Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Петроградский, О численных характеристиках подмногообразий трех многообразий алгебр Ли, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 6, 111–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:33:11

УДК 512.55

В. М. Петроградский

О численных характеристиках подмногообразий трех многообразий алгебр Ли

Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие алгебр Ли. Для каждого n рассмотрим размерность пространства полилинейных элементов от n различных букв свободной алгебры этого многообразия. Возникает последовательность коразмерностей $c_n(\mathbf{V})$. Для изучения экспоненциального роста определяют экспоненту многообразия $\text{Exp } \mathbf{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$. Для многообразия алгебр Ли с нильпотентным коммутантом $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$ известно, что $\text{Exp}(\mathbf{N}_s \mathbf{A}) = s$, и в случае поля нулевой характеристики для любого подмногообразия $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_s \mathbf{A}$ экспонента является целым числом. Мы докажем, что это утверждение верно над любым полем.

В отличие от ассоциативных алгебр для многообразий алгебр Ли типичен сверхэкспоненциальный рост для последовательности коразмерностей. Автором ранее была предложена шкала для измерения этого роста. Для двух многообразий $\mathbf{AN}_2$ и $\mathbf{A}^3$ устанавливается следующее экстремальное свойство. Любое подмногообразие в них не может быть “чуть-чуть” меньше в терминах этой шкалы. То есть либо подмногообразие лежит на той же точке шкалы, что и само многообразие, либо оно расположено на шкале существенно ниже. Эти результаты также установлены над произвольным полем и без привлечения теории представлений симметрической группы.

Библиография: 29 названий.

§ 1. Введение

Пусть K обозначает основное поле, никаких ограничений на него мы не накладываем. Все лиевские произведения мы считаем левонормированными, т.е. $a_1 a_2 \cdots a_n = (\dots (a_1, a_2), \dots, a_n)$. Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие алгебр Ли (или ассоциативных алгебр), т.е. класс всех алгебр Ли, удовлетворяющих некоторому множеству тождественных соотношений. За необходимыми определениями теории многообразий алгебр Ли мы отсылаем читателя к монографии [1]. Пусть $F(\mathbf{V}, X)$ – свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$, порожденная счетным множеством свободных порождающих $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Обозначим через $P_n(\mathbf{V}) \subset F(\mathbf{V}, X)$ подпространство всех полилинейных элементов степени n на множестве $\{x_1, \dots, x_n\}$ и рассмотрим размерность этого подпространства:

$$c_n(\mathbf{V}) = c_n(F(\mathbf{V}, X), X) = \dim_K P_n(\mathbf{V}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Возникает *последовательность коразмерностей* $c_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$, которая является важной характеристикой многообразия $\mathbf{V}$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 98-01-01020, 99-01-00233), программы “Университеты России” (грант № 1357) и гранта Минобразования России (грант № 96-01-00146).

Сделаем несколько замечаний по поводу роста многообразий ассоциативных алгебр. В случае нетривиального многообразия последовательность $c_n(\mathbf{V})$ ограничена некоторой экспонентой; этот факт был существенно использован А. Регевым для доказательства того факта, что тензорное произведение PI-алгебр всегда является PI-алгеброй [2], [3], см. также [4]. В случае поля характеристики нуль для ряда ассоциативных многообразий (для так называемых первичных, в частности, матричных) известны достаточно точные асимптотики [5]. Для изучения экспоненциального роста определяют (*верхнюю*) *экспоненту* и (*нижнюю*) *экспоненту* многообразия (иногда используются другие обозначения)

$$\text{Exp } \mathbf{V} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \quad \underline{\text{Exp}} \mathbf{V} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}.$$

Одним из новых результатов является следующий: экспонента произвольного многообразия ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики является целым числом [6].

В настоящей статье мы изучаем последовательность коразмерностей для многообразий алгебр Ли. По поводу различных аспектов экспоненциального роста многообразий алгебр Ли см. обзор [7], в частности, там изучаются многообразия почти полиномиального роста, а именно такие, что всякое собственное подмногообразие имеет полиномиальный рост. В [8] показано, что в случае нулевой характеристики $\text{Exp } \mathbf{V} \notin (1, 2)$ и построены примеры с экспонентой, равной 2. Интересна следующая проблема: для каких многообразий алгебр Ли экспонента является целым числом?

Мы используем стандартные обозначения $f(x) \approx g(x)$, $x \rightarrow +\infty$, в случае $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 1$; $f(x) = o(g(x))$, если существует такая функция, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$; также $f(x) = O(g(x))$, если $f(x) = \beta(x)g(x)$, где $\beta(x)$ ограничена при $x \rightarrow +\infty$.

Неравенство $f(n) \stackrel{a}{\leq} g(n)$ для функций натурального (или вещественного) аргумента обозначает *асимптотическое неравенство*, т.е. выполненное для достаточно больших n .

Напомним определение *полинильпотентного* многообразия алгебр Ли [1], [9], соответствующего набору натуральных чисел $(s_q, \dots, s_2, s_1)$. Пусть в алгебре Ли L существует цепочка идеалов

$$0 = L_{q+1} \subset L_q \subset \dots \subset L_2 \subset L_1 = L$$

таких, что $L_i/L_{i+1} \in \mathbf{N}_{s_i}$, $i = 1, \dots, q$, где $\mathbf{N}_{s_i}$ обозначает класс всех алгебр Ли, нильпотентных класса s_i . Для фиксированного набора $(s_q, \dots, s_2, s_1)$ получаем многообразие, обозначаемое $\mathbf{N}_{s_q} \dots \mathbf{N}_{s_2} \mathbf{N}_{s_1}$. В частности, если все факторы абелевы, получаем $\mathbf{A}^q$ — многообразие разрешимых алгебр Ли ступени q .

В частности, многообразие $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$ задается тождеством

$$(x_1 x_2) \dots (x_{2s+1} x_{2s+2}) \equiv 0.$$

В [10] при помощи экспоненциальных производящих функций доказан следующий факт.

ЛЕММА 1.1. *Для $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$ верно $c_n(\mathbf{N}_s \mathbf{A}) \approx s^{n-s-1} n^s$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.1. $\text{Exp}(\mathbf{N}_s \mathbf{A}) = \underline{\text{Exp}}(\mathbf{N}_s \mathbf{A}) = s$.

В случае нулевой характеристики для изучения роста многообразий как лиевских, так и ассоциативных типично использование мощного аппарата теории представлений симметрической группы [7], [8]. Другой пример: если над полем нулевой характеристики последовательность коразмерностей для лиевого или ассоциативного многообразия ограничена полиномом, то показатель полиномиальности является целым числом [11]. Также при помощи теории представлений симметрической группы получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1 [12]. Пусть $\mathbf{V}$ – подмногообразие в $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$ над полем нулевой характеристики. Тогда $\text{Exp } \mathbf{V} = \underline{\text{Exp}} \mathbf{V} \in \{1, \dots, s\}$.

