерывна на X_0 . Значит, $u|_{\partial Z_0} = rm/2$ и $\|u|_{\partial Z_0}\|_{\text{Lip}} = 0$. Из определения продолжения Аронссона имеем $\|u|_{\overline{Z_0}}\|_{\text{Lip}} = 0$, т.е. функция u постоянна на Z_0 . Это противоречит предположению, что $M_1 < 0$. Значит, $M_1 \geq 0$. Аналогично показывается, что $M_2 \geq 0$.

Докажем, что $M_1 = M_2$. Предположим, что $M_1 > M_2$. Возьмем числа m_2 и m_1 так, что $M_1 > m_1 > m_2 > M_2$. Из определения числа M_2 следует существование $r > 0$ такого, что

$$u(z) < u(x_0) + m_2 \cdot x_0 z \quad \forall z \in B(x_0, 2r) \subset X_0. \quad (6.5)$$

Выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\delta < r$ и

$$|u(x_0) - u(z)| + (m_1 + 1)\delta < (m_1 - m_2)r \quad \forall z \in B(x_0, \delta). \quad (6.6)$$

Из определения числа M_1 следует существование точки $x_1 \in B(x_0, \delta)$ такой, что

$$u(x_0) - u(x_1) > m_1 \cdot x_0 x_1. \quad (6.7)$$

Определим функцию $v(z) = u(x_1) + m_1 \cdot x_1 z$. Оценим значение $v(z)$ при условии $r \leq x_0 z \leq 2r$, используя неравенства (6.5) и (6.6):

$$\begin{aligned} v(z) &= u(x_1) + m_1 \cdot x_1 z \\ &= (u(x_0) + m_2 \cdot x_0 z) + (u(x_1) - u(x_0)) + m_1(x_1 z - x_0 z) + (m_1 - m_2)x_0 z \\ &\geq u(z) - |u(x_1) - u(x_0)| - m_1\delta + (m_1 - m_2)r > u(z) + \delta. \end{aligned}$$

Применим к внутренности множества $B(x_0, r)$ и функции v лемму 6.4. Получим неравенство $v(z) \geq u(z)$ для всех $z \in B(x_0, r)$. Это противоречит неравенству (6.7).

Следовательно, предположение, что $M_1 > M_2$, неверно. Аналогично получается противоречие при предположении, что $M_1 < M_2$. Лемма доказана.

6.3. Продолжение Аронссона есть а.м. продолжение.

ТЕОРЕМА 6.7. *Если u – продолжение Аронссона функции f , то u является а.м. продолжением функции f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6.5 продолжение u линейно ограничено. Предположим, что u не является а.м. продолжением, т.е. нарушается либо ∞ -субгармоничность, либо ∞ -супергармоничность. Предположим для определенности, что продолжение u не ∞ -субгармонично. Это означает, что существуют открытое подмножество $Z \subset X_0$ и точка $x \in Z$ такие, что

$$u(x) > E^+[Z]u(x).$$

Следовательно, с учетом формулы (2.2) существует точка $z_0 \in \partial Z$ такая, что

$$u(x) > u(z_0) + \omega(z_0 x),$$

где ω – верхний локализованный модуль непрерывности функции $u|_{\partial Z}$ относительно точки z_0 . Через ω' обозначаем левую производную функции ω . Из определения верхнего локализованного модуля непрерывности следует, что

$$u(z_0) + \omega(z_0 z) \geq u(z) \quad \text{при } z \in \partial Z. \quad (6.8)$$

Введем функцию

$$w(x) = \begin{cases} u(z_0) + \omega(z_0 x), & \text{если } x \in X \setminus Z, \\ \max\{u(x), u(z_0) + \omega(z_0 x)\}, & \text{если } x \in Z. \end{cases}$$

Применив следствие 6.3.1 к функции w , получаем точку $x_0 \in Z$ такую, что

$$\|Du(x_0)\| > \omega'(z_0x_0), \quad u(x_0) > u(z_0) + \omega(z_0x_0).$$

Выберем число m_0 так, что

$$\|Du(x_0)\| > m_0 > \omega'(z_0x_0).$$

Введем функцию $v(z) = u(x_0) + m_0 \cdot x_0z$. Пусть $z \in \partial Z$. Пользуясь неравенством (6.8) и вогнутостью функции ω , получим

$$\begin{aligned} v(z) &= u(x_0) + m_0 \cdot x_0z > u(z_0) + \omega(z_0x_0) + m_0 \cdot x_0z \\ &\geq u(z_0) + \omega(z_0x_0) + \omega'(z_0x_0)x_0z \geq u(z_0) + \omega(z_0z) \geq u(z). \end{aligned}$$

