Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Вишик, С. В. Зелик, Регулярный аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 6, 23–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:21:59

УДК 517.95

М. И. Вишик, С. В. Зелик

Регулярный аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области

В полуцилиндре $\Omega_+ = \mathbb{R}_+ \times \omega$, $\omega \subset \mathbb{R}^n$, рассматривается система эллиптических уравнений второго порядка

$$a(\partial_t^2 u + \Delta_x u) - \gamma \partial_t u - f(u) = g(t), \quad u|_{\partial\omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (t, x) \in \Omega_+, \quad (*)$$

где $u = (u^1, \dots, u^k)$ – неизвестная векторная функция, a и γ – заданные положительно определенные самосопряженные $(k \times k)$ -матрицы, f и $g(t) = g(t, x)$ – заданные функции. При выполнении некоторых естественных условий на матрицы a , γ , нелинейную функцию f и правую часть g доказано, что краевая задача $(*)$ имеет единственное решение, принадлежащее пространству $W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega_+, \mathbb{R}^k)$, $p > (n+1)/2$, и ограниченное при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, доказано, что в классе таких решений задача $(*)$ эквивалентна некоторой эволюционной задаче в пространстве “начальных” условий $u_0 \in V_0 \equiv \text{Tr}_{t=0} W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega_+, \mathbb{R}^k)$. В потенциальном случае ($f = \nabla_x P$, $g(t, x) \equiv g(x)$) показано, что полугруппа $S_t: V_0 \rightarrow V_0$, порождаемая задачей $(*)$, обладает аттрактором в пространстве V_0 , который в случае общего положения представляется в виде конечного объединения конечномерных неустойчивых многообразий $\mathcal{M}^+(z_i)$, соответствующих стационарным точкам z_i полугруппы S_t ($S_t z_i = z_i$). Кроме того, получена явная формула для вычисления размерностей этих многообразий.

Библиография: 20 названий.

Введение

В полуцилиндре $\Omega_+ = \mathbb{R}_+ \times \omega$, где ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей, рассматривается следующая квазилинейная эллиптическая система второго порядка:

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 u + \Delta_x u) - \gamma \partial_t u - f(u) = g(t), \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{\partial\omega} = 0. \end{cases} \quad (0.1)$$

Здесь $u = u(t, x) = (u^1, \dots, u^k)$ – неизвестная векторная функция, $g(t) = g(t, x)$ и $f(u)$ – заданные функции, $(t, x) \in \Omega_+$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00354) и фонда CRDF (грант № RM-1-186).

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $\gamma = \gamma^*$ и $a = a^*$ – положительно определенные самосопряженные матрицы ($\gamma, a \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$)

$$0 < a_- \text{Id} \leq a \leq a_+ \text{Id}, \quad 0 < \gamma_- \text{Id} \leq \gamma \leq \gamma_+ \text{Id}. \quad (0.2)$$

Предполагается, что нелинейная функция $f(u)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} 1. \quad & f \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k); \\ 2. \quad & f(u) \cdot u \geq -C \quad \forall u \in \mathbb{R}^k; \\ 3. \quad & f'(u) \geq -K, \quad K \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^k. \end{aligned} \quad (0.3)$$

Здесь и далее через u, v обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$.

Правая часть g предполагается принадлежащей пространству $L_p(\Omega_T)$ для любого $T \geq 0$ ($\Omega_T \equiv [T, T+1] \times \omega$) и некоторого $p > \max\{2, (n+1)/2\}$ и имеющей конечную норму

$$|g|_b = \sup_{T \in \mathbb{R}_+} \|g, \Omega_T\|_{0,p} < \infty. \quad (0.4)$$

Здесь и далее $\|v, \Omega_T\|_{l,p} \equiv \|v\|_{W_{l,p}(\Omega_T)}$, а символ $W_{l,p}$ обозначает соболевское пространство обобщенных функций, производные которых до порядка l включительно принадлежат пространству L_p (см. [1]).

Под решением задачи (0.1) понимается обобщенное решение $u \in W_{2,p}(\Omega_T)$ для любого $T \geq 0$, обладающее конечной нормой

$$\|u\|_b = \sup_{T \in \mathbb{R}_+} \|u, \Omega_T\|_{2,p} < \infty. \quad (0.5)$$

Предполагается также, что “начальное” условие u_0 принадлежит пространству V_0 следов функций из $W_{2,p}(\Omega_+)$ при $t = 0$ (см. [2]):

$$V_0 = \text{Tr}_{t=0}(W_{2,p}(\Omega_+) \cap \{u|_{\partial\omega} = 0\}) = W_{2-1/p,p}(\omega) \cap W_{1,p}^0(\omega). \quad (0.6)$$

Системы уравнений вида (0.1) возникают, например, при исследовании положений равновесия или решений типа бегущих волн для соответствующих эволюционных уравнений (см. замечание 5.3).