Этот результат интересен, поскольку недавно построены примеры разрешимых многообразий алгебр Ли с дробной экспонентой [13]. Наша первая цель – установление целочисленности $\text{Exp } \mathbf{V}$, где $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_s \mathbf{A}$, в случае произвольного поля (теорема 2.1).

В отличие от ассоциативного случая рост достаточно “маленького” многообразия $\mathbf{AN}_2$ является сверхэкспоненциальным [14]. Напомним, что для многообразия всех алгебр Ли мы имеем $c_n = (n - 1)!$. Для изучения обширной области роста многообразий алгебр Ли автором предложена шкала [15], она уточнена в [10], см. также [16], [17] и §3. Техника, развитая для изучения экспоненциального роста подмногообразий в $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$, находит также приложение в §5 к изучению сверхэкспоненциального роста подмногообразий в $\mathbf{A}^3$.

Два других результата настоящей статьи касаются многообразий $\mathbf{AN}_2$ и $\mathbf{A}^3$, а именно, они определяют расположение их подмногообразий на упомянутой шкале роста (теоремы 4.1 и 5.1). Они также установлены над произвольным полем.

§ 2. Подмногообразия в $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$

Первая наша цель – доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathbf{V}$ – подмногообразие в $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$, основное поле произвольно. Тогда

- 1) $\text{Exp } \mathbf{V} = \underline{\text{Exp}} \mathbf{V}$;
- 2) экспонента $\mathbf{V}$ является целым числом: $\text{Exp } \mathbf{V} \in \{1, \dots, s\}$;
- 3) если $\text{Exp } \mathbf{V} = 1$, то $c_n(\mathbf{V})$ ограничена полиномом.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие над полем K , $\text{char } K \neq 2$, причем $\underline{\text{Exp}} \mathbf{V} < \sqrt{2}$. Тогда $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [18] условие $\underline{\text{Exp}} \mathbf{V} < \sqrt{2}$ над полем K , $\text{char } K \neq 2$, влечет $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_s \mathbf{A}$ для некоторого s . Остается применить теорему 2.1.

Напомним, что над полем характеристики нуль это утверждение известно давно [19], а недавно получено более сильное и законченное утверждение: над полем нулевой характеристики $\underline{\text{Exp}} \mathbf{V} < 2$ влечет полиномиальность роста [8].

Перейдем к доказательству теоремы. Мы будем рассматривать пересекающиеся подмножества в $\{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим частичный порядок: $A < B$ для $A, B \subset \{1, 2, \dots, n\}$, если $a < b$ для любых $a \in A, b \in B$. Пусть имеются непересекающиеся подмножества $I_1, I_2, \dots, I_c \subset \{1, 2, \dots, n\}$ (подмножества могут быть пустыми). Будем называть I_i цепочками, а $(I_1, I_2, \dots, I_c)$ – набором цепочек.

Рассмотрим еще одну частичную упорядоченность на цепочках. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_t\}$, $J = \{j_1, \dots, j_s\}$, причем $i_1 > \dots > i_t$, $j_1 > \dots > j_s$. Тогда полагаем $I \prec J$, если $(i_1, \dots, i_t) \prec (j_1, \dots, j_s)$, где последняя упорядоченность лексикографическая слева направо. Упорядоченность цепочек мы распространяем лексикографически слева направо на наборы цепочек одинаковой длины $(I_1, \dots, I_c)$, при этом также используем знак $\prec$.

Пусть зафиксирован набор цепочек, тогда назовем $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_c)$ *ожерельем*, если $\Omega_i \subset I_i$, $i = 1, \dots, c$, $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_c$ (для пустой компоненты Ω_i соответствующие неравенства считаем выполненными). Назовем набор цепочек (или ожерелье) непустым, если хотя одна компонента непуста.

Пусть зафиксировано некоторое число m . Опишем *m-алгоритм выделения ожерелья* $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_c)$ из набора цепочек $(I_1, I_2, \dots, I_c)$. Будем перебирать компоненты $I_1, I_2, \dots$. Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{i-1}$, а также другие сопутствующие множества в компонентах $I_1, I_2, \dots, I_{i-1}$ уже построены. Разбиваем цепочку на две части $I_i = J_i \cup \tilde{I}_{i-1}$, где к J_i мы относим все элементы, большие элементов множества $\tilde{\Omega}_{i-1} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_{i-1}$, а в $\tilde{I}_{i-1}$ записываем оставшиеся элементы; по определению считаем $\tilde{\Omega}_0 = \emptyset$. Если $\tilde{\Omega}_{i-1} = \emptyset$, то полагаем $J_i = I_i$, $\tilde{I}_i = \emptyset$. Возникают два случая.

- 1) $|J_i| \leq m$, тогда полагаем $\Omega_i = \emptyset$ и возникает *ложный сегмент* $F_i = J_i$.
- 2) $|J_i| > m$. В этом случае формируем из m максимальных элементов множества J_i (*истинный сегмент* S_i), оставшиеся элементы мы заносим в ожерелье $\Omega_i = J_i \setminus S_i$.

Далее мы переходим к цепочке I_{i+1} .

ЛЕММА 2.1. *m-алгоритм обладает следующими свойствами:*

- 1) *первоначальный набор цепочек $(I_1, I_2, \dots, I_c)$ распадается на ожерелье $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_c)$; в каждой цепочке I_j , $j = 1, \dots, c$, алгоритм отрезает сегмент (истинный S_j , $|S_j| = m$; или ложный F_j , $|F_j| \leq m$); в результате остается новый набор цепочек $(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \dots, \tilde{I}_c)$;*
- 2) *пустое ожерелье возникает тогда и только тогда, когда $|I_i| \leq m$, $i = 1, \dots, c$;*
- 3) *для $\tilde{I}_s \neq \emptyset$ существует предшествующая цепочка I_t , $t < s$, с большим сегментом $S_t > \tilde{I}_s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое свойство непосредственно вытекает из описания *m-алгоритма*. Для доказательства второго свойства достаточно заметить, что первая ненулевая компонента ожерелья Ω_i возникает в первой цепочке, длина которой превосходит m .

Докажем третье свойство. Пусть $\tilde{I}_s \neq \emptyset$, выберем максимальное $t < s$ такое, что $\Omega_t \neq \emptyset$, именно при сравнении с Ω_t и возникло $\tilde{I}_s$. Предположим, что θ — максимальный элемент в Ω_t . В J_s мы записали все элементы из I_s , большие θ . Поэтому $\theta > \tilde{I}_s$. По алгоритму в I_t выделен истинный сегмент S_t , следовательно, $S_t > \theta > \tilde{I}_s$.

Если построено непустое ожерелье, то рассматриваем новый набор цепочек $(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \dots, \tilde{I}_c)$, к которому применяем *m-алгоритм* и т. д. Ко всем множествам мы дополнительно добавим верхний индекс, который обозначает номер шага, на котором возникли данные множества; при этом к первоначальному набору цепочек добавим индекс 1.

