Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, Аналог теоремы Фабри для обобщенных аппроксимаций Паде, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 7, 39–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4090>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 11:37:07

УДК 517.535

В. И. Буслаев

Аналог теоремы Фабри для обобщенных аппроксимаций Паде

В теории аппроксимаций Паде большое внимание в последнее время уделяется теоремам обратного характера, в которых по имеющейся информации о поведении аппроксимаций делаются определенные выводы о свойствах приближаемой функции. В статье доказана гипотеза Гончара о справедливости аналога классической теоремы Фабри “об отношении” для случая строк таблицы аппроксимаций Паде ортогональных разложений, многоточечных аппроксимаций Паде и аппроксимаций Паде–Фабера. Эти аппроксимации являются наиболее естественными обобщениями конструкции классических аппроксимаций Паде, для которых гипотеза Гончара была доказана ранее С. П. Суетиным. Приведенное доказательство опирается, с одной стороны, на теорему Суетина, а с другой – на полученное в статье развитие теоремы Пуанкаре о рекуррентных соотношениях с предельно постоянными коэффициентами.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: аппроксимации Паде, рекуррентные соотношения, теорема Фабри, ортогональные многочлены, многочлены Фабера.

Введение

Одной из типичных ситуаций, возникающих в прикладных исследованиях, является следующая. Требуется описать поведение и особенности аналитической функции, имея в своем распоряжении значения коэффициентов ряда Тейлора или Фурье (или значения функции в узлах интерполяции и т.п.). Полиномиальные аппроксимации, а также рациональные аппроксимации с заранее фиксированными полюсами не всегда пригодны для решения этой задачи, так как область их сходимости обычно ограничивается “ближайшей” особой точкой функции. Более приспособленными к решению поставленной задачи являются рациональные аппроксимации со свободными полюсами.

Напомним, что рациональная функция $[n/m]_f = P_{n,m}/Q_{n,m}$ называется (классической) *аппроксимацией Паде* типа (n, m) степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, если

$$\deg P_{n,m} \leq n, \quad \deg Q_{n,m} \leq m, \quad Q_{n,m} \neq 0, \quad (1)$$

и имеет место равенство

$$(Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = Az^{n+m+1} + \dots, \quad z \rightarrow 0. \quad (2)$$

Работа частично поддержана Программой ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”, Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 08-01-00317) и Программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3906.2008.1).

(Подробнее об аппроксимациях Паде см. [1]–[3].) Свобода полюсов аппроксимаций позволяет им локализовать не только ближайшие, но и отдаленные особенности приближаемой функции. Проиллюстрируем этот факт следующей теоремой Суетина (см. [4]).

Пусть функция f голоморфна в точке $z = 0$. Обозначим через $R_m(f)$ радиус m -го круга мероморфности функции f , т.е. радиус максимального открытого круга с центром в точке $z = 0$, в который функция мероморфно продолжается и имеет не более m полюсов.

ТЕОРЕМА (С. П. Суетин). Пусть коэффициенты степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ таковы, что при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ и всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ аппроксимации $[n/m]_f$ имеют ровно m конечных полюсов $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,m}$, стремящихся к пределам: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,j} = \lambda_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, m$). Тогда:

- 1) степенной ряд определяет функцию f , которая голоморфна в круге $|z| < \min_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j|$;
- 2) $R_{m-1}(f) = \max_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j|$;
- 3) все точки $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ являются особыми точками функции f , причем те из них, которые лежат строго внутри круга $|z| < R_{m-1}(f)$, являются полюсами, и других полюсов функция f в этом круге не имеет.

Заметим, что при $m = 1$ полюс аппроксимации $[n/1]_f$ равен отношению f_n/f_{n+1} . Это означает, что при $m = 1$ теорема Суетина совпадает с одной из самых глубоких теорем в теории степенных рядов – классической теоремой Фабри “об отношении” (см. [5]).

ТЕОРЕМА (Фабри). Пусть коэффициенты степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ таковы, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n/f_{n+1} = \lambda \neq 0$. Тогда ряд сходится равномерно внутри круга $|z| < |\lambda|$ и λ – особая точка функции, определяемой степенным рядом.

Здесь и всюду в дальнейшем под равномерной сходимостью внутри некоторой области понимается равномерная сходимость на компактах, лежащих в этой области.

Теорема Суетина дает положительный ответ на ранее высказанную гипотезу Гончара о возможности распространения теоремы Фабри на случай строк таблицы аппроксимаций Паде.

Напомним, что множество $\{[n/m]_f\}_{n,m=0,1,\dots}$ называется *таблицей Паде* степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, а множество $\{[n/m]_f\}_{n=0,1,\dots}$ (m фиксировано) называется *m -й строкой таблицы Паде*.

А. А. Гончар высказал свою общую гипотезу, предварительно доказав ее упрощенный вариант при дополнительном предположении о сходимости полюсов со скоростью геометрической прогрессии (см. [6]). Более того, он показал, что при этом дополнительном предположении можно ограничиться условием сходимости не всех, а лишь некоторых из полюсов. Усиленный вариант гипотезы Гончара формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda \neq 0$, где λ_n – полюс m -й строки таблицы аппроксимаций Паде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$. Тогда ряд определяет

функцию f , голоморфную в точке $z = 0$, $R_{m-1}(f) \geq |\lambda|$ и λ – особая точка функции f .

Без предположений о скорости сходимости полюсов автор (см. [7]) доказал, что если ровно k полюсов m -й строки таблицы Паде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ стремятся к $\lambda \neq 0$ и некоторая окрестность точки λ не содержит других полюсов аппроксимаций Паде, то ряд определяет функцию f , голоморфную в точке $z = 0$, $R_m(f) \geq |\lambda|$, и в случае строгого неравенства $R_m(f) > |\lambda|$ точка λ – полюс функции f кратности k .

В этих же предположениях С. П. Суетин доказал, что точка λ является особой точкой и в случае $R_m(f) = |\lambda|$. Частным случаем этого утверждения является вышеприведенная теорема Суетина, в которой предполагается, что все полюсы аппроксимаций Паде имеют пределы.

Отметим, что усиленный вариант гипотезы Гончара для строк классических аппроксимаций Паде (без дополнительных предположений о скорости сходимости полюсов аппроксимаций и о существовании окрестности точки λ , не содержащей других полюсов аппроксимаций) не доказан до сих пор.

В [8] автором дан положительный ответ на гипотезу Гончара о возможности распространения теоремы Фабри на случай строк таблицы многоточечных аппроксимаций Паде. Перед формулировкой этого и дальнейших результатов введем следующие обозначения.

Через $\mathcal{H}$ обозначим множество не вырождающихся в точку ограниченных континуумов, имеющих связное дополнение. Пусть $E \in \mathcal{H}$. Обозначим через ψ_E функцию, голоморфно и однолистно отображающую дополнение к E на внешность единичного круга так, что $\psi_E(\infty) = \infty$, $\psi'_E(\infty) > 0$. При $\rho > 1$ положим

$$D_\rho = E \cup \{z \in \mathbb{C} : |\psi_E(z)| < \rho\}.$$

Пусть $F \in H(E)$, т.е. F – функция, голоморфная в некоторой окрестности континуума E . Обозначим через $\rho_m(F)$ максимальное из чисел $\rho > 1$ таких, что функция F допускает голоморфное продолжение в каноническую область D_ρ и имеет там не более m полюсов.

Пусть $\{z_{k,n}\} \subset E$ ($k = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$) – таблица точек интерполяции. Напомним, что *многоточечной аппроксимацией Паде* типа (n, m) функции $F \in H(E)$ называется рациональная функция $P_{n,m}/Q_{n,m}$ такая, что выполняются условия (1) и

$$\frac{(Q_{n,m}F - P_{n,m})(z)}{\prod_{k=1}^{n+m+1} (z - z_{k,n})} \in H(E). \quad (3)$$

Легко видеть, что классические аппроксимации Паде являются частным случаем многоточечных, в котором все точки интерполяции сосредоточены в нуле.

Доказанная автором в [8] гипотеза Гончара для многоточечных аппроксимаций Паде формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА. Пусть $E \in \mathcal{H}$, $F \in H(E)$, $\{z_{k,n}\} \subset E$ ($k = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$) – таблица точек интерполяции такая, что существует равномерный внутри области $\mathbb{C} \setminus E$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n (z - z_{k,n})}{c^n \psi_E^n(z)} \Rightarrow \omega(z) \neq 0, \quad (4)$$

где c – некоторая положительная постоянная (емкость континуума E), и пусть полюсы m -й строки таблицы многоточечных аппроксимаций Паде функции F стремятся к пределам $\tau_1, \dots, \tau_m$. Тогда:

- 1) $\tau_j \in \mathbb{C} \setminus E, j = 1, \dots, m$;
- 2) точки $\tau_1, \dots, \tau_m$ можно перенумеровать таким образом, что имеют место равенства $\rho_0(F) = |\psi(\tau_1)|, \dots, \rho_{m-1}(F) = |\psi(\tau_m)|$;
- 3) все точки $\tau_1, \dots, \tau_m$ являются особыми точками функции F .

Отметим, что утверждения 2) и 3) теоремы означают, в частности, что те из точек $\tau_1, \dots, \tau_m$, которые лежат строго внутри области $D_{\rho_{m-1}(F)}$, являются полюсами, и других полюсов функция F в этой области не имеет.

Ранее теорема была доказана А. А. Гончаром (без последующей публикации) при дополнительном предположении, что полюсы многоточечных аппроксимаций Паде сходятся со скоростью геометрической прогрессии.

Отметим, что условию (4) удовлетворяют, например, таблицы, совпадающие с нулями любых классических ортогональных многочленов, если $E = [-1, 1]$, и таблицы, совпадающие с корнями n -й степени из единицы, если $E = \{|z| \leq 1\}$. В работе [9] автором указан пример, показывающий, что теорема становится неверной, если условие (4) заменить более слабым условием

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n |z - z_{k,n}|^{1/n} = c |\psi(z)|.$$

В настоящей статье гипотеза Гончара будет доказана для других естественных обобщений конструкции классических аппроксимаций Паде, а именно: для строк таблицы аппроксимаций Паде ортогональных разложений (теорема 1) и для строк таблицы аппроксимаций Паде–Фабера (теорема 2). Кроме того, будет доказана эквивалентность гипотез Гончара для различных типов обобщений аппроксимаций Паде (теорема 3). Доказательство этих результатов будет опираться на полученное в статье утверждение о соотношениях с предельно постоянными коэффициентами (теорема 4), частный случай которого совпадает с известной теоремой Пуанкаре о рекуррентных соотношениях.

§ 1. Гипотеза Гончара для строк таблицы аппроксимаций Паде

Пусть $\sigma(x)$ – неубывающая функция на отрезке $E = [-1, 1]$ с бесконечным множеством точек роста, $\{P_n(z)\}_{n=0}^\infty$ – последовательность ортонормированных на $[-1, 1]$ многочленов

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) d\sigma(x) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \quad n, m = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Е. А. Рахманов (см. [10], [11]) показал, что если $\sigma'(x) > 0$ п.в. на E , то существует равномерный внутри области $\mathbb{C} \setminus E$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} = \psi_E(z); \quad (6)$$

функция $\psi_E(z)$ определена во введении. В рассматриваемом случае $E = [-1, 1]$ и $\psi_E(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, обратная к функции Жуковского.

Известно (см. [12]), что если функция σ удовлетворяет условию Сегё

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln \sigma'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx > -\infty, \quad (7)$$

то существует равномерный внутри области $\mathbb{C} \setminus E$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{\psi_E^n(z)} \Rightarrow \varrho(z) \neq 0. \quad (8)$$

Канонические области сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} F_n P_n(z)$ по ортонормированным многочленам, для которых имеет место равенство (8) или (6) (или еще более слабое равенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |P_n(z)|^{1/n} = |\psi_E(z)|$), – это эллипсы с фокусами в точках ± 1 , совпадающие с введенными выше областями D_ρ . При этом параметр ρ_0 эллипса сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} F_n P_n(z)$ вычисляется по формуле

$$\rho_0 = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} \right)^{-1}, \quad (9)$$

аналогичной формуле Коши–Адамара для степенных рядов.

Известно (см. [12]), что если $\sigma' > 0$ п.в. на E , то функция $F \in H(E)$ разлагается в ряд $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n P_n(z)$, где

$$F_n = \int_{-1}^1 F(x) P_n(x) d\sigma(x). \quad (10)$$

Ортогональной аппроксимацией Паде типа (n, m) функции $F \in H(E)$ называется рациональная функция $P_{n,m}/Q_{n,m}$ такая, что имеют место условия (1) и равенство

$$(Q_{n,m}F - P_{n,m})(z) = \sum_{\nu=n+m+1}^{\infty} A_\nu P_\nu(z). \quad (11)$$

В статье будет доказана гипотеза Гончара для строк таблицы ортогональных аппроксимаций Паде.

ТЕОРЕМА 1. Пусть неубывающая на отрезке $E = [-1, 1]$ функция σ удовлетворяет условию Сегё (7), $F \in H(E)$, и пусть полюсы m -й строки таблицы ортогональных аппроксимаций Паде функции F стремятся к пределам $\tau_1, \dots, \tau_m$. Тогда:

- 1) $\tau_j \in \mathbb{C} \setminus E$, $j = 1, \dots, m$;
- 2) точки $\tau_1, \dots, \tau_m$ можно перенумеровать таким образом, что имеют место равенства $\rho_0(F) = |\psi(\tau_1)|, \dots, \rho_{m-1}(F) = |\psi(\tau_m)|$;
- 3) все точки $\tau_1, \dots, \tau_m$ являются особыми точками функции F .

Ранее теорема 1 была доказана С. П. Суетиным (см. [13]) при более слабом по сравнению с условием Сегё предположении $\sigma' > 0$ п.в. на E , но при сильном дополнительном предположении, что полюсы ортогональных аппроксимаций Паде сходятся со скоростью геометрической прогрессии.

Можно показать, что в предположении (7) из существования предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n/F_{n+1} = \lambda, \quad |\lambda| > 1,$$

где F_n определены равенством (10), следует существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2}$$

полосов первой строки таблицы ортогональных аппроксимаций Паде. Поэтому частный случай $m = 1$ теоремы 1, ранее доказанный автором в [9], может быть сформулирован в виде прямого аналога классической теоремы Фабри “об отношении”.

ТЕОРЕМА (прямой аналог теоремы Фабри для рядов по ортогональным многочленам). Пусть коэффициенты ряда $\sum_{n=0}^{\infty} F_n P_n(z)$ по ортонормированным на отрезке $[-1, 1]$ многочленам, построенным по неубывающей удовлетворяющей условию Сегё (7) функции σ , таковы, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n / F_{n+1} = \lambda$, $|\lambda| > 1$. Тогда ряд сходится равномерно внутри эллипса с фокусами в точках ± 1 , проходящего через точку $(\lambda + \lambda^{-1})/2$, и $(\lambda + \lambda^{-1})/2 -$ особая точка функции $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n P_n(z)$.

§ 2. Гипотеза Гончара для строк таблицы аппроксимаций Паде–Фабера

Пусть $\Phi_n(z)$ ($n = 0, 1, \dots$) – многочлены Фабера для континуума E (т.е. полиномиальная составляющая функции $\psi_E^n(z)$). Каноническими областями сходимости рядов $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \Phi_n(z)$ являются введенные выше области D_ρ , причем $\rho_0(F) = (\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n})^{-1}$.

Хорошо известно (см. [14]), что функция $F \in H(E)$ разлагается в ряд Фабера:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \Phi_n(z), \quad \text{где } F_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(t) \psi'_E(t)}{\psi_E^{n+1}(t)} dt, \quad (12)$$

Γ – контур, охватывающий E и лежащий в области голоморфности функции F .

Аппроксимацией Паде–Фабера типа (n, m) функции F называется рациональная функция $P_{n,m}/Q_{n,m}$ такая, что имеют место условия (1) и равенство

$$(Q_{n,m}F - P_{n,m})(z) = \sum_{\nu=n+m+1}^{\infty} A_\nu \Phi_\nu(z), \quad z \in D_{\rho_0(F)}. \quad (13)$$

В статье будет доказана гипотеза Гончара для строк таблицы аппроксимаций Паде–Фабера.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $E \in \mathcal{H}$, $F \in H(E)$, и пусть полюсы m -й строки таблицы аппроксимаций Паде–Фабера функции F стремятся к пределам $\tau_1, \dots, \tau_m$. Тогда:

- 1) $\tau_j \in \mathbb{C} \setminus E$, $j = 1, \dots, m$;
- 2) точки $\tau_1, \dots, \tau_m$ можно перенумеровать таким образом, что имеют место равенства $\rho_0(F) = |\psi(\tau_1)|, \dots, \rho_{m-1}(F) = |\psi(\tau_m)|$;
- 3) все точки $\tau_1, \dots, \tau_m$ являются особыми точками функции F .

Ранее теорема 2 была доказана С. П. Суетиным (см. [13]) при дополнительном предположении, что полюсы аппроксимаций сходятся со скоростью геометрической прогрессии.

§ 3. Эквивалентность гипотез Гончара для различных типов обобщений аппроксимаций Паде

Выше были приведены определения классических и трех типов обобщений аппроксимаций Паде функции $F \in H(E)$, где $E \in \mathcal{K}$. В этом параграфе будет сформулировано утверждение о том, что если полюсы m -й строки какой-либо из таблиц аппроксимаций имеют пределы, то пределы имеют также и полюсы m -й строки других таблиц аппроксимаций. Точнее, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $E \in \mathcal{K}$, $F \in H(E)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

- 1) Полюсы m -й строки таблицы классических аппроксимаций Паде степенного ряда, равного регулярной части ряда Лорана функции $f(z) = F(\psi_E^{-1}(z))$, стремятся к пределам $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.
- 2) Полюсы m -й строки таблицы аппроксимаций Паде–Фабера функции F стремятся к пределам $\tau_1, \dots, \tau_m$.
- 3) Полюсы m -й строки таблицы многоточечных аппроксимаций Паде функции F , построенных по удовлетворяющей условию (4) таблице точек $\{z_{k,n}\} \subset E$, стремятся к пределам $\tau_1, \dots, \tau_m$.
- 4) Полюсы m -й строки таблицы ортогональных аппроксимаций Паде функции F , построенных по неубывающей на отрезке $E = [-1, 1]$ функции σ , удовлетворяющей условию Сегё (7), стремятся к пределам $\tau_1, \dots, \tau_m$. (Если $E \neq [-1, 1]$, то данное утверждение в формулировке теоремы не участвует.)

При этом $|\lambda_j| > 1$, $\tau_j \in \mathbb{C} \setminus E$ и $\lambda_j = \psi_E(\tau_j)$, $j = 1, \dots, m$.

§ 4. Теорема Пуанкаре о рекуррентных соотношениях и ее усиления

Доказательство вышеприведенных теорем 1–3 имеет в своей основе утверждение, развивающее следующую теорему Пуанкаре (см. [15]) о рекуррентных соотношениях с предельно постоянными коэффициентами.

ТЕОРЕМА (А. Пуанкаре). Пусть числовая последовательность $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$f_n + \alpha_{1,n}f_{n-1} + \dots + \alpha_{k,n}f_{n-k} = 0, \quad n = k, k+1, \dots, \quad (14)$$

с коэффициентами $\alpha_{j,n}$, имеющими пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$ ($j = 1, \dots, k$), и пусть корни характеристического многочлена $z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \dots + \alpha_k$ различны по модулю. Тогда либо $f_n = 0$ при всех $n \geq n_0$, либо существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n/f_{n-1}$ и этот предел равен одному из корней характеристического многочлена.

Простые примеры показывают, что условия теоремы Пуанкаре нельзя ослабить, не нарушив утверждающей части теоремы, а утверждающую часть нельзя усилить, не потребовав дополнительных предположений. Перед формулировкой основной теоремы этого параграфа (теоремы 4) отметим некоторые ее частные случаи (предложения 1–3), которые непосредственно примыкают к теореме Пуанкаре.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть имеют место все предположения теоремы Пуанкаре, за исключением предположения о различности по модулю корней характеристического многочлена. Тогда либо $f_n = 0$ при всех $n \geq n_0$, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n}$ равен модулю одного из корней характеристического многочлена и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n + \beta_1 f_{n-1} + \dots + \beta_l f_{n-l}}{|f_{n-1}| + \dots + |f_{n-l}|} = 0, \quad (15)$$

где $\beta_1, \dots, \beta_l$ – коэффициенты многочлена

$$z^l + \beta_1 z^{l-1} + \dots + \beta_l = \prod_{j=1}^l (z - \lambda_j),$$

а $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ – корни характеристического многочлена, равные по модулю $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n}$.

Если все корни характеристического многочлена различны по модулю, то в этом случае число l не может быть больше 1 и, следовательно, $l = 1$ и равенство (15) означает, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n / f_{n-1} = -\beta_1$, где $-\beta_1$ совпадает с одним из корней характеристического многочлена.

Следующее предложение распространяет теорему Пуанкаре на случай рекуррентных соотношений неограниченного порядка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть элементы последовательности $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$f_n + \alpha_{1,n} f_{n-1} + \dots + \alpha_{n,n} f_0 = 0, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots, \quad (16)$$

с коэффициентами $\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n,n}$ такими, что многочлены $1 + \alpha_{1,n}z + \dots + \alpha_{n,n}z^n$ равномерно внутри круга $|z| < R$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к функции $\alpha(z) \neq 0$. Тогда либо $R \leq (\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n})^{-1}$, либо $(\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n})^{-1}$ равен модулю одного из корней функции $\alpha(z)$ и существует предел (15), где $\beta_1, \dots, \beta_l$ – коэффициенты многочлена $1 + \beta_1 z + \dots + \beta_l z^l = \prod_{j=1}^l (1 - z/\lambda_j)$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ – корни функции $\alpha(z)$, равные по модулю $(\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n})^{-1}$.

Например, если $\alpha(z) = 1 + \sum_{k=1}^\infty \alpha_k z^k$ – целая функция, нули которой различны по модулю, и последовательность $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$f_n + \alpha_1 f_{n-1} + \dots + \alpha_n f_0 = 0, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots,$$

то из предложения 2 следует, что либо $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = 0$, либо существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n-1}/f_n$ и этот предел равен одному из нулей функции $\alpha(z)$.

При доказательстве теорем 1 и 2 будет использовано утверждение, аналогичное предложению 2 для (не являющихся рекуррентными) соотношений вида

$$f_n + \alpha_{1,n} f_{n+1} + \dots = 0, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots \quad (17)$$

Соответствующее утверждение сформулируем в более общем виде, а именно для бесконечных в обе стороны соотношений вида

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} f_{n-p} \alpha_{p,n} = 0, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots \quad (18)$$

Заметим, что соотношения (18) влекут за собой равенства

и $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – особые точки функции $\hat{f}$.

Заметим, что при $m = 1$ наличие соотношений (22) с предельно постоянными коэффициентами эквивалентно наличию предела (15).

Обратим внимание на то, что теорема 4 неявным образом утверждает, что функция α имеет в кольце $T_{0,m}(f)$ не менее m нулей (m из которых являются особыми точками функции $\hat{f}$). Из определения классических аппроксимаций Паде и системы равенств (22) следует, что при $l = m$ многочлен $1 + \beta_{1,n}z + \dots + \beta_{m,n}z^m$ является знаменателем аппроксимации $[n/m]_{\hat{f}}$. Равенство $l = m$ будет выполнено, если предположить, что функция α имеет в кольце $T_{0,m}(f)$ не более m нулей, либо если предположить, что нули функции α , лежащие в кольце $T_{0,m}(f)$, различны по модулю. При $l = m$ следующее утверждение дополняет теорему 4.

ТЕОРЕМА 5. Пусть имеют место предположения теоремы 4 и функция α имеет в кольце $T_{0,m}(f)$ не более m нулей. Тогда функция α имеет в кольце $T_{0,m}(f)$ ровно m нулей $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,j} = \lambda_j$, где $\lambda_{n,j}$ ($j = 1, \dots, m$) – полюсы (классических) аппроксимаций $[n/m]_{\hat{f}}$. Более того, для любых функций $\psi_{n,1}, \dots, \psi_{n,m}$, $\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,m} \in H(T_{\tau,m}(f))$, $\tau > 0$, имеющих равномерные в $T_{\tau,m}(f)$ пределы $\psi_1, \dots, \psi_m$, $\phi_1, \dots, \phi_m$, существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det([f\psi_{n,i}\phi_{n,j}]_n)_{i,j=1,\dots,m}}{\det(f_{n-i-j})_{i,j=0,\dots,m-1}} = \frac{\det(\psi_r(\lambda_s))_{s,r=1,\dots,m} \det(\phi_r(\lambda_s))_{s,r=1,\dots,m}}{W^2(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}, \quad (24)$$

где $W(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \det(\lambda_s^{r-1})_{s,r=1,\dots,m}$ – определитель Вандермонда чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (в случае кратных корней правая часть равенства (24) определяется по непрерывности). В частности, при любых $p_1, \dots, p_m$, $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Z}$ существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(f_{n-p_i-q_j})_{i,j=1,\dots,m}}{\det(f_{n-i-j})_{i,j=0,\dots,m-1}} = \frac{\det(\lambda_s^{p_r})_{s,r=1,\dots,m} \det(\lambda_s^{q_r})_{s,r=1,\dots,m}}{W^2(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}. \quad (25)$$

Легко видеть, что первая часть теоремы 5 – это прямое следствие теоремы 4 (см. равенства (22)). Вторая часть теоремы 5 (равенства (24)) будет получена в процессе доказательства теоремы 4. Равенства (24) составят основу доказательства теоремы 3.

Ниже будет показано, что в теореме 4 предположения $R_{m-1}(f) < \infty$ и (20) можно заменить на предположение, что функции $\alpha_n(z)$ и $z^{-j}\varphi_{n,j}(z)$ голоморфны на множестве $\{|z| \geq e^{-\delta}R_0(f)\}$, включая точку $z = \infty$, и предположение

$$[f\alpha_n\varphi_{n,j}]_n = 0, \quad j = 0, \dots, m-1, \quad n \geq n_0. \quad (26)$$

Поэтому теорему 4 можно переформулировать в том виде, который будет использован при доказательстве теорем 1 и 2.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\rho > 1$, $D = \{|z| > 1\}$, функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n$ голоморфна в кольце $1 < |z| < \rho$, и пусть выполняются равенства (26), где функции $\alpha_n(z)$, $z^{-j}\varphi_{n,j}(z)$ голоморфны в $D \cup \{\infty\}$ и существуют равномерные внутри D пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(z) = \alpha(z) \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n,j}(z) = \varphi^j(z), \quad j = 0, \dots, m-1,$$

причем функция α имеет в D не более t нулей, а функция φ однолистка в D и $\varphi(\infty) = \infty$. Тогда либо функция $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ является рациональной функцией, имеющей не более $t - 1$ полюсов, либо функция α имеет в D ровно t нулей $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, эти нули являются особыми точками функции f , $|\lambda_1| = R_0(f)$, $\dots$, $|\lambda_m| = R_{m-1}(f)$ и существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,j} = \lambda_j$, где $\lambda_{n,j}$ ($j = 1, \dots, m$) – полюсы (классических) аппроксимаций Паде $[n/m]_{\hat{f}}$.

В случае, когда функции $\varphi_{n,j}$ не зависят от n , т.е. $\varphi_{n,j} = \varphi^j$, теорема 4 и ее следствие – гипотеза Гончара для многоточечных аппроксимаций Паде – ранее были доказаны автором в [8]. При сохранении некоторых идей доказательства, изложенного в [8], в настоящей статье приводится значительно отличающееся доказательство теоремы 4, которое охватывает также и случай, когда функции $\varphi_{n,j}$ зависят от n , и, кроме того, позволяет доказать теорему 5, имеющую самостоятельный интерес. Случай, когда функции $\varphi_{n,j}$ зависят от n , будет использован при доказательстве теоремы 1 (гипотезы Гончара для ортогональных разложений), а теорема 5 будет лежать в основе доказательства теоремы 3 об эквивалентности гипотез Гончара.

Простые примеры показывают, что условие однолистности функции φ в предположениях теорем 4 и 6 нельзя отбросить, ничего не потребовав взамен. Из доказательства теорем будет видно, что условие однолистности функции φ можно заменить более слабым условием отсутствия нулей в кольце $T_{\delta,m}(f)$ у функции $\prod_{j=1}^k (\varphi(z) - \varphi(\lambda_j))$, отличных от точек $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Кроме того, из доказательства теоремы будет видно, что набор функций $1, \varphi, \dots, \varphi^{m-1}$, образуемый правыми частями равенств (21), можно было бы заменить более общим набором функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in H(T_{\delta,m}(f))$, но накладываемые на эти функции условия (которые должны, в частности, обеспечить линейную независимость набора функций) формулируются слишком громоздко (в терминах отличия от нуля некоторых определителей).

Мы докажем теоремы 4–6 лишь в предположении, что все нули функции α , лежащие на окружности $|z| = R_{m-1}(f)$, простые. Случай кратных нулей принципиальных отличий от доказываемого в настоящей статье не имеет, хотя, конечно, в общем случае будут присутствовать дополнительные технические трудности и значительное усложнение и без того громоздкой записи.

§ 5. Доказательство теоремы 4 при $m = 1$

Сначала докажем теорему 4 для случая $m = 1$. Не теряя общности, будем предполагать, что $R_0(f) = 1$ и $\varphi_{n,0}(z) \equiv 1$.

Введем некоторые обозначения.

$$T_{\delta} = \{e^{-\delta} \leq |z| \leq e^{\delta}\}.$$

Υ – множество многочленов с единичным свободным членом таких, что все их нули лежат на окружности $T_0 = \{|z| = 1\}$.

Υ_N – подмножество Υ , состоящее из многочленов степени $N \in \mathbb{Z}_+$.

$\mathcal{L}$ – множество рядов Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n$ таких, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{-n}|^{1/n} \leq 1.$$

При $f \in \mathcal{L}$, $n \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$ положим

$$\{f\}_n^N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |f_{n+j}|, \quad \{f\}_{n,\tau} = \sup_{p \in \mathbb{Z}} |f_{n+p}| e^{-\tau|p|}. \quad (27)$$

Θ – множество последовательностей $\bar{\theta} = \{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ натуральных чисел таких, что $\theta_n < n/2$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \infty$.

Если $\bar{\theta} = \{\theta_n\}_{n=1}^\infty \in \Theta$ и $k \geq 1$, то через $\bar{\theta}/k$ будем обозначать последовательность из Θ , равную $\{[\theta_n/k]\}_{n=1}^\infty$.

Если Λ – последовательность натуральных чисел и $\bar{\theta} \in \Theta$, то через $\Lambda(\bar{\theta})$ будем обозначать множество натуральных чисел $\bigcup_{n \in \Lambda} \{n, n \pm 1, \dots, n \pm \theta_n\}$, упорядоченное по возрастанию членов.

$H_\tau = H(T_\tau)$. Если $\gamma \in H_\tau$, то $\|\gamma\|_\tau = \max_{z \in T_\tau} |\gamma(z)|$, а через $\langle \gamma \rangle$ будем обозначать многочлен из Υ , построенный по нулям функции γ , лежащим на окружности T_0 .