Краевые задачи вида (0.1) при различных предположениях относительно нелинейной функции f и правой части g исследовались в работах [3]–[11].

В настоящей работе основное внимание уделяется случаю, когда задача (0.1) имеет единственное решение. Для этого предполагается, что существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что операторный пучок

$$L_K(\lambda) = a\lambda^2 - \gamma\lambda + a\Delta_x + K: W_{1,2}^0(\omega) \rightarrow W_{-1,2}(\omega) \quad (0.7)$$

удовлетворяет условию

$$-(L_K(\lambda_0)v, v) > 0 \text{ для любого } v \in W_{1,2}^0(\omega), v \neq 0. \quad (0.8)$$

Как показано в лемме 1.1, условие (0.8) заведомо выполнено, если

$$\gamma^2 > 4a_+(K - a_-\mu_1) \text{Id}.$$

Здесь через $\mu_1 > 0$ обозначено первое собственное число оператора Лапласа в области ω с граничными условиями Дирихле.

Траекторный аттрактор системы (0.1) без предположения единственности построен в [4].

Центральную роль при исследовании поведения решений задачи (0.1) играет следующая теорема, доказанная в §2 и §3.

ТЕОРЕМА 1. 1. Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда задача (0.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее (0.5), и справедлива оценка

$$\|u, \Omega_T\|_{2,p} \leq Q(\|u_0\|_{V_0})e^{-\alpha T} + Q(|g|_b). \quad (0.9)$$

Здесь константа $\alpha > 0$ и монотонная функция $Q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ не зависят от начального условия u_0 .

2. Пусть $S_t: V_0 \rightarrow V_0$ — разрешающий оператор задачи (0.1) ($S_t u(0) = u(t)$). Тогда $S_t \in C^1(V_0, V_0)$ при любом $t \geq 0$ и его производная Фреше $D_{u_0} S_t(u_0)$ удовлетворяет оценке

$$\|D_{u_0} S_t(u_0)\|_{L(V_0, V_0)} \leq Q(\|u_0\|_{V_0})e^{(\lambda_0 - \alpha)t} \quad (0.10)$$

для некоторого положительного α .

Кроме того, в §3 доказано, что задача (0.1) эквивалентна следующей эволюционной задаче в пространстве V_0 :

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta_x)^{1/2} u = F(t, u) + G(t), \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u \in C_b(\mathbb{R}_+, V_0) \cap C_b^1(\mathbb{R}_+, V'_0). \end{cases} \quad (0.11)$$

Здесь $V'_0 = (-\Delta_x)^{1/2} V_0$, функция $G \in C(\mathbb{R}_+, V'_0)$, а нелинейный оператор $F \in C(\mathbb{R}_+ \times V_0, V_0)$ (см. теорему 3.3).

Параграфы 4 и 5 настоящей работы посвящены более детальному исследованию “автономного” случая

$$g(t) \equiv g \in L_p(\omega). \quad (0.12)$$

В этом случае, как нетрудно проверить, операторы $\{S_t, t \geq 0\}$ образуют полугруппу в пространстве V_0 . Стационарные точки этой полугруппы исследованы в §4. Здесь также приведены необходимые и достаточные условия гиперболичности стационарной точки z_0 , доказана конечность индекса неустойчивости ind_{z_0} стационарной точки z_0 и получены формулы для его вычисления. Кроме того, доказано, что неустойчивое множество $\mathcal{M}^+(z_0)$ гиперболической стационарной точки z_0 (см. определение 4.3) обладает структурой C^1 -многообразия, диффеоморфного $\mathbb{R}^d$, $d = \text{ind}_{z_0}$.

В §5 построен аттрактор $\mathcal{A}$ полугруппы $\{S_t, t \geq 0\}$, компактный в пространстве $W_{2,p}(\omega)$. Кроме того, в потенциальном случае

$$f = -\nabla P, \quad P \in C^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k) \quad (0.13)$$

доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены перечисленные выше условия, и пусть все стационарные точки $\mathcal{R} = \{z_1, \dots, z_N\}$ полугруппы S_t являются гиперболическими. Тогда аттрактор $\mathcal{A}$ является регулярным (см. теорему 5.4 и следствия из нее), т.е.