ЛЕММА 2.2. Пусть в результате итераций m -алгоритма построены k непустых ожерелий $\Omega^1, \dots, \Omega^k$. Тогда существует набор убывающих сегментов

$$S_{i_1}^1 > S_{i_2}^2 > \dots > S_{i_k}^k, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad |S_{i_j}^j| = m, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\Omega_{i_k}^k \neq \emptyset$, тогда в этой компоненте на k -м шаге возник истинный сегмент $S_{i_k}^k \subset \tilde{I}_{i_k}^{k-1}$, по свойству 3) леммы 2.1 существует $S_{i_{k-1}}^{k-1} > \tilde{I}_{i_k}^{k-1}$, $i_{k-1} < i_k$, получаем $S_{i_{k-1}}^{k-1} > S_{i_k}^k$, далее опять применяем свойство 3) леммы 2.1 к $S_{i_{k-1}}^{k-1} \subset \tilde{I}_{i_{k-1}}^{k-2}$ и т. д. и получаем (1).

ЛЕММА 2.3. Пусть зафиксировано $c \in \mathbb{N}$ и многообразие алгебр Ли $\mathbf{V}$ таково, что $\text{Exp } \mathbf{V} < k$, где $k \in \mathbb{N}$, $k \leq c$. Тогда существует натуральное n вида $n = n' + d$, где $n' = tk$ и $c \leq d < c + k$, и такое, что для любых фиксированных полилинейных слов $a_1, \dots, a_k, y_1, \dots, y_k$ из букв $x_{n'+1}, \dots, x_n$ выполнено нетривиальное тождество вида

$$\begin{aligned} & a_1(y_1 x_{n'} \dots x_{n'-m+1}) a_2 \dots a_k(y_k x_m \dots x_1) \\ & \equiv \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} a_1(y_1 x_{\sigma(1,1)} \dots x_{\sigma(1,m)}) a_2 \dots a_k(y_k x_{\sigma(k,1)} \dots x_{\sigma(k,m)}), \quad \lambda_{\sigma} \in K, \end{aligned}$$

где слагаемые суммы соответствуют всевозможным разбиениям σ множества $\{1, \dots, n'\}$ на k групп размера m :

$$\begin{aligned} & \{\sigma(1,1), \dots, \sigma(1,m)\} \cup \dots \cup \{\sigma(k,1), \dots, \sigma(k,m)\} = \{1, \dots, n'\}, \\ & \sigma(i,1) > \dots > \sigma(i,m), \quad i = 1, \dots, k; \end{aligned}$$

слагаемое, соответствующее разбиению $\{n', \dots, n' - m + 1\} \cup \dots \cup \{m, \dots, 1\}$, мы выделяем отдельно в левой части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существует подпоследовательность

$$n_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[n_i]{c_{n_i}(\mathbf{V})} < k. \quad (2)$$

Для каждого n_i мы подбираем единственное m_i такое, что $n_i = km_i + d_i$, где $c \leq d_i < c + k$. Зафиксируем $n = n_i$, $m = m_i$, $d = d_i$, $n' = km_i$.

Пусть α_n — число мономов указанного в лемме вида, где $a_1, \dots, a_k, y_1, \dots, y_k$ фиксированы. Упорядочим буквы так: $x_n > \dots > x_1$; без ограничения общности рассуждений мы считаем, что буквы $x_n, \dots, x_{n'+1}$ стоят во всех мономах на фиксированных местах по убыванию. Тогда все мономы соответствуют правильным словам и скобки на них расставлены допустимым образом, значит, все эти мономы есть часть базиса Ширшова [20], поэтому мономы линейно независимы в свободной алгебре Ли. По формуле Стирлинга

$$\alpha_n = \frac{n!}{((n'/k)!)^k} \approx \frac{k^{n'} k^{k/2}}{(2\pi n')^{(k-1)/2}} = \frac{k^{n-d} k^{k/2}}{(2\pi(n-d))^{(k-1)/2}}; \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[n_i]{\alpha_{n_i}} = k.$$

Используя (2), получаем для достаточно большого $n = n_i$ линейную зависимость наших мономов по модулю $P_n(\mathbf{V}, \{x_1, \dots, x_n\})$, что дает нетривиальное тождество требуемого вида. Указанный в левой части моном выделяется путем переобозначения переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть для подмногообразия $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_s \mathbf{A}$ и для $k \in \{2, \dots, s\}$ известно, что $\text{Exp } \mathbf{V} < k$; мы докажем, что $\text{Exp } \mathbf{V} \leq k - 1$. Из этого будут следовать первые два утверждения теоремы.

Покажем, зачем нам нужны наборы цепочек. Пусть $L = L(X)$ – свободная алгебра Ли, порожденная счетным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Для подмножества $Y = \{y_{i_1}, \dots, y_{i_n}\} \subset X$ через $P_n(Y)$ мы обозначаем пространство полилинейных элементов из элементов Y степени n . Предположим, что для подпространства $U \subset F$ размерность $U \cap P_n(Y)$ не зависит от множества Y , а зависит только от n . В этом случае мы рассматриваем множество $Y = \{x_1, \dots, x_n\}$ и обозначаем

$$P_n(U) = U \cap P_n(Y), \quad c_n(U) = \dim_K P_n(U), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть теперь $L = F(\mathbf{V}, X)$ – свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$. Нас будут интересовать следующие векторные пространства

$$W_{c,n} = P_n((L^2)^c / (L^2)^{c+1}), \quad c = 1, 2, \dots, \\ c_n(\mathbf{V}) = \sum_{c=1}^s \dim W_{c,n}, \quad n > 1, \quad (3)$$

так как $(L^2)^{s+1} = 0$ и $c_n(L/L^2) = 0$ для $n > 1$.

Указанные подпространства являются линейной оболочкой следующих элементов [12]

$$W_{c,n} = \langle (x_{11} \cdots x_{1a_1})(x_{21} \cdots x_{2a_2}) \cdots (x_{c1} \cdots x_{ca_c}) : \\ a_i \geq 2, i = 1, \dots, c; a_1 + \cdots + a_c = n; \{x_{ij}\} = \{x_1, \dots, x_n\} \rangle_K. \quad (4)$$

Заметим, что произведения (4) не меняются при произвольной перестановке элементов $x_{i3}, \dots, x_{ia_i}$ в любом i -м факторе, так как при перестановке любых соседних элементов мы получим дополнительно элемент из $(L^2)^{c+1}$, который является нулем в $W_{c,n}$. Обозначим это свойство (*). Пусть $I = \{i_1, \dots, i_t\} \subset \{1, \dots, n\}$, для упрощения обозначений будем использовать тот же символ для множества переменных с соответствующими номерами $I = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$. Обозначаем $(y, I) = (y, x_{i_1}, \dots, x_{i_t})$ для $i_1 \leq \dots \leq i_t$ и в случае $I = \emptyset$ считаем $(y, I) = y$. Рассмотрим цепочки $I_i = \{x_{i3}, \dots, x_{ia_i}\}, i = 1, \dots, c$, и запишем (4) в виде

$$W_{c,n} = \langle (x_{11}x_{12}, I_1)(x_{21}x_{22}, I_2) \cdots (x_{c1}x_{c2}, I_c) : \\ \{x_{ij} : i = 1, \dots, c, j = 1, 2\} \cup I_1 \cup \cdots \cup I_c = \{x_1, \dots, x_n\} \rangle_K. \quad (5)$$