Неравенства Коши, примененные к функции $\gamma \in H_\tau$, имеют следующий вид:

$$|[\gamma]_p| \leq \|\gamma\|_\tau e^{-\tau|p|}, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

Отсюда с учетом второго из определений (27) получаем неравенство

$$|[f\gamma]_n| \leq \sum_{p=-\infty}^{\infty} |f_{n+p} \gamma_{-p}| \leq \|\gamma\|_\tau \sum_{p=-\infty}^{\infty} |f_{n+p}| e^{-\tau(|p|+|p|)/2} \leq \|\gamma\|_\tau \{f\}_{n,\tau/2} C(\tau), \quad (29)$$

где $C(\tau) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-\tau|p|/2}$.

Кроме того, для величин $\{f\}_{n,\tau}$ и $\{f\}_n^N$ имеют место следующие неравенства:

$$\{f\}_{n,\tau_1} \geq \{f\}_{n,\tau_2}, \quad \text{если } 0 < \tau_1 \leq \tau_2, \quad (30)$$

$$\{f\}_{n,\tau} \geq e^{-\tau|p|} |f_{n+p}|, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (31)$$

$$\{f\}_{n,\tau} \geq e^{-\tau|p|} \{f\}_{n+p,\tau}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (32)$$

$$\{f\}_{n,\tau} \geq e^{-\tau(N-1)} \{f\}_n^N, \quad (33)$$

$$\{f\}_{n,\tau} \geq C e^{-\tau n}, \quad \text{где } C = C(f) > 0. \quad (34)$$

Здесь и всюду в дальнейшем через $C, C_1, C_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от n, p и других переменных величин и зависящие от ряда f (который будем считать фиксированным). Положительные постоянные, зависящие от параметра τ , будем обозначать через $C(\tau), C_1(\tau), C_2(\tau), \dots$.

Заметим, что в силу равенства (34) предположение (20) при $m = 1$ влечет за собой равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} [f\alpha_n]_n \{f\}_{n,\delta}^{-1} = 0$. Поэтому теорема 4 при $m = 1$ является частным случаем $k = 1$ следующей леммы 1, которая будет использована и в дальнейшем при доказательстве теорем 4 и 5 при $m > 1$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \mathcal{L}$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\bar{\theta} \in \Theta$, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ – непересекающиеся бесконечные последовательности натуральных чисел, $\alpha_{j,n} \in H_\delta$ ($j = 1, \dots, k$, $n \in \Lambda_j(\bar{\theta})$) таковы, что:

а) $\bigcup_{j=1}^k \Lambda_j = \mathbb{N}$;

- b) при всех $j = 1, \dots, k$ существуют равномерные в кольце T_δ пределы $\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta})} \alpha_{j,n}(z) = \alpha_j(z) \not\equiv 0$;
 c) имеют место равенства $\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta})} \{f\}_{n,\delta}^{-1} [f \alpha_{j,n}]_n = 0$.

Тогда:

- 1) при всех $j = 1, \dots, k$ имеют место неравенства $N_j \geq 1$, где N_j – число нулей функции $\alpha_j(z)$, лежащих на окружности T_0 ;
 2) при всех $j = 1, \dots, k$, $\tau > 0$ и всех $n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)$ имеют место неравенства

$$\{f\}_{n,\tau} \leq C_1(\tau) \{f\}_n^{N_j}; \quad (35)$$

- 3) если $\beta_j = \langle \alpha_j \rangle$, то имеет место равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)} (\{f\}_n^{N_j})^{-1} [f \beta_j]_{n+N_j} = 0; \quad (36)$$

- 4) если β – многочлен, равный (наименьшему) общему кратному многочленов β_j , $j = 1, \dots, k$, и $N = \deg \beta$, то имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\{f\}_n^N)^{-1} [f \beta]_{n+N} = 0; \quad (37)$$

- 5) по крайней мере один из нулей многочлена β является особой точкой функции f .

Доказательству леммы 1 предпошем несколько простых вспомогательных утверждений общего характера о поведении элементов числовой последовательности $\{f_n\}_{n=-\infty}^\infty$ при наличии рекуррентных соотношений между ними. Для формулировки этих утверждений введем следующие обозначения.

Пусть $\beta(z) = 1 + \beta_1 z^1 + \dots + \beta_N z^N$ – многочлен из Υ_N , где $N \geq 1$, имеющий простые нули $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Обозначим через $u_{n,i,\beta}^f$ ($n \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, N$) величины, являющиеся решением линейной системы уравнений

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^{-l} u_{n,i,\beta}^f = f_{n+l}, \quad l = 0, \dots, N-1. \quad (38)$$

Заметим, что величины $u_{n,i,\beta}^f$ определяются линейной системой уравнений (38) однозначно, так как определитель $W(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_N^{-1})$ этой системы, являясь определителем Вандермонда попарно различных чисел $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_N^{-1}$, отличен от нуля. Если бы мы не ограничились при доказательстве теорем 4 и 5 случаем простых нулей функции α , то пришлось бы допустить наличие кратных нулей и у многочлена β . Тогда, записав этот многочлен в виде $\beta(z) = \prod_{i=1}^L (1 - \lambda_i/z)^{r_i}$, где $r_i \geq 1$ – кратность нуля λ_i , $\sum_{i=1}^L r_i = N$, следовало бы вместо системы уравнений (38) рассмотреть более громоздкую систему

$$\sum_{i=1}^L \sum_{k=0}^{r_i-1} \lambda_i^{-l-k} u_{n,i,k,\beta}^f = f_{n+l}, \quad l = 0, \dots, N-1,$$

которая однозначно определяет величины $u_{n,i,k,\beta}^f$ ($n \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, L$, $k = 0, \dots, r_i - 1$). В дальнейшем при доказательстве приведенных ниже утверждений по умолчанию будем предполагать, что Υ – это множество многочленов с простыми нулями, лежащими на окружности T_0 , и иметь в виду, что соответствующие утверждения при некоторой их модификации верны и для случая кратных корней.

ЛЕММА 2. Пусть $\beta(z) = \prod_{l=1}^N (1 - z/\lambda_l) \in \Upsilon_N$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда при всех $n \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства

$$u_{n+1,i,\beta}^f = \lambda_i^{-1} u_{n,i,\beta}^f + d_{i,\beta}[f\beta]_{n+N}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (39)$$

где не зависящие ни от n , ни от f величины $d_{i,\beta}$ являются решением линейной системы N уравнений

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^{-l} d_{i,\beta} = \begin{cases} 0, & l = 0, \dots, N-2, \\ 1, & l = N-1. \end{cases} \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу единственности решения системы уравнений (38) для доказательства равенств (39) достаточно проверить выполнение равенств

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^{-l} (\lambda_i^{-1} u_{n,i,\beta}^f + d_{i,\beta}[f\beta]_{n+N}) = f_{n+1+l}, \quad l = 0, \dots, N-1,$$

или, что то же самое, равенств

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^{-(l+1)} u_{n,i,\beta}^f + [f\beta]_{n+N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-l} d_{i,\beta} = f_{n+1+l}, \quad l = 0, \dots, N-1. \quad (41)$$

При $l = 0, \dots, N-2$ равенства (41) следуют непосредственно из определений (38) и (40) величин $u_{n,i,\beta}^f$ и $d_{i,\beta}$. Переходя к проверке равенства (41) при $l = N-1$, рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-N} u_{n,i,\beta}^f + f_{n+N} &= \frac{1}{W(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_N^{-1})} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{1-N} & \dots & \lambda_N^{1-N} & f_{n+N-1} \\ \lambda_1^{-N} & \dots & \lambda_N^{-N} & f_{n+N} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{W(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_N^{-1})} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{1-N} & \dots & \lambda_N^{1-N} & f_{n+N-1} \\ \lambda_1^{-N} \beta(\lambda_1) & \dots & \lambda_N^{-N} \beta(\lambda_N) & [f\beta]_{n+N} \end{vmatrix} = [f\beta]_{n+N}. \end{aligned}$$

Первое равенство в этой цепочке – это формула разложения определителя по последней строке и формулы Крамера для величин $u_{n,i,\beta}^f$, определяемых равенствами (38). Второе равенство в цепочке получается преобразованием определителя путем добавления к его последней строке линейной комбинации предыдущих строк с коэффициентами $\beta_1, \dots, \beta_N$. Третье равенство является простым следствием равенств $\beta(\lambda_1) = \dots = \beta(\lambda_N) = 0$.

Учитывая равенство (40) при $l = N-1$, полученную цепочку равенств можно переписать в виде равенства

$$f_{n+N} = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-N} u_{n,i,\beta}^f + [f\beta]_{n+N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{1-N} d_{i,\beta},$$

совпадающего с равенством (41) при $l = N-1$. Таким образом, равенство (41) имеет место при всех $l = 0, \dots, N-1$, что доказывает лемму 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. В предположениях и обозначениях леммы 2 при всех $i = 1, \dots, N$ и всех $q \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$u_{n+q,i,\beta}^f = \lambda_i^{-q} u_{n,i,\beta}^f + d_{i,\beta} \sum_{l=1}^q \lambda_i^{l-q} [f\beta]_{n+l-1+N}, \quad (42)$$

$$u_{n-q,i,\beta}^f = \lambda_i^q u_{n,i,\beta}^f - d_{i,\beta} \sum_{l=1}^q \lambda_i^{q+1-l} [f\beta]_{n-l+N}. \quad (43)$$

Действительно, равенства (42), (43) легко выводятся индукцией по числу q из равенств (39).

При $\beta \in \Upsilon_N$, $N \in \mathbb{N}$ положим

$$u_{n,\beta}^f = \max_{1 \leq i \leq N} |u_{n,i,\beta}^f|,$$

где $u_{n,i,\beta}^f$ определены системой равенств (38). Непосредственно из определения величин $\{f\}_n^N$ (см. (27)) и $u_{n,\beta}^f$ и условия $\beta \in \Upsilon_N$ получаем следующие два неравенства:

$$\{f\}_n^N \leq N u_{n,\beta}^f, \quad (44)$$

$$u_{n,\beta}^f \leq C_\beta \{f\}_n^N. \quad (45)$$

Подчеркнем, что постоянная C_β зависит только от многочлена β . При $\beta(z) \equiv 1$ и $N = 0$ положим $u_{n,\beta}^f = \{f\}_n^0 = |f_n|$, $n \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 3. Пусть $\beta \in \Upsilon_N$, $N \in \mathbb{N}$, и пусть при некотором $n \in \mathbb{Z}$ имеют место неравенства

$$|[f\beta]_{n+N}| \leq \frac{1 - e^{-\tau}}{N \max_{1 \leq i \leq N} |d_{i,\beta}|} \{f\}_n^{N+1}. \quad (46)$$

Тогда

$$e^{-\tau} u_{n,\beta}^f \leq u_{n+1,\beta}^f \leq e^{\tau} u_{n,\beta}^f. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (44) получаем неравенство

$$\{f\}_n^{N+1} = \max\{\{f\}_n^N, \{f\}_{n+1}^N\} \leq N \max\{u_{n,\beta}^f, u_{n+1,\beta}^f\}.$$

Поэтому из леммы 2 (равенств (39)) и неравенств (46) следуют неравенства

$$\begin{aligned} u_{n+1,\beta}^f &= |u_{n+1,i_0,\beta}^f| \leq |u_{n,i_0,\beta}^f| + |[f\beta]_{n+N}| |d_{i_0,\beta}| \\ &\leq u_{n,\beta}^f + (1 - e^{-\tau}) \max\{u_{n,\beta}^f, u_{n+1,\beta}^f\}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$u_{n,\beta}^f \leq u_{n+1,\beta}^f + (1 - e^{-\tau}) \max\{u_{n,\beta}^f, u_{n+1,\beta}^f\}. \quad (49)$$

Из этих неравенств и неравенства $2 - e^{-\tau} \leq e^{\tau}$ получаем неравенства (47).

Лемма 3 доказана.

Важную роль в последующих рассуждениях будет играть подпоследовательность $\Gamma_{\tau,\beta}^f$ натуральных чисел, определяемая при $\tau > 0$ по многочлену $\beta \in \Upsilon$ и ряду $f \in \mathcal{L}$ следующим образом:

$$\Gamma_{\tau,\beta}^f = \{n \in \mathbb{N} : u_{n,\beta}^f \geq e^{-\tau|p|} u_{n+p,\beta}^f \text{ при всех } p \in \mathbb{Z}\}.$$

ЛЕММА 4. Пусть $\tau > 0$, $f \in \mathcal{L}$, $\beta \in \Upsilon$. Тогда $\Gamma_{\tau, \beta}^f$ – бесконечная подпоследовательность натуральных чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенств (44), (45) условие $f \in \mathcal{L}$ можно переписать в виде условия

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u_{-n, \beta}^f)^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u_{n, \beta}^f)^{1/n} = 1$$

(очевидно, что это условие имеет место и при $\beta(z) \equiv 1$, $u_{n, \beta}^f = |f_n|$). По лемме Какехашии (см. [16]) из равенства $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u_{n, \beta}^f)^{1/n} = 1$ следует, что последовательность $u_{n, \beta}^f$, $n = 1, 2, \dots$, можно представить в виде произведения $v_{n, \beta}^f \omega_{n, \beta}^f$ двух положительных последовательностей $v_{n, \beta}^f$ и $\omega_{n, \beta}^f$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1, \beta}^f / v_{n, \beta}^f = 1$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega_{n, \beta}^f = 1$. Из этого представления и неравенства $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u_{-n, \beta}^f)^{1/n} \leq 1$ следует, что начиная с некоторого достаточно большого номера все члены бесконечной последовательности Γ^* , определенной условием $\lim_{n \in \Gamma^*} \omega_{n, \beta}^f = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega_{n, \beta}^f$, принадлежат последовательности $\Gamma_{\tau, \beta}^f$.

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in \mathcal{L}$, $\tau > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $\beta \in \Upsilon_N$, $n_1, n_2 \in \Gamma_{\tau, \beta}^f$, и пусть при всех $n \in \Gamma_{\tau, \beta}^f \cap [n_1, n_2]$ имеют место неравенства

$$\max\{|[f\beta]_{n-1+N}|, |[f\beta]_{n+N}|\} \leq C_2(\tau)\{f\}_{n-1}^{N+1}, \quad (50)$$

где

$$C_2(\tau) = \frac{1 - e^{-\tau}}{N \max_{1 \leq i \leq N} |d_{i, \beta}| \max\{1, Ne^{\tau} C_{\beta}\}}.$$

Тогда все натуральные числа отрезка $[n_1, n_2]$ принадлежат последовательности $\Gamma_{\tau, \beta}^f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из неравенства (50) следует, в частности, неравенство (46) для индекса $n - 1$. Поэтому по лемме 3

$$e^{-\tau} u_{n-1, \beta}^f \leq u_{n, \beta}^f \leq e^{\tau} u_{n-1, \beta}^f. \quad (51)$$

Из неравенства (44), первого из неравенств (51) и неравенства (45) получаем цепочку неравенств

$$\{f\}_{n-1}^N \leq N u_{n-1, \beta}^f \leq N e^{\tau} u_{n, \beta}^f \leq N e^{\tau} C_{\beta} \{f\}_n^N.$$

Следовательно,

$$\{f\}_{n-1}^{N+1} = \max\{\{f\}_{n-1}^N, \{f\}_n^N\} \leq \max\{N e^{\tau} C_{\beta}, 1\} \{f\}_n^N.$$

Поэтому правая часть неравенства (50) оценивается сверху числом

$$C_2(\tau) \max\{N e^{\tau} C_{\beta}, 1\} \{f\}_n^{N+1} = \frac{1 - e^{-\tau}}{N \max_{1 \leq i \leq N} |d_{i, \beta}|} \{f\}_n^{N+1}.$$

Отсюда получаем, что неравенство (50) влечет за собой неравенство (46) также и для индекса n . Поэтому по лемме 3 имеют место неравенства (47). Таким

образом, при всех $n \in \Gamma_{\tau,\beta}^f \cap [n_1, n_2]$ наряду с неравенствами (50) получаем и являющиеся их следствиями неравенства (47) и (51) и, в частности, неравенства

$$u_{n\pm 1,\beta}^f \geq e^{-\tau} u_{n,\beta}^f, \quad n \in \Gamma_{\tau,\beta}^f \cap [n_1, n_2]. \quad (52)$$

Пусть $n_1 < n_3 < n_2$. Предполагая, что $n_3 \notin \Gamma_{\tau,\beta}^f$, обозначим через n_4 и n_5 ближайшие (слева и справа) к n_3 индексы, принадлежащие $\Gamma_{\tau,\beta}^f$, т.е. n_4 и n_5 – это такие натуральные индексы, что $n_1 \leq n_4 < n_3 < n_5 \leq n_2$, $n_{4,5} \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$ и $n \notin \Gamma_{\tau,\beta}^f$, если $n_4 < n < n_5$. Обозначим через n_6 индекс, на котором достигается максимум $\max_{n_4 < n < n_5} u_{n,\beta}^f = u_{n_6,\beta}^f$. Непосредственно из определения индексов n_4 , n_5 и n_6 следует, что $n_6 \notin \Gamma_{\tau,\beta}^f$. С другой стороны, если $n_6 + p \geq n_5$, то получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} u_{n_6,\beta}^f &\geq u_{n_5-1,\beta}^f \geq e^{-\tau} u_{n_5,\beta}^f \geq e^{\tau(-1+n_5-n_6-p)} u_{n_6+p,\beta}^f \\ &\geq e^{-p\tau} u_{n_6+p,\beta}^f = e^{-|p|\tau} u_{n_6+p,\beta}^f. \end{aligned}$$

Первое неравенство в этой цепочке следует непосредственно из определения индекса n_6 , второе – это неравенство (52) для индекса $n_5 \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$, третье – это определение последовательности $\Gamma_{\tau,\beta}^f$ и условие $n_5 \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$, четвертое – это неравенство $n_5 \geq n_6 + 1$ (так как $n_4 < n_6 < n_5$), последнее равенство очевидно, так как $p > 0$ при рассматриваемом условии $n_6 + p \geq n_5$.

Если $n_6 + p \leq n_4$, то аналогичным образом получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} u_{n_6,\beta}^f &\geq u_{n_4+1,\beta}^f \geq e^{-\tau} u_{n_4,\beta}^f \geq e^{\tau(-1+n_6+p-n_4)} u_{n_6+p,\beta}^f \\ &\geq e^{p\tau} u_{n_6+p,\beta}^f = e^{-|p|\tau} u_{n_6+p,\beta}^f. \end{aligned}$$

Если $n_4 < n_6 + p < n_5$, то непосредственно из определения индекса n_6 получаем неравенство

$$u_{n_6,\beta}^f \geq u_{n_6+p,\beta}^f \geq e^{-|p|\tau} u_{n_6+p,\beta}^f.$$

Таким образом, при всех целочисленных p имеют место неравенства $u_{n_6,\beta}^f \geq e^{-|p|\tau} u_{n_6+p,\beta}^f$ и, следовательно, $n_6 \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$. Полученное противоречие показывает, что $n_3 \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$. Так как n_3 – произвольный индекс из интервала (n_1, n_2) , то, тем самым, лемма 5 доказана.

Как следствие лемм 4 и 5 получаем лемму 6.

ЛЕММА 6. Пусть $\tau > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $\beta \in \Upsilon_N$, $n_1 \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$, и пусть при всех $n \in \Gamma_{\tau,\beta}^f \cap [n_1, \infty)$ имеют место неравенства (50). Тогда все натуральные индексы n начиная с n_1 принадлежат $\Gamma_{\tau,\beta}^f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n_2 – произвольное натуральное число, большее n_1 . По лемме 4 последовательность $\Gamma_{\tau,\beta}^f$ бесконечна и, следовательно, найдется индекс $n_3 \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$ такой, что $n_3 \geq n_2$. Тогда по лемме 5 все натуральные числа отрезка $[n_1, n_3]$ принадлежат $\Gamma_{\tau,\beta}^f$. В частности, $n_2 \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$.

Лемма 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Фиксируем натуральное число j , не превосходящее k . Покажем, что существует положительное число τ_0 такое, что при всех $0 < \tau \leq \tau_0$ последовательность $\Gamma_{\tau, \beta}^f$ содержит все натуральные числа $n \geq n(\tau)$ и имеют место следующие предельные равенства:

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta})} \{f\}_{n, \delta/2}^{-1} [f\alpha_j]_n = 0, \quad (53)$$

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)} \{f\}_{n, \tau}^{-1} [f\beta_j]_{n+q} = 0, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad (54)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f\}_{n, \tau}^{-1} [f\beta]_{n+q} = 0, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (55)$$

Из неравенства (29) (при $\tau = \delta$) следует, что

$$\{f\}_{n, \delta/2}^{-1} |[f(\alpha_{j,n} - \alpha_j)]_n| \leq C(\delta) \|\alpha_{j,n} - \alpha_j\|_{\delta}.$$

Так как по предположению b) леммы 1 правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \in \Lambda_j(\bar{\theta})$, то

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta})} \{f\}_{n, \delta/2}^{-1} [f(\alpha_{j,n} - \alpha_j)]_n = 0.$$

Отсюда в силу предположения c) леммы 1 следует равенство (53).

Так как $\beta_j = \langle \alpha_j \rangle$, то функция $\gamma_j = \beta_j / \alpha_j$ принадлежит H_{δ} и не имеет нулей на окружности T_0 . Следовательно, существует положительное число $\tau_0 < \delta/2$ такое, что $\gamma_j \in H_{4\tau_0}$. Докажем равенства (54) и (55) при $0 < \tau \leq \tau_0$. При помощи неравенства (29), примененного к ряду $f\alpha_j$ и функции γ_j , получаем неравенство

$$|[f\beta_j]_{n+q}| = |[f\alpha_j\gamma_j]_{n+q}| \leq C(\tau) \|\gamma_j\|_{4\tau} \{f\alpha_j\}_{n+q, 2\tau}.$$

Отсюда, из неравенства (32), определения величины $\{f\alpha_j\}_{n, 2\tau}$ и неравенств (30) и (29) получаем неравенства

$$\begin{aligned} \frac{e^{-2\tau|q|} |[f\beta_j]_{n+q}|}{C(\tau) \|\gamma_j\|_{4\tau} \{f\}_{n, \tau}} &\leq \frac{\{f\alpha_j\}_{n, 2\tau}}{\{f\}_{n, \tau}} = \frac{\sup_{p \in \mathbb{Z}} |[f\alpha_j]_{n+p}| e^{-2\tau|p|}}{\{f\}_{n, \tau}} \\ &\leq \sup_{p \in \mathbb{Z}} \frac{|[f\alpha_j]_{n+p}| e^{-\tau|p|}}{\{f\}_{n+p, \tau}} \leq \max \left\{ \max_{|p| \leq r_n} \frac{|[f\alpha_j]_{n+p}|}{\{f\}_{n+p, \tau}}, \sup_{|p| > r_n} \frac{|[f\alpha_j]_{n+p}| e^{-\tau r_n}}{\{f\}_{n+p, \tau}} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{|p| \leq r_n} \frac{|[f\alpha_j]_{n+p}|}{\{f\}_{n+p, \delta/2}}, C(2\tau) \|\alpha_j\|_{2\tau} e^{-\tau r_n} \right\}, \end{aligned} \quad (56)$$

где r_n – произвольное положительное число.

Заметим, что существует последовательность $\bar{\theta}^* = \{\theta_n^*\}_{n=1}^{\infty} \in \Theta$ такая, что $n+p \in \Lambda(\bar{\theta})$ при всех $n \in \Lambda(\bar{\theta}/2)$, $|p| \leq \theta_n^*$. Положим $r_n = \theta_n^*$ в неравенстве (56). Учитывая равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n^* = \infty$, получаем равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\tau r_n} = 0$, а учитывая уже доказанное равенство (53), получаем и равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)} \max_{|p| \leq r_n} \frac{|[f\alpha_j]_{n+p}|}{\{f\}_{n+p, \delta/2}} = 0.$$

Таким образом, правая часть, а следовательно, и левая часть неравенства (56) стремятся к нулю при $n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)$. Так как положительный множитель

$$C^{-1}(\tau) \|\gamma_j\|_{4\tau}^{-1} e^{-2\tau|q|},$$

стоящий в левой части неравенства (56), не зависит от n , то тем самым равенство (54) доказано при положительных $\tau \leq \tau_0$.

Для доказательства равенства (55) обозначим через β_j^* многочлен β/β_j степени $N - N_j$. Тогда $\beta = \beta_j \beta_j^*$ и имеет место неравенство

$$\frac{|[f\beta]_{n+q}|}{\{f\}_{n,\tau}} \leq \sum_{i=0}^{N-N_j} \frac{|[f\beta_j]_{n+q-i}|}{\{f\}_{n,\tau}} |\beta_j^*|_i.$$

По уже доказанному равенству (54) каждое слагаемое в правой части полученного неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)$. Поэтому $\lim_{n \in \Lambda_j} ([f\beta]_{n+q}/\{f\}_{n,\tau}) = 0$. Так как отношение $[f\beta]_{n+q}/\{f\}_{n,\tau}$ не зависит от j , то отсюда в силу предположения а) леммы 1 получаем существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} ([f\beta]_{n+q}/\{f\}_{n,\tau}) = 0$. Таким образом, равенства (53), (54) и (55) доказаны (при $0 < \tau \leq \tau_0$).

Докажем утверждение 4) леммы 1. Из определения величин $\{f\}_{n,\tau}$, неравенств (44), определения последовательности $\Gamma_{\tau,\beta}^f$ и неравенств (45) при $n \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$ получаем неравенство

$$\{f\}_{n,\tau} \leq N \sup_{p \in \mathbb{Z}} u_{n+p,\beta}^f e^{-\tau|p|} = N u_{n,\beta}^f \leq N C_\beta \{f\}_n^N. \quad (57)$$

Если $\beta(z) \equiv 1$, то равенство (55) при $q = 0$ имеет следующий вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f\}_{n,\tau}^{-1} f_n = 0,$$

а неравенство (57) имеет вид равенства $\{f\}_{n,\tau} = |f_n|$, $n \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$. Следовательно, равенство $\beta(z) \equiv 1$ невозможно. Таким образом, $N = \deg \beta \geq 1$.

Из неравенства (57) и равенства (55) при любом фиксированном $q \in \mathbb{Z}$ получаем равенство

$$\lim_{n \in \Gamma_{\tau,\beta}^f} (\{f\}_n^N)^{-1} [f\beta]_{n+q} = 0. \quad (58)$$

Так как $\{f\}_n^N \leq \{f\}_{n-1}^{N+1}$, то из равенства (58) при $q = N - 1$, N следует, что неравенства (50) в леммах 5 и 6 имеют место при всех достаточно больших $n \in \Gamma_{\tau,\beta}^f$. Тогда по лемме 6 все натуральные числа начиная с некоторого содержатся в последовательности $\Gamma_{\tau,\beta}^f$. Следовательно, равенство (58) совпадает с равенством (37), составляющим содержание утверждения 4).

Докажем теперь утверждение 1) леммы 1. Обозначим через Γ_N^f подпоследовательность, состоящую из натуральных чисел n , для которых можно найти натуральное число n^* такое, что $n - N + 1 \leq n^* \leq n$ и $\{f\}_{n^*}^N = |f_n|$. Легко видеть, что если $\{f\}_n^N = |\tilde{f}_n|$, где $n \leq \tilde{n} \leq n + N - 1$, то $\tilde{n} \in \Gamma_N^f$ (определяющее условие выполнено при $n^* = n$). Это означает, что среди N последовательных натуральных чисел хотя бы одно содержится в Γ_N^f . Следовательно, разность между двумя последовательными натуральными числами из Γ_N^f меньше или равна N . Так как уже доказано, что все натуральные числа начиная с некоторого содержатся в последовательности $\Gamma_{\tau,\beta}^f$, то наряду с неравенством $\{f\}_{n,\tau} \leq N u_{n,\beta}^f$ (см. неравенство (57)) при всех достаточно больших $n \in \Gamma_N^f$ (и соответствующих им индексах n^*) имеет место неравенство

$$\{f\}_{n,\tau} \leq N u_{n,\beta}^f \leq N e^{N\tau} u_{n^*,\beta}^f \leq N e^{N\tau} C_\beta \{f\}_{n^*}^N = N e^{N\tau} C_\beta |f|_n.$$

Из этого неравенства и равенства (54) получаем равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2) \cap \Gamma_N^f} \frac{[f\beta_j]_{n+q}}{|f_n|} = 0, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (59)$$

Заметим, что $\Lambda_j(\bar{\theta}/2) \cap \Gamma_N^f$ – бесконечная подпоследовательность натуральных чисел. Это следует из того, что разность между двумя последовательными числами из Γ_N^f меньше или равна N , а подпоследовательность $\Lambda_j(\bar{\theta}/2)$ вместе с каждым натуральным $n \in \Lambda_j$ содержит и целый отрезок $[n - [\theta_n/2], n + [\theta_n/2]]$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \infty$.

Предположим, что $N_j = 0$. Тогда $[f\beta_j]_n = f_n$, что противоречит равенству (59) при $q = 0$. Таким образом, $N_j \geq 1$ и, следовательно, утверждение 1) леммы 1 доказано.

Докажем утверждение 3) леммы 1. Из неравенства (44) (применительно к многочлену β_j) следует, что $|f_n| \leq \{f\}_n^{N_j} \leq N_j u_{n,\beta_j}^f$. Поэтому равенство (59) влечет за собой равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2) \cap \Gamma_N^f} \frac{[f\beta_j]_{n+q}}{u_{n,\beta_j}^f} = 0, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (60)$$

Из равенства (60) при $q = N_j$ и леммы 2 (применительно к многочлену β_j) получаем равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2) \cap \Gamma_N^f} \frac{u_{n+1,\beta_j}^f}{u_{n,\beta_j}^f} = 1.$$

Из этого равенства и равенства (60) при всех $q \in \mathbb{Z}$ получаем равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2) \cap \Gamma_N^f} \frac{[f\beta_j]_{n+q}}{u_{n+1,\beta_j}^f} = 0.$$

Точно так же из этого равенства при $q = N_j + 1$ и леммы 2 получаем равенства

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2) \cap \Gamma_N^f} \frac{u_{n+2,\beta_j}^f}{u_{n+1,\beta_j}^f} = 1, \quad \lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2) \cap \Gamma_N^f} \frac{[f\beta_j]_{n+q}}{u_{n+2,\beta_j}^f} = 0, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Рассуждая далее аналогичным образом, последовательно при $r = 0, \dots, N$ получим равенства

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2) \cap \Gamma_N^f} \frac{u_{n+r+1,\beta_j}^f}{u_{n+r,\beta_j}^f} = 1, \quad \lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2) \cap \Gamma_N^f} \frac{[f\beta_j]_{n+q}}{u_{n+r+1,\beta_j}^f} = 0, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Так как разность между двумя последовательными числами из Γ_N^f меньше или равна N , то совокупность полученных при $r = 0, \dots, N$ равенств эквивалентна равенствам

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)} \frac{u_{n+1,\beta_j}^f}{u_{n,\beta_j}^f} = 1, \quad \lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)} \frac{[f\beta_j]_{n+q}}{u_{n,\beta_j}^f} = 0, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (61)$$

Равенство (36) является следствием второго из равенств (61) и неравенства (45). Таким образом, утверждение 3) леммы 1 доказано.