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{M}^+(z_i), \quad (0.14)$$

и экспоненциально притягивающим (см. теорему 5.5 и следствие из нее).

Кроме того,

$$\dim \mathcal{M}^+(z_i) = \text{ind}_{z_i} = \#\{\lambda \in \sigma(a\Delta_x - f'(z_i)), \lambda > 0\}.$$

Для эволюционных уравнений, обладающих глобальной функцией Ляпунова, представление аттрактора в виде (0.14) получено в [12], [13].

Параграф 1 содержит доказательства некоторых вспомогательных результатов относительно линейного уравнения вида (0.1), использующихся в дальнейшем при исследовании уравнения в вариациях для нелинейной задачи (0.1).

§ 1. Линейное эллиптическое уравнение в полупцилиндре

Этот параграф посвящен исследованию следующей линейной системы в полупцилиндре $\Omega_+ = \mathbb{R}_+ \times \omega$ ($\omega \in \mathbb{R}^n$):

$$\begin{cases} a(\Delta_x u + \partial_t^2 u) - \gamma \partial_t u - q(t, x)u = g(t), \\ u|_{\partial\omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь u, g – векторные функции, $q \in L_\infty(\Omega_+, \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k))$, a и γ – самосопряженные матрицы, причем $a > 0$ – положительно определенная матрица. Выберем константу $K \in \mathbb{R}$ так, чтобы

$$q(t, x) \geq -K \text{Id} \quad \text{для почти всех } (t, x) \in \Omega_+. \quad (1.2)$$

Кроме того, предполагается, что пучок (0.7) удовлетворяет условию (0.8) для некоторого $\lambda_0 \geq 0$ и K , определенного формулой (1.2), а правая часть g имеет конечную норму

$$|g|_{\lambda_0} \equiv \sup_{T \in \mathbb{R}_+} e^{-\lambda_0 T} \|g, \Omega_T\|_{0,p} < \infty. \quad (1.3)$$

Под решением задачи (1.1) понимается его обобщенное решение u , принадлежащее пространству $W_{2,p}(\Omega_T)$ для любого $T \geq 0$ и имеющее конечную норму

$$\|u\|_{\lambda_0} = \sup_{T \in \mathbb{R}_+} e^{-\lambda_0 T} \|u, \Omega_T\|_{2,p} < \infty. \quad (1.4)$$

Начальное условие u_0 выбирается из пространства V_0 (см. (0.6)).

ЛЕММА 1.1. Условие (0.8) заведомо выполнено, если $\gamma \geq 0$ и

$$\gamma^2 > 4(K - \mu_1 a_-)a_+ \text{Id}. \quad (1.5)$$

Здесь через $\mu_1 > 0$ обозначено первое собственное число оператора $-\Delta$ в области ω с граничными условиями Дирихле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (1.5) следует, что существует число $\gamma_0 \geq 0$ такое, что

$$\gamma \geq \gamma_0 \text{ Id} \quad \text{и} \quad \gamma_0^2 > 4(K - \mu_1 a_-)a_+.$$

Таким образом, $a_+ \lambda_0^2 - \gamma_0 \lambda_0 - \mu_1 a_- + K < 0$ при $\lambda_0 = \gamma_0/2a_+$ и, следовательно, для любого $v \in W_{1,2}^0(\omega)$, $v \neq 0$,

$$\begin{aligned} (L_K(\lambda_0)v, v) &= (av, v)\lambda_0^2 - (\gamma v, v)\lambda_0 - (a\nabla v, \nabla v) + (Kv, v) \\ &\leq (a_+ \lambda_0^2 - \gamma_0 \lambda_0 - \mu_1 a_- + K)\|v\|_{0,2}^2 < 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее $a\nabla v, \nabla v \equiv \sum_i a \partial_{x_i} v \cdot \partial_{x_i} v$. Лемма 1.1 доказана.