Зафиксируем $c \in \{1, \dots, s\}$ и выберем n по лемме 2.3. Докажем, что $W_{c,n}$ есть линейная оболочка элементов вида (5) и таких, что в результате многократного применения m -алгоритма к соответствующим наборам цепочек $(I_1, \dots, I_c)$ возникает не более чем $k - 1$ непустое ожерелье. Действительно, рассмотрим моном (5) и пусть из него по алгоритму выделено k нетривиальных ожерелья $\Omega^1, \dots, \Omega^k$. Тогда по лемме 2.2 получаем убывающую цепочку сегментов

$$S_{i_1}^1 > S_{i_2}^2 > \cdots > S_{i_k}^k, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \quad |S_{i_j}^j| = m, \quad j = 1, \dots, k. \quad (6)$$

Обозначим $D_{i_j} = I_{i_j} \setminus S_{i_j}^j$, $j = 1, \dots, k$. Используя свойство $(*)$, в мономе (5) в скобках с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ перенесем сегменты в концы скобок

$$(z_1, I_1) \cdots (z_{i_1}, D_{i_1}, S_{i_1}^1) \cdots (z_{i_k}, D_{i_k}, S_{i_k}^k) \cdots (z_c, I_c); \quad (7)$$

$$z_i = x_{i1} x_{i2}, \quad i = 1, \dots, c.$$

Чтобы применить лемму 2.3, достаточно, чтобы суммарная степень слов за исключением выделенных сегментов превысила $c + k$; для достаточно большого n данное условие выполнено. В силу (6) применяем тождество леммы к моному (7) и получаем моном с новым набором цепочек $(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_c) \prec (I_1, \dots, I_c)$. Так как число мономов на данных буквах конечно, выразим все элементы из $W_{c,n}$ через мономы, в которых по m -алгоритму выделяется не более $k - 1$ непустых ожерелий.

Оценим сверху число таких мономов. Не позднее чем на k -м шаге возникает пустое ожерелье, значит, не более чем $q = kmc + 2c$ элементов входят в сегменты обоих типов и первые два множителя скобок. Мы выбираем не более чем q элементов из $\{1, \dots, n\}$ и потом выбираем места для них в (4), это можно сделать не более чем n^{2q} способами. Оставшиеся элементы из $\{1, \dots, n\}$ мы распределяем по не более чем $k - 1$ ожерельям, что оценивается числом $(k - 1)^n$. Далее, каждое ожерелье Ω разрезаем на его компоненты $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_c)$, $\Omega_1 < \dots < \Omega_c$, это можно сделать не более чем $\binom{n + c - 1}{c - 1} \approx \frac{n^{c-1}}{(c - 1)!}$ способами. В результате получаем оценку

$$\dim W_{c,n} \leq (k - 1)^n \frac{n^{2q+c-1}}{(c - 1)!}. \quad (8)$$

Учитывая (3), получаем $\text{Exp } \mathbf{V} \leq k - 1$, что завершает доказательство первых двух утверждений.

Теперь предположим, что $\text{Exp } \mathbf{V} = 1 < k = 2$, тогда (8) приводит к полиномиальной оценке. Тем самым последнее утверждение доказано.

§ 3. Функции сложности и шкала роста

Ю. П. Размыслов [21] предложил рассматривать для многообразия алгебр Ли $\mathbf{V}$ так называемую *функцию сложности*

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В терминах этого понятия верхняя оценка А. Н. Гришкова [22] на рост произвольного многообразия алгебр Ли формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.1 [21]. *Пусть $\mathbf{V}$ – нетривиальное многообразие алгебр Ли. Тогда $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z)$ является целой функцией комплексного переменного.*

При помощи итераций определим функции

$$\ln^{(1)} x = \ln x, \quad \ln^{(s+1)} x = \ln(\ln^{(s)} x), \quad s = 1, 2, \dots;$$

$$\exp^{(1)} x = \exp x, \quad \exp^{(s+1)} x = \exp(\exp^{(s)} x), \quad s = 1, 2, \dots$$

Для описания сверхэкспоненциального роста для многообразий алгебр Ли автором была предложена шкала, состоящая из серии функций натурального аргумента с двумя вещественными параметрами α, β [10], [15], [17]

$$\Psi_{\alpha, \beta}^q(n) = \begin{cases} (n!)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \beta^{n/\alpha}, & \alpha \geq 1, \beta > 0; q = 2; \\ \frac{n! \cdot (\beta/\alpha)^{n/\alpha}}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/\alpha}}, & \alpha > 0, \beta > 0; q = 3, 4, \dots \end{cases} \quad (9)$$

Следующий результат определяет место полинильпотентных многообразий на этой шкале.

ТЕОРЕМА 3.2 [10]. Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{N}_{s_q} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$, $q \geq 2$, – полинильпотентное многообразие алгебр Ли. Тогда

$$c_n(\mathbf{V}) = \Psi_{s_1, s_2 + o(1)}^q(n) = \begin{cases} (n!)^{(s_1-1)/s_1} (s_2 + o(1))^{n/s_1}, & q = 2; \\ \frac{n!}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/s_1}} \left(\frac{s_2 + o(1)}{s_1} \right)^{n/s_1}, & q = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Следующий результат говорит о том, что данная шкала является достаточно полной; его также можно рассматривать как аналог упомянутой выше оценки Реге-ва [2].

ТЕОРЕМА 3.3 [10]. Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие алгебр Ли, удовлетворяющее нетривиальному тождеству степени $m > 3$. Тогда существует бесконечно малая (зависящая только от m) такая, что

$$c_n(\mathbf{V}) \leq \frac{n!}{(\ln^{(m-3)} n)^n} (1 + o(1))^n.$$

Пусть $\mathbf{W}_k$ обозначает многообразие, заданное тождествами алгебры Витта W_k , его рост был оценен в [23]. Шкала для роста многообразий принимает вид, представленный в таблице; возникает цепочка уровней q , $q = 1, 2, \dots$

Уровень	$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z)$	$c_n(\mathbf{V})$	Примеры
1	dz^a	$c_n = 0, n > a$	$\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_a$
2	$\exp\left(\frac{a}{b} z^b\right)$	a) n^k	$\mathbf{A}^2$
		b) b^n	$\mathbf{N}_b \mathbf{A}, b > 1;$ $\mathbf{W}_k$
		Сверхэкспоненциальный рост	
		c) $(n!)^{(a-1)/a} b^{n/a}, a > 1$	$\mathbf{N}_b \mathbf{N}_a, a > 1$
$q,$ $q = 3, 4, \dots$	$\exp^{(q-1)}\left(\frac{a}{b} z^b\right)$	$\frac{n!}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/a}} \left(\frac{b}{a}\right)^{n/a}$	$\mathbf{A}^q$ $\underbrace{\mathbf{N}_p \cdots \mathbf{N}_b \mathbf{N}_a}_{q \text{ раз}}$

В [16] показано, что уровень произведения двух многообразий равен сумме уровней. Там же предложено рассматривать *числа сложности*, которые соответствуют параметрам α, β функций (9).