Докажем утверждение 2) леммы 1. Из неравенства (44) (применительно к многочлену β_j), первого из равенств (61) и неравенства (45) при всех достаточно больших $n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)$ получаем неравенство

$$\{f\}_n^N = \max_{0 \leq i \leq N-N_j} \{f\}_{n+i}^{N_j} \leq N_j \max_{0 \leq i \leq N-N_j} u_{n+i, \beta_j}^f \leq 2N_j u_{n, \beta_j}^f \leq 2N_j C_{\beta_j} \{f\}_n^{N_j}. \quad (62)$$

Из неравенства (57) (которое, как уже отмечалось, имеет место при всех достаточно больших n) и неравенства (62) получаем неравенство (35) при $0 < \tau \leq \tau_0$. Так как $\{f\}_{n, \tau}$ убывает с ростом τ , то неравенство (35) верно при всех $\tau > 0$. Таким образом, утверждение 2) леммы 1 доказано.

Докажем теперь утверждение 5). Пусть функция f голоморфна в области $D \supset \{|z| < 1\}$. Ш. Агмон (см. [17]) доказал, что существуют подпоследовательность Γ натуральных чисел и последовательность $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ положительных чисел такие, что

$$|f_n| \leq C_2 F_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad F_n \leq C_3 |f_n|, \quad n \in \Gamma, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1, \quad (63)$$

и для любого компакта $K \subset D$

$$\max_{z \in K} |F_n(z)| \leq C(K), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (64)$$

где $F_n(z)$ – голоморфные в области D функции, определенные в круге $|z| < 1$ равенством $F_n(z) = \sum_{q=0}^\infty f_{n+q} z^q / F_n$, постоянная $C(K)$ зависит от компакта K и не зависит от n .

Из определения величин $\{f\}_n^N$, из условий (63) и неравенств (44), (45) следует, что при всех достаточно больших n ($n \geq n_0$) имеют место неравенства

$$\{f\}_n^N \leq C_2 \{F\}_n^N \leq 2C_2 F_n, \quad u_{n, \beta}^f \leq 2C_2 C_\beta F_n, \quad (65)$$

а при $n \in \Gamma$ – неравенства $F_n \leq NC_3 u_{n, \beta}^f$. Поэтому, переходя в случае необходимости к подпоследовательности $\Gamma^* \subset \Gamma$, можно считать, что существуют пределы

$$\lim_{n \in \Gamma^*} \frac{u_{n, i, \beta}^f}{F_n} = w_{i, \beta}^f, \quad i = 1, \dots, N, \quad (66)$$

причем хотя бы один из пределов отличен от нуля.

Из равенства (42) (см. следствие леммы 2), равенства (37) и первого из неравенств (65) получаем равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+q, i, \beta}^f - \lambda_i^{-q} u_{n, i, \beta}^f}{F_n} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad q = 0, 1, \dots$$

Просуммировав полученные равенства по i от 1 до N и заметив, что

$$\sum_{i=1}^N u_{n+q, i, \beta}^f = f_{n+q}$$

(по определению (38) величин $u_{n+q, i, \beta}^f$), получим равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+q} - \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-q} u_{n, i, \beta}^f}{F_n} = 0, \quad q = 0, 1, \dots$$

Из этого равенства и равенств (66) получаем равенство

$$\lim_{n \in \Gamma^*} \frac{f_{n+q}}{F_n} = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-q} w_{i,\beta}^f, \quad q = 0, 1, \dots \quad (67)$$

Пусть $w_{i_0,\beta}^f \neq 0$, где $1 \leq i_0 \leq N$. Покажем, что точка $z = \lambda_{i_0}$ является особой точкой функции f . Предположим противное. Тогда найдется компакт $K \subset D$, содержащий отрезок $[0, \lambda_{i_0}]$ вместе с некоторой его окрестностью. Так как имеет место неравенство (64), то из последовательности функций $F_n(z)$, $n \in \Gamma^*$, можно выбрать равномерно сходящуюся на K подпоследовательность. Пусть $\lim_{n \in \tilde{\Gamma}} F_n(z) = F(z)$, $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma^*$. Очевидно, что $\max_{z \in K} |F(z)| \leq C(K)$. С другой стороны, из определения функций $F_n(z)$ и равенства (67) следует, что в некоторой окрестности точки $z = 0$ имеет место равенство

$$F(z) = \lim_{n \in \tilde{\Gamma}} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{f_{n+q}}{F_n} z^q = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-q} w_{i,\beta}^f z^q = \sum_{i=1}^N w_{i,\beta}^f \frac{\lambda_i}{\lambda_i - z}. \quad (68)$$

В силу аналитичности функций, стоящих в левой и правой частях этого равенства, равенство должно выполняться и при всех $z \in [0, \lambda_{i_0}]$, что невозможно, так как функция $F(z)$ ограничена на $[0, \lambda_{i_0}]$, а функция, стоящая в правой части равенства (68), неограничена в окрестности точки $z = \lambda_{i_0}$. Полученное противоречие показывает, что точка $z = \lambda_{i_0}$ является особой точкой функции f .

Таким образом, лемма 1 полностью доказана.

Как уже отмечалось, теорема 4 при $m = 1$ является частным случаем $k = 1$ леммы 1. Таким образом, теорема 4 при $m = 1$ доказана. Равенства (25) в теореме 5 при $m = 1$ тривиальны. Равенства (24) будут получены в следующем параграфе при $m \geq 1$. (При $m = 1$ их можно получить и непосредственно из равенств (25).)

§ 6. Доказательство теорем 4 и 5 при $m > 1$

Теоремы 4 и 5 докажем при $m > 1$ сначала в предположении, что

$$R_0(f) = \dots = R_{m-1}(f) = 1. \quad (69)$$

В этом случае кольцо $T_{\delta,m}(f)$ совпадает с кольцом $T_{\delta} = \{e^{-\delta} \leq |z| \leq e^{\delta}\}$.

Введем дополнительно следующие обозначения и определения.

$H_{l,\tau}$ – множество l -мерных вектор-функций $\vec{\Psi}_l$ таких, что все их координаты являются функциями из H_{τ} .

j -ю координату вектор-функции $\vec{\Psi}_l$ будем обозначать через $\vec{\Psi}_{l,j}$.

Через $\vec{\Psi}_{l,\bar{j}}$ будем обозначать $(l-1)$ -мерную вектор-функцию, получаемую из вектор-функции $\vec{\Psi}_l$ вычеркиванием ее j -й координаты.

Через $\vec{\Psi}_l \oplus \vec{\Phi}_k$ будем обозначать $(l+k)$ -мерную вектор-функцию, первые l координат которой совпадают с координатами вектор-функции $\vec{\Psi}_l$, а последние k координат – с координатами вектор-функции $\vec{\Phi}_k$.

При $\vec{\Psi}_l \in H_{l,\tau}$ положим

$$\|\vec{\Psi}_l\|_{\tau} = \prod_{j=1}^l \|\Psi_{l,j}\|_{\tau} = \prod_{j=1}^l \max_{z \in T_{\tau}} |\Psi_{l,j}(z)|. \quad (70)$$

Обозначим через $\vec{E}_l$ вектор-функцию $(z^0, z^1, \dots, z^{l-1})$ и при $\vec{\Psi}_l, \vec{\Phi}_l \in H_{l,\tau}$ положим

$$f_{l,n}^{\vec{\Psi}_l \oplus \vec{\Phi}_l} = \det([f\Psi_{l,i}\Phi_{l,j}]_n)_{i,j=1,\dots,l}, \quad f_{l,n}^{\vec{\Psi}_l} = f_{l,n}^{\vec{\Psi}_l \oplus \vec{E}_l}, \quad f_{l,n} = f_{l,n}^{\vec{E}_l \oplus \vec{E}_l}, \quad (71)$$

$$F_{l,n}^{\vec{\Psi}_l \oplus \vec{\Phi}_l} = \frac{f_{l,n}^{\vec{\Psi}_l \oplus \vec{\Phi}_l}}{f_{l,n}}, \quad F_{l,n}^{\vec{\Psi}_l} = \frac{f_{l,n}^{\vec{\Psi}_l}}{f_{l,n}}.$$

Положим также

$$(f_l)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{l,n} z^n. \quad (72)$$

Через $W(z_1, \dots, z_l)$, как и ранее, будем обозначать определитель Вандермонда точек $z_1, \dots, z_l$. Если все точки $z_1, \dots, z_l$ лежат в кольце T_τ и $\vec{\Psi}_l \in H_{l,\tau}$, то положим

$$W^{\vec{\Psi}_l}(z_1, \dots, z_l) = \det(\vec{\Psi}_{l,j}(z_i))_{i,j=1,\dots,l}. \quad (73)$$

Очевидно, что $W(z_1, \dots, z_l) = W^{\vec{E}_l}(z_1, \dots, z_l)$. Положим

$$V^{\vec{\Psi}_l}(z_1, \dots, z_l) = \frac{W^{\vec{\Psi}_l}(z_1, \dots, z_l)}{W(z_1, \dots, z_l)}. \quad (74)$$

Обратим внимание на то, что в случае, когда среди точек $z_1, \dots, z_l$ имеются равные, числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части равенства (74), обращается в нуль, и в этом случае дробь определяется по непрерывности.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – нули фиксированного многочлена $\beta \in \Upsilon_N$ (напомним, что эти нули простые и по модулю равны 1), $i_1, \dots, i_l$ – набор натуральных чисел, принимающих значения $1, \dots, N$. Для краткости положим

$$W_{i_1, \dots, i_l} = W(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_l}), \quad W_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_l} = W^{\vec{\Psi}_l}(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_l}),$$

$$V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_l} = V^{\vec{\Psi}_l}(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_l}), \quad V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_l \oplus \vec{\Phi}_l} = V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_l} V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Phi}_l}, \quad (75)$$

$$W_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_{l+1}}(z) = W^{\vec{\Psi}_{l+1}}(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_l}, z),$$

$$V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_{l+1}}(z) = \frac{W_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_{l+1}}(z)}{W_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{E}_{l+1}}(z)}, \quad V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_{l+1} \oplus \vec{\Phi}_{l+1}}(z) = V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_{l+1}}(z) V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Phi}_{l+1}}(z). \quad (76)$$

Легко видеть, что $W_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_{l+1}}(z) \in H_\tau$ и $V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_{l+1}}(z) \in H_\tau$, если $\vec{\Psi}_{l+1} \in H_{l+1,\tau}$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{l,\tau}$ множество функционалов, определенных на вектор-функциях $\vec{\Psi}_l \in H_{l,\tau}$, линейных и непрерывных по каждой координате $\vec{\Psi}_l$. Значение, принимаемое функционалом $R \in \mathcal{F}_{l,\tau}$ на вектор-функции $\vec{\Psi}_l$, будем обозначать как $R^{\vec{\Psi}_l}$. Заметим, что $f_{l,n}^{\vec{\Psi}_l} \in \mathcal{F}_{l,\tau}$ и $f_{l,n}^{\vec{\Psi}_l \oplus \vec{\Phi}_l} \in \mathcal{F}_{2l,\tau}$ при любых фиксированных $l \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $\tau > 0$. Это следует непосредственно из определения (71) и неравенства (29). Отметим также, что включение $W^{\vec{\Psi}_l}(z_1, \dots, z_l) \in \mathcal{F}_{l,\tau}$, очевидно, имеет место при всех $z_1, \dots, z_l$, лежащих в кольце T_τ . Обратим внимание также на то, что величины $V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{\Psi}_l \oplus \vec{\Phi}_l}$ и $f_{l,n}^{\vec{\Psi}_l \oplus \vec{\Phi}_l}$ не меняют своего значения при перестановке $\vec{\Psi}_l$ и $\vec{\Phi}_l$ и обращаются в нуль, если координаты вектор-функции $\vec{\Psi}_l$ (или $\vec{\Phi}_l$) линейно зависимы.

Обозначим через $\mathcal{P}_l$ множество l -мерных вектор-функций вида $\vec{P}_l(z) = (z^{p_1}, \dots, z^{p_l})$, где $p_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, l$. Заметим, что $\mathcal{P}_l \subset H_{l,\tau}$ при любом $\tau > 0$. В дальнейшем там, где это не будет вызывать недоразумений, будем отождествлять вектор-функцию $\vec{P}_l(z) = (z^{p_1}, \dots, z^{p_l}) \in \mathcal{P}_l$ с вектором $\vec{P}_l = (p_1, \dots, p_l)$, а множество $\mathcal{P}_l$ — с множеством векторов с целочисленными координатами. В частности, вектор-функция $\vec{E}_l(z) = (z^0, z^1, \dots, z^{l-1})$ отождествляется с вектором $\vec{E}_l = (0, 1, \dots, l-1)$. Таким образом, множество $\mathcal{P}_l$ будем рассматривать и как множество l -мерных векторов с целочисленными координатами. В соответствии с указанной договоренностью при $\vec{P}_l = (p_1, \dots, p_l) \in \mathcal{P}_l$ и $\vec{Q}_l = (q_1, \dots, q_l) \in \mathcal{P}_l$ будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_{l,n}^{\vec{P}_l \oplus \vec{Q}_l} &= \det(f_{n-p_s-q_t})_{s,t=1,\dots,l}, & f_{l,n}^{\vec{P}_l} &= f_{l,n}^{\vec{P}_l \oplus \vec{E}_l} = \det(f_{n-p_s-t+1})_{s,t=1,\dots,l}, \\ W_{i_1,\dots,i_l}^{\vec{P}_l} &= \det(\lambda_{i_t}^{p_s})_{s,t=1,\dots,l}, & V_{i_1,\dots,i_l}^{\vec{P}_l} &= \frac{W_{i_1,\dots,i_l}^{\vec{P}_l}}{W_{i_1,\dots,i_l}}, & V_{i_1,\dots,i_l}^{\vec{P}_l \oplus \vec{Q}_l} &= V_{i_1,\dots,i_l}^{\vec{P}_l} V_{i_1,\dots,i_l}^{\vec{Q}_l}. \end{aligned} \quad (77)$$

При $\vec{P}_l \in \mathcal{P}_l$ равенство (70) можно переписать в виде равенства

$$\|\vec{P}_l\|_\tau = \prod_{j=1}^l \|z^{p_j}\|_\tau = \prod_{j=1}^l \max_{z \in T_\tau} |z^{p_j}| = \prod_{j=1}^l e^{\tau|p_j|} = e^{\tau|\vec{P}_l|}, \quad (78)$$

где $|\vec{P}_l| = |p_1| + \dots + |p_l|$. Из равенства (78), очевидно, следует равенство

$$\|\vec{P}_l\|_{\tau_1+\tau_2} = \|\vec{P}_l\|_{\tau_1} \times \|\vec{P}_l\|_{\tau_2}. \quad (79)$$

При $\vec{\Psi}_l \in H_{l,\tau}$ и $\vec{P}_l \in \mathcal{P}_l$ положим $[\vec{\Psi}_l]_{\vec{P}_l} = [\Psi_{l,1}]_{p_1} \dots [\Psi_{l,l}]_{p_l}$. Из неравенств Коши (28) получаем неравенство

$$|[\vec{\Psi}_l]_{\vec{P}_l}| \leq \|\Psi_{l,1}\|_\tau e^{-\tau|p_1|} \dots \|\Psi_{l,l}\|_\tau e^{-\tau|p_l|} = \|\vec{\Psi}_l\|_\tau \|\vec{P}_l\|_\tau^{-1}. \quad (80)$$

При $R \in \mathcal{F}_{l,\tau}$ введем следующее обозначение:

$$[R^*]_{l,\tau} = \sup_{\vec{P}_l \in \mathcal{P}_l} |R^{\vec{P}_l}| \|\vec{P}_l\|_\tau^{-1}, \quad (81)$$

и заметим, что при $R \in \mathcal{F}_{l,2\tau}$ имеет место неравенство

$$\sup_{\vec{\Psi}_l \in H_{l,2\tau}} |R^{\vec{\Psi}_l}| \|\vec{\Psi}_l\|_{2\tau}^{-1} \leq C(\tau) [R^*]_{l,\tau}. \quad (82)$$

Действительно, раскладывая каждую координату вектор-функции $\vec{\Psi}_l$ в ряд Лорана $\Psi_{l,j}(z) = \sum_{p_j=-\infty}^{\infty} [\Psi_{l,j}]_{p_j} z^{p_j}$ ($j = 1, \dots, l$) и учитывая линейную и непрерывную зависимость величины $R^{\vec{\Psi}_l}$ от координат вектор-функции $\vec{\Psi}_l$, из неравенств (80) и равенств (78), (79) получаем неравенство

$$\begin{aligned} |R^{\vec{\Psi}_l}| &= \left| \sum_{\vec{P}_l \in \mathcal{P}_l} [\vec{\Psi}_l]_{\vec{P}_l} R^{\vec{P}_l} \right| \leq \sum_{\vec{P}_l \in \mathcal{P}_l} \|\vec{\Psi}_l\|_{2\tau} \|\vec{P}_l\|_{2\tau}^{-1} |R^{\vec{P}_l}| \\ &= \|\vec{\Psi}_l\|_{2\tau} \sum_{\vec{P}_l \in \mathcal{P}_l} \|\vec{P}_l\|_\tau^{-2} |R^{\vec{P}_l}| \leq \|\vec{\Psi}_l\|_{2\tau} [R^*]_{l,\tau} \sum_{\vec{P}_l \in \mathcal{P}_l} \|\vec{P}_l\|_\tau^{-1}, \end{aligned}$$

эквивалентное неравенству (82).

Обратим внимание на то, что ранее введенная величина $\{f\}_{n,\tau}$ совпадает с $[f_{1,n}^*]_{1,\tau}$. Легко видеть, что величины $[R^*]_{l,\tau}$ убывают при возрастании параметра τ .

Дополним лемму 1 следующей леммой 7. Начиная с этого момента, для упрощения записи перестанем нумеровать постоянные C и $C(\tau)$.

ЛЕММА 7. Пусть имеют место предположения и обозначения леммы 1, $\tau > 0$, и пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность неотрицательных чисел такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Тогда каждую подпоследовательность Λ_j можно разбить на конечное число подпоследовательностей, а именно

$$\Lambda_j = \bigcup_{l=1}^{N_j} \bigcup_{i_1, \dots, i_l} \Lambda_{j, i_1, \dots, i_l},$$

где второе из объединений берется по всем $i_1, \dots, i_l$ таким, что $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N$ и многочлен $(1-z/\lambda_{i_1}) \cdots (1-z/\lambda_{i_l})$ делит многочлен $\beta_j(z)$, и указать $\bar{\theta}^* \in \Theta$ так, что имеют место равенства

$$\lim_{n \in \Lambda_{j, i_1, \dots, i_l}(\bar{\theta}^*)} [F_{l,n}^* - V_{i_1, \dots, i_l}^*]_{2l, \tau} = 0, \quad (83)$$

$$\lim_{n \in \Lambda_{j, i_1, \dots, i_l}(\bar{\theta}^*)} \frac{\varepsilon_n \{f\}_{n, \tau}^r}{\{(f_r)\}_{\binom{l}{r}}} = 0, \quad r = 1, \dots, l, \quad (84)$$

и неравенство

$$[f_{r,n}^*]_{2r, \tau} \leq C(\tau) \{(f_r)\}_{\binom{l}{r}}, \quad n \in \Lambda_{j, i_1, \dots, i_l}(\bar{\theta}^*), \quad r = 1, \dots, l, \quad (85)$$

где

$$\binom{l}{r} = \frac{l!}{r!(l-r)!}.$$

Доказательству леммы 7 предпошлим два простых утверждения, которые для удобства последующих ссылок выделим в виде самостоятельных лемм.

ЛЕММА 8. При всех $\vec{P}_l \in \mathcal{P}_l$ имеют место неравенства

$$|W_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{P}_l}| \leq C, \quad |V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{P}_l}| \leq C, \quad [W_{i_1, \dots, i_l}^*]_{l, \tau} \leq C. \quad (86)$$

Действительно, непосредственно из первого из равенств (77) видно, что каждый элемент определителя $W_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{P}_l}$ по модулю равен 1. Поэтому $|W_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{P}_l}| \leq l!$ при всех $\vec{P}_l \in \mathcal{P}_l$. Второе неравенство в (86) следует из первого и отличия от нуля определителей Вандермонда $W_{i_1, \dots, i_l}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N$. Третье неравенство следует из первого, из определения величины $[W_{i_1, \dots, i_l}^*]_{l, \tau}$ и неравенства $\|\vec{P}_l\|_\tau \geq 1$.

ЛЕММА 9. Пусть $\tau > 0$, $R, R_n \in \mathcal{F}_{l, \tau}$ и $\lim_{n \in \Lambda} [R_n^* - R^*]_{l, \tau} = 0$. Тогда для любой последовательности вектор-функций $\vec{\Psi}_l^n \in H_{l, 2\tau}$ такой, что $\lim_{n \in \Lambda} \vec{\Psi}_l^n = \vec{\Psi}_l$ равномерно (по каждой координате) в кольце $T_{2\tau}$, имеет место равенство

$$\lim_{n \in \Lambda} R_n^{\vec{\Psi}_l^n} = R^{\vec{\Psi}_l}. \quad (87)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned} |R_n^{\vec{\Psi}_l^n} - R^{\vec{\Psi}_l}| &\leq |R_n^{\vec{\Psi}_l^n} - R^{\vec{\Psi}_l^n}| + |R^{\vec{\Psi}_l^n} - R^{\vec{\Psi}_l}| \\ &\leq \|\vec{\Psi}_l^n\|_{2\tau} \sup_{\vec{\Phi}_l \in H_{l,2\tau}} |R_n^{\vec{\Phi}_l} - R^{\vec{\Phi}_l}| \|\vec{\Phi}_l\|_{2\tau}^{-1} + |R^{\vec{\Psi}_l^n} - R^{\vec{\Psi}_l}|. \end{aligned} \quad (88)$$

Так как величины $\|\vec{\Psi}_l^n\|_{2\tau}$ ограничены не зависящей от n постоянной (в силу покоординатной равномерной сходимости вектор-функций $\vec{\Psi}_l^n \in H_{l,2\tau}$), то с учетом неравенства (82) и предположения $\lim_{n \in \Lambda} [R_n^* - R^*]_{l,\tau} = 0$ первое слагаемое в правой части неравенства (88) стремится к нулю при $n \in \Lambda$. Второе слагаемое в правой части неравенства (88) стремится к нулю при $n \in \Lambda$ по предположению леммы о непрерывности функционала $R \in \mathcal{F}_{l,\tau}$.

Таким образом, лемма 9 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Фиксируем индекс j ($1 \leq j \leq k$). Без потери общности можно считать, что нули $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ многочлена β , являющегося наименьшим общим кратным многочленов $\beta_1, \dots, \beta_k$, перенумерованы таким образом, что первые N_j из них – это нули многочлена β_j . Определим величины u_{n,i,β_j}^f по аналогии с величинами $u_{n,i,\beta}^f$, т.е. равенствами (38), в которых число N заменяется числом N_j . Как и раньше, положим $u_{n,\beta_j}^f = \max_{1 \leq i \leq n_j} |u_{n,i,\beta_j}^f|$. Очевидно, что после замены β на β_j и N на N_j ранее доказанные утверждения относительно величин $u_{n,i,\beta}^f$ и $u_{n,\beta}^f$ будут верны и для величин u_{n,i,β_j}^f и u_{n,β_j}^f .

Из неравенств (33), (32), (35) и (44) при всех $n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)$, $p \in \mathbb{Z}$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} \{f\}_{n+p}^{N_j+1} &\leq e^{N_j\tau/2} \{f\}_{n+p,\tau/2} \leq e^{(N_j+|p|)\tau/2} \{f\}_{n,\tau/2} \leq e^{(N_j+|p|)\tau/2} C\left(\frac{\tau}{2}\right) \{f\}_n^{N_j} \\ &\leq C\left(\frac{\tau}{2}\right) e^{(N_j+|p|)\tau/2} N_j u_{n,\beta_j}^f = C(\tau) e^{|p|\tau/2} u_{n,\beta_j}^f. \end{aligned} \quad (89)$$

Покажем, что при всех $\tau > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/4)} \xi_{n,j}(\tau) = 0, \quad (90)$$

где

$$\xi_{n,j}(\tau) = (u_{n,\beta_j}^f)^{-1} \sup_{p \in \mathbb{Z}} e^{-\tau|p|} \sum_{i=1}^{N_j} |u_{n+p,i,\beta_j}^f - \lambda_i^{-p} u_{n,i,\beta_j}^f|. \quad (91)$$

С этой целью положим $\varkappa_{j,n} = (\{f\}_n^{N_j+1})^{-1} |[f\beta_j]_{n+N_j}|$. Из следствия леммы 2 (равенства (42)) и неравенства (89) следует, что при всех $n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)$ и всех $p \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} (u_{n,\beta_j}^f)^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} |u_{n+p,i,\beta_j}^f - \lambda_i^{-p} u_{n,i,\beta_j}^f| &\leq \sum_{i=1}^{N_j} |d_{i,\beta_j}| \sum_{r=1}^p \frac{|[f\beta_j]_{n+N_j+r-1}|}{\{f\}_{n+r}^{N_j+1}} \frac{\{f\}_{n+r}^{N_j+1}}{u_{n,\beta_j}^f} \\ &\leq C(\tau) e^{p\tau/2} \sum_{r=1}^p \varkappa_{j,n+r-1}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, используя в следствии леммы 2 вместо равенства (42) равенство (43), получим неравенство

$$(u_{n,\beta_j}^f)^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} |u_{n-p,i,\beta_j}^f - \lambda_i^p u_{n,i,\beta_j}^f| \leq C(\tau) e^{p\tau/2} \sum_{r=1}^p \varkappa_{j,n-r}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\xi_{n,j}(\tau) \leq C(\tau) \sup_{p \in \mathbb{Z}} e^{-|p|\tau/2} \sum_{|r| \leq |p|} \varkappa_{j,n+r} \leq C(\tau) \sup_{p \in \mathbb{Z}} e^{-|p|\tau/2} (2|p| + 1) \max_{|r| \leq |p|} \varkappa_{j,n+r}. \quad (92)$$

Из равенства (36) леммы 1 следует, что $\lim_{n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)} \varkappa_{j,n} = 0$. Кроме того, при всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\varkappa_{j,n} \leq (\{f\}|_n^{N_j+1})^{-1} \left| \sum_{s=0}^{N_j} [\beta_j]_s f_{n+N_j-s} \right| \leq B_j, \quad \text{где } B_j = \sum_{s=0}^{N_j} |[\beta_j]_s|.$$

Поэтому, учитывая, что $\sup_{p \in \mathbb{Z}} e^{-|p|\tau/2} (2|p| + 1) \leq C(\tau)$, из неравенства (92) при любом $\rho_n \in \mathbb{N}$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} \xi_{n,j}(\tau) &\leq C(\tau) \max \left\{ C(\tau) \max_{|r| \leq \rho_n} \varkappa_{j,n+r}, \sup_{|p| > \rho_n} e^{-|p|\tau/2} (2|p| + 1) B_j \right\} \\ &\leq C(\tau) \max \left\{ \max_{|r| \leq \rho_n} \varkappa_{j,n+r}, \sup_{|p| > \rho_n} e^{-|p|\tau/2} |p| \right\}. \end{aligned}$$

Выберем числа ρ_n таким образом, чтобы $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty \in \Theta$ и $n+r \in \Lambda_j(\bar{\theta}/2)$ при всех $n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/4)$, $|r| \leq \rho_n$. Тогда правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/4)$. Таким образом, равенство (90) доказано.

Введем в рассмотрение ряд Лорана

$$g_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{n,j} z^n,$$

где $g_{n,j} = \max\{\xi_{n,j}(\tau), \varepsilon_n^{1/N_j}, 1/n\}$, если $n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/4)$, и $g_{n,j} = 1/(|n| + 1)$, если $n \notin \Lambda_j(\bar{\theta}/4)$. Тогда $g_j(z) \in \mathcal{L}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{n,j} = 0$. Положим $\eta_{n,j} = \{g_j\}_{n,\tau}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{n,j} = 0$ и имеют место неравенства $\eta_{n,j} \geq g_{n,j} \geq \varepsilon_n^{1/N_j}$ при $n \in \Lambda_j(\bar{\theta}/4)$,

$$e^{-\tau|p|} \eta_{n,j} \leq \eta_{n+p,j} \leq e^{\tau|p|} \eta_{n,j}, \quad n, p \in \mathbb{Z}, \quad (93)$$

а с учетом определения (91) – и неравенство

$$e^{-\tau|p|} |u_{n+p,i,\beta_j}^f - \lambda_i^{-p} u_{n,i,\beta_j}^f| \leq \xi_{n,j}(\tau) u_{n,\beta_j}^f \leq \eta_{n,j} u_{n,\beta_j}^f, \quad n \in \Lambda_j\left(\frac{\bar{\theta}}{4}\right), \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (94)$$

Положим $\theta_{n,j}^* = \min\{\theta_n/4, -\ln \eta_{n,j}/(2\tau N)\}$. Тогда $\{\theta_{n,j}^*\}_{n=1}^\infty \in \Theta$. В силу определения числа $\theta_{n,j}^*$ при $|p| \leq \theta_{n,j}^*$ получаем неравенство $e^{\tau|p|} \leq \eta_{n,j}^{-1/(2N)}$. Поэтому из неравенства (93) следует неравенство

$$\eta_{n,j}^{1+1/(2N)} \leq \eta_{n+p,j} \leq \eta_{n,j}^{1-1/(2N)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad |p| \leq \theta_{n,j}^*, \quad (95)$$

а из неравенства (94) – неравенство

$$\begin{aligned} |u_{n+p,i,\beta_j}^f - \lambda_i^{-p} u_{n,i,\beta_j}^f| &\leq \eta_{n,j}^{1-1/(2N)} u_{n,\beta_j}^f, \\ n &\in \Lambda_j \left(\frac{\bar{\theta}}{4} \right), \quad i = 1, \dots, N_j, \quad |p| \leq \theta_{n,j}^*. \end{aligned} \quad (96)$$

Из последнего неравенства получаем неравенство

$$(1 - \eta_{n,j}^{1-1/(2N)}) u_{n,\beta_j}^f \leq u_{n+p,\beta_j}^f \leq (1 + \eta_{n,j}^{1-1/(2N)}) u_{n,\beta_j}^f, \quad n \in \Lambda_j \left(\frac{\bar{\theta}}{4} \right), \quad |p| \leq \theta_{n,j}^*,$$

а следовательно (так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{n,j} = 0$), и неравенство

$$\frac{1}{2} u_{n,\beta_j}^f \leq u_{n+p,\beta_j}^f \leq 2 u_{n,\beta_j}^f, \quad n \in \Lambda_j \left(\frac{\bar{\theta}}{4} \right), \quad n \geq n_0, \quad |p| \leq \theta_{n,j}^*. \quad (97)$$

Для упрощения дальнейшей записи зависимость рассматриваемых величин от j , β_j и f будем опускать, в частности, получаем $\Lambda = \Lambda_j$ и $(u_{n,1}, \dots, u_{n,N}) = (u_{n,1,\beta_j}, \dots, u_{n,N_j,\beta_j})$. Поставим в соответствие каждому индексу $n \in \Lambda(\bar{\theta}/4)$ натуральное число $l(n) \in \{1, \dots, N\}$ ($N = N_j$) следующим образом. Пусть $\tilde{u}_{n,1}, \dots, \tilde{u}_{n,N}$ – перестановка чисел $u_{n,1}, \dots, u_{n,N}$, упорядочивающая по убыванию $u_n = \tilde{u}_{n,1} \geq \tilde{u}_{n,2} \geq \dots \geq \tilde{u}_{n,N}$. Если $\tilde{u}_{n,2} < \eta_n^{1/N} u_n$, то $l(n) = 1$. Если $\tilde{u}_{n,2} \geq \eta_n^{1/N} u_n$, а $\tilde{u}_{n,3} < \eta_n^{2/N} u_n$, то $l(n) = 2$ и т.д., если $\tilde{u}_{n,N-1} \geq \eta_n^{(N-2)/N} u_n$, а $\tilde{u}_{n,N} < \eta_n^{(N-1)/N} u_n$, то $l(n) = N - 1$. В оставшемся случае получаем $\tilde{u}_{n,N} \geq \eta_n^{(N-1)/N} u_n$ и полагаем $l(n) = N$.