ЛЕММА 1.2. *Условие (0.8) эквивалентно следующему:*

$$-(L_K(\lambda_0)v, v) \geq \varepsilon \|v\|_{1,2}^2 \quad \text{для некоторого } \varepsilon > 0. \quad (1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда существуют $v_i \in W_{1,2}^0(\omega)$, $\|v_i\|_{1,2} = 1$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что

$$(L_K(\lambda_0)v_i, v_i) = -\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \geq 0, \quad \varepsilon_i \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Без ограничения общности можно считать, что $v_i \rightarrow v_0 \in W_{1,2}^0(\omega)$ в пространстве $W_{1,2}^0$ и $v_i \rightarrow v_0$ в пространстве H . Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$ в формуле (1.7), учитывая, что $(a\nabla v_0, \nabla v_0) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} (a\nabla v_i, \nabla v_i)$, получим $(L_K(\lambda_0)v_0, v_0) \geq 0$. Таким образом, согласно условию (0.8) $v_0 = 0$. Переписав соотношение (1.7) в виде

$$(a\nabla v_i, \nabla v_i) = (av_i, v_i)\lambda_0^2 - (\gamma v_i, v_i)\lambda_0 + (Kv_i, v_i) + \varepsilon_i,$$

получим $\|v_i\|_{1,2} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, что противоречит выбору последовательности v_i . Лемма 1.2 доказана.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда задача (1.1) имеет единственное решение $u(t)$ и справедлива оценка*

$$\|u, \Omega_T\|_{2,p}^p \leq C e^{p\lambda_0 T} \left(\|u_0\|_{V_0}^p e^{-\alpha T} + \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha|T-s|-p\lambda_0 s} \|g(s)\|_{0,p}^p ds \right) \quad (1.8)$$

для некоторого положительного α .

Для доказательства этой теоремы нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1.3. *Пусть u – решение задачи (1.1). Тогда справедлива оценка*

$$\|u, \Omega_T\|_{1,2}^2 \leq C e^{2\lambda_0 T} \left(\|u_0\|_{V_0}^2 e^{-\alpha T} + \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha|T-s|-2\lambda_0 s} \|g(s)\|_{0,2}^2 ds \right). \quad (1.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $v \in W_{2,p}(\Omega_+)$ такую, что

$$v|_{t=0} = u_0, \quad v|_{\partial\omega} = 0, \quad \text{supp } v \subset \Omega_0, \quad \|v, \Omega_+\|_{2,p} \leq C\|u_0\|_{V_0}. \quad (1.10)$$

Введем новую неизвестную функцию $\theta(t) = u(t)e^{-\lambda_0 t} - v(t)$. Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\begin{cases} a\partial_t^2\theta - (\gamma - 2a\lambda_0)\partial_t\theta + [a\lambda_0^2 - \gamma\lambda_0 + a\Delta_x - q(t, x)]\theta = g_1(t), \\ \theta|_{\partial\omega} = 0, \quad \theta|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Здесь

$$g_1(t) = g(t)e^{-\lambda_0 t} - a\partial_t^2 v + (\gamma - 2a\lambda_0)\partial_t v - [a\lambda_0^2 - \gamma\lambda_0 + a\Delta_x - q(t, x)]v.$$

Умножим уравнение (1.11) скалярно в $\mathbb{R}^k$ на функцию $\theta(t)\varphi_T(t)$, где $\varphi_T(t) = e^{-\alpha|T-t|}$, α — некоторое достаточно малое положительное число, которое будет определено позднее, и проинтегрируем по области Ω_+ . Получим:

$$\begin{aligned} \langle a\partial_t^2\theta, \theta(t)\varphi_T(t) \rangle - \langle (\gamma - 2a\lambda_0)\partial_t\theta, \theta(t)\varphi_T(t) \rangle \\ + \langle [a\lambda_0^2 - \gamma\lambda_0 + a\Delta_x - q(t, x)]\theta, \theta(t)\varphi_T(t) \rangle = \langle g_1(t), \theta(t)\varphi_T(t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Omega_+)$. Так как согласно определению решения $u(t)$ функция $\theta(t)$ ограничена при $t \rightarrow +\infty$, т.е.

$$\|\theta\|_b = \sup_{T \geq 0} \|u, \Omega_T\|_{2,p} < \infty,$$

то все выписанные выше интегралы имеют смысл.