Отметим, что второй уровень распался на три подуровня. Известно, что в случае нулевой характеристики нет многообразий промежуточного роста между полиномом и экспонентой [19]. Наша задача – установить подобного рода пробелы в шкале роста для подмногообразий $\mathbf{AN}_2$ и $\mathbf{A}^3$.

Нам будет необходим следующий классический результат о росте целых функций. Пусть $f(z)$ – целая функция. Обозначим $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Тогда *порядок* и *тип* (для известного порядка) определяются следующим образом [24]:

$$\rho = \text{ord } f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}, \quad \sigma = \text{typ } f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}.$$

ТЕОРЕМА 3.4 [24]. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – целая функция порядка ρ и типа σ . Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e \rho)^{1/\rho}.$$

Мы будем также рассматривать функции сложности в несколько более общей ситуации, а именно для подмножеств счетно порожденной алгебры (группоида).

Пусть дана алгебра (группоид), порожденная множеством $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Пусть A – подпространство в этой алгебре (подмножество в группоиде). Для любого множества различных элементов $\tilde{X} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \subset X$ обозначим через $P_n(A, \tilde{X})$ линейную оболочку (подмножество) всех полилинейных элементов степени n из элементов $\tilde{X}$ в A . Допустим, что размерность этой линейной оболочки (число элементов) $c_n(A, \tilde{X})$ не зависит от $\tilde{X}$, а зависит только от n (подпространства мы дополнительно предполагаем однородными). В этом случае мы пишем $c_n(A) = c_n(A, \tilde{X})$ и говорим, что A является X -*равномерным*, или мы говорим, что для A определена *функция сложности по отношению к X* , которая записывается так:

$$\mathcal{C}_X(A, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(A)}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

где для ассоциативных алгебр и группоидов с единицей взяты суммы с $n = 0$, $c_0 = 1$. Отметим, что A не обязательно должно состоять из однородных элементов. Иногда будем опускать символ z и (или) знак множества X и писать $\mathcal{C}(A)$ вместо $\mathcal{C}_X(A, z)$.

Функция сложности – это один из примеров *экспоненциальных производящих функций*, которые широко используются в комбинаторике [25]. Следующие две леммы объясняют применение функций сложности [10], [15], [20] и [25].

ЛЕММА 3.1. Пусть Γ – группоид (алгебра), порожденная множеством $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, с умножением, обозначаемым $*$. Предположим, что подмножества (подпространства) $A \subset \Gamma$, $B \subset \Gamma$ X -равномерны.

- 1) Пусть $C = A \cup B$, причем пересечение пусто ($C = A + B$ – прямая сумма). Тогда C является X -равномерным и $\mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$.
- 2) Допустим, что все полилинейные элементы множества $a * b$, $a \in A$, $b \in B$ различны (все полилинейные элементы среди $\{a_i * b_j : i \in I, j \in J\}$ линейно независимы при условии, что взяты линейно независимые

множества $\{a_i : i \in I\} \subset A$ и $\{b_j : j \in J\} \subset B$. Тогда $A * B$ также X -равномерно, причем $\mathcal{C}(A * B, z) = \mathcal{C}(A, z) \cdot \mathcal{C}(B, z)$.

ЛЕММА 3.2. Пусть L – алгебра Ли, порожденная множеством $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ и равномерная по отношению к X . Тогда ее универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ также X -равномерна. Более того, $\mathcal{C}(U(L)) = \exp(\mathcal{C}(L))$.

Для двух функций $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ будем писать, что $f(z) \prec g(z)$, если и только если $a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

§ 4. Подмногообразия в $\mathbf{AN}_2$

По теореме 3.2 многообразии $\mathbf{AN}_2$ лежит на уровне $2c$, ему соответствует функция $\Psi_{\alpha, \beta}^2(n) = (n!)^{1-1/\alpha} \beta^{n/\alpha}$ с параметрами $\alpha = 2$, $\beta = 1$:

$$c_n(\mathbf{AN}_2) = \Psi_{2, 1+o(1)}^2(n) = (n!)^{1/2} (1 + o(1))^n.$$

Известно, что над полем нулевой характеристики многообразие $\mathbf{AN}_2$ обладает следующим экстремальным свойством: любое собственное подмногообразие имеет не более чем экспоненциальный рост [26]. Мы докажем следующее более слабое утверждение, но верное для любого поля о том, что подмногообразия $\mathbf{V} \subset \mathbf{AN}_2$ с меньшим параметром $\alpha = 2 - \varepsilon$ соскакивают на уровень $2b$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathbf{V}$ – подмногообразие в $\mathbf{AN}_2$, причем для некоторого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность n_i , $i \in \mathbb{N}$, такая, что

$$c_{n_i}(\mathbf{V}) \leq (n_i!)^{1/2-\varepsilon}.$$

Тогда последовательность $c_n(\mathbf{V})$ ограничена экспонентой.

Остаются открытыми следующие вопросы: 1) Верно ли аналогичное утверждение для второго параметра β ? 2) Верно ли, что всякое собственное подмногообразие в $\mathbf{AN}_2$ имеет не более чем экспоненциальный рост?

Сначала мы сконструируем специальное тождество.

ЛЕММА 4.1. Пусть многообразие алгебр Ли $\mathbf{V}$ таково, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность n_i , $i \in \mathbb{N}$, такая, что $c_{n_i}(\mathbf{V}) \leq (n_i!)^{1/2-\varepsilon}$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству вида

$$zy_0(y_1x_1)(y_2x_2) \cdots (y_kx_k) \equiv \sum_{\pi \in S_k, \pi \neq e} \lambda_\pi zy_0(y_1x_{\pi(1)})(y_2x_{\pi(2)}) \cdots (y_kx_{\pi(k)}),$$

$$\lambda_\pi \in K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $n = n_i$, $k = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ и найдем число мономов вышеуказанного вида степени n по формуле Стирлинга (для нечетного n мономы рассматриваем без y_0)

$$\frac{n!}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor!} \approx (n!)^{1/2} 2^{n/2+o(1)},$$