Пусть $1 \leq l \leq N$, $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N$. Обозначим через $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ подпоследовательность, состоящую из натуральных чисел $n \in \Lambda$ таких, что $l(n) = l$, а набор чисел $u_{n,i_1}, \dots, u_{n,i_l}$ после его перестановки в порядке убывания совпадает с набором $\tilde{u}_{n,1}, \dots, \tilde{u}_{n,l}$. Заметим, что таким образом последовательность Λ разбивается на конечное число непересекающихся подпоследовательностей $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}$. Оставим для дальнейших рассмотрений только те из подпоследовательностей $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}$, которые содержат бесконечное число членов.

Заметим, что подпоследовательность $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ такова, что величины $u_{n,i_1}, \dots, u_{n,i_l}$, с одной стороны, “значительно” превосходят по модулю величины u_{n,i_s} , $i_s \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}$, а с другой стороны – “не слишком малы” по сравнению с величиной u_n . Покажем, что это же высказывание верно не только для подпоследовательности $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}$, но и для подпоследовательности $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}(\bar{\theta}^*)$. Точнее, положим

$$A_n^{i_1, \dots, i_l} = \min_{i \in \{i_1, \dots, i_l\}} |u_{n,i}|, \quad B_n^{i_1, \dots, i_l} = \max_{i \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}} |u_{n,i}| \quad (98)$$

и покажем, что имеют место неравенства

$$B_n^{i_1, \dots, i_l} \leq 4 \eta_n^{1/(2N+1)} A_n^{i_1, \dots, i_l}, \quad n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}(\bar{\theta}^*), \quad (99)$$

$$A_n^{i_1, \dots, i_l} \geq \frac{1}{4} \eta_n^{1-1/(2N-1)} u_n, \quad n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}(\bar{\theta}^*). \quad (100)$$

Непосредственно из определения последовательностей $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ следует, что при $n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ имеют место неравенства $\tilde{u}_{n,l} \geq \eta_n^{(l-1)/N} u_n$ и $\tilde{u}_{n,l+1} < \eta_n^{l/N} u_n$, из которых следуют неравенства

$$B_n^{i_1, \dots, i_l} = \tilde{u}_{n,l+1} < \eta_n^{1/N} \tilde{u}_{n,l} = \eta_n^{1/N} A_n^{i_1, \dots, i_l}, \quad (101)$$

$$A_n^{i_1, \dots, i_l} = \tilde{u}_{n,l} \geq \eta_n^{(l-1)/N} u_n \geq \eta_n^{1-1/N} u_n. \quad (102)$$

Пусть $i_0(n) \in \{i_1, \dots, i_l\}$ – индекс такой, что $A_n^{i_1, \dots, i_l} = |u_{n, i_0(n)}|$. Тогда из неравенства (96) (в котором зависимость от j , β_j и f следует опустить) и неравенства (102) при достаточно больших $n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ и $|p| \leq \theta_n^*$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} A_{n+p}^{i_1, \dots, i_l} &= |u_{n+p, i_0(n+p)}| \geq |u_{n, i_0(n+p)}| - \eta_n^{1-1/(2N)} u_n \geq A_n^{i_1, \dots, i_l} - \eta_n^{1-1/(2N)} u_n \\ &\geq A_n^{i_1, \dots, i_l} (1 - \eta_n^{1-1/(2N)-1+1/N}) = A_n^{i_1, \dots, i_l} (1 - \eta_n^{1/(2N)}) \geq \frac{1}{2} A_n^{i_1, \dots, i_l}. \end{aligned} \quad (103)$$

Аналогично, пусть $t_0(n) \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}$ – индекс такой, что $B_n^{i_1, \dots, i_l} = |u_{n, t_0(n)}|$. Тогда из неравенств (96), (101) и (102) при достаточно больших $n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ и $|p| \leq \theta_n^*$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} B_{n+p}^{i_1, \dots, i_l} &= |u_{n+p, t_0(n+p)}| \leq |u_{n, t_0(n+p)}| + \eta_n^{1-1/(2N)} u_n \leq B_n^{i_1, \dots, i_l} + \eta_n^{1-1/(2N)} u_n \\ &\leq \eta_n^{1/N} A_n^{i_1, \dots, i_l} + \eta_n^{1/(2N)} A_n^{i_1, \dots, i_l} \leq 2\eta_n^{1/(2N)} A_n^{i_1, \dots, i_l}. \end{aligned} \quad (104)$$

Из неравенств (104), (103) и (95) следует, что

$$B_{n+p}^{i_1, \dots, i_l} \leq 4\eta_n^{1/(2N)} A_{n+p}^{i_1, \dots, i_l} \leq 4\eta_{n+p}^{1/(2N+1)} A_{n+p}^{i_1, \dots, i_l}, \quad n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}, \quad |p| \leq \theta_n^*. \quad (105)$$

Из неравенств (103), (102), (97) и (95) следует, что

$$\begin{aligned} A_{n+p}^{i_1, \dots, i_l} &\geq \frac{1}{2} \eta_n^{1-1/N} u_n \geq \frac{1}{4} \eta_n^{1-1/N} u_{n+p} \geq \frac{1}{4} \eta_{n+p}^{1-1/(2N-1)} u_{n+p}, \\ n &\in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}, \quad |p| \leq \theta_n^*. \end{aligned} \quad (106)$$

Легко видеть, что полученные неравенства (105) и (106) совпадают с неравенствами (99) и (100).

Так как $f_{n+p} = \sum_{i=1}^N u_{n+p, i}$ (см. равенства (38)), то

$$f_{n+p} - \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_l\}} \lambda_i^{-p} u_{n, i} = \sum_{i=1}^N (u_{n+p, i} - \lambda_i^{-p} u_{n, i}) + \sum_{i \notin \{i_1, \dots, i_l\}} \lambda_i^{-p} u_{n, i}.$$

Отсюда в силу неравенства (94) и определения (98) величины $B_n^{i_1, \dots, i_l}$ при $n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}(\bar{\theta}^*)$ и $p \in \mathbb{Z}$ получаем неравенство

$$\left| f_{n+p} - \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_l\}} \lambda_i^{-p} u_{n, i} \right| \leq N \eta_n u_n e^{\tau|p|} + (N-l) B_n^{i_1, \dots, i_l}.$$

Отсюда в силу неравенств (100) и (99) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \left| f_{n+p} - \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_l\}} \lambda_i^{-p} u_{n, i} \right| &\leq 8N \eta_n^{1/(2N+1)} A_n^{i_1, \dots, i_l} e^{\tau|p|}, \\ n &\in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}(\bar{\theta}^*), \quad p \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (107)$$

Пусть $\vec{P}_r = (p_1, \dots, p_r)$, $\vec{Q}_r = (q_1, \dots, q_r)$, где $r \leq l$. Заметим, что

$$\begin{aligned} &\det \left(\sum_{j \in \{i_1, \dots, i_l\}} \lambda_j^{(p_s + q_t)} u_{n, j} \right)_{s, t=1, \dots, r} \\ &= \sum_{j_1 \in \{i_1, \dots, i_l\}} \dots \sum_{j_r \in \{i_1, \dots, i_l\}} u_{n, j_1} \dots u_{n, j_r} \lambda_{j_1}^{q_1} \dots \lambda_{j_r}^{q_r} W_{j_1, \dots, j_r}^{\vec{P}_r}. \end{aligned}$$

Так как определитель $W_{j_1, \dots, j_r}^{\vec{P}_r}$ равен нулю, если среди индексов $j_1, \dots, j_r$ имеются равные, а при перестановке этих индексов умножается на 1, если перестановка четна, и на -1 , если перестановка нечетна, то

$$\det \left(\sum_{j \in \{i_1, \dots, i_l\}} \lambda_j^{(p_s + q_t)} u_{n,j} \right)_{s,t=1, \dots, r} = \sum_J u_{n,j_1} \cdots u_{n,j_r} W_{j_1, \dots, j_r}^{\vec{P}_r} W_{j_1, \dots, j_r}^{\vec{Q}_r}, \quad (108)$$

где через J обозначено множество мультииндексов $j_1, \dots, j_r$ таких, что $j_1 < \dots < j_r$ и $j_s \in \{i_1, \dots, i_l\}$, $s = 1, \dots, r$. При $r \leq l$ из неравенства (107), равенства (108) и определения (98) величин $A_n^{i_1, \dots, i_l}$ получаем неравенство

$$\frac{|f_{r,n}^{\vec{P}_r \oplus \vec{Q}_r} - \sum_J u_{n,j_1} \cdots u_{n,j_r} W_{j_1, \dots, j_r}^{\vec{P}_r \oplus \vec{Q}_r}|}{e^{\tau(|\vec{P}_r| + |\vec{Q}_r|)}} \leq C \eta_n^{1/(2N+1)} \max_J |u_{n,j_1} \cdots u_{n,j_r}|. \quad (109)$$

Взяв верхнюю грань левой части неравенства (109) по всем $\vec{P}_r \oplus \vec{Q}_r \in \mathcal{P}_{2r}$, получим неравенство

$$\left[f_{r,n}^* - \sum_J u_{n,j_1} \cdots u_{n,j_r} W_{j_1, \dots, j_r}^* \right]_{2r,\tau} \leq C \eta_n^{1/(2N+1)} \max_J |u_{n,j_1} \cdots u_{n,j_r}|. \quad (110)$$

Так как $f_{r,n+p} = f_{r,n}^{(-p, -p+1, \dots, -p+r-1)}$, то как частный случай неравенств (109) получаем неравенства

$$\begin{aligned} & \left| f_{r,n+p} - \sum_J u_{n,j_1} \cdots u_{n,j_r} (\lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_r})^{-p} W_{j_1, \dots, j_r}^2 \right| \\ & \leq C(\tau) e^{\tau r |p|} \eta_n^{1/(2N+1)} \max_J |u_{n,j_1} \cdots u_{n,j_r}|. \end{aligned} \quad (111)$$

Предположим для простоты, что при $(j_1, \dots, j_r) \in J$ произведения $\lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_r}$ попарно различны (в противном случае величину $\{(f_r)\}_n^{(l_r)}$ в равенстве (84) и неравенстве (85) следует заменить на $\max_{|\vec{P}_r \oplus \vec{Q}_r| \leq C} |f_{r,n}^{\vec{P}_r, \vec{Q}_r}|$ и, соответственно, придется усложнить последующие рассуждения). Тогда из совокупности неравенств (111) при $p = 0, \dots, \binom{l_r}{r} - 1$ следует, что

$$\max_J |u_{n,j_1} \cdots u_{n,j_r}| \leq C(\tau) \max_{0 \leq p \leq \binom{l_r}{r} - 1} |f_{r,n+p}| = C(\tau) \{(f_r)\}_n^{(l_r)}. \quad (112)$$

Из неравенств (110), (112) и последнего из неравенств (86) получаем неравенство

$$[f_{r,n}^*]_{2r,\tau} \leq C(\tau) \{(f_r)\}_n^{(l_r)} \left(\eta_n^{1/(2N+1)} + \sum_J [W_{j_1, \dots, j_r}^*]_{2r,\tau} \right) \leq C^*(\tau) \{(f_r)\}_n^{(l_r)},$$

совпадающее с неравенством (85).

Непосредственно из определения (98) величин $A_n^{i_1, \dots, i_l}$ и неравенства (112) следует, что

$$(A_n^{i_1, \dots, i_l})^r \leq \min_J |u_{n,j_1} \cdots u_{n,j_r}| \leq C(\tau) \{(f_r)\}_n^{(l_r)}. \quad (113)$$

Из оценки

$$\{f\}_{n,\tau} \leq C(\tau) \{f\}_n^N \leq C(\tau) u_n$$

(см. неравенства (35) и (44)), неравенств $\varepsilon_n \leq \eta_n^N$ при $n \in \Lambda(\bar{\theta}/4)$, неравенства (102), неравенства $r \leq N$ и (113) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \{f\}_{n,\tau}^r &\leq \eta_n^N (C(\tau)u_n)^r \leq \eta_n^N (C(\tau)\eta_n^{1/N-1}A_n^{i_1,\dots,i_l})^r \\ &\leq \eta_n (C(\tau)A_n^{i_1,\dots,i_l})^r \leq \eta_n C(\tau) \{(f_r)\}_{n,\tau}^{(l)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\lim_{n \in \Lambda(\bar{\theta}^*)} \eta_n = 0$, отсюда получаем равенство (84).

Если $r = l$, то множество мультииндексов J состоит из единственного мультииндекса $\{i_1, \dots, i_l\}$. В этом случае из неравенства (110) следует равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_l}(\bar{\theta}^*)} \left[\frac{f_{l,n}^*}{u_{n,i_1} \cdots u_{n,i_l}} - W_{i_1,\dots,i_l}^* \right]_{2l,\tau} = 0. \quad (114)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} [F_{l,n}^* - V_{i_1,\dots,i_l}^*]_{2l,\tau} &= \left[\frac{f_{l,n}^*}{f_{l,n}} - \frac{W_{i_1,\dots,i_l}^*}{W_{i_1,\dots,i_l}} \right]_{2l,\tau} \\ &\leq \frac{\left[\frac{f_{l,n}^*}{u_{n,i_1} \cdots u_{n,i_l}} - W_{i_1,\dots,i_l}^* \right]_{2l,\tau}}{\left| \frac{f_{l,n}}{u_{n,i_1} \cdots u_{n,i_l}} \right|} + [W_{i_1,\dots,i_l}^*]_{2l,\tau} \left| \frac{1}{\frac{f_{l,n}}{u_{n,i_1} \cdots u_{n,i_l}}} - \frac{1}{W_{i_1,\dots,i_l}} \right|. \end{aligned} \quad (115)$$

Так как по лемме 8 $[W_{i_1,\dots,i_l}^*]_{2l,\tau} \leq C$, то из равенства (114) и являющегося его следствием равенства

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_l}(\bar{\theta}^*)} \frac{f_{l,n}}{u_{n,i_1} \cdots u_{n,i_l}} = W_{i_1,\dots,i_l} \neq 0$$

получаем, что каждое из двух слагаемых в правой части неравенства (115) стремится к нулю при $n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_l}(\bar{\theta}^*)$.

Таким образом, равенство (83), а вместе с ним и лемма 7 доказаны.

Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $f \in \mathcal{L}$, $\beta(z) = \prod_{i=1}^N (1 - z/\lambda_i) \in \Upsilon_N$, $1 \leq k \leq N$. Разбиение $\mathbb{N} = \bigcup_{l=k}^N \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N} \Lambda_{i_1,\dots,i_l}$ множества натуральных чисел на непересекающиеся подпоследовательности $\Lambda_{i_1,\dots,i_l}$ будем называть τ -разбиением k -го порядка, согласованным с рядом f и многочленом β , если найдется $\bar{\theta} \in \Theta$ такая, что при всех $l \geq k$, $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N$ имеют место неравенства

$$[f_{r,n}^*]_{2r,\tau} \leq C(\tau) \{(f_r)\}_{n,\tau}^{(l)}, \quad n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_l}(\bar{\theta}), \quad r = 1, \dots, l, \quad (116)$$

и равенства

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_l}(\bar{\theta})} [F_{l,n}^* - V_{i_1,\dots,i_l}^*]_{2l,\tau} = 0. \quad (117)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из убывания по τ величины $[R^*]_{2l,\tau}$ следует, что всякое τ_1 -разбиение является также и τ_2 -разбиением при всех $\tau_2 \geq \tau_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Не теряя общности, можно считать, что при всех $l \geq k$, $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N$ подпоследовательность $\Lambda_{i_1,\dots,i_l}$ либо пуста, либо содержит бесконечное число элементов. Пустые подпоследовательности $\Lambda_{i_1,\dots,i_l}$ в дальнейших рассуждениях исключаются из рассмотрения.

Раскладывая определитель, стоящий в правой части равенства (122), по последней строке и пользуясь равенствами (121), получаем равенство

$$\begin{aligned} \lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}(\bar{\theta})} Q_{l,n}(z) &= \lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}(\bar{\theta})} \sum_{r=1}^{l+1} (-1)^{r-1} z^{r-1} \frac{f_{l,n}}{f_{l,n-1}} \frac{f_{l,n}^{\vec{E}_{l+1}, \vec{r}}}{f_{l,n}} \\ &= \sum_{r=1}^{l+1} (-1)^{r-1} z^{r-1} (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_l})^{-1} V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{E}_{l+1}, \vec{r}} = \tilde{V}_{i_1, \dots, i_l}(z), \end{aligned} \quad (124)$$

где

$$\tilde{V}_{i_1, \dots, i_l}(z) = \frac{(-1)^l W(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_l}, z)}{\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_l} W_{i_1, \dots, i_l}} = \prod_{j=1}^l \left(1 - \frac{z}{\lambda_{i_j}}\right).$$

Заметим, что многочлен $\tilde{V}_{i_1, \dots, i_l}$ делит β . Таким образом, $\beta/\tilde{V}_{i_1, \dots, i_l}$ — это многочлен степени $N-l$. Запишем этот многочлен в следующем виде:

$$\frac{\beta(z)}{\tilde{V}_{i_1, \dots, i_l}(z)} = \sum_{s=0}^{N-l} \left[\frac{\beta}{\tilde{V}_{i_1, \dots, i_l}} \right]_s z^s, \quad (125)$$

и при всех $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\beta_{n, i_1, \dots, i_l}(z) = \sum_{s=0}^{N-l} \left[\frac{\beta}{\tilde{V}_{i_1, \dots, i_l}} \right]_s z^s Q_{l, n-s+l}(z). \quad (126)$$

Так как $k \leq l$, то из равенств (126) и (123) при всех $n \in \mathbb{N}$ получаем равенства

$$[f \beta_{n, i_1, \dots, i_l}]_{n+j} = \sum_{s=0}^{N-l} \left[\frac{\beta}{\tilde{V}_{i_1, \dots, i_l}} \right]_s [f Q_{l, n-s+l}]_{n-s+j} = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (127)$$

Кроме того, из равенств (126), (124) и (125) следует равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}} \beta_{n, i_1, \dots, i_l}(z) = \sum_{s=0}^{N-l} \left[\frac{\beta}{\tilde{V}_{i_1, \dots, i_l}} \right]_s z^s \tilde{V}_{i_1, \dots, i_l}(z) = \beta(z).$$

Так как правая часть этого равенства не зависит от l и $i_1, \dots, i_l$ и так как $\mathbb{N} = \bigcup_{l=k}^N \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N} \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$, то, полагая $\beta_n = \beta_{n, i_1, \dots, i_l}$, если $n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$, последнее равенство можно переписать в виде равенства (119). Так как при этом равенства (127) совпадают с равенствами (120), то, тем самым, лемма 11 доказана.

ЛЕММА 12. Пусть $\mathbb{N} = \bigcup_{l=k}^N \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N} \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ — τ -разбиение множества натуральных чисел k -го порядка, согласованное с рядом $f \in \mathcal{L}$ и многочленом $\beta(z) = \prod_{i=1}^N (1 - \lambda_i/z) \in \Upsilon_N$. Тогда имеют место равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(f_k)(z) \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (1 - z/(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}))]_{n + \binom{N}{k}}}{\{(f_k)\}_n^{(\binom{N}{k})}} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (128)$$

$$\lim_{n \in (\mathbb{N} \setminus \Lambda^k)(\bar{\theta}/2)} \frac{[(f_{k+1})(z) \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq N} (1 - z/(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{k+1}}))]_{n + \binom{N}{k+1}}}{\{(f_{k+1})\}_n^{(\binom{N}{k+1})}} = 0, \quad (129)$$

где $\bar{\theta} \in \Theta$ — последовательность, фигурирующая в определении согласованного разбиения, $\Lambda^k = \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \Lambda_{i_1, \dots, i_k}$, функции f_k и f_{k+1} определены равенством (72).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть β_n – многочлены, определенные в лемме 11, и пусть $p_2, \dots, p_k$ – произвольные целые числа. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^N [\beta_{n+1-k}]_r f_{k,n}^{(r-1, p_2, \dots, p_k)} \\ &= \sum_{r=0}^N [\beta_{n+1-k}]_r \begin{vmatrix} [f(z)z^r]_{n+1} & f_{n-p_2} & \cdots & f_{n-p_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f(z)z^r]_{n-k+2} & f_{n-k+1-p_2} & \cdots & f_{n-k+1-p_k} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} [f\beta_{n+1-k}]_{n+1} & f_{n-p_2} & \cdots & f_{n-p_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f\beta_{n+1-k}]_{n-k+2} & f_{n-k+1-p_2} & \cdots & f_{n-k+1-p_k} \end{vmatrix} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (130)$$

так как первый столбец последнего определителя является нулевым в силу равенств (120).

Рассмотрим два набора определителей, $\{f_{k,n}^{(p_1, \dots, p_k)}\}$ и $\{f_{k,n+1}^{(p_1, \dots, p_k)}\}$, где $0 \leq p_1 < \dots < p_k \leq N-1$, и заметим, что определители второго набора выражаются через определители первого при помощи следующей системы равенств:

$$f_{k,n+1}^{(p_1, \dots, p_k)} = f_{k,n}^{(p_1-1, \dots, p_k-1)}, \quad 1 \leq p_1 < \dots < p_k \leq N-1, \quad (131)$$

$$f_{k,n+1}^{(0, p_2, \dots, p_k)} = f_{k,n}^{(-1, p_2-1, \dots, p_k-1)} = - \sum_{r=0}^{N-1} [\beta_{n+1-k}]_{r+1} f_{k,n}^{(r, p_2-1, \dots, p_k-1)}, \quad (132)$$

$$0 = p_1 < \dots < p_k \leq N-1.$$

Действительно, равенства (131) и первое из равенств (132), очевидно, имеют место при всех целочисленных $p_1, \dots, p_k$, а второе из равенств (132) следует из равенств (130) и равенства $[\beta_{n+1-k}]_0 = 1$. При этом следует учесть, что определители, стоящие в правой части равенства (132), либо с точностью до множителя ± 1 (в зависимости от четности перестановки, упорядочивающей набор чисел $(r, p_2-1, \dots, p_k-1)$ в порядке их возрастания) совпадают с определителями рассматриваемого вида, либо равны нулю, если r совпадает с одним из чисел $p_2-1, \dots, p_k-1$.

Заметим также, что коэффициенты в равенствах (131) постоянны, а в равенствах (132) имеют в силу равенства (119) пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} [\beta_{n+1-k}]_{r+1} = [\beta]_{r+1}$, $r = 0, \dots, N$. Соответствующая предельная система рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:

$$X_{n+1}^{(p_1, \dots, p_k)} = X_n^{(p_1-1, \dots, p_k-1)}, \quad 1 \leq p_1 < \dots < p_k \leq N-1, \quad (133)$$

$$X_{n+1}^{(0, p_2, \dots, p_k)} = - \sum_{r=0}^{N-1} [\beta]_{r+1} X_n^{(r, p_2-1, \dots, p_k-1)}, \quad (134)$$

$$0 = p_1 < \dots < p_k \leq N-1.$$

Заметим, что наборы $\{f_{k,n}^{(p_1, \dots, p_k)}\}$ и $\{X_n^{(p_1, \dots, p_k)}\}$, $0 \leq p_1 < \dots < p_k \leq N-1$, состоят из $\binom{N}{k}$ элементов. Заменяя индекс n в системах равенств (131), (132) и (133), (134) последовательно на $n, n+1, \dots, n + \binom{N}{k} - 1$ и исключая неизвестные из полученной совокупности равенств, получим соответственно равенства

$$f_{k,n+\binom{N}{k}} + \gamma_{1,n} f_{k,n+\binom{N}{k}-1} + \dots + \gamma_{\binom{N}{k},n} f_{k,n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (135)$$

$$X_{n+\binom{N}{k}} + \gamma_{1,n} X_{n+\binom{N}{k}-1} + \dots + \gamma_{\binom{N}{k},n} X_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (136)$$

где $X_n = X_n^{(0, \dots, k-1)}$. Заметим, что коэффициенты соотношений (135) имеют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{r,n} = \gamma_r$, $r = 1, \dots, \binom{N}{k}$. Многочлен $\gamma(z) = 1 + \sum_{r=1}^{\binom{N}{k}} \gamma_r z^r$ можно найти непосредственно по вышеизложенной схеме, но проще поступить следующим образом. Пусть $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$. Из определения величин $W_{i_1, \dots, i_k}^{(p_1, \dots, p_k)}$ получаем равенства $W_{i_1, \dots, i_k}^{(p_1, \dots, p_k)} = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} W_{i_1, \dots, i_k}^{(p_1-1, \dots, p_k-1)}$ и равенства

$$\sum_{r=0}^N [\beta]_r W_{i_1, \dots, i_k}^{(r, p_2-1, \dots, p_k-1)} = \sum_{r=0}^N [\beta]_r \begin{vmatrix} \lambda_{i_1}^r & \lambda_{i_1}^{p_2-1} & \dots & \lambda_{i_1}^{p_k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i_k}^r & \lambda_{i_k}^{p_2-1} & \dots & \lambda_{i_k}^{p_k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta(\lambda_{i_1}) & \lambda_{i_1}^{p_2-1} & \dots & \lambda_{i_1}^{p_k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta(\lambda_{i_k}) & \lambda_{i_k}^{p_2-1} & \dots & \lambda_{i_k}^{p_k-1} \end{vmatrix} = 0,$$

так как $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ – корни многочлена $\beta(z)$. Поэтому набор

$$X_n^{(p_1, \dots, p_k)} = \{(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k})^{-n} W_{i_1, \dots, i_k}^{(p_1, \dots, p_k)}\}, \quad 0 \leq p_1 < \dots < p_k \leq N-1,$$

является решением системы рекуррентных соотношений (133), (134), а последовательность $X_n^{(0, 1, \dots, k-1)} = \{(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k})^{-n} W_{i_1, \dots, i_k}\}_{n=1}^{\infty}$ является решением разностного уравнения (136). Так как $W_{i_1, \dots, i_k} \neq 0$, то это означает, что

$$1 + \gamma_1(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}) + \dots + \gamma_{\binom{N}{k}}(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k})^{\binom{N}{k}} = 0,$$

т.е. произведение $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ является корнем многочлена $\gamma(z)$ при любых $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$. Поэтому с точностью до постоянного отличного от нуля множителя имеет место равенство $\gamma(z) = \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} (1 - z/(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}))$ в предположении, что $\binom{N}{k}$ чисел $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ попарно различны. Так как коэффициенты непосредственно вычисляемого многочлена $\gamma(z)$ непрерывно зависят от набора $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$, то это же равенство имеет место и без предположения о попарной различности чисел $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$. Легко видеть, что равенства (135) – это другая форма записи равенств (128).

Равенство (129) доказывается точно так же, как и равенство (128), если заметить, что при $n \in (\mathbb{N} \setminus \Lambda^k)(\bar{\theta}/2)$ равенства (120) имеют место не только при $j = 1, \dots, k$, но и при $j = k+1$.

Итак, лемма 12 доказана.

Далее нам потребуются явные формулы, позволяющие представить определители $(k+1)$ -го порядка $f_{k+1,n}^{\vec{P}_{2k+2}}$ в виде линейной комбинации определителей $f_{k+1,n+p}$ с коэффициентами, выраженными через отношения определителей вида $f_{k,n}^{\vec{Q}_{2k}}$. Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 13. Пусть $\vec{\Psi}_{k+1}, \vec{\Phi}_{k+1} \in H_{k+1,\tau}$, и пусть $\vec{\Phi}_k = \vec{\Phi}_{k+1, \overline{k+1}}$. Имеют место следующие равенства:

$$f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_{k+1} \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \frac{f_{k,n}^{\vec{\Psi}_{k+1, \vec{j}} \oplus \vec{\Phi}_k}}{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n}^{(\vec{E}_k \oplus \vec{\Psi}_{k+1, j}) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}}, \quad (137)$$

$$f_{k+1,n}^{(0, \dots, k-1, p) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} = \sum_{r=0}^{p-k} \frac{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}}{f_{k,n-r}^{\vec{\Phi}_k}} \frac{f_{k,n-r-1}^{(0, \dots, k-2, p-r-1) \oplus \vec{\Phi}_k}}{f_{k,n-r-1}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n-r}^{\vec{\Phi}_{k+1}}, \quad p \geq k. \quad (138)$$

Напомним, что вектор $(0, \dots, k-1, p)$ с целочисленными координатами отождествляется с вектор-функцией $(z^0, \dots, z^{k-1}, z^p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 13. Пусть ψ – произвольная функция из H_τ . Из определения (71) и формулы разложения определителя по последнему столбцу получаем равенство

$$\begin{aligned} f_{k+1,n}^{\vec{E}_k \oplus \psi) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} &= \begin{vmatrix} [f\Phi_{k+1,1}]_n & \dots & [f\Phi_{k+1,1}]_{n-k+1} & [f\psi\Phi_{k+1,1}]_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f\Phi_{k+1,k+1}]_n & \dots & [f\Phi_{k+1,k+1}]_{n-k+1} & [f\psi\Phi_{k+1,k+1}]_n \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} f_{k,n}^{\vec{\Phi}_{k+1}, \vec{j}} [f\psi\Phi_{k+1,j}]_n. \end{aligned} \quad (139)$$

Из этого равенства следует, что последняя строка определителя $(k+2)$ -го порядка

$$\begin{vmatrix} 0 & [f\Psi_{k+1,1}\Phi_{k+1,1}]_n & \dots & [f\Psi_{k+1,k+1}\Phi_{k+1,1}]_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & [f\Psi_{k+1,1}\Phi_{k+1,k}]_n & \dots & [f\Psi_{k+1,k+1}\Phi_{k+1,k}]_n \\ 1 & [f\Psi_{k+1,1}\Phi_{k+1,k+1}]_n & \dots & [f\Psi_{k+1,k+1}\Phi_{k+1,k+1}]_n \\ f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k} & f_{k+1,n}^{\vec{E}_k \oplus \Psi_{k+1,1}) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} & \dots & f_{k+1,n}^{\vec{E}_k \oplus \Psi_{k+1,k+1}) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} \end{vmatrix}$$

равна линейной комбинации предыдущих $k+1$ строк с такими же коэффициентами, как и в равенстве (139) (т.е. коэффициент при j -й строке надо взять равным $(-1)^{k+1-j} f_{k,n}^{\vec{\Phi}_{k+1}, \vec{j}}$, в частности коэффициент при $(k+1)$ -й строке надо взять равным $f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}$). Поэтому этот определитель $(k+2)$ -го порядка равен нулю. Разложив его по последней строке, получим равенство (137).