Применив к функции v и множеству Z лемму 6.4, имеем

$$u(z) \leq v(z) = u(x_0) + m_0 \cdot x_0z \quad \forall z \in Z. \quad (6.9)$$

Из неравенства $\|Du(x_0)\| > m_0$ и леммы 6.6 получим

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow x_0} \frac{u(z) - u(x_0)}{zx_0} > m_0.$$

Это противоречит (6.9). Теорема доказана.

Список литературы

1. Буземан Г. Выпуклые поверхности. М.: Наука, 1964.
2. McShane E. Extension of range of function // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. V. 40. № 12. P. 837–842.
3. Mustata C. Extension of Hölder functions and some related problems of best approximation // Babes–Bolyai University. Faculty of Mathematics. Research Seminars. Preprint 7, 1991. P. 71–86.
4. Aronsson G. Extension of functions satisfying Lipschitz conditions // Ark. Mat. 1967. V. 6. № 6. P. 551–561.
5. Batthacharya T., Di Benedetto E., Manfredi J. Limits as $p \rightarrow \infty$ of $\Delta_p u_p = f$ and related extremal problems // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. 1989. P. 15–68.
6. Aronsson G. On the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$ // Ark. Mat. 1968. V. 7. P. 395–425.
7. Jensen R. Uniqueness of Lipschitz extensions: Minimizing the sup-norm of the gradient // Arch. Rational Mech. Anal. 1993. V. 123. № 1. P. 51–74.
8. Crandall M. G., Ishii H., Lions P.-L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. 1992. V. 27. № 1. P. 1–67.
9. Aronsson G. Construction of singular solutions to the p -harmonic equations and its limit equation for $p = \infty$ // Manuscripta Math. 1986. V. 56. № 2. P. 135–158.
10. Evans L. Estimates for smooth absolutely minimizing Lipschitz extensions // Electron. J. Differential Equations (<http://ejde.math.swt.edu> or <http://ejde.math.unt.edu>). 1993. № 3. P. 1–10.
11. Lindqvist P., Manfredi J. The Harnack inequality for ∞ -harmonic functions // Electron. J. Differential Equations (<http://ejde.math.swt.edu> or <http://ejde.math.unt.edu>). 1995. № 4. P. 1–5.

12. *Janfalk U.* Behaviour in the limit, as $p \rightarrow \infty$, of minimizers of functionals involving p -Dirichlet integrals // SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. № 26. P. 341–360.
13. *Krcho J.* Morphometric analysis of relief on the basis of geometric aspects of field theory // Acta Geographico-Physica (Bratislava). 1973. № 1. P. 15–78.
14. *Мильман В. А.* Липшицевы продолжения линейно ограниченных функций // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 8. С. 67–92.
15. *Мильман В. А.* Продолжение функций с сохранением модуля непрерывности // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. № 4. С. 23–28.
16. *Плещинский Н. Б.* О построении функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с заданным показателем // Изв. вузов. Сер. матем. 1984. № 8. С. 74–77.
17. *Czipser J., Geher L.* Extension of functions satisfying a Lipschitz condition // Acta Math. Hungar. 1955. V. 6. № 1–2. P. 213–220.
18. *Le Gruyer E., Archer J. C.* Stability and convergence of extension schemes to continuous functions in general metric spaces // SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. № 1. P. 274–285.
19. *Le Gruyer E., Archer J. C.* Harmonious extensions // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 29. № 1. P. 279–292.
20. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
21. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
22. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.
23. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
24. *Sleřak B.* A mean value theorem in metric spaces // Constructive Theory of Functions. Sofia: Publ. House Bulgarian Acad. Sci., 1988. P. 47–49.
25. *Мильман В. А.* Продолжение функций, сохраняющее модуль непрерывности // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 2. С. 236–245.

Институт технической кибернетики НАН Беларуси
E-mail: milman@newman.basnet.minsk.by

Поступила в редакцию
06.08.1998