поэтому мономы линейно зависимы для достаточно большого $n = n_i$ (для нечетного n мы в полученном тождестве заменяем z на zy_0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Пусть $F = F(X)$ – свободная алгебра Ли со счетным свободным порождающим множеством $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. По теореме Ширшова идеал F^3 является свободной алгеброй Ли. Рассмотрим базис Холла для F и обозначим $Z = X \cup \{x_i x_j : i > j\}$ – его часть, дающая базис для F/F^3 . Тогда, как следует, например, из [10], [15], где рассмотрен случай F^d , для F^3 можно взять следующее множество свободных порождающих:

$$Y = \{x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \cdots x_{\gamma_t} (x_{\alpha_1} x_{\beta_1}) (x_{\alpha_2} x_{\beta_2}) \cdots (x_{\alpha_s} x_{\beta_s}) : \gamma_1 > \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_t; \\ (t \geq 3) \text{ или } (t = 2, s \geq 1, \gamma_1 > \alpha_1); \alpha_i > \beta_i, i = 1, \dots, s; \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_s\}. \quad (10)$$

Пусть $L = F(\mathbf{AN}_2, X)$; рассмотрим цепочку идеалов $F \supset F^3 \supset (F^3)^2$, тогда $F/(F^3)^2 \cong L$. Допустим, что $H = F(\mathbf{V}, X)$, тогда $c_n(\mathbf{V}) = c_n(H/H^3) + c_n(H^3)$. Заметим, что H^3 – абелев идеал, являющийся линейной оболочкой образов элементов (10). Так как $c_n(H/H^3) \leq c_n(Z) = 0$ для $n > 2$, то оценка $c_n(\mathbf{V})$ сводится к оценке числа полилинейных мономов из элементов $\{x_1, \dots, x_n\}$ вида (10). Выберем тождество и число k по лемме 4.1.

Благодаря определяющему тождеству $\mathbf{AN}_2$ мы можем свободно переставлять в (10) между собой скобки $(x_{\alpha_i} x_{\beta_i})$, $i = 2, \dots, s$. Для всякого монома указанного вида мы рассмотрим а) множество индексов $B = \{\beta_2, \dots, \beta_s\} \subset \{1, \dots, n\}$ и б) частичный порядок на B : мы полагаем $\beta_i \prec \beta_j$ для $\beta_i, \beta_j \in B$, если $\beta_i < \beta_j$ и β_i стоит в нашем мономе раньше, чем β_j , в противном случае мы считаем β_i, β_j несравнимыми. Напомним, что подмножество частично упорядоченного множества называется *цепью*, если любые его два элемента сравнимы. Согласно теореме Дилуорса, если в частично упорядоченном множестве среди k любых его элементов найдется два сравнимых, то оно распадается менее чем на k цепей [27]. Допустим, что имеется моном вида (10) и соответствующее ему множество B содержит k несравнимых элемента $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k}$, т.е. эти индексы расположены в мономе по убыванию $\beta_{i_1} > \beta_{i_2} > \cdots > \beta_{i_k}$ и $\alpha_{i_1} > \alpha_{i_2} > \cdots > \alpha_{i_k}$. Воспользуемся свойством перестановочности скобок, сделаем их соседними; при помощи тождества леммы 4.1 перемешиваем вторые буквы выделенных скобок и возвращаем скобки на место. В результате мы выражаем наш моном через лексикографически меньшие мономы вида (10). Отсюда следует, что H^3 является линейной оболочкой мономов (10) таких, что соответствующие частично упорядоченные множества B распадаются менее чем на k цепей.

Оценим число таких мономов. Индексы γ_1, β_1 выделяются из $\{1, \dots, n\}$ не более чем n^2 способами. Далее мы делим $\{1, \dots, n\}$ на множества $\{\gamma_2, \dots, \gamma_t\}$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ и менее чем k цепей для индексов $\{\beta_2, \dots, \beta_s\}$; это оценивается числом $(k+1)^n$. Мы составляем из полученных множеств мономы (10); при этом для второго элемента скобок мы каждый раз решаем, из какой цепи взять наименьший элемент; это дает множитель $(k-1)^n$; в остальном составление мономов однозначно. Таким образом, $c_n(H^3) \leq n^2(k-1)^n$, что заканчивает доказательство.

§ 5. Подмногообразия в $\mathbf{A}^3$

Согласно теореме 3.2 многообразие $\mathbf{A}^3$ лежит на уровне 3; оно соответствует функции $\Psi_{\alpha, \beta}^3(n)$ с параметрами $\alpha = 1, \beta = 1$:

$$c_n(\mathbf{A}^3) = \Psi_{1, 1+o(1)}^3(n) = \frac{n!}{(\ln n)^n} (1 + o(1))^n.$$

Следующий результат показывает, что если подмногообразие $\mathbf{V} \subset \mathbf{A}^3$ имеет чуть-чуть меньший второй параметр (а тем более – первый), то оно соскакивает на второй уровень.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $\mathbf{V}$ – подмногообразие в $\mathbf{A}^3$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность n_i , $i \in \mathbb{N}$, такая, что*

$$c_{n_i}(\mathbf{V}) \leq \frac{n_i!}{(\ln n_i)^{n_i}} (1 - \varepsilon)^{n_i}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда $c_n(\mathbf{V}) \leq (n!)^{1-1/q}$ для некоторого q .

Возникает следующая

ЗАДАЧА. *Верно ли, что всякое собственное подмногообразие в $\mathbf{A}^3$ лежит на втором уровне?*

Сначала мы сконструируем специальное тождество.

ЛЕММА 5.1. *Пусть многообразие алгебр Ли $\mathbf{V}$ таково, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность n_i , $i \in \mathbb{N}$, такая, что*

$$c_{n_i}(\mathbf{V}) \leq \frac{n_i!}{(\ln n_i)^{n_i}} (1 - \varepsilon)^{n_i}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Тогда существуют натуральные числа n, m, k и набор чисел $(m_1, \dots, m_k)$, $m_i \in \{1, \dots, m\}$; $n = k + 1 + n'$, $n' = m_1 + \dots + m_k$. Пусть $y_0, y_1, \dots, y_k$ – буквы; тогда выполнено нетривиальное тождество степени n вида

$$\begin{aligned} & y_0(y_1 x_{n'} \cdots x_{n'-m_1+1}) \cdots (y_k x_{m_k} \cdots x_1) \\ & \equiv \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} y_0(y_1 x_{\sigma(1,1)} \cdots x_{\sigma(1,m_1)}) \cdots (y_k x_{\sigma(k,1)} \cdots x_{\sigma(k,m_k)}), \quad \lambda_{\sigma} \in K, \end{aligned}$$

где слагаемые суммы соответствуют всевозможным разбиениям σ множества $\{1, \dots, n'\}$ на k групп размеров $m_1, \dots, m_k$:

$$\begin{aligned} & \{\sigma(1,1), \dots, \sigma(1,m_1)\} \cup \dots \cup \{\sigma(k,1), \dots, \sigma(k,m_k)\} = \{1, \dots, n'\}, \\ & \sigma(i,1) > \dots > \sigma(i,m_i), \quad i = 1, \dots, k; \end{aligned}$$