Докажем равенство (138). Подставим в равенство (137) вектор-функцию $\vec{\Psi}_{k+1}(z) = (z^1, \dots, z^k, z^p)$, отождествляемую с вектором $(1, \dots, k, p)$, и заметим, что в сумме, стоящей в правой части равенства (137), слагаемые, соответствующие $j = 1, \dots, k-1$, равны нулю, так как при $j = 1, \dots, k-1$ вектор-функция $\vec{E}_k \oplus \vec{\Psi}_{k+1,j} = (z^0, \dots, z^{k-1}, z^j)$ имеет две одинаковые координаты. Таким образом, ненулевыми являются только слагаемые, которые соответствуют индексам $j = k$ и $j = k+1$. Поэтому равенство (137) при $\vec{\Psi}_{k+1}(z) = (z^1, \dots, z^k, z^p)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{k+1,n}^{(1,\dots,k,p) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} &= -\frac{f_{k,n}^{(1,\dots,k-1,p) \oplus \vec{\Phi}_k}}{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n}^{(0,\dots,k-1,k) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} + \frac{f_{k,n}^{(1,\dots,k-1,k) \oplus \vec{\Phi}_k}}{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n}^{(0,\dots,k-1,p) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$f_{k+1,n}^{(1,\dots,k,p) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} = f_{k+1,n-1}^{(0,\dots,k-1,p-1) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}}, \quad f_{k,n}^{(1,\dots,k-1,p) \oplus \vec{\Phi}_k} = f_{k,n-1}^{(0,\dots,k-2,p-1) \oplus \vec{\Phi}_k},$$

последнее равенство можно переписать в виде равенства

$$f_{k+1,n-1}^{(0,\dots,k-1,p-1) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} = -\frac{f_{k,n-1}^{(0,\dots,k-2,p-1) \oplus \vec{\Phi}_k}}{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n}^{\vec{\Phi}_{k+1}} + \frac{f_{k,n-1}^{\vec{\Phi}_k}}{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n}^{(0,\dots,k-1,p) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}}$$

или в виде равенства

$$f_{k+1,n}^{(0,\dots,k-1,p)\oplus\vec{\Phi}_{k+1}} = \frac{f_{k,n-1}^{(0,\dots,k-2,p-1)\oplus\vec{\Phi}_k}}{f_{k,n-1}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n}^{\vec{\Phi}_{k+1}} + \frac{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}}{f_{k,n-1}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n-1}^{(0,\dots,k-1,p-1)\oplus\vec{\Phi}_{k+1}}. \quad (140)$$

Записав аналогичные равенства для $f_{k+1,n-1}^{(0,\dots,k-1,p-1)\oplus\vec{\Phi}_{k+1}}$ и т.д., рекуррентным образом после $p - k + 1$ шагов получим равенство (138).

Лемма 13 доказана.

В следующей лемме приводятся формулы для определителей $V_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_{k+1}}(z)$, двойственные формулам (137) и (138).

ЛЕММА 14. Пусть $\vec{\Psi}_{k+1}, \vec{\Phi}_{k+1} \in H_{k+1,\tau}$, и пусть $\vec{\Phi}_k = \vec{\Phi}_{k+1,\overline{k+1}}$. Имеют место следующие равенства:

$$V_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_{k+1}}(z) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} V_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_{k+1,\vec{j}}} V_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{E}_k \oplus \Psi_{k+1,j}}(z), \quad (141)$$

$$V_{i_1,\dots,i_k}^{(0,\dots,k-1,p)}(z) = \sum_{r=0}^{p-k} V_{i_1,\dots,i_k}^{(0,\dots,k-2,p-r-1)} z^r, \quad p \geq k. \quad (142)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эту лемму можно доказать точно так же, как и лемму 13. А именно, из равенства

$$\begin{aligned} W_{\vec{E}_k \oplus \psi}(z_1, \dots, z_{k+1}) &= \begin{vmatrix} 1 & \dots & z_1^{k-1} & \psi(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & z_{k+1}^{k-1} & \psi(z_{k+1}) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} W(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_{k+1}) \psi(z_j) \end{aligned} \quad (143)$$

следует, что последняя строка определителя $(k+2)$ -го порядка

$$\begin{vmatrix} 0 & \Psi_{k+1,1}(z_1) & \dots & \Psi_{k+1,k+1}(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \Psi_{k+1,1}(z_k) & \dots & \Psi_{k+1,k+1}(z_k) \\ 1 & \Psi_{k+1,1}(z_{k+1}) & \dots & \Psi_{k+1,k+1}(z_{k+1}) \\ W(z_1, \dots, z_k) & W_{\vec{E}_k \oplus \Psi_{k+1,1}}(z_1, \dots, z_{k+1}) & \dots & W_{\vec{E}_k \oplus \Psi_{k+1,k+1}}(z_1, \dots, z_{k+1}) \end{vmatrix}$$

равна линейной комбинации предыдущих $k+1$ строк с такими же коэффициентами, как и в равенстве (143) (т.е. коэффициент при j -й строке надо взять равным $(-1)^{k+1-j} W(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_{k+1})$). Поэтому этот определитель $(k+2)$ -го порядка равен нулю. Разлагая его по последней строке и полагая $z_1 = \lambda_{i_1}, \dots, z_k = \lambda_{i_k}, z_{k+1} = z$, получим равенство

$$W_{i_1,\dots,i_k} W_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_{k+1}}(z) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} W_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_{k+1,\vec{j}}} W_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{E}_k \oplus \Psi_{k+1,j}}(z).$$

Разделив это равенство на $W_{i_1,\dots,i_k} W_{i_1,\dots,i_k}(z)$, получим равенство (141). Равенство (142) выводится из равенства (141) точно так же, как равенство (138) из равенства (137).

Лемма 14 доказана.

Заметим, что формулы (141), (142) двойственны формулам (137), (138) в том смысле, что если формулы (137), (138) разделить на $f_{k+1,n}^{\vec{\Phi}_{k+1}}$ и перейти в них к пределу по n , считая, что

$$\lim_n \frac{f_{k,n}^{\vec{\Psi}_k \oplus \vec{\Phi}_k}}{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}} = V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_k}, \quad \lim_n \frac{f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_{k+1} \oplus \vec{\Phi}_{k+1}}}{f_{k+1,n}^{\vec{\Phi}_{k+1}}} = V_{i_1, \dots, i_{k+1}}^{\vec{\Psi}_{k+1}}, \quad (144)$$

то получим формулы (141), (142) при $z = \lambda_{i_{k+1}}$. В связи с первым из равенств (144) обратим внимание на то, что как следствие равенства (118) при $V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Phi}_k} \neq 0$ получаем равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\vec{\theta})} \frac{f_{k,n}^{\vec{\Psi}_k \oplus \vec{\Phi}_k}}{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}} = \lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\vec{\theta})} \frac{F_{k,n}^{\vec{\Psi}_k \oplus \vec{\Phi}_k}}{F_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}} = \frac{V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_k \oplus \vec{\Phi}_k}}{V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Phi}_k}} = V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_k}.$$

К сожалению, условие $V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Phi}_k} \neq 0$ не выполняется при произвольных $\vec{\Phi}_k \in \mathcal{P}_k$. Этот факт усложняет последующие рассуждения. Преодолеть возникающие препятствия можно разными способами, но каждый из них по-своему приводит к тем или иным нагромождениям в доказательстве. Приведенный ниже способ опирается на возможность использования множеств $\mathcal{P}_{k,\zeta}^s$, наследующих основные свойства множеств $\mathcal{P}_k$ и таких, что $V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Phi}_k} \neq 0$ при всех $\vec{\Phi}_k \in \mathcal{P}_{k,\zeta}^s$. Множество функций $\mathcal{P}_{k,\zeta}^s$ ($s = 0, \dots, k$) определим следующим образом. Фиксируем число $C_N = 2 + 2^{N+1}C$, где C – постоянная из неравенства $|V_{i_1, \dots, i_l}^{\vec{P}_l}| \leq C$ леммы 8. Обозначим через Ξ_s множество s -мерных векторов, каждая координата которых равна нулю или единице. При $\vec{P}_k = (p_1, \dots, p_k) \in \mathcal{P}_k$ и $\vec{\nu}_s = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Xi_s$ положим $\nu_{s+1} = \nu_{s+2} = \dots = 1$ и обозначим через $(\vec{P}_{\zeta, \vec{\nu}_s})_k$ вектор-функцию

$$(\nu_1 z^{p_1}, \dots, \nu_k z^{p_k}) + C_N (e^{|p_1|\zeta} z^0, \dots, e^{|p_s|\zeta} z^{s-1}, 0, \dots, 0) \quad (145)$$

(при $s = 0$ получаем равенство $(\vec{P}_{\zeta, \vec{\nu}_s})_k = \vec{P}_k$).

Через $\mathcal{P}_{k,\zeta}^s$ ($s = 0, \dots, k$) обозначим множество, состоящее из всех вектор-функций $(\vec{P}_{\zeta, \vec{\nu}_s})_k$, где $\vec{P}_k \in \mathcal{P}_k$, $\vec{\nu}_s \in \Xi_s$. Через $\mathcal{P}_{2k,\zeta}^{s\omega t}$ обозначим множество, состоящее из всех вектор-функций $\vec{\Psi}_k \oplus \vec{\Phi}_k$, где $\vec{\Psi}_k \in \mathcal{P}_{k,\zeta}^s$, $\vec{\Phi}_k \in \mathcal{P}_{k,\zeta}^t$. Отметим, что множества $\mathcal{P}_{k,\zeta}^s$ и $\mathcal{P}_{2k,\zeta}^{s\omega t}$ зависят от параметра ζ , а входящие в них вектор-функции голоморфны по каждой координате во всей комплексной плоскости.

Заметим, что применительно к вектор-функции $\vec{\Psi}_{k+1} = (\vec{P}_{\zeta, \vec{\nu}_s})_{k+1}$ равенства (137) и (141) можно уточнить.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $s \leq k$, $\vec{\Phi}_{k+1} \in H_{k+1,\tau}$, $\vec{\Phi}_k = \vec{\Phi}_{k+1, \overline{k+1}}$, $\vec{P}_{k+1} = (p_1, \dots, p_{k+1}) \in \mathcal{P}_{k+1}$, $\vec{\nu}_s \in \Xi_s$, $\nu_{s+1} = \dots = \nu_{k+1} = 1$. Тогда имеют место равенства

$$f_{k+1,n}^{(\vec{P}_{\zeta, \vec{\nu}_s})_{k+1} \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \nu_j \frac{f_{k,n}^{(\vec{P}_{\zeta, \vec{\nu}_s})_{k+1, \vec{j}} \oplus \vec{\Phi}_k}}{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n}^{(0, \dots, k-1, p_j) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}}, \quad (146)$$

$$V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_{\zeta, \vec{\nu}_s})_{k+1}}(z) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \nu_j V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_{\zeta, \vec{\nu}_s})_{k+1, \vec{j}}} V_{i_1, \dots, i_k}^{(0, \dots, k-1, p_j)}(z). \quad (147)$$

Действительно, в силу определения (145) j -я координата вектор-функции $(\vec{P}_{\zeta, \vec{v}_s})_{k+1}$ либо равна $\nu_j z^{p_j}$ (при $j = s + 1, \dots, k + 1$), либо отличается от нее на функцию $C_N e^{\zeta |p_j|} z^{j-1}$ (при $j = 1, \dots, s$), пропорциональную j -й координате вектор-функции $\vec{E}_k$. Так как функционал $f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_{k+1} \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} \in \mathcal{F}_{2k+2,\tau}$ линеен по каждой координате вектор-функции $\vec{\Psi}_{k+1}$ и обращается в нуль, если координаты $\vec{\Psi}_{k+1}$ линейно зависимы, то отсюда при всех $j = 1, \dots, k + 1$ получаем равенства

$$f_{k+1,n}^{(\vec{E}_k \oplus (\vec{P}_{\zeta, \vec{v}_s})_{k+1,j}) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} = \nu_j f_{k+1,n}^{(0, \dots, k-1, p_j) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}}.$$

Подставляя полученные равенства в равенство (137), записанное при $\vec{\Psi}_{k+1} = (\vec{P}_{\zeta, \vec{v}_s})_{k+1}$, получим равенство (146). Равенство (147) получается из равенства (141) аналогичным образом.

Заметим, далее, что при $p = 0, \dots, k - 1$ левые части равенств (138) и (142) равны нулю, так как при $p = 0, \dots, k - 1$ вектор $(0, \dots, k - 1, p)$ имеет две одинаковые координаты. При $p < 0$ аналог равенства (138) может быть получен рекуррентным образом из равенства

$$f_{k+1,n}^{(0, \dots, k-1, p) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} = - \frac{f_{k,n}^{(0, \dots, k-2, p) \oplus \vec{\Phi}_k}}{f_{k,n+1}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n+1}^{\vec{\Phi}_{k+1}} + \frac{f_{k,n}^{\vec{\Phi}_k}}{f_{k,n+1}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n+1}^{(0, \dots, k-1, p+1) \oplus \vec{\Phi}_{k+1}},$$

совпадающего с равенством (140), в котором число p заменено числом $p + 1$, а число n — числом $n + 1$. Таким же образом может быть получен аналог равенства (142). В дальнейшем будет использоваться не точный вид равенств (138) и (142), а сам факт наличия таких равенств и их двойственность. Поэтому точный вид аналогов равенств (138) и (142) при $p < 0$ не выписываем. Чтобы не усложнять запись, в дальнейшем при использовании равенств (138) и (142), не теряя общности, будем предполагать, что $p \geq k$. Как непосредственное следствие равенств (146) и (138) и равенств (147) и (142) получаем следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $s \leq k$, $\vec{\Phi}_{k+1} \in H_{k+1,\tau}$, $\vec{\Phi}_k = \vec{\Phi}_{k+1, \overline{k+1}}$, $\vec{P}_{k+1} = (p_1, \dots, p_{k+1}) \in \mathcal{P}_{k+1}$, $p_j \geq k$ ($j = 1, \dots, k + 1$), $\vec{v}_s \in \Xi_s$, $\nu_{s+1} = \dots = \nu_{k+1} = 1$. Тогда имеют место равенства

$$f_{k+1,n}^{(\vec{P}_{\zeta, \vec{v}_s})_{k+1} \oplus \vec{\Phi}_{k+1}} = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r_j=0}^{p_j-k} (-1)^{k+1-j} \nu_j \frac{f_{k,n}^{(\vec{P}_{\zeta, \vec{v}_s})_{k+1, \vec{j}} \oplus \vec{\Phi}_k} f_{k,n-r_j-1}^{(0, \dots, k-2, p_j-r_j-1) \oplus \vec{\Phi}_k}}{f_{k,n-r_j}^{\vec{\Phi}_k} f_{k,n-r_j-1}^{\vec{\Phi}_k}} f_{k+1,n-r_j}^{\vec{\Phi}_{k+1}}, \quad (148)$$

$$V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_{\zeta, \vec{v}_s})_{k+1}}(z) = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r_j=0}^{p_j-k} (-1)^{k+1-j} \nu_j V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_{\zeta, \vec{v}_s})_{k+1, \vec{j}}} V_{i_1, \dots, i_k}^{(0, \dots, k-2, p_j-r_j-1)} z^{r_j}. \quad (149)$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $s, t \leq k$, $\vec{P}_{k+1} = (p_1, \dots, p_{k+1}) \in \mathcal{P}_{k+1}$, $\vec{Q}_{k+1} = (q_1, \dots, q_{k+1}) \in \mathcal{P}_{k+1}$, $\vec{v}_s \in \Xi_s$, $\vec{\mu}_t \in \Xi_t$, и пусть $p_j, q_j \geq k$ ($j = 1, \dots, k + 1$), $(\vec{Q}_{\zeta, \vec{\mu}_t})_k = (\vec{Q}_{\zeta, \vec{\mu}_t})_{k+1, \overline{k+1}}$, $\nu_{s+1} = \dots = \nu_{k+1} = \mu_{t+1} = \dots = \mu_{k+1} = 1$. Тогда

имеют место равенства

$$f_{k+1,n}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1}} = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r_j=0}^{p_j-k} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{d_i=0}^{q_i-k} (-1)^{j+i} A_{k,n,j,r_j,i,d_i}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1}} f_{k+1,n-r_j-d_i}, \quad (150)$$

$$V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1}}(z) = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r_j=0}^{p_j-k} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{d_i=0}^{q_i-k} (-1)^{j+i} B_{k,j,r_j,i,d_i,i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1}} z^{r_j+d_i}, \quad (151)$$

где

$$A_{k,n,j,r_j,i,d_i}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1}} = \nu_j \frac{f_{k,n}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_{k+1}, \vec{j} \oplus (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_k}}{f_{k,n-r_j}^{(\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_k}} \times \frac{f_{k,n-r_j-1}^{(0, \dots, k-2, p_j-r_j-1) \oplus (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_k}}{f_{k,n-r_j-1}^{(\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_k}} \mu_i \frac{f_{k,n-r_j}^{(\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1}, \vec{i}}}{f_{k,n-r_j-t_i}} \frac{f_{k,n-r_j-t_i-1}^{(0, \dots, k-2, q_i-d_i-1)}}{f_{k,n-r_j-t_i-1}}, \quad (152)$$

$$B_{k,j,r_j,i,d_i,i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1}} = \nu_j V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_{k+1}, \vec{j}} V_{i_1, \dots, i_k}^{(0, \dots, k-2, p_j-r_j-1)} \times \mu_i V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1}, \vec{i}} V_{i_1, \dots, i_k}^{(0, \dots, k-2, q_i-d_i-1)}. \quad (153)$$

Действительно, дважды воспользовавшись равенством (148) (сначала при $\vec{\Phi}_{k+1} = (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1}$, а затем при $s = t$, $(\vec{P}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1} = (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_{k+1}$ и $\vec{\Phi}_{k+1} = \vec{E}_{k+1}$), получим равенства (150), (152). Равенства (151), (153) получаются так же.

При $R \in \mathcal{F}_{2k,\tau}$ по аналогии с величиной $\lceil R^* \rceil_{2k,\tau}$ введем следующее обозначение:

$$\lceil R^* \rceil_{2k,\zeta,s \uplus t,\tau} = \sup_{\vec{P}_k, \vec{Q}_k \in \mathcal{P}_k, \vec{v}_s \in \Xi_s, \vec{\mu}_t \in \Xi_t} \frac{|R^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_k \oplus (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_k}|}{\|\vec{P}_k\|_\tau \|\vec{Q}_k\|_\tau}. \quad (154)$$

Соберем в одну лемму, которая носит чисто технический характер, те из свойств функций из $\mathcal{P}_{k,\zeta}^s$, которыми в дальнейшем будем пользоваться.

ЛЕММА 15. Пусть $0 \leq s, t \leq k$, $0 < \zeta \leq \tau$. Тогда:

1) если $R \in \mathcal{F}_{2k,\tau}$ и $\vec{P}_k, \vec{Q}_k \in \mathcal{P}_k$, то имеют место неравенства

$$|R^{\vec{P}_k \oplus \vec{Q}_k}| \leq 2^{s+t} \max_{\vec{v}_s \in \Xi_s, \vec{\mu}_t \in \Xi_t} |R^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_k \oplus (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_t)_k}|, \quad (155)$$

$$2^{-s-t} \lceil R^* \rceil_{2k,\tau} \leq \lceil R^* \rceil_{2k,\zeta,s \uplus t,\tau} \leq C(\tau) \lceil R^* \rceil_{2k,\tau}; \quad (156)$$

2) при всех $\vec{P}_k \in \mathcal{P}_k$, $\vec{v}_k \in \Xi_k$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{2} C_N^k \|\vec{P}_k\|_\zeta \leq |V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_k)_k}| \leq \frac{3}{2} C_N^k \|\vec{P}_k\|_\zeta; \quad (157)$$

3) при всех $\vec{P}_{k+1} \in \mathcal{P}_{k+1}$, $\vec{v}_k \in \Xi_k$ имеют место неравенства

$$\|V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_k)_{k+1}}(z)\|_\zeta \leq C(\zeta) \|\vec{P}_{k+1}\|_\zeta; \quad (158)$$

- 4) если имеют место равенства (117) при $l=k$, то при всех $\vec{P}_k, \vec{Q}_k \in \mathcal{P}_k$, $\vec{\nu}_k, \vec{\mu}_k \in \Xi_k$ и достаточно больших $n \in \lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta})$ имеют место неравенства

$$|F_{k,n}^{(\vec{P}_\tau, \vec{\nu}_k)_k \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k}| \geq 8^{-1} C_N^{2k} \|\vec{P}_k\|_\tau \|\vec{Q}_k\|_\tau, \quad (159)$$

$$\left| \frac{1}{F_{k,n}^{(\vec{P}_\tau, \vec{\nu}_k)_k \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k}} - \frac{1}{V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\tau, \vec{\nu}_k)_k \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k}} \right| \leq C(\tau) [F_{k,n}^* - V_{i_1, \dots, i_k}^*]_{2k, 2\tau}. \quad (160)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим каждую из координат z^{p_j} ($j = 1, \dots, s$) вектор-функции $\vec{P}_k$ в виде

$$z^{p_j} = \sum_{\nu=0}^1 b_{j,\nu} (\nu z^{p_j} + C_N e^{\zeta|p_j|} z^{j-1}),$$

где $b_{j,0} = -1$, $b_{j,1} = 1$. Пользуясь линейной зависимостью величин $R^{\vec{\Psi}_{2k}}$ от координат вектор-функции $\vec{\Psi}_{2k}$, получаем равенство

$$R^{\vec{P}_k \oplus \vec{Q}_k} = R^{(p_1, \dots, p_k) \oplus \vec{Q}_k} = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Xi_s} b_{1,\nu_1} \dots b_{s,\nu_s} R^{(\vec{P}_\zeta, (\nu_1, \dots, \nu_s))_k \oplus \vec{Q}_k}.$$

Отсюда следует неравенство

$$|R^{\vec{P}_k \oplus \vec{Q}_k}| \leq 2^s \max_{\vec{\nu}_s \in \Xi_s} |R^{(\vec{P}_\zeta, \vec{\nu}_s)_k \oplus \vec{Q}_k}|.$$

Проведя аналогичные рассуждения с координатами z^{q_i} ($i = 1, \dots, t$) вектор-функции $\vec{Q}_k$, получим неравенство (155). Разделив неравенство (155) на выражение $\|\vec{P}_k\|_\tau \|\vec{Q}_k\|_\tau$ и взяв верхнюю грань по всем $\vec{P}_k, \vec{Q}_k \in \mathcal{P}_k$, получим первое из неравенств (156).

Докажем второе из неравенств (156) при $t = 0$. Полагая $a_{j,0} = \nu_j$, $a_{j,1} = C_N e^{\zeta|p_j|}$ и $p_{j,0} = p_j$, $p_{j,1} = j - 1$ ($j = 1, \dots, s$) и пользуясь определением (145) вектор-функции $(\vec{P}_\zeta, \vec{\nu}_s)_k$ и линейной зависимостью величин $R^{\vec{P}_{2k}}$ от координат вектор-функции $\vec{P}_{2k}$, получаем равенство

$$R^{(\vec{P}_\zeta, \vec{\nu}_s)_k \oplus \vec{Q}_k} = \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_s) \in \Xi_s} a_{1,\mu_1} \dots a_{s,\mu_s} R^{(p_{1,\mu_1}, \dots, p_{s,\mu_s}, p_{s+1}, \dots, p_k) \oplus \vec{Q}_k}. \quad (161)$$

Отсюда в силу определения величины $[R^*]_{k,\tau}$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|R^{(\vec{P}_\zeta, \vec{\nu}_s)_k \oplus \vec{Q}_k}|}{\|\vec{Q}_k\|_\tau [R^*]_{2k,\tau}} &\leq \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_s) \in \Xi_s} a_{1,\mu_1} \dots a_{s,\mu_s} \|(p_{1,\mu_1}, \dots, p_{s,\mu_s}, p_{s+1}, \dots, p_k)\|_\tau \\ &= \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_s) \in \Xi_s} a_{1,\mu_1} \dots a_{s,\mu_s} e^{\tau(|p_{1,\mu_1}| + \dots + |p_{s,\mu_s}| + |p_{s+1}| + \dots + |p_k|)}. \end{aligned} \quad (162)$$

Заметим, что при всех $j = 1, \dots, s$

$$a_{j,0} e^{\tau|p_{j,0}|} = \nu_j e^{\tau|p_j|} \leq e^{\tau|p_j|}, \quad a_{j,1} e^{\tau|p_{j,1}|} = C_N e^{\zeta|p_j|} e^{\tau(j-1)}.$$

С учетом предположения леммы $\zeta \leq \tau$ отсюда имеем неравенства $a_{j,\mu_j} e^{\tau|p_j, \mu_j|} \leq C(\tau) e^{\tau|p_j|}$ при всех $j = 1, \dots, s$. Поэтому из неравенства (162) получаем неравенство

$$\frac{|R(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_k \oplus \vec{Q}_k|}{\|\vec{Q}_k\|_\tau [R^*]_{2k, \tau}} \leq 2^s C^s(\tau) e^{\tau(|p_1| + \dots + |p_s| + |p_{s+1}| + \dots + |p_k|)} = C(\tau) \|\vec{P}_k\|_\tau.$$

Умножая полученное неравенство на $\|\vec{P}_k\|_\tau^{-1}$ и беря верхнюю грань по всем $\vec{P}_k, \vec{Q}_k \in \mathcal{P}_k, \vec{v}_s \in \Xi_s$, получаем второе из неравенств (156) при $t = 0$. При $t = 1, \dots, k$ второе из неравенств (156) получается аналогичным образом.

Докажем утверждение 2) леммы 15. Для величины $R = V_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{F}_{2k, \tau}$ из равенства (161) при $s = k$ и $\vec{Q}_k = \vec{E}_k$ получаем оценку сверху

$$|V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_k)_k}| \leq \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \Xi_k} a_{1, \mu_1} \cdots a_{k, \mu_k} |V_{i_1, \dots, i_k}^{(p_1, \mu_1, \dots, p_k, \mu_k)}|, \quad (163)$$

а учитывая, что $V_{i_1, \dots, i_k}^{(p_1, 1, \dots, p_k, 1)} = V_{i_1, \dots, i_k}^{(0, \dots, k-1)} = 1$, – и оценку снизу

$$|V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_k)_k}| \geq a_{1, 1} \cdots a_{k, 1} - \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_k) \neq (1, \dots, 1)} a_{1, \mu_1} \cdots a_{k, \mu_k} |V_{i_1, \dots, i_k}^{(p_1, \mu_1, \dots, p_k, \mu_k)}|. \quad (164)$$

Вспоминая, что $a_{j,1} = C_N e^{\zeta|p_j|} \geq C_N$, $a_{j,0} = \nu_j \leq 1$ и, следовательно, $a_{j,0} \leq a_{j,1}/C_N$, с учетом равенства (78) получаем равенство $a_{1,1} \cdots a_{k,1} = C_N^k \|\vec{P}_k\|_\zeta$ и неравенство $a_{1,\mu_1} \cdots a_{k,\mu_k} \leq C_N^{k-1} \|\vec{P}_k\|_\zeta$ при условии, что хотя бы одно из чисел $\mu_1, \dots, \mu_k$ равно нулю. Поэтому неравенства (163) и (164) можно переписать в виде неравенств

$$\begin{aligned} C_N^k \|\vec{P}_k\|_\zeta \left(1 - C_N^{-1} \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_k) \neq (1, \dots, 1)} |V_{i_1, \dots, i_k}^{(p_1, \mu_1, \dots, p_k, \mu_k)}| \right) &\leq |V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_s)_k}| \\ &\leq C_N^k \|\vec{P}_k\|_\zeta \left(1 + C_N^{-1} \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_k) \neq (1, \dots, 1)} |V_{i_1, \dots, i_k}^{(p_1, \mu_1, \dots, p_k, \mu_k)}| \right). \end{aligned} \quad (165)$$

Из определения числа $C_N = 2 + 2^{N+1}C$ и неравенства $k \leq N$ получаем неравенства

$$|V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{Q}_k}| \leq C \leq \frac{C_N}{2^{N+1}} \leq \frac{C_N}{2^{k+1}}, \quad \vec{Q}_k \in \mathcal{P}_k.$$

Поэтому

$$C_N^{-1} \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_k) \neq (1, \dots, 1)} |V_{i_1, \dots, i_k}^{(p_1, \mu_1, \dots, p_k, \mu_k)}| \leq 2^{-1}.$$

Отсюда в силу неравенства (165) получаем неравенство (157).

Докажем утверждение 3) леммы 15. Из равенства (149) и неравенств (157) и (86) следует неравенство

$$\|V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_\zeta, \vec{v}_k)^{k+1}}(z)\|_\zeta \leq \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r_j=0}^{p_j-k} C(\zeta) \|\vec{P}_{k+1, j}\|_\zeta C \|z^{r_j}\|_\zeta \leq C(\zeta) \|\vec{P}_{k+1}\|_\zeta,$$

совпадающее с неравенством (158).

Докажем утверждение 4) леммы 15. Из второго из неравенств (156) при $s = t = k$, $\tau = \zeta$ и равенства (117) следует равенство

$$\lim_{n \in \lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta})} [F_{k,n}^* - V_{i_1, \dots, i_k}^*]_{2k, \tau, k \uplus k, \tau} = 0.$$

Поэтому

$$|F_{k,n}^{\vec{\Psi}_{2k}} - V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_{2k}}| \leq \varepsilon_n \|\vec{P}_{2k}\|_{\tau},$$

где $\vec{\Psi}_{2k} = (\vec{P}_{\tau, \vec{\nu}_k})_k \oplus (\vec{Q}_{\tau, \vec{\mu}_k})_k$, $\vec{P}_{2k} = \vec{P}_k \oplus \vec{Q}_k$, ε_n не зависит от $\vec{P}_{2k}$, $\vec{\nu}_k$, $\vec{\mu}_k$ и $\lim_{n \in \lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta})} \varepsilon_n = 0$. Отсюда в силу первого из неравенств (157) при достаточно больших $n \in \lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta})$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} |F_{k,n}^{\vec{\Psi}_{2k}}| &\geq |V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{P}_{\tau, \vec{\nu}_k})_k} V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{Q}_{\tau, \vec{\mu}_k})_k}| - \varepsilon_n \|\vec{P}_{2k}\|_{\tau} \geq \frac{1}{4} C_N^{2k} \|\vec{P}_{2k}\|_{\tau} - \varepsilon_n \|\vec{P}_{2k}\|_{\tau} \\ &\geq \frac{1}{8} C_N^{2k} \|\vec{P}_{2k}\|_{\tau}, \end{aligned}$$

совпадающее с неравенством (159), и неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{F_{k,n}^{\vec{\Psi}_{2k}}} - \frac{1}{V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_{2k}}} \right| &= \left| \frac{F_{k,n}^{\vec{\Psi}_{2k}} - V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_{2k}}}{F_{k,n}^{\vec{\Psi}_{2k}} V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_{2k}}} \right| \leq \frac{32 |F_{k,n}^{\vec{\Psi}_{2k}} - V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_{2k}}|}{C_N^{4k} \|\vec{P}_{2k}\|_{\tau}^2} \\ &\leq 32 C_N^{-4k} [F_{k,n}^* - V_{i_1, \dots, i_k}^*]_{2k, \tau, k \uplus k, 2\tau}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и второго из неравенств (156) следует неравенство (160).

Лемма 15 доказана.