Оценим отдельно каждое слагаемое в левой части формулы (1.12). Интегрируя по частям, используя положительную определенность матрицы a , оценку

$$|\partial_t\varphi_T(t)| \leq \alpha\varphi_T(t) \quad (1.13)$$

и неравенство Гёльдера, получим:

$$\begin{aligned} -\langle a\partial_t^2\theta, \theta(t)\varphi_T(t) \rangle &= \langle a\partial_t\theta, \partial_t\theta, \varphi_T(t) \rangle + \langle a\partial_t\theta, \theta, \partial_t\varphi_T(t) \rangle \\ &\geq C\langle |\partial_t\theta|^2, \varphi_T(t) \rangle - C_1\alpha^2\langle |\theta|^2, \varphi_T(t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Аналогично, используя самосопряженность матриц a и γ , получим:

$$\begin{aligned} |\langle (\gamma - 2a\lambda_0)\partial_t\theta, \theta(t)\varphi_T(t) \rangle| &= \frac{1}{2} |\langle \partial_t[(\gamma - 2a\lambda_0)\theta, \theta], \varphi_T(t) \rangle| \\ &= \frac{1}{2} |-\langle [(\gamma - 2a\lambda_0)\theta, \theta], \partial_t\varphi_T(t) \rangle| \\ &\leq C_2\alpha\langle |\theta|^2, \varphi_T(t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Из оценки (1.6) следует, что

$$\begin{aligned} -\langle [a\lambda_0^2 - \gamma\lambda_0 + a\Delta_x - q(t, x)]\theta, \theta(t)\varphi_T(t) \rangle \\ \geq \varepsilon\langle |\nabla\theta|^2, \varphi_T(t) \rangle \geq \frac{\varepsilon}{2}\langle |\nabla\theta|^2, \varphi_T(t) \rangle + \frac{\varepsilon}{2}\mu_1\langle |\theta|^2, \varphi_T(t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь $\mu_1 > 0$ — первое собственное число оператора Лапласа в области ω .

Подставив эти оценки в формулу (1.12) и зафиксировав $\alpha > 0$ столь малым, чтобы

$$C_2\alpha + C_1\alpha^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}\mu_1,$$

получим:

$$\langle |\partial_t \theta|^2, \varphi_T(t) \rangle + \langle |\nabla \theta|^2, \varphi_T(t) \rangle \leq C \langle |g_1|^2, \varphi_T(t) \rangle. \quad (1.17)$$

Из определения функции $\varphi_T(t)$ следует, что $\varphi_T(t) \geq e^{-\alpha}$ при $t \in [T, T+1]$. Таким образом,

$$\|\theta, \Omega_T\|_{1,2}^2 \leq e^\alpha (\langle |\partial_t \theta|^2, \varphi_T(t) \rangle + \langle |\nabla \theta|^2, \varphi_T(t) \rangle) \leq C_1 \langle |g_1|^2, \varphi_T(t) \rangle. \quad (1.18)$$

Используя условия (1.10), получим:

$$\langle |g_1|^2, \varphi_T(t) \rangle \leq 2 \langle |g|^2, e^{-2\lambda_0 t} \varphi_T(t) \rangle + C e^{-\alpha T} \|u_0\|_{V_0}^2.$$

Подставив эту оценку в правую часть неравенства (1.18) и вспомнив, что $\theta(t) = u(t)e^{-\lambda_0 t} - v(t)$, получим оценку (1.9). Лемма 1.3 доказана.

ЛЕММА 1.4. Пусть u – решение уравнения (1.1). Тогда для любого $1 < r \leq p$ и любого $\nu > 0$ справедлива следующая оценка:

$$\|u, \Omega_T\|_{2,r} \leq C_\nu (\|u, \Omega_{T-\nu, T+1+\nu}\|_{1,r} + \|g, \Omega_{T-\nu, T+1+\nu}\|_{0,r} + \chi(\nu - T) \|u_0\|_{V_0}). \quad (1.19)$$

Здесь $\Omega_{T_1, T_2} = [T_1, T_2] \times \omega$ при $T_2 > T_1 \geq 0$ и $\Omega_{T_1, T_2} = [0, T_2] \times \omega$ при $T_1 < 0 \leq T_2$, $\chi(z)$ – функция Хевисайда, равная нулю при $z < 0$ и единице при $z \geq 0$, C_ν константа C_ν не зависит от T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi_T(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ – срезающая функция, $\psi_T(t) = 1$ при $t \in [T, T+1]$ и $\psi_T(t) = 0$ при $t \notin [T-\nu, T+1+\nu]$. Рассмотрим функцию $w = \psi_T(t)u(t)$. Из уравнения (1.1) следует:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w + \Delta_x w = h_u(t), \\ w|_{\partial\omega} = 0, \quad w|_{t=T+1+\nu} = 0, \\ w|_{t=\max\{T-\nu, 0\}} = \psi_T(0)u_0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Здесь

$$h_u = \psi_T'' u + 2\psi_T' \partial_t u + a^{-1} \psi_T (\gamma \partial_t u + q(x, t)u + g(t)). \quad (1.21)$$