слагаемое, соответствующее разбиению $\{n', \dots, n' - m_1 + 1\} \cup \dots \cup \{m_k, \dots, 1\}$, мы выделяем отдельно в левой части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем из подпоследовательности $n = n_i$ и для $m \in \mathbb{N}$ положим $k = \frac{n-1}{m+1}$, $m_1 = \dots = m_k = m$; если нацело не делится, то полагаем $k = \left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor + 1$, $m_1 = \dots = m_{k-1} = m$, $m_k = n - 2 - (k-1)(m+1)$; получаем нужный нам набор $(m_1, \dots, m_k)$. Зафиксируем такой набор, тогда число мономов $r(n, m)$ требуемого вида равно

$$r(n, m) = \frac{(n-k-1)!}{m_1! \cdots m_k!} \geq \frac{(n-n/m-2)!}{(m!)^{n/m+1}}.$$

Используем формулу Стирлинга в виде $\ln a! = a(\ln a - 1 + o(1))$ (для нецелых чисел на самом деле имеем дело с гамма-функцией), считаем также, что $m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \ln r(n, m) &\geq \left(n - \frac{n}{m} - 2\right)(\ln n - 1 + o(1)) - (n + m)(\ln m - 1 + o(1)) \\ &= n(\ln n - 1) - \frac{n}{m} \ln n + o(n) - (n \ln m - n + o(n) + O(m \ln m)). \end{aligned}$$

Подставляем $m(n) = [\ln n]$ и получаем

$$\begin{aligned} \ln r(n, m(n)) &\geq n(\ln n - 1) - n \ln \ln n + o(n); \\ r(n, m(n)) &\geq \frac{n!}{(\ln n)^n} (1 + o(1))^n. \end{aligned} \quad (12)$$

Сравнивая (11) и (12), получаем для достаточно большого $n = n_i$ линейную зависимость наших мономов по модулю $P_n(\mathbf{V}, x_1, \dots, x_{n'}, y_0, \dots, y_k)$, что дает нетривиальное тождество требуемого вида. Указанный в левой части моном выделяется путем переобозначения переменных.

На самом деле можно показать, что (12) также дает верхнюю оценку на число всех мономов, где сняты все ограничения на размеры групп $(m_1, \dots, m_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Пусть $F = F(X)$ – свободная алгебра Ли, порожденная счетным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Рассмотрим ряд коммутантов $F^{(0)} = F$, $F^{(i+1)} = [F^{(i)}, F^{(i)}]$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Тогда для $L = F(\mathbf{A}^3, X)$ имеем $L \cong F/F^{(3)}$. Также $F/F^{(2)} \cong F(\mathbf{A}^2, X)$ и хорошо известно, что $c_n(\mathbf{A}^2) = n - 1$ [1]. Пусть $\mathbf{V}$ – подмногообразие в $\mathbf{A}^3$, удовлетворяющее условию теоремы. Рассмотрим $H = F(\mathbf{V}, X)$ и $V = H^{(2)}$; задача сводится к верхней оценке на $c_n(V)$. Мы найдем оценку на функцию сложности $\mathcal{C}(V, z)$, это позволит избежать лишних вычислений.

Хорошо известно, что как свободная алгебра Ли $F^{(1)}$ свободно порождается следующим множеством [1], для которого нетрудно вычислить функцию сложности [10], [15]

$$\begin{aligned} Y &= \{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} : m \geq 2, i_1 > i_2 \leq \cdots \leq i_m, x_{i_j} \in X\}; \\ \mathcal{C}(Y, z) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} z^n = 1 + (z-1) \exp(z). \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим $W = L^{(2)} \cong F^{(2)}/F^{(3)}$. Можно построить специальное базисное семейство в F такое, что часть его даст базис для W [28], [29]

$$\begin{aligned} W &= \langle (x_{11} \cdots x_{1a_1})(x_{21} \cdots x_{2a_2}) \cdots (x_{c1} \cdots x_{ca_c}) : \\ &\quad a_i \geq 2, x_{i1} > x_{i2} \leq \cdots \leq x_{ia_i}, i = 1, \dots, c; c \geq 2; \\ &\quad x_{11} > x_{21} \leq x_{31} \leq \cdots \leq x_{c1}, \{x_{ij}\} \in X \rangle_K. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что в силу тождества разрешимости $\mathbf{A}^3$ произведения в (14) не меняются при произвольной перестановке: а) элементов $x_{i3}, \dots, x_{ia_i}$ в любом i -м множителе, начиная с третьего; б) множителей, начиная с третьего. Обозначим это свойство (**).

Рассмотрим среди (14) полилинейные элементы степени n , без ограничения общности рассуждений считаем, что все мономы составлены из $\tilde{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Как и в §2, для каждого из множителей $i = 3, \dots, c$ мы составим цепочку $I_i = \{x_{i3}, \dots, x_{ia_i}\}$, получается набор цепочек $(I_3, \dots, I_c)$. Выберем тождество и зафиксируем m, k по лемме 5.1. Тогда мы утверждаем, что $P_n(V, \tilde{X})$ есть линейная оболочка мономов вида (14) и таких, что в результате итераций m -алгоритма для набора цепочек $(I_3, \dots, I_c)$ мы получим менее k непустых ожерелий. От противного предположим, что в мономе по алгоритму создано k непустых ожерелий $\Omega^1, \dots, \Omega^k$. По лемме 2.2 получаем убывающую цепочку сегментов

$$S_{i_1}^1 > S_{i_2}^2 > \dots > S_{i_k}^k, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad |S_{i_j}^j| = m, \quad j = 1, \dots, k. \quad (15)$$

Пользуясь свойством (**), мы можем сделать скобки с номерами $i_1, \dots, i_k$ соседними и переместить сегменты (15) в концы скобок:

$$\dots (\dots S_{i_1}^1) (\dots S_{i_2}^2) \dots (\dots S_{i_k}^k) \dots$$

В силу (15) при помощи зафиксированного тождества леммы 5.1 мы перемешиваем буквы в выделенных сегментах. Далее мы возвращаем скобки на место и получаем моном с меньшим набором цепочек $(\tilde{I}_3, \dots, \tilde{I}_c) \prec (I_3, \dots, I_c)$, причем элементы вне цепочек остаются неизменными. Повторяя этот процесс, мы представим $P_n(V, \tilde{X})$ в виде линейной оболочки мономов в (14), в которых после итераций m -алгоритма для набора цепочек $(I_3, \dots, I_c)$ создается менее k непустых ожерелий.