ЛЕММА 16. Пусть $\mathbb{N} = \bigcup_{l=k}^N \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N} \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ — τ -разбиение множества натуральных чисел k -го порядка, согласованное с рядом $f \in \mathcal{L}$ и многочленом $\beta \in \Upsilon_N$, и пусть $(f_{k+1}) \in \mathcal{L}$. Тогда имеют место равенства

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta}/2)} \frac{[f_{k+1,n}^* - [f_{k+1}(z) V_{i_1, \dots, i_k}^* (\frac{z}{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}})]_n]_{2k+2, (k+6)\tau}}{\{(f_{k+1})\}_{n, \tau}} = 0. \quad (166)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\theta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность из Θ такая, что $\Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta}/2)(\bar{\theta}^*) \subset \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta})$. При $\vec{\Psi}_{2k+2} \in H_{2k+2, \tau}$ положим

$$Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_{2k+2}}(z) = V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_{2k+2}} \left(\frac{z}{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}} \right), \quad R_n^{\vec{\Psi}_{2k+2}} = f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_{2k+2}} - [f_{k+1}(z) Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_{2k+2}}(z)]_n$$

и заметим, что $R_n \in \mathcal{F}_{2k+2, \tau}$ и

$$\begin{aligned} &[R_n^*]_{2k+2, (k+6)\tau} \\ &\leq \max \left\{ \max_{|\vec{P}_{2k+2}| \leq \theta_n^*} \frac{|R_n^{\vec{P}_{2k+2}}|}{\|\vec{P}_{2k+2}\|_{(k+6)\tau}}, \sup_{|\vec{P}_{2k+2}| > \theta_n^*} \frac{|f_{k+1,n}^{\vec{P}_{2k+2}}| + |[f_{k+1}(z) Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{P}_{2k+2}}(z)]_n|}{e^{\theta_n^* \tau} \|\vec{P}_{2k+2}\|_{(k+5)\tau}} \right\}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n^* = \infty$ (по определению последовательности $\{\theta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$), то для доказательства равенства (166) достаточно доказать равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta}/2)} \max_{|\vec{P}_{2k+2}| \leq \theta_n^*} \frac{|R_n^{\vec{P}_{2k+2}}|}{\|\vec{P}_{2k+2}\|_{(k+6)\tau} \{(f_{k+1})\}_{n, \tau}} = 0 \quad (167)$$

и неравенства

$$|f_{k+1,n}^{\vec{P}_{2k+2}}| \leq C(\tau) \|\vec{P}_{2k+2}\|_{(k+5)\tau} \{(f_{k+1})\}_{n,\tau}, \quad n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k} \left(\frac{\bar{\theta}}{2} \right), \quad (168)$$

$$|[f_{k+1}(z)Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{P}_{2k+2}}(z)]_n| \leq C(\tau) \|\vec{P}_{2k+2}\|_{(k+5)\tau} \{(f_{k+1})\}_{n,\tau}, \quad n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k} \left(\frac{\bar{\theta}}{2} \right). \quad (169)$$

Пусть $\vec{P}_{2k+2} = \vec{P}_{k+1} \oplus \vec{Q}_{k+1}$, где $\vec{P}_{k+1}, \vec{Q}_{k+1} \in \mathcal{P}_{k+1}$. Как уже отмечалось, не теряя общности, можно считать, что $\vec{P}_{k+1} = (p_1, \dots, p_{k+1})$ и $\vec{Q}_{k+1} = (q_1, \dots, q_{k+1})$ такие, как в следствии 4 (т.е. все их координаты больше или равны k).

Из равенств (151), (153) (при $s = 0$) и второго из неравенств (86) следует неравенство

$$\begin{aligned} |[f_{k+1}(z)Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{P}_{2k+2}}(z)]_n| &\leq \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r_j=0}^{p_j-k} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{d_i=0}^{q_i-k} |B_{k,j,r_j,i,d_i,i_1, \dots, i_k}^{\vec{P}_{k+1} \oplus \vec{Q}_{k+1}}| |f_{k+1,n-r_j-d_i}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r_j=0}^{p_j-k} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{d_i=0}^{q_i-k} C^4 |f_{k+1,n-r_j-d_i}|. \end{aligned} \quad (170)$$

Из неравенства (31) для ряда $(f_{k+1}) \in \mathcal{L}$ получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r_j=0}^{p_j-k} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{d_i=0}^{q_i-k} \frac{|f_{k+1,n-r_j-d_i}|}{\{(f_{k+1})\}_{n,\tau}} \leq \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r_j=0}^{p_j-k} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{d_i=0}^{q_i-k} e^{(|r_j|+|d_i|)\tau} \leq C(\tau) \|\vec{P}_{2k+2}\|_\tau. \quad (171)$$

Из неравенств (170) и (171) следует неравенство (169).

Докажем неравенство (168) сначала в случае $|\vec{P}_{2k+2}| > n/2$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |f_n|^{1/n} = 1,$$

то при всех $i, j = 1, \dots, k+1$ и всех достаточно больших n получаем неравенства

$$|f_{n-p_i-q_j}| \leq e^{\tau(n+|p_i|+|q_j|)/(k+1)} \leq e^{3\tau|\vec{P}_{2k+2}|/(k+1)}.$$

Поэтому

$$|f_{k+1,n}^{\vec{P}_{2k+2}}| = |\det(f_{n-p_i-q_j})_{i,j=1, \dots, k+1}| \leq (k+1)! e^{3\tau|\vec{P}_{2k+2}|}. \quad (172)$$

С другой стороны, из неравенства (34) для ряда $(f_{k+1}) \in \mathcal{L}$ получаем неравенство $\{(f_{k+1})\}_{n,\tau} \geq C e^{-n\tau} \geq C e^{-2|\vec{P}_{2k+2}|\tau}$. Отсюда и из неравенства (172) получаем неравенство $|f_{k+1,n}^{\vec{P}_{2k+2}}| \{(f_{k+1})\}_{n,\tau}^{-1} \leq C^{-1} (k+1)! e^{5\tau|\vec{P}_{2k+2}|}$, которое влечет за собой неравенство (168).

Далее, пусть $|\vec{P}_{2k+2}| \leq n/2$, и пусть существует индекс n_0 такой, что $n_0 \in [n - |\vec{P}_{2k+2}|, n + |\vec{P}_{2k+2}|]$ и $n_0 \in \Lambda_{j_1, \dots, j_l}$, где $l \geq k+1$, $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N$. Положим

$$\vec{P}_{2k+2}^{n_0-n} = (p_1 + n_0 - n, \dots, p_{k+1} + n_0 - n) \oplus \vec{Q}_{k+1} \quad (173)$$

и заметим, что $f_{k+1,n}^{\vec{P}_{2k+2}} = f_{k+1,n_0}^{\vec{P}_{2k+2}^{n_0-n}}$ и

$$e^{|n-n_0|\tau} \|\vec{P}_{2k+2}^{n_0-n}\|_\tau \leq e^{((k+2)|n-n_0|+|\vec{P}_{2k+2}|)\tau} \leq \|\vec{P}_{2k+2}\|_{(k+3)\tau}.$$

Отсюда, из определения (81), неравенства (116) (при $r = k+1 \leq l$) и неравенств (33), (32) (для ряда $(f_{k+1}) \in \mathcal{L}$) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|f_{k+1,n}^{\vec{P}_{2k+2}}|}{\|\vec{P}_{2k+2}\|_{(k+3)\tau}} &\leq \frac{|f_{k+1,n_0}^{\vec{P}_{2k+2}^{n_0-n}}|}{e^{|n-n_0|\tau} \|\vec{P}_{2k+2}^{n_0-n}\|_\tau} \leq e^{-|n-n_0|\tau} \lceil f_{k+1,n_0}^* \rceil_{2k+2,\tau} \\ &\leq C(\tau) e^{-|n-n_0|\tau} \{(f_{k+1})\}_{n_0}^{(l_{k+1})} \leq C(\tau) e^{-|n-n_0|\tau} \{(f_{k+1})\}_{n_0,\tau} \leq C(\tau) \{(f_{k+1})\}_{n,\tau}, \end{aligned}$$

которое влечет за собой неравенство (168).

Рассмотрим, далее, случай, когда $|\vec{P}_{2k+2}| \leq n/2$ и не существует отмеченного выше индекса, т.е. когда

$$[n - |\vec{P}_{2k+2}|, n + |\vec{P}_{2k+2}|] \subset \Lambda^k,$$

где $\Lambda^k = \bigcup_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N} \Lambda_{j_1, \dots, j_k}$. Фиксируем произвольный вектор $\vec{\mu}_k \in \Xi_k$ и перепишем равенства (152) и (153) (при $s = 0, t = k$) в виде равенств

$$\begin{aligned} A_{k,n,j,r_j,i,d_i}^{\vec{P}_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k} &= F_{k,n}^{\vec{P}_{k+1}, \vec{j} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k} (F_{k,n-r_j}^{(\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k})^{-1} F_{k,n-r_j-1}^{(0, \dots, k-2, p_j-r_j-1) \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k} \\ &\quad \times (F_{k,n-r_j-1}^{(\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k})^{-1} \mu_i F_{k,n-r_j}^{(\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^{k+1}, \vec{i}} F_{k,n-r_j-d_i-1}^{(0, \dots, k-2, q_i-d_i-1)} F_{k,n-r_j-d_i}^{(-r_j-d_i, \dots, -r_j-d_i+k-1)}, \end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned} B_{k,j,r_j,i,d_i,i_1, \dots, i_k}^{\vec{P}_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k} &= V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{P}_{k+1}, \vec{j} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k} (V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k})^{-1} V_{i_1, \dots, i_k}^{(0, \dots, k-2, p_j-r_j-1) \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k} \\ &\quad \times (V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k})^{-1} \mu_i V_{i_1, \dots, i_k}^{((\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^{k+1}) \vec{i}} V_{i_1, \dots, i_k}^{(0, \dots, k-2, q_i-d_i-1)}. \end{aligned} \quad (175)$$

Каждому из множителей, стоящих в правой части равенства (174), соответствует множитель, стоящий в правой части равенства (175), за исключением последнего множителя $F_{k,n-r_j-d_i}^{(-r_j-d_i, \dots, -r_j-d_i+k-1)}$, которому будет соответствовать множитель $V_{i_1, \dots, i_k}^{(-r_j-d_i, \dots, -r_j-d_i+k-1)}$, появляющийся в равенстве (151) при переходе от функции $V_{i_1, \dots, i_k}^*(z)$ к функции $Y_{i_1, \dots, i_k}(z) = V_{i_1, \dots, i_k}^*(z/(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}))$. Оценим сверху модуль каждого из множителей, стоящих в правых частях равенств (174) и (175). Оценка множителя μ_i тривиальна: $|\mu_i| \leq 1$, а все остальные оценки получаются однотипным способом. Поэтому приведем оценку только первых двух множителей в каждом из равенств (174) и (175).

Из второго из неравенств (86) и второго из неравенств (157) получаем неравенство

$$|V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{P}_{k+1}, \vec{j} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k}| = |V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{P}_{k+1}, \vec{j}} V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k}| \leq C \frac{3}{2} C_N^k \|\vec{Q}_k\|_\tau \leq C \|\vec{P}_{2k+2}\|_\tau, \quad (176)$$

а из (первого) неравенства (157) – неравенство

$$|(V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)^k})^{-1}| \leq 2C_N^{-k} \|\vec{Q}_k\|_\tau^{-1} \leq 2C_N^{-k}. \quad (177)$$

Заметим на будущее, что индекс $i_1, \dots, i_k$ в неравенствах (176) и (177) можно заменить любым индексом $j_1, \dots, j_k$ ($1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N$).

Из определения (154) и неравенства (156) при $s = 0$, $t = k$, $\zeta = \tau$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{|F_{k,n}^{\vec{P}_{k+1}, \vec{j} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k} - V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{P}_{k+1}, \vec{j} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k}|}{\|\vec{P}_{2k+2}\|_\tau} \\ & \leq [F_{k,n}^* - V_{i_1, \dots, i_k}^*]_{2k, \tau, 0 \oplus k, \tau} \leq C(\tau) [F_{k,n}^* - V_{i_1, \dots, i_k}^*]_{2k, \tau}. \end{aligned} \quad (178)$$

Из условия $n - r_j \in \Lambda^k$ следует, что найдутся индексы $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N$ такие, что $n - r_j \in \Lambda_{j_1, \dots, j_k}$. Из неравенства (160) получаем неравенство

$$|(F_{k, n-r_j}^{(\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k})^{-1} - (V_{j_1, \dots, j_k}^{(\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k})^{-1}| \leq C(\tau) [F_{k, n-r_j}^* - V_{j_1, \dots, j_k}^*]_{2k, 2\tau}. \quad (179)$$

Так как правые части неравенств (178) и (179) при достаточно больших n сколь угодно малы в силу равенства (117), то из неравенств (176) и (178) получаем неравенство

$$|F_{k,n}^{\vec{P}_{k+1}, \vec{j} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k}| \leq C(\tau) \|\vec{P}_{2k+2}\|_\tau,$$

а из неравенств (177) и (179) – неравенство

$$|(F_{k, n-r_j}^{(\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k})^{-1}| \leq C(\tau).$$

Оценивая аналогичным образом и другие множители, стоящие в правых частях равенств (174) и (175), и учитывая равенства (79), получаем неравенство

$$|A_{k, n, j, r_j, i, d_i}^{\vec{P}_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k}| \leq C(\tau) \|\vec{P}_{2k+2}\|_{5\tau}. \quad (180)$$

Более того, те же рассуждения показывают, что в случае, когда $|\vec{P}_{2k+2}| \leq \theta_n^*$ (в этом случае $n - r_j \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta})$, если $n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta}/2)$, и, следовательно, индекс $(j_1, \dots, j_k)$ в неравенстве (179) можно заменить индексом $(i_1, \dots, i_k)$), имеет место неравенство

$$|A_{k, n, j, r_j, i, d_i}^{\vec{P}_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k} - B_{k, j, r_j, i, d_i, i_1, \dots, i_k}^{\vec{P}_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k}| \leq \varepsilon_n(\tau) \|\vec{P}_{2k+2}\|_{5\tau}, \quad (181)$$

где $\varepsilon_n(\tau)$ не зависит от $\vec{P}_{2k+2}$ и $\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta}/2)} \varepsilon_n(\tau) = 0$.

Из равенства (150) и неравенств (180) и (171) получаем неравенство

$$|f_{k+1, n}^{\vec{P}_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k}| \leq C(\tau) \|\vec{P}_{2k+2}\|_{6\tau} \{(f_{k+1})\}_{n, \tau}.$$

Отсюда и из неравенства (155) при $s = 0$ и $t = k$ получаем неравенство (168). Таким образом, неравенство (168) доказано при всех $\vec{P}_{2k+2} \in \mathcal{P}_{2k+2}$.

Если $|\vec{P}_{2k+2}| \leq \theta_n^*$, то из равенств (150), (151) и неравенств (181), (171) получаем неравенство

$$|R_n^{\vec{P}_{k+1} \oplus (\vec{Q}_\tau, \vec{\mu}_k)_k}| \leq \varepsilon_n(\tau) \|\vec{P}_{2k+2}\|_{6\tau} \{(f_{k+1})\}_{n, \tau}.$$

Отсюда и из неравенства (155) при $s = 0$ и $t = k$ получаем равенство (167).

Таким образом, лемма 16 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть имеют место предположения теоремы 4, и пусть $(f_{k+1}) \in \mathcal{L}$, $\mathbb{N} = \bigcup_{l=k}^N \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N} \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ – τ -разбиение множества натуральных чисел k -го порядка, где $k < m$, $\tau \leq \delta/(2(k+6))$, согласованное с рядом f и многочленом $\beta = \langle \alpha \rangle$. Тогда имеют место равенства

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta}/2)} \frac{[f_{k+1}(z) V_{i_1, \dots, i_k}^{\bar{\Phi}_{2k+2}^n}(z/(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}))]_n}{\{(f_{k+1})\}_{n, \tau}} = 0, \quad (182)$$

где

$$\bar{\Phi}_{2k+2}^n(z) = (\bar{E}_k(z) \oplus \alpha_n(z)) \oplus (\varphi_{n,0}(z), \dots, \varphi_{n,k}(z)),$$

$\alpha_n(z), \varphi_{n,0}(z), \dots, \varphi_{n,k}(z)$ – функции, фигурирующие в предположениях теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по предположениям теоремы 4 вектор-функции $\bar{\Phi}_{2k+2}^n \in H_{2k+2, \delta}$ имеют равномерный в кольце T_δ , а следовательно, и в кольце $T_{2(k+6)\tau}$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_{2k+2}^n = (\bar{E}_k(z) \oplus \alpha(z)) \oplus (\varphi^0(z), \dots, \varphi^k(z)). \quad (183)$$

Поэтому в силу лемм 16 и 9 получаем равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\bar{\theta}/2)} \left(f_{k+1, n}^{\bar{\Phi}_{2k+2}^n} - \left[f_{k+1}(z) V_{i_1, \dots, i_k}^{\bar{\Phi}_{2k+2}^n} \left(\frac{z}{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}} \right) \right]_n \right) \{(f_{k+1})\}_{n, \tau}^{-1} = 0. \quad (184)$$

Далее, заметим, что по определению (71)

$$f_{k+1, n}^{\bar{\Phi}_{2k+2}^n} = \begin{vmatrix} [f\varphi_{n,0}]_n & \dots & [f\varphi_{n,0}]_{n-k+1} & [f\alpha_n\varphi_{n,0}]_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f\varphi_{n,k}]_n & \dots & [f\varphi_{n,k}]_{n-k+1} & [f\alpha_n\varphi_{n,k}]_n \end{vmatrix}.$$

Из предположений (20) теоремы 4 при $j = 0, \dots, k$ следует, что каждый элемент последнего столбца последнего определителя есть $o(e^{-\delta n})$ при $n \rightarrow \infty$. Все другие элементы этого определителя имеют вид $[f\varphi_{n,i}]_{n-j}$ ($i = 0, \dots, k$, $j = 0, \dots, k-1$) и оцениваются в силу предположений теоремы 4, наложенных на функции $\alpha_{n,i}(z)$ и $\varphi(z)$, неравенствами $\lim_{n \rightarrow \infty} |[f\varphi_{n,i}]_{n-j}|^{1/n} \leq 1$. Поэтому $f_{k+1, n}^{\bar{\Phi}_{2k+2}^n} = o(e^{(\varepsilon-\delta)n})$, где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Кроме того, при всех $\tau > 0$ имеет место неравенство $\{(f_{k+1})\}_{n, \tau} \geq Ce^{-n\tau}$ (см. равенства (34) для ряда $(f_{k+1}) \in \mathcal{L}$). Следовательно, учитывая предположение $\tau \leq \delta/(2(k+6))$, получаем равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k+1, n}^{\bar{\Phi}_{2k+2}^n} \{(f_{k+1})\}_{n, \tau}^{-1} = 0$. Из этого равенства и (184) получаем равенство (182).

Следствие 5 доказано.

Заметим, что лемма 12 (см. равенство (129)) и следствие 5 (см. равенство (182)) в совокупности дают предположения лемм 1 и 7 для ряда $(f_{k+1})(z)$. На этом замечании будет построено доказательство леммы 18 о существовании разбиения $(k+1)$ -го порядка. Это доказательство будет использовать следующую техническую лемму 17, перед формулировкой которой введем при $k < r$ и $s = 1, \dots, r$ следующие обозначения:

$$\vec{\Psi}_r|_k = (\Psi_{r,1}, \dots, \Psi_{r,k}), \quad \vec{\Psi}_r|_k^s = (\Psi_{r,1}, \dots, \Psi_{r,k}, \Psi_{r,s}),$$

$T_{i_1, \dots, i_k}$ – линейный оператор, ставящий в соответствие всякой r -мерной вектор-функции $\vec{\Psi}_r$ $(r - k)$ -мерную вектор-функцию $(Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^{k+1}}, \dots, Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^r})$:

$$T_{i_1, \dots, i_k}: \vec{\Psi}_r \rightarrow (Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^{k+1}}, \dots, Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^r}), \quad (185)$$

где $Y_{i_1, \dots, i_k}^*(z) = V_{i_1, \dots, i_k}^*(z/(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}))$. Кроме того, положим

$$_{i_1, \dots, i_k} U_{j_1, \dots, j_l}^* = V^*(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \lambda_{j_l}).$$

ЛЕММА 17. *Во введенных выше обозначениях имеют место следующие равенства:*

$$(f_{k,n}^{\vec{\Psi}_r|_k \oplus \vec{\Phi}_r|_k})^{r-k-1} f_{r,n}^{\vec{\Psi}_r \oplus \vec{\Phi}_r} = \det(f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t})_{s,t=k+1, \dots, r}, \quad (186)$$

$$(W_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k})^{r-k-1} W_{i_1, \dots, i_r}^{\vec{\Psi}_r} = \det(W_{i_1, \dots, i_k, i_t}^{\vec{\Psi}_r|_k^s})_{s,t=k+1, \dots, r}, \quad (187)$$

$$(V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k})^{r-k-1} V_{i_1, \dots, i_r}^{\vec{\Psi}_r} = (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^{(r-k-1)(r-k)/2} U_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_r}^{T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Psi}_r}. \quad (188)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскладывая определитель

$$f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t} = \begin{vmatrix} [f\Psi_{r,1}\Phi_{r,1}]_n & \cdots & [f\Psi_{r,1}\Phi_{r,k}]_n & [f\Psi_{r,1}\Phi_{r,t}]_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f\Psi_{r,k}\Phi_{r,1}]_n & \cdots & [f\Psi_{r,k}\Phi_{r,k}]_n & [f\Psi_{r,k}\Phi_{r,t}]_n \\ [f\Psi_{r,s}\Phi_{r,1}]_n & \cdots & [f\Psi_{r,s}\Phi_{r,k}]_n & [f\Psi_{r,s}\Phi_{r,t}]_n \end{vmatrix}$$

по последнему столбцу, получим равенство

$$f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} f_{k,n}^{(\vec{\Psi}_r|_k^s)_{\vec{j}} \oplus \vec{\Phi}_r|_k} [f(\vec{\Psi}_r|_k^s)_j \Phi_{r,t}]_n. \quad (189)$$

Умножим s -ю строку ($s = k+1, \dots, r$) определителя

$$f_{r,n}^{\vec{\Psi}_r \oplus \vec{\Phi}_r} = \begin{vmatrix} [f\Psi_{r,1}\Phi_{r,1}]_n & \cdots & [f\Psi_{r,1}\Phi_{r,r}]_n \\ \dots & \dots & \dots \\ [f\Psi_{r,r}\Phi_{r,1}]_n & \cdots & [f\Psi_{r,r}\Phi_{r,r}]_n \end{vmatrix}$$

на $f_{k,n}^{\vec{\Psi}_r|_k \oplus \vec{\Phi}_r|_k}$ и добавим к ней сумму первых k строк, умноженных соответственно на $(-1)^{k+1-j} f_{k,n}^{(\vec{\Psi}_r|_k^s)_{\vec{j}} \oplus \vec{\Phi}_r|_k}$, $j = 1, \dots, k$ (т.е. на коэффициенты, стоящие в правой части равенства (189)). Тогда s -я строка определителя $f_{r,n}^{\vec{\Psi}_r \oplus \vec{\Phi}_r}$ преобразуется в строку $(f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k}, \dots, f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^r})$, первые k элементов которой равны нулю, так как $f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^j} = 0$ при $j = 1, \dots, k$ в силу того, что при таких j вектор-функция $\vec{\Phi}_r|_k^j = (\Phi_{r,1}, \dots, \Phi_{r,k}, \Phi_{r,j})$ имеет две одинаковые координаты. После выполнения указанного преобразования последних $r - k$ строк определителя $f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_r \oplus \vec{\Phi}_r}$ этот определитель увеличится в $(f_{k,n}^{\vec{\Psi}_r|_k \oplus \vec{\Phi}_r|_k})^{r-k}$ раз и окажется равным

$$f_{k,n}^{\vec{\Psi}_r|_k \oplus \vec{\Phi}_r|_k} \det(f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t})_{s,t=k+1, \dots, r}.$$

Отсюда следует равенство (186).

Равенство (187) можно получить аналогичным образом, если умножить s -ю строку ($s = k + 1, \dots, r$) определителя $W_{i_1, \dots, i_r}^{\vec{\Psi}_r}$ на $W_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k}$ и добавить к ней сумму первых k строк, умноженных соответственно на $(-1)^{k+1-j} W_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{\Psi}_r|_k)^s}_{\bar{j}}$, $j = 1, \dots, k$.

Из свойств определителя Вандермонда, равенства (187), равенства $V_{i_1, \dots, i_k}^* = W_{i_1, \dots, i_k}^* / W_{i_1, \dots, i_k}$ и определений, приведенных перед формулировкой леммы, получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} W_{i_{k+1}, \dots, i_r} (V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k})^{r-k-1} V_{i_1, \dots, i_r}^{\vec{\Psi}_r} &= \frac{(V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k})^{r-k-1} V_{i_1, \dots, i_r}^{\vec{\Psi}_r} W_{i_1, \dots, i_r}}{W_{i_1, \dots, i_k} \prod_{t=k+1}^r (\lambda_{i_t} - \lambda_{i_1}) \cdots (\lambda_{i_t} - \lambda_{i_k})} \\ &= \frac{(W_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k})^{r-k-1} W_{i_1, \dots, i_r}^{\vec{\Psi}_r}}{W_{i_1, \dots, i_k}^{r-k} \prod_{t=k+1}^r (\lambda_{i_t} - \lambda_{i_1}) \cdots (\lambda_{i_t} - \lambda_{i_k})} = \frac{\det(W_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k}(\lambda_{i_t}))_{s,t=k+1, \dots, r}}{\prod_{t=k+1}^r W_{i_1, \dots, i_k, i_t}} \\ &= \det(V_{i_1, \dots, i_k}^{(\vec{\Psi}_r|_k)^s}(\lambda_{i_t}))_{s,t=k+1, \dots, r} = \det(Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k}(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \lambda_{i_t}))_{s,t=k+1, \dots, r} \\ &= \det((T_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r})_{s-k}(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \lambda_{i_t}))_{s,t=k+1, \dots, r} \\ &=_{i_1, \dots, i_k} U_{i_{k+1}, \dots, i_r}^{T_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r}} W(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \lambda_{i_{k+1}}, \dots, \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \lambda_{i_r}). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (188).

Лемма 17 доказана.

ЛЕММА 18. Пусть имеют место предположения теоремы 4, $(f_{k+1}) \in \mathcal{L}$, $k < t$, $\tau \leq \delta/(2(k+6))$, $\mathbb{N} = \bigcup_{l=k}^N \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N} \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ — τ -разбиение k -го порядка, согласованное с рядом f и многочленом $\beta = \langle \alpha \rangle$. Тогда существует $(k+6)\tau$ -разбиение $(k+1)$ -го порядка, согласованное с рядом f и многочленом β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\vec{\Phi}_{2k+2}$ вектор-функцию, равную правой части равенства (183). Найдем нули функции

$$V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Phi}_{2k+2}}(z) = V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{E}_k \oplus \alpha}(z) V_{i_1, \dots, i_k}^{(\varphi^0, \dots, \varphi^k)}(z) = \frac{W_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{E}_k \oplus \alpha}(z) W_{i_1, \dots, i_k}^{(\varphi^0, \dots, \varphi^k)}(z)}{W_{i_1, \dots, i_k}^2(z)},$$

лежащие на окружности $|z| = 1$. Из явного вида определителей $W_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{E}_k \oplus \alpha}(z)$ и того факта, что $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ — это нули многочлена $\beta = \langle \alpha \rangle$, получаем равенство

$$W_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{E}_k \oplus \alpha}(z) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_{i_1} & \dots & \lambda_{i_1}^{k-1} & \alpha(\lambda_{i_1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_{i_k} & \dots & \lambda_{i_k}^{k-1} & \alpha(\lambda_{i_k}) \\ 1 & z & \dots & z^{k-1} & \alpha(z) \end{vmatrix} = \alpha(z) W_{i_1, \dots, i_k}.$$

Кроме того, заметим, что функции $W_{i_1, \dots, i_k}(z)$ и

$$W_{i_1, \dots, i_k}^{(\varphi^0, \dots, \varphi^k)}(z) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi(\lambda_{i_1}) & \dots & \varphi^k(\lambda_{i_1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varphi(\lambda_{i_k}) & \dots & \varphi^k(\lambda_{i_k}) \\ 1 & \varphi(z) & \dots & \varphi^k(z) \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль при $z = \lambda_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$, и не имеют других нулей (в силу однолиственности функции φ). Поэтому все нули функции $V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Phi}_{2k+2}}(z)$ на окружности $|z| = 1$ — это точки λ_j , где $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.

Положим $\zeta = 2(k+6)\tau$,

$$\varepsilon_{n,i_1,\dots,i_k} = \frac{[f_{k+1,n}^* - [f_{k+1}(z)Y_{i_1,\dots,i_k}^*(z)]_n]_{2k+2,\zeta,k\uplus k,\zeta}}{\{(f_{k+1})\}_{n,\tau}} \quad (190)$$

и заметим, что по леммам 15 и 16 имеет место равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k}(\bar{\theta}/2)} \varepsilon_{n,i_1,\dots,i_k} = 0.$$

Фиксируем последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ неотрицательных чисел такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ и $\varepsilon_{n,i_1,\dots,i_k} \leq \varepsilon_n$ при всех $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$ и $n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k}(\bar{\theta}/2)$.

С учетом предположения $(f_{k+1}) \in \mathcal{L}$ из леммы 12 (равенства (129)) и следствия 5 (равенства (182)) следует, что для ряда $(f_{k+1})(z) = \sum_{n=0}^\infty f_{k+1,n} z^n$ выполнены предположения лемм 1 и 7. Так как нули функции

$$V_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Phi}_{2k+2}} \left(\frac{z}{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}} \right) = Y_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Phi}_{2k+2}}(z)$$

из равенства (182) – это точки $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \lambda_j$, где $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, то по леммам 1 и 7 (примененным к ряду $(f_{k+1})(z)$ и последовательностям $\Lambda_{i_1,\dots,i_k}$ и ε_n) каждую последовательность $\Lambda_{i_1,\dots,i_k}$ можно разбить на непересекающиеся подпоследовательности

$$\Lambda_{i_1,\dots,i_k} = \bigcup_{l=1}^{N-k} \bigcup_{\{j_1,\dots,j_l\}} \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}$$

(второе объединение берется по всем $j_1, \dots, j_l$ таким, что $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N$ и $\{j_1, \dots, j_l\} \cap \{i_1, \dots, i_k\} = \emptyset$) и указать $\bar{\theta}^* \in \Theta$ ($\theta_n^* \leq \theta_n/4$) так, что имеют место неравенства

$$[(f_{k+1})_{r,n}^*]_{2r,\tau} \leq C(\zeta) \{((f_{k+1})_r)\}_n^{(l)}, \quad n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*), \quad r = 1, \dots, l, \quad (191)$$

и равенства

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*)} \frac{\varepsilon_n \{(f_{k+1})\}_{n,\tau}^r}{\{((f_{k+1})_r)\}_n^{(l)}} = 0, \quad r = 1, \dots, l, \quad (192)$$

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*)} [(F_{k+1})_{l,n}^* -_{i_1,\dots,i_k} U_{j_1,\dots,j_l}^*]_{2l,\tau} = 0, \quad (193)$$

где для ряда $f_{k+1}(z) = \sum_{n=0}^\infty f_{k+1,n} z^n$ используются те же обозначения, которые были введены в начале этого параграфа для ряда $f(z) = \sum_{n=0}^\infty f_n z^n$.

Покажем, что для последовательности $\Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*)$ выполняются неравенства (116) и равенства (117), в которых число τ заменяется числом ζ , а число l – числом $k+l$, а именно, докажем неравенство

$$[f_{r,n}^*]_{2r,\zeta} \leq C(\zeta) \{(f_r)\}_n^{(k+l)}, \quad n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*), \quad r = 1, \dots, k+l, \quad (194)$$

и равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*)} [F_{k+l,n}^* - V_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}^*]_{2k+2l,\zeta} = 0. \quad (195)$$

Так как величины $[f_{r,n}^*]_{2r,\tau}$ убывают с ростом τ и так как $\zeta > \tau$, $\binom{k+l}{r} \geq \binom{k}{r}$ и $\Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*) \subset \Lambda_{i_1,\dots,i_k}(\bar{\theta}^*)$, то при $r = 1, \dots, k$ неравенства (194) являются следствиями уже имеющихся в наличии неравенств (116). С учетом неравенств (156) для доказательства неравенств (194) при $r = k+1, \dots, k+l$ и равенства (195) достаточно доказать неравенства

$$[f_{r,n}^*]_{2r,\zeta,k \uplus k,\zeta} \leq C(\zeta)\{(f_r)\}_n \binom{k+l}{r}, \quad n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*), \quad r = k+1, \dots, k+l, \quad (196)$$

и равенство

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*)} [F_{k+l,n}^* - V_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}^*]_{2k+2l,\zeta,k \uplus k,\zeta} = 0. \quad (197)$$

Пусть $k+1 \leq r \leq k+l$, $\vec{P}_r, \vec{Q}_r \in \mathcal{P}_r$, $\vec{\nu}_k, \vec{\mu}_k \in \Xi_k$, $\vec{\Psi}_r = (\vec{P}_\zeta, \vec{\nu}_k)_k$, $\vec{\Phi}_r = (\vec{Q}_\zeta, \vec{\mu}_k)_k$. Из равенства (186) получаем равенство

$$\begin{aligned} (f_{k,n}^{\vec{\Psi}_r|_k \oplus \vec{\Phi}_r|_k})^{r-k-1} f_{r,n}^{\vec{\Psi}_r \oplus \vec{\Phi}_r} \\ = \det(\eta_{n,i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t} + [f_{k+1}(z)Y_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t}(z)]_n)_{s,t=k+1,\dots,r}, \end{aligned} \quad (198)$$

где

$$\eta_{n,i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t} = f_{k+1,n}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t} - [f_{k+1}(z)Y_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t}(z)]_n. \quad (199)$$

Из определения (71) для ряда (f_{k+1}) и определения (185) линейного оператора $T_{i_1,\dots,i_k}$ получаем равенство

$$(f_{k+1})_{r-k,n}^{T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Psi}_r \oplus T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Phi}_r} = \det([f_{k+1}(z)Y_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t}(z)]_n)_{s,t=k+1,\dots,r}. \quad (200)$$

Равенство (199), определение (154) величины $[R^*]_{2k+2,\zeta,k \uplus k,\zeta}$ и определение последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ влекут за собой неравенство

$$|\eta_{n,i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t}| \leq \varepsilon_n \{(f_{k+1})\}_{n,\tau} \|\vec{P}_r|_k^s\|_\zeta \|\vec{Q}_r|_k^t\|_\zeta, \quad n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k}(\bar{\theta}^*). \quad (201)$$

Из определения (200) и неравенства (169), в котором вектор $\vec{P}_{2k+2}$ можно заменить на $\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t$ (доказательство неравенства (169) от этого практически не меняется) получаем неравенство

$$\begin{aligned} |[f_{k+1}(z)Y_{i_1,\dots,i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^s \oplus \vec{\Phi}_r|_k^t}(z)]_n| &\leq C(\zeta)\{(f_{k+1})\}_{n,\tau} \|\vec{P}_r|_k^s\|_\zeta \|\vec{Q}_r|_k^t\|_\zeta, \\ n &\in \Lambda_{i_1,\dots,i_k}(\bar{\theta}^*). \end{aligned} \quad (202)$$

Из равенств (198)–(200), неравенств (201), (202) и равенства (192) (в котором число r следует заменить числом $r - k = 1, \dots, l$) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|(f_{k,n}^{\vec{\Psi}_r|_k \oplus \vec{\Phi}_r|_k})^{r-k-1} f_{r,n}^{\vec{\Psi}_r \oplus \vec{\Phi}_r} - (f_{k+1})_{r-k,n}^{T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Psi}_r \oplus T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Phi}_r}|}{\prod_{q=k+1}^r \|\vec{P}_r|_k^q\|_\zeta \|\vec{Q}_r|_k^q\|_\zeta} \\ \leq C(\zeta)\varepsilon_n \{(f_{k+1})\}_{n,\tau}^{r-k} \leq \widehat{\varepsilon}_n \{((f_{k+1})_{r-k})\}_n^{(l)}, \end{aligned} \quad (203)$$

где $\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*)} \widehat{\varepsilon}_n = 0$.

Покажем, что имеет место неравенство

$$\{((f_{k+1})_{r-k})\}_{\left|_n^{\binom{l}{r-k}}\right.} \leq 4\{(f_r)\}_{\left|_n^{\binom{l}{r-k}}\right.} f_{k,n}^{r-k-1}, \quad n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}(\theta^*). \quad (204)$$

С этой целью заметим, что при $\vec{\nu}_k = (0, \dots, 0) \in \Xi_k$ вектор-функция $(\vec{E}_{\zeta, \vec{\nu}_k})_r$ отличается от вектор-функции $\vec{E}_r$ только постоянными множителями при первых k координатах. Это означает, что вектор-функции $\vec{\Psi}_r$ и $\vec{\Phi}_r$, равные $\vec{E}_r$, являются допустимыми в неравенстве (203) и, следовательно,

$$|f_{k,n}^{r-k-1} f_{r,n} - (f_{k+1})_{r-k,n}^{T_{i_1, \dots, i_k} \vec{E}_r \oplus T_{i_1, \dots, i_k} \vec{E}_r}| \leq C \widehat{\varepsilon}_n \{(f_{k+1})_{r-k}\}_{\left|_n^{\binom{l}{r-k}}\right.}. \quad (205)$$

По определению (185) оператора $T_{i_1, \dots, i_k}$ j -я координата ($j = 1, \dots, r-k$) вектор-функции $T_{i_1, \dots, i_k} \vec{E}_r$ равна $Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{E}_r|_k^{k+j}}(z) = V_{i_1, \dots, i_k}^{(0, \dots, k-1, k-1+j)}(Az)$, где $A = (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k})^{-1}$, и по лемме 14 (см. равенство (142)) является многочленом от Az степени $j-1$ с единичным старшим коэффициентом. Поэтому

$$\begin{aligned} (f_{k+1})_{r-k,n}^{T_{i_1, \dots, i_k} \vec{E}_r \oplus T_{i_1, \dots, i_k} \vec{E}_r} &= (f_{k+1})_{r-k,n}^{(1, Az, \dots, (Az)^{r-k-1}) \oplus (1, Az, \dots, (Az)^{r-k-1})} \\ &= B(f_{k+1})_{r-k,n}^{\vec{E}_{r-k} \oplus \vec{E}_{r-k}} = B(f_{k+1})_{r-k,n}, \end{aligned}$$

где $B = A^{2(1+\dots+(r-k-1))} = (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k})^{-(r-k-1)(r-k)}$. Следовательно, неравенство (205) имеет следующий вид:

$$|f_{k,n}^{r-k-1} f_{r,n} - B(f_{k+1})_{r-k,n}| \leq C \widehat{\varepsilon}_n \{(f_{k+1})_{r-k}\}_{\left|_n^{\binom{l}{r-k}}\right.}. \quad (206)$$

Пусть p и q – те из индексов из $[0, \binom{l}{r-k} - 1]$, для которых

$$\{((f_{k+1})_{r-k})\}_{\left|_n^{\binom{l}{r-k}}\right.} = (f_{k+1})_{r-k, n+p}, \quad \{((f_{k+1})_{r-k})\}_{\left|_{n+p}^{\binom{l}{r-k}}\right.} = (f_{k+1})_{r-k, n+p+q}.$$

Из определения индекса p , неравенства (206) (с заменой n на $n+p$ и учетом равенства $|B| = 1$), определений индекса q , (27), (81) и неравенства (191) получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \{((f_{k+1})_{r-k})\}_{\left|_n^{\binom{l}{r-k}}\right.} - \{f_{k,n}^{r-k-1} f_{r,n}\}_{\left|_n^{\binom{l}{r-k}}\right.} &\leq |(f_{k+1})_{r-k, n+p}| - |f_{k, n+p}^{r-k-1} f_{r, n+p}| \\ &\leq C \widehat{\varepsilon}_{n+p} |(f_{k+1})_{r-k, n+p+q}| = C \widehat{\varepsilon}_{n+p} |(f_{k+1})_{r-k, n}^{(-p-q, \dots, -p-q+r-k-1)}| \\ &\leq \widehat{\varepsilon}_{n+p} C(\zeta) \lceil (f_{k+1})_{r-k, n}^* \rceil_{2(r-k), \zeta} \leq \widehat{\varepsilon}_{n+p} C^*(\zeta) \{((f_{k+1})_{r-k})\}_{\left|_n^{\binom{l}{r-k}}\right.}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}(\theta^*)} \widehat{\varepsilon}_n = 0$, то отсюда получаем неравенство

$$\{((f_{k+1})_{r-k})\}_{\left|_n^{\binom{l}{r-k}}\right.} \leq 2\{f_{k,n}^{r-k-1} f_{r,n}\}_{\left|_n^{\binom{l}{r-k}}\right.}, \quad n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}(\theta^*).$$

Из этого неравенства и существования предела

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k}(\theta)} \frac{f_{k, n+p}}{f_{k, n}} = (\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k})^{-p}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

(см. равенство (118)), следует неравенство (204).

Из определения (185) линейного оператора $T_{i_1, \dots, i_k}$ и неравенства (158) получаем неравенство

$$\prod_{q=k+1}^r \|T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Psi}_r\|_{\zeta} = \prod_{q=k+1}^r \|Y_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_r|_k^q}(z)\|_{\zeta} \leq C(\zeta) \|\vec{P}_r\|_{\zeta}^q. \quad (207)$$

Пользуясь неравенствами (207), (82) (при $R^* = (f_{k+1,n})_{r-k,n}^*$), (191) (с заменой числа τ большим числом $\zeta/2$) и (204), получаем неравенство

$$\frac{|(f_{k+1})_{r-k,n}^{T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Psi}_r \oplus T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Phi}_r}|}{\prod_{q=k+1}^r \|\vec{P}_r|_k^q\|_\zeta \|\vec{Q}_r|_k^q\|_\zeta} \leq C(\zeta) \frac{|(f_{k+1})_{r-k,n}^{T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Psi}_r \oplus T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Phi}_r}|}{\prod_{q=k+1}^r \|T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Psi}_r\|_\zeta \|T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Phi}_r\|_\zeta} \\ \leq C(\zeta) \lceil (f_{k+1})_{r-k,n}^* \rceil_{2(r-k), \zeta/2} \leq C(\zeta) \{(f_r)\}_n^{(l-k)} f_{k,n}^{r-k-1}. \quad (208)$$

Из неравенств (203), (208) и (204) получаем неравенство

$$\frac{|(f_{k,n}^{\vec{\Psi}_r|_k \oplus \vec{\Phi}_r|_k})^{r-k-1} f_{r,n}^{\vec{\Psi}_r \oplus \vec{\Phi}_r}|}{\prod_{q=k+1}^r \|\vec{P}_r|_k^q\|_\zeta \|\vec{Q}_r|_k^q\|_\zeta} \leq C(\zeta) \{(f_r)\}_n^{(l-k)} f_{k,n}^{r-k-1}, \quad (209)$$

которое можно переписать в виде неравенства

$$\frac{|f_{r,n}^{\vec{\Psi}_r \oplus \vec{\Phi}_r}|}{\prod_{q=k+1}^r \|\vec{P}_r|_k^q\|_\zeta \|\vec{Q}_r|_k^q\|_\zeta} \leq \frac{C(\zeta) \{(f_r)\}_n^{(l-k)}}{|F_{k,n}^{\vec{\Psi}_r|_k \oplus \vec{\Phi}_r|_k}|^{r-k-1}}. \quad (210)$$

Заметим, что

$$\prod_{q=k+1}^r \|\vec{P}_r|_k^q\|_\zeta = \|\vec{P}_r|_k\|_\zeta^{k-1} \|\vec{P}_r\|_\zeta. \quad (211)$$

Кроме того, по неравенству (159) получаем

$$|F_{k,n}^{\vec{\Psi}_r|_k \oplus \vec{\Phi}_r|_k}| \geq 8^{-1} C_N^{2k} \|\vec{P}_r|_k\|_\zeta \|\vec{Q}_r|_k\|_\zeta$$

при всех достаточно больших $n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k}(\theta)$. Отсюда и из неравенства (210) получаем неравенство

$$\frac{|f_{r,n}^{\vec{\Psi}_r \oplus \vec{\Phi}_r}|}{\|\vec{P}_r\|_\zeta \|\vec{Q}_r\|_\zeta} \leq C(\zeta) \{(f_r)\}_n^{(l-k)} \leq C(\zeta) \{(f_r)\}_n^{(k+l)},$$

которое влечет за собой (196).

Докажем теперь неравенство (197). При $r = k + l$ получаем

$$\{((f_{k+1})_{r-k})\}_n^{(l-k)} = |(f_{k+1})_{l,n}|.$$

Поэтому при $r = k + l$ неравенство (206) можно записать в виде равенства

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\theta^*)} \frac{f_{k,n}^{l-1} f_{k+l,n}}{B(f_{k+1})_{l,n}} = 1, \quad (212)$$

а неравенство (203) (с учетом (212) и (209)) – в виде неравенства

$$\frac{|B(F_{k,n}^{\vec{\Psi}_{k+l}|_k \oplus \vec{\Phi}_{k+l}|_k})^{l-1} F_{k+l,n}^{\vec{\Psi}_{k+l} \oplus \vec{\Phi}_{k+l}} - (F_{k+1})_{l,n}^{T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Psi}_{k+l} \oplus T_{i_1,\dots,i_k} \vec{\Phi}_{k+l}}|}{\prod_{q=k+1}^{k+l} \|\vec{P}_{k+l}|_k^q\|_\zeta \|\vec{Q}_{k+l}|_k^q\|_\zeta} \leq \tilde{\epsilon}_n, \quad (213)$$

где $\lim_{n \in \Lambda_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_l}(\bar{\theta}^*)} \tilde{\epsilon}_n = 0$.

Из неравенств (207) и (82) (при $R^* = (F_{k+1})_{l,n}^* -_{i_1, \dots, i_k} U_{j_1, \dots, j_l}^*$) с учетом равенства (193) получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{|(F_{k+1})_{l,n}^{T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Psi}_{k+l} \oplus T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Phi}_{k+l}} -_{i_1, \dots, i_k} U_{j_1, \dots, j_l}^{T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Psi}_{k+l} \oplus T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Phi}_{k+l}}|}{\prod_{q=k+1}^{k+l} \|\vec{P}_{k+l}|_k^q\|_{\zeta} \|\vec{Q}_{k+l}|_k^q\|_{\zeta}} \\ & \leq \frac{|(F_{k+1})_{l,n}^{T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Psi}_{k+l} \oplus T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Phi}_{k+l}} -_{i_1, \dots, i_k} U_{j_1, \dots, j_l}^{T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Psi}_{k+l} \oplus T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Phi}_{k+l}}|}{\prod_{q=k+1}^{k+l} \|T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Psi}_{k+l}\|_{\zeta} \|T_{i_1, \dots, i_k} \vec{\Phi}_{k+l}\|_{\zeta}} \\ & \leq C(\zeta) [(F_{k+1})_{l,n}^* -_{i_1, \dots, i_k} U_{j_1, \dots, j_l}^*]_{2l, \zeta/2} \leq \tilde{\varepsilon}_n, \end{aligned} \quad (214)$$

где $\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}(\bar{\theta}^*)} \tilde{\varepsilon}_n = 0$. Из неравенств (213), (214) и равенств (188) (при $r = k + l$) и (211) получаем неравенство

$$\frac{|(F_{k,n}^{\vec{\Psi}_{k+l}|_k \oplus \vec{\Phi}_{k+l}|_k})^{l-1} F_{k+l,n}^{\vec{\Psi}_{k+l} \oplus \vec{\Phi}_{k+l}} - (V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_{k+l}|_k \oplus \vec{\Phi}_{k+l}|_k})^{l-1} V_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}^{\vec{\Psi}_{k+l} \oplus \vec{\Phi}_{k+l}}|}{(\|\vec{P}_{k+l}\|_{\zeta})^{l-1} \|\vec{P}_{k+l}\|_{\zeta} (\|\vec{Q}_{k+l}\|_{\zeta})^{l-1} \|\vec{Q}_{k+l}\|_{\zeta}} \leq \varepsilon_n^*,$$

где $\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}(\bar{\theta}^*)} \varepsilon_n^* = 0$. Так как в силу неравенств (157) отношение $V_{i_1, \dots, i_k}^{\vec{\Psi}_{k+l}|_k} / \|\vec{P}_{k+l}\|_{\zeta}$ оценивается снизу и сверху постоянными $\frac{1}{2} C_N^k$ и $\frac{3}{2} C_N^k$, а отношение $V_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}^{\vec{\Psi}_{k+l}} / \|\vec{P}_{k+l}\|_{\zeta}$ ограничено сверху, то из полученного неравенства и равенства (117) получаем неравенство

$$|F_{k+l,n}^{\vec{\Psi}_{k+l} \oplus \vec{\Phi}_{k+l}} - V_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}^{\vec{\Psi}_{k+l} \oplus \vec{\Phi}_{k+l}}| \leq \varepsilon_n^* C \|\vec{P}_{k+l}\|_{\zeta} \|\vec{Q}_{k+l}\|_{\zeta}.$$

Отсюда следует неравенство (197).

Итак, каждая последовательность $\Lambda_{i_1, \dots, i_k}$ разбилась на конечное число подпоследовательностей $\Lambda_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}$, для которых имеют место неравенства (196) и равенства (197), а следовательно, как отмечалось, и неравенства (116) и равенства (117) (с заменой числа l числом $k + l$). Заметим, что величина

$$V_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}^{\vec{\Psi}_{k+l}} = \frac{W_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}^{\vec{\Psi}_{k+l}}}{W_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}}$$

не зависит от перестановок множества индексов $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l\}$. Поэтому, выкидывая из первоначального τ -разбиения $\mathbb{N} = \bigcup_{l=k}^N \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N} \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ все последовательности $\Lambda_{i_1, \dots, i_k}$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$) и добавляя к каждой последовательности $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ с $l \geq k + 1$ первоначального τ -разбиения все вновь полученные последовательности $\Lambda_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{l-k}}$ с тем же набором индексов $\{i_1, \dots, i_l\}$ (с точностью до перестановок), получим новое $(k + 6)\tau$ -разбиение множества натуральных чисел порядка $k + 1$, согласованное с рядом f и многочленом β .

Таким образом, лемма 18 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 10. Пусть $\tau > 0$. Тогда по лемме 7 существует $(\prod_{k=1}^{m-1} (k + 6)^{-1})\tau$ -разбиение первого порядка, согласованное с рядом $f \in \mathcal{L}$

и многочленом β . Из формул Адамара (см. [18]) и предположения (69) получаем равенства

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{1,n}|^{1/n} &= R_0^{-1}(f) = 1, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{2,n}|^{1/n} &= R_1^{-1}(f) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{1,n}|^{1/n} = 1, \\ &\dots \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{m,n}|^{1/n} &= R_{m-1}^{-1}(f) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{m-1,n}|^{1/n} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $(f_k) \in \mathcal{L}$ при $k = 1, \dots, m$. Последовательным образом используя лемму 18, получим, что существует $(\prod_{k=2}^{m-1} (k+6)^{-1})\tau$ -разбиение второго порядка, $(\prod_{k=3}^{m-1} (k+6)^{-1})\tau$ -разбиение третьего порядка и т.д. На m -м шаге получим τ -разбиение m -го порядка.

Лемма 10 доказана.

Завершим доказательство теорем 4 и 5 сначала в случае дополнительных предположений (69) с помощью леммы 10, а затем и в общем случае с помощью следующих лемм 19 и 20.

ЛЕММА 19. Пусть $f \in \mathcal{L}$ – ряд Лорана такой, что

$$1 = R_0(f) = \dots = R_{M-1}(f) < R_M(f), \quad (215)$$

где $M \in \mathbb{N}$. Тогда:

- 1) функция $\hat{f}$ имеет в круге $|z| < R_M(f)$ ровно M полюсов $a_1, \dots, a_M$, и все эти полюсы лежат на окружности $|z| = 1$;
- 2) при всех $\tau > 0$ разбиение $\mathbb{N} = \Lambda_{1, \dots, M}$ (состоящее из единственной последовательности) является τ -разбиением M -го порядка, согласованным с рядом f и многочленом $A(z) = \prod_{j=1}^M (1 - z/a_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что утверждение 1) леммы 19 является простым следствием условия (215). Так как функция $\hat{f}$ имеет в круге $|z| < R_M(f)$ ровно M полюсов $a_1, \dots, a_M$, то по теореме Монтеcssу де Болора (см. [19]) знаменатели $Q_{n,M}(z)$ классических аппроксимаций Паде типа (n, M) функции $\hat{f}$ стремятся при $n \rightarrow \infty$ к многочлену $A(z)$. Это означает, что имеют место предположения (20) теоремы 4 для натурального числа M (вместо m) и функций $\alpha_n(z) = Q_{n,M}(z)$, $\varphi_{n,j}(z) = z^{-j}$ ($j = 0, \dots, M-1$). Кроме того, условия (215) означают, в частности, что выполнены предположения (69) (с заменой m на M). Поэтому по лемме 10 существует τ -разбиение M -го порядка, согласованное с рядом f и многочленом $A(z)$. Так как степень многочлена $A(z)$ равна порядку M разбиения, то существует единственный мультииндекс $i_1, \dots, i_M$ такой, что $1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq M$, и, следовательно, разбиение состоит из единственной последовательности $\mathbb{N} = \Lambda_{1, \dots, M}$.

Лемма 19 доказана.

ЛЕММА 20. Пусть $f \in \mathcal{L}$,

$$\beta^\pm(z) = \prod_{i=1}^{N^\pm} (1 - z/\lambda_i^\pm) \in \Upsilon_{N^\pm}, \quad \mathbb{N} = \bigcup_{l=k^\pm}^{N^\pm} \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N^\pm} \Lambda_{i_1, \dots, i_l}^\pm$$

– два τ -разбиения множества натуральных чисел $k^\pm$ -го порядка, согласованные с рядом $f \in \mathcal{L}$ и многочленами $\beta^\pm$, и пусть $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}^+ \cap \Lambda_{j_1, \dots, j_s}^-$ содержит бесконечное число членов. Тогда либо множества точек $\{\lambda_{i_1}^+, \dots, \lambda_{i_l}^+\}$ и $\{\lambda_{j_1}^-, \dots, \lambda_{j_s}^-\}$ совпадают, либо одно содержится в другом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $l \geq s$. При доказательстве леммы 11 было показано, что для многочленов $Q_{l,n}(z)$, определенных равенством (122), имеют место равенства (123) и (124). Пусть $\vec{\Psi}_{s-1}$ – произвольная вектор-функция из $H_{s-1, \tau}$. Заметим, что

$$F_{s,n}^{\vec{\Psi}_{s-1} \oplus Q_{l,n}} = \frac{1}{f_{s,n}} \begin{vmatrix} [f\vec{\Psi}_{s-1,1}]_n & \dots & [f\vec{\Psi}_{s-1,s-1}]_n & [fQ_{l,n}]_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f\vec{\Psi}_{s-1,1}]_{n-s+1} & \dots & [f\vec{\Psi}_{s-1,s-1}]_{n-s+1} & [fQ_{l,n}]_{n-s+1} \end{vmatrix} = 0, \quad (216)$$

так как все элементы последнего столбца последнего определителя равны нулю в силу равенств (123). С другой стороны, так как в силу равенств (124) многочлены $Q_{l,n}(z)$ имеют предел

$$\lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}^+(\bar{\theta})} Q_{l,n}(z) = Q_l(z) = \prod_{t=1}^l \left(1 - \frac{z}{\lambda_{i_t}^+}\right), \quad (217)$$

то из равенств (216) и (118) получаем равенство

$$0 = \lim_{n \in \Lambda_{i_1, \dots, i_l}^+ \cap \Lambda_{j_1, \dots, j_s}^-} F_{s,n}^{\vec{\Psi}_{s-1} \oplus Q_{l,n}} = V^{\vec{\Psi}_{s-1} \oplus Q_l}(\lambda_{j_1}^-, \dots, \lambda_{j_s}^-). \quad (218)$$

Так как $\vec{\Psi}_{s-1}$ – произвольная вектор-функция из $H_{s-1, \tau}$, то отсюда следует, что

$$Q_l(\lambda_{j_1}^-) = \dots = Q_l(\lambda_{j_s}^-) = 0.$$

Отсюда в силу явного вида (217) многочлена $Q_l(z)$ получаем утверждение леммы.

Лемма 20 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 4 и 5. Предположим сначала, что наряду с предположениями теоремы 4 имеют место дополнительные предположения (69). Тогда по лемме 10 существует τ -разбиение порядка m , согласованное с рядом $f \in \mathcal{L}$ и многочленом $\langle \alpha \rangle$ (т.е. многочленом $\prod_{i=1}^N (1 - z/\lambda_i)$, построенным по нулям функции α , лежащим на окружности $|z| = 1$).

Из определения разбиения $\mathbb{N} = \bigcup_{l=m}^N \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N} \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ m -го порядка следует, в частности, что $N \geq m$. В предположениях теоремы 5 строгое неравенство $N > m$ невозможно. В этом случае $N = m$ и, следовательно, имеется только один мультииндекс $i_1, \dots, i_m$ вида $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N = m$, а именно $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} = \{1, 2, \dots, m\}$. Это означает, что τ -разбиение состоит из единственной последовательности $\Lambda_{1, \dots, m}$, совпадающей со всей последовательностью натуральных чисел. Поэтому утверждение теоремы 5 (равенства (24)) – это прямое следствие равенств (118) при $l = m$.

Наличие соотношений (22) с предельно постоянными коэффициентами следует из леммы 11 (равенств (119), (120)). При дополнительном предположении,

что существует натуральное число $M \geq m$ такое, что выполнено условие (215), утверждение теоремы 4 об особых точках функции f следует из теоремы Суетина. Действительно, пусть $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}$ ($l \geq m$) – одна из бесконечных подпоследовательностей, входящих в τ -разбиение порядка m , согласованное с рядом f и многочленом $\beta = \langle \alpha \rangle$, которое существует по лемме 10. По лемме 19 $\mathbb{N}$ является τ -разбиением (состоящим из единственной последовательности) порядка M , согласованным с рядом f и многочленом $A(z) = \prod_{j=1}^M (1 - z/a_j)$, где $a_1, \dots, a_M$ – полюсы функции $\hat{f}$, лежащие на окружности $|z| = 1$. По лемме 20 получаем, что $\min(l, M) \geq m$ из точек $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_l}$ принадлежат множеству $\{a_1, \dots, a_M\}$ и, следовательно, являются полюсами функции $\hat{f}$. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы 4 об особых точках доказано. Поэтому будем далее предполагать, что такого числа M не существует, т.е. будем предполагать, что

$$1 = R_0(f) = \dots = R_{m-1}(f) = R_m(f) = \dots \quad (219)$$

Обозначим через m^* максимальное из натуральных чисел, не превосходящих N и обладающих тем свойством, что существуют такие многочлены $Q_n(z) = \prod_{j=1}^N (1 - z/\lambda_{j,n})$, имеющие предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z) = \langle \alpha(z) \rangle = \beta(z) = \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right),$$

что имеют место равенства

$$[Q_n f]_{n+p} = 0, \quad p = 1, \dots, m^*. \quad (220)$$

Из лемм 10 и 11 следует, что $m^* \geq m$. Если $m^* = N$, то из определения классических аппроксимаций Паде и равенств (220) следует, что многочлен $Q_n(z)$ является знаменателем аппроксимации Паде типа (n, N) функции f . В этом случае по теореме Суетина все точки $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ являются особыми точками функции $\hat{f}$, и, следовательно, утверждение теоремы об особых точках имеет место и в этом случае. Поэтому далее наряду с равенствами (219) будем предполагать, что $m \leq m^* < N$. Покажем, что в этом случае утверждение теоремы 4 об особых точках следует не из самой теоремы Суетина, а из немного подправленного ее доказательства.

Так как $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = R_0^{-1}(f) = 1$ и так как коэффициенты многочленов Q_n , степень которых не превосходит N , имеют пределы, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |[Q_n f]_{n+p}|^{1/n} \leq 1, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (221)$$

Покажем, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |[Q_n f]_{n+m^*+1}|^{1/n} = 1. \quad (222)$$

Предположим противное. Тогда с учетом неравенства (221) получаем строгое неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |[Q_n f]_{n+m^*+1}|^{1/n} < 1. \quad (223)$$

Равенства (219), (220) и (223) в совокупности дают предположения (19) и (20) теоремы 4 для натурального числа $m^* + 1$ при $\alpha_n(z) = Q_n(z)$, $\varphi_{n,j}(z) = z^{-j}$ ($j = 0, \dots, m^*$) и дополнительном предположении (69). Поэтому по лемме 10

существует τ -разбиение порядка $m^* + 1$, согласованное с рядом f и многочленом β . Тогда по лемме 11 существуют многочлены $\gamma_n(z)$, имеющие предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(z) = \langle \alpha \rangle(z)$ и такие, что

$$[\gamma_n f]_{n+p} = 0, \quad p = 1, \dots, m^* + 1.$$

Таким образом, получаем противоречие с максимальностью числа m^* , что дает равенство (222).

Положим $P_n(z) = \sum_{p=0}^n [Q_n f]_p z^p$. Тогда с учетом равенств (220) получаем равенства

$$\begin{aligned} (Q_n f - P_n)(z) &= \sum_{p=n+m^*+1}^{\infty} [Q_n f]_p z^p, \\ (Q_{n+1} f - P_{n+1})(z) &= \sum_{p=n+m^*+2}^{\infty} [Q_{n+1} f]_p z^p. \end{aligned}$$

Вычитая из первого из этих равенств, умноженного на $Q_{n+1}(z)$, второе, умноженное на $Q_n(z)$, получаем равенство

$$(P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1})(z) = \sum_{p=n+m^*+1}^{\infty} A_{n,p} z^p, \quad (224)$$

где коэффициенты $A_{n,p}$ при всех $p \geq n + m^* + 2$ оцениваются в силу неравенства (221) неравенствами

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_{n,p}|^{1/n} \leq 1, \quad (225)$$

а при $p = n + m^* + 1$ в силу равенства (222) получаем равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_{n,n+m^*+1}|^{1/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |[Q_n f]_{n+m^*+1} [Q_{n+1}]_0|^{1/n} = 1. \quad (226)$$

Так как $\deg P_n \leq n$ и $\deg Q_n \leq N$, то в левой части равенства (224) стоит многочлен, степень которого не превосходит $n + 1 + N$. Поэтому равенство (224) можно переписать в следующем виде:

$$(P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1})(z) = \sum_{p=n+m^*+1}^{n+1+N} A_{n,p} z^p. \quad (227)$$

Положим $A_n = \sum_{p=n+m^*+1}^{n+1+N} |A_{n,p}|$. Из неравенств (225) и равенства (226) следует равенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n|^{1/n} = 1$. III. Агмон (см. [17]) доказал существование последовательности положительных чисел A_n^* , удовлетворяющей следующим условиям:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^*/A_{n+1}^* = 1$;
- b) $\{\log(A_n^*/n!)\}$ – вогнутая последовательность;
- c) $|A_n| \leq |A_n^*|$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- d) $|A_n| \geq c|A_n^*|$, $c > 0$, для n , принадлежащих некоторой бесконечной последовательности $\Gamma \subset \mathbb{N}$.

Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 21. Пусть функция f голоморфна в некоторой области D , содержащей круг $\{z \mid |z| < 1\}$. Тогда в приведенных выше обозначениях для любого компакта $K \subset D$ имеет место неравенство

$$\max_{z \in K} \left| \frac{(Q_n f - P_n)(z)}{A_{n+m^*+1}^* z^{n+m^*+1}} \right| \leq C(K). \quad (228)$$

Для случая степенных рядов соответствующее утверждение – лемма Агмона (см. [17]) – было приведено и использовано ранее при доказательстве утверждения 5) леммы 1. Для случая $m^* = N$ (в этом случае $A_n = |A_{n,n+m^*+1}|$) лемма была сформулирована и доказана С. П. Суетиным (см. [4]). Приведенная формулировка леммы 21 охватывает чуть более общий случай, однако доказательство леммы, данное С. П. Суетиным, проходит с соответствующими поправками и в этом случае. По этой причине доказательство леммы 21 мы не приводим.

Покажем, пользуясь леммой 21, что по крайней мере m^* нулей многочлена β являются особыми точками функции $\hat{f}$. Предположим противное. Тогда найдется компакт $K \subset D$, содержащий $N - m^* + 1$ нулей $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-m^*+1}$ (при соответствующей нумерации) многочлена β вместе с некоторыми их окрестностями. Пусть $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,N-m^*+1}$ – нули многочленов Q_n , $n \in \mathbb{N}$, такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,i} = \lambda_i$, $i = 1, \dots, N - m^* + 1$. При всех $i = 1, \dots, N - m^* + 1$ из равенства (227) следует равенство

$$P_n(\lambda_{n,i}) Q_{n+1}(\lambda_{n,i}) = -\lambda_{n,i}^{n+m^*+1} \sum_{p=0}^{N-m^*} A_{n,n+m^*+1+p} \lambda_{n,i}^p,$$

а из неравенства (228) при достаточно больших n – неравенство

$$|P_n(\lambda_{n,i})| \leq C(K) A_{n+m^*+1}^* |\lambda_{n,i}|^{n+m^*+1}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} C(K) |Q_{n+1}(\lambda_{n,i})| &\geq (A_{n+m^*+1}^*)^{-1} |P_n(\lambda_{n,i}) Q_{n+1}(\lambda_{n,i}) \lambda_{n,i}^{-(n+m^*+1)}| \\ &= (A_{n+m^*+1}^*)^{-1} \left| \sum_{p=0}^{N-m^*} A_{n,n+m^*+1+p} \lambda_{n,i}^p \right|, \quad i = 1, \dots, N - m^* + 1. \end{aligned} \quad (229)$$

Из условий а) и с), наложенных на последовательность $\{A_n^*\}_{n=1}^\infty$, следует, что $|A_{n,n+m^*+1+p}|/A_{n+m^*+1}^* \leq 2$ при всех достаточно больших n и $p = 0, \dots, N - m^*$. Поэтому найдется подпоследовательность $\Gamma^* \subseteq \Gamma$ такая, что существуют пределы

$$\lim_{n \in \Gamma^*} \frac{A_{n,n+m^*+1+p}}{A_{n+m^*+1}^*} = \gamma_p, \quad p = 0, \dots, N - m^*,$$

причем в силу условия d) хотя бы один из этих пределов отличен от нуля. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n+1}(\lambda_{n,i}) = \prod_{j=1}^N (\lambda_i - \lambda_j) = 0, \quad i = 1, \dots, N - m^* + 1,$$

то, переходя в неравенстве (229) к пределу при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Gamma^*$, получим неравенство

$$0 \geq \left| \sum_{p=0}^{N-m^*} \gamma_p \lambda_i^p \right|, \quad i = 1, \dots, N - m^* + 1.$$

Это означает, что многочлен $\sum_{p=0}^{N-m^*} \gamma_p z^p$ степени не выше $N - m^*$ обращается в нуль в $N - m^* + 1$ точках λ_i , $i = 1, \dots, N - m^* + 1$, что возможно только лишь при $\gamma_0 = \dots = \gamma_{N-m^*} = 0$. Полученное противоречие показывает, что по крайней мере $m^* \geq m$ нулей многочлена $\beta = \langle \alpha \rangle$ являются особыми точками функции f . Таким образом, утверждение теоремы 4 об особых точках доказано.

Итак, теоремы 4 и 5 доказаны при дополнительном предположении (69). Докажем теоремы 4 и 5 без этого предположения. В общем случае можно указать целые числа $m_0, m_1, \dots, m_{p+1}$ такие, что $0 = m_0 < m_1 < \dots < m_p < m_{p+1} = m$ и

$$1 = R_{m_0}(f) = \dots = R_{m_1-1}(f) < \dots < R_{m_p}(f) = \dots = R_{m_{p+1}-1}(f). \quad (230)$$

Пусть $a_1, \dots, a_{m_p}$ — полюсы функции $\hat{f}$, лежащие в круге $|z| < R_{m-1}(f)$ и упорядоченные в порядке возрастания их модулей. Тогда в силу условия (230)

$$|a_1| = \dots = |a_{m_1}| = R_{m_0}(f), \quad \dots, \quad |a_{m_{p-1}+1}| = \dots = |a_{m_p}| = R_{m_{p-1}}(f). \quad (231)$$

При $s = 0, 1, \dots, p$ обозначим через $\langle \alpha \rangle_s$ многочлен, построенный по полюсам $a_1, \dots, a_{m_s}$ функции $\hat{f}$ и нулям $\lambda_{s,1}, \dots, \lambda_{s,N_s}$ функции α , лежащим на окружности $|z| = R_{m_s}(f)$, т.е.

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle_0(z) &= \prod_{j=1}^{N_0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_{0,j}} \right), \\ \langle \alpha \rangle_s(z) &= \prod_{j=1}^{m_s} \left(1 - \frac{z}{a_j} \right) \prod_{j=1}^{N_s} \left(1 - \frac{z}{\lambda_{s,j}} \right), \quad s = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

При $k \geq m_1$ подправим определение согласованного τ -разбиения k -го порядка следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть для ряда Лорана f имеют место предположения (19) и (230), и пусть полюсы $a_1, \dots, a_{m_p}$ функции $\hat{f}$, лежащие в круге $|z| < R_{m-1}(f)$, упорядочены в соответствии с (231). Разбиение

$$\mathbb{N} = \bigcup_{l=k}^{m_s+N_s} \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq m_s+N_s} \Lambda_{i_1, \dots, i_l}$$

множества натуральных чисел на непересекающиеся подпоследовательности $\Lambda_{i_1, \dots, i_l}$, перенумерованные мультииндексами $i_1, \dots, i_l$ такими, что $i_t = t$ ($t = 1, \dots, m_s$), $m_s + 1 \leq i_{m_s+1} < \dots < i_l \leq m_s + N_s$, будем называть τ -разбиением k -го порядка, согласованным с рядом f и многочленом $\langle \alpha \rangle_s$, если найдется $\bar{\theta} \in \Theta$ такая, что при всех вышеуказанных мультииндексах $i_1, \dots, i_l$ имеют место неравенства (116) и равенства (117).

Покажем, что полюсы $a_1, \dots, a_{m_1}$ являются нулями функции α . Из леммы 10 (при $m = m_1$) следует, что $N_0 \geq m_1$ и существует τ -разбиение порядка m_1 , согласованное с рядом f и многочленом $\langle \alpha \rangle_0$. Из леммы 19 при $M = m_1$ следует, что существует τ -разбиение $\mathbb{N} = \Lambda_{1, \dots, m_1}$ (состоящее из единственной последовательности) порядка m_1 , согласованное с рядом f и многочленом $\prod_{j=1}^{m_1} (1 - z/a_j)$. Поэтому по лемме 20 полюсы $a_1, \dots, a_{m_1}$ функции $\hat{f}$ являются нулями многочлена $\langle \alpha \rangle_0$, а следовательно, и нулями функции α .

Заметим, что рассмотренное выше τ -разбиение $\mathbb{N} = \Lambda_{1, \dots, m_1}$ порядка m_1 , согласованное с рядом f и многочленом $\prod_{j=1}^{m_1} (1 - z/a_j)$, является подправленным τ -разбиением порядка m_1 , согласованным с рядом f и многочленом $\langle \alpha \rangle_1$. Существование подправленного τ -разбиения m_2 -го порядка, согласованного с рядом f и многочленом $\langle \alpha \rangle_1$, доказывается при помощи тех же рассуждений, которые были использованы при доказательстве леммы 10.

Далее аналогичным образом можно показать, что, во-первых, полюсы $a_{m_1+1}, \dots, a_{m_2}$ являются нулями функции α , во-вторых, разбиение $\mathbb{N} = \Lambda_{1, \dots, m_2}$ является подправленным τ -разбиением порядка m_2 , согласованным с рядом f и многочленом $\langle \alpha \rangle_2$, и, в-третьих, существует подправленное τ -разбиение порядка m_3 , согласованное с рядом f и многочленом $\langle \alpha \rangle_2$.

Рассуждая и далее таким же образом, получим существование подправленного τ -разбиения порядка $m_{p+1} = m$, согласованного с рядом f и многочленом $\langle \alpha \rangle_p$. Как и выше, отсюда следуют утверждения теорем 4 и 5.

§ 7. Доказательство теоремы 6

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$\alpha_n(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{n,-p} z^{-p}, \quad \varphi_{n,j}(z) = z^j + \sum_{p=-j+1}^{\infty} \varphi_{n,j,-p} z^{-p}. \quad (232)$$

Докажем, что $R_{m-1}(f) < \infty$. Предположим противное, а именно предположим, что $R_{m-1}(f) = \infty$. Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$, $\mu \leq m-1$, все полюсы функции f в D (как и ранее, для упрощения записи будем предполагать, что эти полюсы простые) и положим

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{\mu} (\varphi(z) - \varphi(\lambda_j)) \quad (233)$$

(при $\mu = 0$ полагаем $g(z) = f(z)$). Заметим, что функция $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n z^n$ голоморфна в D и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} |g_n|^{1/n} = 0$. Положим

$$\gamma_n(z) = \alpha_n(z) \frac{\sum_{j=0}^{\mu} x_{n,j} \varphi_{n,j}(z)}{\prod_{j=1}^{\mu} (\varphi(z) - \varphi(\lambda_j))} \quad (234)$$

(при $\mu = 0$ полагаем $\gamma_n(z) = \alpha_n(z)$), где $x_{n,\mu} = 1$, а не зависящие от z коэффициенты $x_{n,0}, \dots, x_{n,\mu-1}$ подбираются таким образом, чтобы выполнялась система равенств

$$\sum_{j=0}^{\mu-1} x_{n,j} \varphi_{n,j}(\lambda_i) = -\varphi_{n,\mu}(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, \mu \quad (235)$$

(другими словами, чтобы дробь, стоящая в правой части равенства (234), была голоморфной функцией в $D \cup \{\infty\}$). Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n,j}(\lambda_i) = \varphi^j(\lambda_i)$$

при всех $j = 0, \dots, \mu - 1$, то определитель системы (235) стремится при $n \rightarrow \infty$ к определителю Вандермонда $W(\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_\mu))$, который отличен от нуля в силу попарной различности точек $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ и однолиственности функции $\varphi(z)$. Таким образом, при всех достаточно больших n решение системы уравнений (235) существует и имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,j} = x_j$, $j = 0, \dots, \mu - 1$, определяемый системой уравнений

$$\sum_{j=0}^{\mu-1} x_j \varphi^j(\lambda_i) = -\varphi^\mu(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, \mu.$$

Следовательно, функции $\gamma_n(z)$ голоморфны в $D \cup \{\infty\}$ и имеют равномерный внутри D предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(z) = \alpha(z) \frac{\sum_{j=0}^{\mu} x_j \varphi^j(z)}{\prod_{j=1}^{\mu} (\varphi(z) - \varphi(\lambda_j))} = \alpha(z).$$

Из равенств (232) и (234) следует, что при достаточно больших n разложение в ряд Лорана функций $\gamma_n(z)$ имеет следующий вид:

$$\gamma_n(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{n,-p} z^{-p}, \quad (236)$$

где коэффициенты $\gamma_{n,-p}$ оцениваются с учетом вышесказанного неравенством

$$|\gamma_{n,-p}| \leq C 2^p, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (237)$$

где $C > 0$ не зависит ни от n , ни от p .

Так как $\mu \leq m - 1$, то из системы соотношений (26), равенств (233), (234), (236) и неравенства (237) при всех $n \geq n_0$ получаем неравенство

$$0 = \left| \sum_{j=0}^{\mu} x_{n,j} [f \alpha_n \varphi_{n,j}]_n \right| = |[g \gamma_n]_n| \geq |g_n| - C \sum_{p=1}^{\infty} |g_{n+p}| 2^p. \quad (238)$$

Из этого неравенства и равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} |g_n|^{1/n} = 0$ следует, что $g_n = 0$ при всех $n \geq n_1$. Действительно, в противном случае найдутся числа $n_2 \geq n_0$ и $\eta > 0$ такие, что

$$|g_{n_2}|^{1/n_2} = \eta, \quad |g_n|^{1/n} \leq \eta \quad \text{при всех } n > n_2 \text{ и } C \sum_{p=1}^{\infty} \eta^p 2^p < 1,$$

что противоречит неравенству (238) при $n = n_2$.

Из равенства

$$f(z) = g(z) \prod_{i=1}^{\mu} (\varphi(z) - \varphi(\lambda_i))^{-1}$$

и равенства $g_n = 0$ при всех $n \geq n_1$ следует, что функция f мероморфна в $D \cup \{\infty\}$, имеет не более $\mu \leq m - 1$ конечных полюсов, а в точке $z = \infty$

имеет полюс порядка не выше n_1 . Поэтому функция $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ является рациональной, имеющей не более $m - 1$ полюсов функцией, что противоречит предположению теоремы 6. Полученное противоречие показывает, что $R_{m-1}(f) < \infty$. Таким образом, получаем, что теорема 6 является частным случаем теоремы 4, так как равенства (26) влекут за собой равенства (20).

Теорема 6 доказана.

§ 8. Доказательство теорем 1, 2 и 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $P_{n,m}/Q_{n,m}$ – ортогональная аппроксимация Паде типа (n, m) функции F , Γ – контур, охватывающий отрезок $E = [-1, 1]$ и лежащий в области голоморфности функции F . Без потери общности можно считать, что старший коэффициент многочлена $Q_{n,m}$ равен 1. Так как $\deg P_{n,m} \leq n$, то, умножив равенство (11) на $P_\nu(x)$, где $\nu = n+1, \dots, n+m$, и проинтегрировав его по отрезку $[-1, 1]$, получим с учетом равенств (5), что коэффициенты многочлена $Q_{n,m}$ удовлетворяют системе m равенств

$$\int_{-1}^1 Q_{n,m}(x) F(x) P_\nu(x) d\sigma(x) = 0, \quad \nu = n+1, \dots, n+m. \quad (239)$$

Для будущего доказательства теоремы 3 отметим, что верно и обратное утверждение: если многочлен $Q_{n,m}$ не тождественно равен нулю и удовлетворяет системе равенств (239), то он является знаменателем ортогональной аппроксимации Паде типа (n, m) функции F .

Хорошо известно (см. [12]), что если функция σ удовлетворяет условию Сегё (7), то существует равномерный внутри $\mathbb{C} \setminus E$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(z) \psi_E^{n+1}(z) = H(z) \neq 0, \quad (240)$$

где

$$H_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{z-x} d\sigma(x) \quad (241)$$

– функция второго рода.

Пусть $\phi_E(z) = \psi_E^{-1}(z) = (z + z^{-1})/2$, $f(z) = F(\phi_E(z))$. Положим $\gamma = \psi_E(\Gamma)$,

$$\begin{aligned} \alpha_n(z) &= z^{-m} Q_{n,m}(\phi_E(z)) \phi_E'(z) H(\phi_E(z)), \\ \varphi_{n,\nu}(z) &= z^{n+m+1} \frac{H_{n+m-\nu}(\phi_E(z))}{H(\phi_E(z))}, \quad \nu = 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Из предположений теоремы 1 и равенства (240) следует, что существуют равномерные внутри $\{|z| > 1\}$ пределы

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(z) &= \alpha(z) = \phi_E'(z) H(\phi_E(z)) z^{-m} \prod_{j=1}^m (\phi_E(z) - \tau_j), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n,\nu}(z) &= z^\nu, \quad \nu = 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Заметим, что функция α имеет не более m нулей, и эти нули лежат среди точек $\lambda_j = \psi_E(\tau_j)$, где $\tau_j \in \mathbb{C} \setminus E$ (невозможность включения $\tau_j \in E$ будет получена

ниже как следствие теоремы 6). Из определения функций f , α_n и $\varphi_{n,\nu}$, формулы для коэффициентов ряда Лорана, формулы замены переменной ($t = \phi_E(z)$) в интеграле и определения (241) функций второго рода получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} [f\alpha_n\varphi_{n,\nu}]_n &= [F(\phi_E(z))Q_{n,m}(\phi_E(z))H_{n+m-\nu}(\phi_E(z))z^{n+1}\phi'_E(z)]_n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(\phi_E(z))Q_{n,m}(\phi_E(z))H_{n+m-\nu}(\phi_E(z))\phi'_E(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(t)Q_{n,m}(t)H_{n+m-\nu}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(t)Q_{n,m}(t) \int_{-1}^1 \frac{P_{n+m-\nu}(x)}{t-x} d\sigma(x) dt. \end{aligned}$$

Меняя в последнем выражении порядок интегрирования, пользуясь теоремой Коши и учитывая равенства (239), получаем равенства

$$[f\alpha_n\alpha_{n,\nu}]_n = \int_{-1}^1 P_{n+m-\nu}(x)F(x)Q_{n,m}(x) d\sigma(x) = 0, \quad \nu = 0, \dots, m-1,$$

совпадающие с равенствами (26).

Так как функция F не является рациональной функцией, имеющей не более $m-1$ полюсов (в противном случае $P_{n,m}/Q_{n,m} = F$ при всех достаточно больших n , что противоречит предположениям теоремы 1 о существовании m полюсов аппроксимаций, имеющих пределы), то регулярная часть функции $f(z) = F(\phi_E(z))$ также не является рациональной функцией, имеющей не более $m-1$ полюсов. Отсюда в силу теоремы 6 с учетом равенства $F(z) = f(\psi_E(z))$ получаем утверждение теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $P_{n,m}/Q_{n,m}$ – аппроксимация Паде–Фабера типа (n, m) функции F , Γ – контур, охватывающий E и лежащий в области голоморфности функции F . Без потери общности можно считать, что старший коэффициент многочлена $Q_{n,m}$ равен 1. Из равенств (12) и (13) следует, что коэффициенты многочлена $Q_{n,m}$ удовлетворяют системе m равенств

$$\int_{\Gamma} \frac{Q_{n,m}(t)F(t)\psi'_E(t)}{\psi_E^{\nu+1}(t)} dt = 0, \quad \nu = n+1, \dots, n+m. \quad (242)$$

Пусть $\phi_E(z) = \psi_E^{-1}(z)$, $f(z) = F(\phi_E(z))$. Положим $\gamma = \psi_E(\Gamma)$,

$$\alpha_n(z) = z^{-m}Q_{n+1,m}(\phi_E(z)).$$

Из предположений теоремы 2 следует, что существует равномерный внутри $\{|z| > 1\}$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(z) = \alpha(z) = z^{-m} \prod_{j=1}^m (\phi_E(z) - \tau_j),$$

причем предельная функция $\alpha(z)$ имеет не более m нулей, и эти нули лежат среди точек $\lambda_j = \psi_E(\tau_j)$, где $\tau_j \in \mathbb{C} \setminus E$.

С учетом определения функций f и α_n и формулы для коэффициентов ряда Лорана получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} [f(z)\alpha_n(z)z^\nu]_n &= [f(z)Q_{n+1,m}(\phi_E(z))z^{\nu-m}]_n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\phi_E(z))Q_{n+1,m}(\phi_E(z))}{z^{n+1+m-\nu}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(t)Q_{n+1,m}(t)\psi'_E(t)}{\psi_E(t)^{n+1+m-\nu}} dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (242) получаем равенства

$$[f(z)\alpha_n(z)z^\nu]_n = 0, \quad \nu = 0, \dots, m-1,$$

совпадающие с равенствами (20) при $\varphi_{n,\nu}(z) = z^\nu$ ($\nu = 0, \dots, m-1$). Аналогично завершающей части доказательства теоремы 1 отсюда по теореме 6 получаем утверждение теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Легко видеть, что импликации $2) \implies 1)$ и $4) \implies 1)$ теоремы 3 уже фактически доказаны (см. завершающую часть доказательства теорем 2 и 1). Импликация $3) \implies 1)$ может быть получена аналогичным образом (см. [8]) как следствие теоремы 6 и равенств

$$\int_\Gamma \frac{Q_{n,m}(t)F(t)}{\omega_{n+m+1}(t)} t^\nu dt = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1, \quad (243)$$

где $Q_{n,m}$ – знаменатель многоточечной аппроксимации Паде типа (n, m) и $\omega_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_{k,n})$. Равенства (243) являются следствием определения (3) многоточечных аппроксимаций Паде и равенств

$$\int_\Gamma \frac{P_{n,m}(t)}{\omega_{n+m+1}(t)} t^\nu dt = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1.$$

Докажем обратные импликации $1) \implies 2)$ – $4)$. Пусть Γ – контур, охватывающий E и лежащий в области голоморфности функции F , $\gamma = \psi_E(\Gamma)$, $\phi_E(z) = \psi_E^{-1}(z)$. Предположим, что утверждение 1) теоремы 3 имеет место. Тогда по теореме 5 имеют место и равенства (24).

Обозначим через $Q_{n,m}^q$ ($q = 1, 2, 3$) знаменатели m -й строки таблицы Паде функции F соответственно ортогональных разложений (при $q = 1$), Паде–Фабера (при $q = 2$) и многоточечных аппроксимаций (при $q = 3$). Заметим, что

$$Q_{n,m}^q(z) = \begin{vmatrix} A_{0,1}^q & \dots & A_{m,1}^q \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{0,m}^q & \dots & A_{m,m}^q \\ 1 & \dots & z^m \end{vmatrix} \quad (244)$$

(при условии, что правая часть этого равенства не равна тождественно нулю), где при $j = 0, \dots, m$, $\nu = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} A_{j,\nu}^1 &= \int_{-1}^1 x^j F(x) P_{n+\nu}(x) d\sigma(x), & A_{j,\nu}^2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{t^j F(t) \psi'_E(t)}{\psi_E(t)^{n+1+\nu}} dt, \\ A_{j,\nu}^3 &= \frac{c^{n+m+1}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{t^{j+\nu-1} F(t)}{\omega_{n+m+1}(t)} dt. \end{aligned}$$

Действительно, при $q = 1$ равенство (244) следует из системы равенств (239), при $q = 2$ – из системы равенств (242), а при $q = 3$ – из системы равенств (243).

По теореме Коши, по формуле (241) для определения функций второго рода и формуле для коэффициентов ряда Лорана при всех $j = 0, \dots, m$, $\nu = 1, \dots, m$ получаем равенства

$$\begin{aligned} A_{j,\nu}^1 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t^j F(t)}{t-x} dt \right) P_{n+\nu}(x) d\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^j F(t) H_{n+\nu}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \phi_E^j(z) f(z) H_{n+\nu}(\phi_E(z)) \phi_E'(z) dz = [f(z) \phi_E^j(z) h_{n+\nu}(z) z^{-\nu}]_n, \end{aligned}$$

где $h_n(z) = \phi_E'(z) z^{n+1} H_n(\phi_E(z))$.

Аналогичным образом,

$$\begin{aligned} A_{j,\nu}^2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi_E^j(z) f(z)}{z^{n+1+\nu}} dz = [f(z) \phi_E^j(z) z^{-\nu}]_n, \\ A_{j,\nu}^3 &= \frac{c^{n+m+1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) \phi_E^{j+\nu-1}(z)}{\omega_{n+m+1}(\phi_E(z))} \phi_E'(z) dz = [f(z) \phi_E^{j+\nu-1}(z) g_n(z)]_n, \end{aligned}$$

где

$$g_n(z) = \frac{c^{n+m+1} z^{n+1}}{\omega_{n+m+1}(\phi_E(z))} \phi_E'(z).$$

Используя обозначение (71), запишем равенство (244) в виде равенства

$$Q_{n,m}^q(z) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} z^j f_{m,n}^{\vec{\Psi}_m^{n,q} \oplus \vec{\Phi}_{m+1,\vec{j}}},$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}_m^{n,1}(z) &= (h_{n+1}(z) z^{-1}, \dots, h_{n+m}(z) z^{-m}), & \vec{\Psi}_m^{n,2}(z) &= (z^{-1}, \dots, z^{-m}), \\ \vec{\Psi}_m^{n,3}(z) &= g_n(z) (1, \phi_E(z), \dots, \phi_E^{m-1}(z)), & \vec{\Phi}_{m+1} &= (1, \phi_E(z), \dots, \phi_E^m(z)). \end{aligned}$$

Так как функции $h_n(z)$ и $g_n(z)$ имеют в силу условий (240) и (4) равномерные внутри $|z| > 1$ пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z) = h(z) \neq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = g(z) \neq 0$, то вектор-функции $\vec{\Psi}_m^{n,q}(z)$ тоже имеют предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\Psi}_m^{n,q}(z) = \vec{\Psi}_m^q(z) = \begin{cases} h(z)(z^{-1}, \dots, z^{-m}), & \text{если } q = 1, \\ (z^{-1}, \dots, z^{-m}), & \text{если } q = 2, \\ g(z)(1, \phi_E(z), \dots, \phi_E^{m-1}(z)), & \text{если } q = 3. \end{cases}$$

Следовательно, по теореме 5 (см. равенства (24)) существует предел

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n,m}^q(z)}{\det(f_{n-i-j})_{i,j=0,\dots,m-1}} \\ &= \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} z^j \frac{\det((\vec{\Psi}_m^q)_r(\lambda_t))_{r,t=1,\dots,m}}{W^2(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} \\ &= \frac{\det((\vec{\Psi}_m^q)_r(\lambda_t))_{r,t=1,\dots,m}}{W^2(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & \phi_E^m(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \phi_E^m(\lambda_m) \\ 1 & \dots & z^m \end{vmatrix}, \quad q = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Это означает, что многочлены $Q_{n,m}^q$, определенные равенством (244), при достаточно больших n отличны от тождественного нуля и полюсы m -й строки таблицы трех указанных выше видов аппроксимаций Паде имеют пределы $\phi_E(\lambda_1), \dots, \phi_E(\lambda_m)$.

Таким образом, утверждения 1) $\implies$ 2)–4), а вместе с ними и теорема 3 доказаны.

Список литературы

- [1] Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, 1, 2, Мир, М., 1986; пер. с англ.: G. A. Baker, jr.; P. Graves-Morris, *Padé approximants. Part I*, II, Encyclopedia Math. Appl., **13–14**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [2] G. A. Baker, jr., *Essentials of Padé approximants*, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1975.
- [3] А. А. Гончар, “Рациональные аппроксимации аналитических функций”, *Совр. пробл. матем.*, 2003, № 1, 83–106.
- [4] С. П. Суетин, “Об одной обратной задаче для m -й строки таблицы Паде”, *Матем. сб.*, **124(166)**:2(6) (1984), 238–250; англ. пер.: S. P. Suetin, “On an inverse problem for the m -th row of the Padé table”, *Math. USSR-Sb.*, **52**:1 (1985), 231–244.
- [5] E. Fabry, “Sur les points singuliers d’une fonction donnée par son développement en série et l’impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **13** (1896), 367–399.
- [6] А. А. Гончар, “Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций”, *Матем. сб.*, **115(157)**:4(8) (1981), 590–613; англ. пер.: A. A. Gončar, “Poles of rows of the Padé table and meromorphic continuation of functions”, *Math. USSR-Sb.*, **43**:4 (1982), 527–546.
- [7] В. И. Буслаев, “О полюсах m -й строки таблицы Паде”, *Матем. сб.*, **117(159)**:4 (1982), 435–441; англ. пер.: V. I. Buslaev, “On the poles of the m -th row of the Padé table”, *Math. USSR-Sb.*, **45**:4 (1983), 423–429.
- [8] В. И. Буслаев, “Соотношения для коэффициентов и особые точки функции”, *Матем. сб.*, **131(173)**:3(11) (1986), 357–384; англ. пер.: V. I. Buslaev, “Relations for the coefficients, and singular points of a function”, *Math. USSR-Sb.*, **59**:2 (1988), 349–377.
- [9] В. И. Буслаев, “О теореме Фабри об отношении для ортогональных рядов”, *Комплексный анализ и приложения*, Тр. МИАН, **253**, М., Наука, 2006, 14–29; англ. пер.: V. I. Buslaev, “On the Fabry ratio theorem for orthogonal series”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **253**:1 (2006), 8–21.
- [10] Е. А. Рахманов, “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **103(145)**:2(6) (1977), 237–252; англ. пер.: E. A. Rahmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **32**:2 (1977), 199–213.
- [11] Е. А. Рахманов, “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II”, *Матем. сб.*, **118(160)**:1(5) (1982), 104–117; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II”, *Math. USSR-Sb.*, **46**:1 (1983), 105–117.
- [12] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [13] С. П. Суетин, “Обратные теоремы об обобщенных аппроксимациях Паде”, *Матем. сб.*, **109(151)**:4(8) (1979), 629–646; англ. пер.: S. P. Suetin, “Inverse theorems on generalized Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **37**:4 (1980), 581–597.

- [14] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1964; англ. пер.: V. I. Smirnov, N. A. Lebedev, *Functions of a complex variable. Constructive theory*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1968.
- [15] H. Poincaré, “Sur les Equations Linéaires aux Différentielles Ordinaires et aux Différences Finies”, *Amer. J. Math.*, **7**:3 (1885), 203–258.
- [16] T. Kakehashi, “The decomposition of coefficients of power-series and the divergence of interpolation polynomials”, *Proc. Japan Acad.*, **31**:8 (1955), 517–523.
- [17] Sh. Agmon, “Sur les séries de Dirichlet”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **66** (1949), 263–310.
- [18] J. Hadamard, “Essay on the study of functions defined by their Taylor expansion”, *J. Math.* (4), **8** (1892), 101–186.
- [19] R. Montessus de Ballore, “Sur les fractions continues algébriques”, *Bull. Soc. Math. France*, **30** (1902), 28–36.

В. И. Буслаев (V. I. Buslaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: buslaev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

15.11.2007 и 18.03.2009