Мы собираем ложные сегменты в начало скобок, получаются элементы из не более чем $p = mk$ букв; рассмотрим это множество и, используя (13), вычислим его функцию сложности, это полином степени p :

$$A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t} : 2 \leq t \leq p, i_1 > i_2 \leq \dots \leq i_t, x_{i_j} \in X\};$$

$$\mathcal{C}(A, z) = \sum_{n=2}^p \frac{n-1}{n!} z^n. \quad (16)$$

Элементы из A считаем упорядоченными по первой букве (см. (14)). Тогда $P_n(V, \tilde{X})$ есть линейная оболочка следующего множества мономов:

$$T = \{y_\alpha y_\beta (a_{i_3}, \Omega_3^1, \Omega_3^2, \dots, \Omega_3^{k'}) (a_{i_4}, \Omega_4^1, \Omega_4^2, \dots, \Omega_4^{k'}) \dots (a_{i_c}, \Omega_c^1, \Omega_c^2, \dots, \Omega_c^{k'}) : \\ k' < k, y_\alpha, y_\beta \in Y, a_{i_j} \in A, a_{i_3} < a_{i_4} < \dots < a_{i_c}\}. \quad (17)$$

Пусть ожерелье $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_c)$ записано на n элементах. В силу условия $\Omega_1 < \dots < \Omega_c$ мы расставляем перегородки между элементами $(x_1, \dots, x_n)$, и за каждым элементом x_i либо мы ставим перегородку, либо не ставим. Поэтому число таких ожерелий не превышает 2^n . Пусть O — множество всевозможных ожерелий всех длин $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mathcal{C}(O, z) \prec \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n = e^{2z}. \quad (18)$$

Упорядоченные цепочки во второй строке (17) соответствуют переходу к универсальной обертывающей; мы применяем леммы 3.2 и 3.1 и, используя (17) и оценки (13), (16) и (18), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(T, z) &\prec \mathcal{C}(Y, z)^2 \exp(\mathcal{C}(A, z))(\mathcal{C}(O, z))^{k-1} \\ &\prec (1 + (z-1)\exp(z))^2 \exp(2(k-1)z) \exp\left(\sum_{n=2}^p \frac{n-1}{n!} z^n\right); \\ \mathcal{C}(T, r) &\leq \exp((\mu + o(1))r^p), \quad r \rightarrow +\infty, \quad \mu = \frac{1}{p(p-2)!}; \\ \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathcal{C}(T, r)}{r^p} &\leq \mu.\end{aligned}\tag{19}$$

Значит, $\text{ord } \mathcal{C}(T, z) \leq p$. Доказательство теоремы 3.4 состоит из двух импликаций [24]. Одна из них означает, что неравенство (19) влечет для коэффициентов $\mathcal{C}(T, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ неравенство

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{1/p} \sqrt[n]{|a_n|} &\leq (\mu e p)^{1/p}; \\ a_n &\stackrel{a}{\leq} \frac{(\mu e p + \varepsilon)^{n/p}}{n^{n/p}} \quad \forall \varepsilon > 0.\end{aligned}\tag{20}$$

Вспомним, что $a_n = c_n(T)/n!$, подставим в (20) по формуле Стирлинга $n^n \approx n!e^n/\sqrt{2\pi n}$ и получим требуемый результат

$$c_n(V) \leq c_n(T) = a_n n! \stackrel{a}{\leq} (n!)^{1-1/p} (\mu p + \varepsilon)^{n/p} (2\pi n)^{1/(2p)} \stackrel{a}{\leq} (n!)^{1-1/(p+\varepsilon)}.$$

Окончательно в качестве искомого q можно взять $p + \varepsilon$, с запасом в качестве q мы можем взять степень тождества, зафиксированного в лемме 5.1.

Список литературы

1. *Балхутин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
2. *Regev A.* Existence of polynomial identities in $A \otimes B$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. №6. P. 1067–1069.
3. *Regev A.* Existence of identities in $A \otimes B$ // Israel J. Math. 1972. V. 11. P. 131–152.
4. *Латышев В. Н.* К теореме Реева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр // УМН. 1972. Т. 27. №4. С. 213–214.
5. *Regev A.* Asymptotics for codimensions of some P. I. Algebras // Proceedings of "Ring Theory Conference". Miskolc, 1996. P. 159–172.
6. *Giambruno A., Zaicev M. V.* Exponential growth of codimensions of PI-Algebra // Kurosh algebraic conference'98. Moscow, 1998. P. 54–55.
7. *Мищенко С. П.* Рост многообразий алгебр Ли // УМН. 1990. Т. 45. №6. С. 25–45.
8. *Мищенко С. П.* Нижние оценки размерностей неприводимых представлений симметрических групп и показателей экспоненты многообразий алгебр Ли // Матем. сб. 1996. Т. 187. №1. С. 83–94.
9. *Шмелькин А. Л.* Свободные полилинейные группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. №1. С. 91–122.
10. *Петроградский В. М.* Рост полилинейных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции // Матем. сб. 1997. Т. 188. №6. С. 119–138.

11. *Drensky V.* Relations for the cocharacter sequences of T -ideals // Proc. Int. Conf. on Algebra (Novosibirsk, 1989). P. 285–300; // Contemp. Math. V. 131. Part 2. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992.
12. *Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M.* Exponents of varieties of Lie algebras with a nilpotent commutator subalgebra // Comm. Algebra. 1999 (to appear).
13. *Zaicev M. V., Mishchenko S. P.* Example of Lie algebra variety with the fractional exponent // Contemp. Math. 1999 (to appear).
14. *Воличенко И. Б.* О многообразии алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$ над полем характеристики нуль // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25. № 12. С. 1063–1066.
15. *Петроградский В. М.* О типах сверхэкспоненциального роста тождеств в PI-алгебрах Ли // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 4. С. 989–1007.
16. *Petrogradsky V. M.* Exponential generating functions and complexity of Lie varieties // Israel J. Math. (to appear).
17. *Petrogradsky V. M.* Scale for codimension growth of Lie algebras // Methods in ring theory / ed. V. Drensky et al. P. 213–222; V. 198, 1998.
18. *Мищенко С. П.* Многообразия алгебр Ли со слабым ростом коразмерностей // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1982. № 5. С. 63–66.
19. *Мищенко С. П.* О многообразиях алгебр Ли промежуточного роста // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 2. С. 42–45.
20. *Размыслов Ю. П.* Тождества алгебр и их представлений. М.: Наука, 1989.
21. *Размыслов Ю. П.* О сложности многообразий алгебр Ли и их представлений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1988. № 4. С. 75–78.
22. *Гришков А. Н.* О росте многообразий алгебр Ли // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 1. С. 51–54.
23. *Мищенко С. П.* Тождество энгелевости и его приложения // Матем. сб. 1983. Т. 121. № 3. С. 423–430.
24. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
25. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990.
26. *Воличенко И. Б.* Многообразия алгебр Ли с тождеством $[[X_1, X_2, X_3], [X_4, X_5, X_6]] = 0$ над полем характеристики нуль // Сиб. матем. журн. 1984. Т. 25. № 3. С. 40–54.
27. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
28. *Бокунь Л. А.* База свободных полилинейпотентных алгебр Ли // Алгебра и логика. 1963. Т. 2. № 4. С. 13–20.
29. *Reutenauer C.* Free Lie algebras. Oxford: Clarendon Press, 1993.

Ульяновский государственный университет
E-mail: vmp@mmf.univ.simbirsk.su

Поступила в редакцию
22.07.1998