Согласно формуле (1.21)

$$\|h_u, \Omega_{T-\nu, T+1+\nu}\|_{0,r} \leq C_\nu (\|u, \Omega_{T-\nu, T+1+\nu}\|_{1,r} + \|g, \Omega_{T-\nu, T+1+\nu}\|_{0,r}). \quad (1.22)$$

Используя теорему об $(W_{2,r}, L_r)$ -регулярности решений уравнения Лапласа (учитывая, что $\psi_T(0) = 0$ при $T \geq \nu$), получим:

$$\begin{aligned} \|u, \Omega_T\|_{2,r} &\leq \|w, \Omega_{T-\nu, T+1+\nu}\|_{2,r} \\ &\leq C_1 (\|h_u, \Omega_{T-\nu, T+1+\nu}\|_{0,r} + \chi(\nu - T) \|u_0\|_{V_0}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Оценка (1.19) следует непосредственно из неравенств (1.22) и (1.23). Лемма 1.4 доказана.

ЛЕММА 1.5. Пусть u – решение уравнения (1.1). Тогда

$$\|u, \Omega_T\|_{2,p} \leq C (\|u, \Omega_{T-1,T+2}\|_{1,2} + \|g, \Omega_{T-1,T+2}\|_{0,p} + \chi(1-T)\|u_0\|_{V_0}). \quad (1.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме вложения С. Л. Соболева

$$\|u, \Omega_{T-\nu,T+1+\nu}\|_{1,l(r)} \leq C \|u, \Omega_{T-\nu,T+1+\nu}\|_{2,r}. \quad (1.25)$$

Здесь

$$l(r) = \begin{cases} r \frac{n+1}{n+1-r} & \text{при } r < n+1, \\ \infty & \text{при } r > n+1. \end{cases} \quad (1.26)$$

Из оценок (1.19) и (1.25) получаем:

$$\|u, \Omega_T\|_{1,m(r)} \leq C (\|u, \Omega_{T-\nu,T+1+\nu}\|_{1,r} + \|g, \Omega_{T-\nu,T+1+\nu}\|_{0,r} + \chi(\nu-T)\|u_0\|_{V_0}). \quad (1.27)$$

Здесь $m(r) = \min\{l(r), p\}$. Определим последовательность показателей r_i следующим образом: $r_0 = 2$, $r_{N+1} = m(r_N)$. Из формулы (1.26) следует, что $r_N = p$ при $N \geq N_0 = \left\lceil \frac{\ln p/2}{\ln(1+2/(n+1))} \right\rceil + 1$, где символом $[z]$ обозначена целая часть числа z .

Итерируя формулу (1.27) N_0 раз, начав с $r = 2$, получим:

$$\begin{aligned} \|u, \Omega_T\|_{1,p} &\leq C (\|u, \Omega_{T-N_0\nu,T+1+N_0\nu}\|_{1,2} \\ &\quad + \|g, \Omega_{T-N_0\nu,T+1+N_0\nu}\|_{0,p} + \chi(N_0\nu-T)\|u_0\|_{V_0}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Подставив эту оценку в формулу (1.19) и выбрав $\nu = \frac{1}{N_0+1}$, получим оценку (1.24). Лемма 1.5 доказана.

Подставив оценку (1.9) в неравенство (1.24), получим оценку (1.8).

Единственность решения задачи (1.1) следует из этой оценки и линейности системы (1.1). Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1.1 осталось доказать существование решения задачи (1.1). Для построения этого решения нам понадобится аналог теоремы 1.1 для вспомогательной задачи вида (1.1) в конечном цилиндре $\Omega_{0,M}$, $M \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a(\Delta_x u + \partial_t^2 u) - \gamma \partial_t u - q(t, x)u = g(t), \\ u|_{\partial\omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{t=M} = u_1. \end{cases} \quad (1.29)$$

ЛЕММА 1.6. Задача (1.29) имеет единственное решение для любых функций $u_0, u_1 \in V_0$, $0 \leq T \leq M-1$, и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u, \Omega_T\|_{2,p}^p &\leq C e^{p\lambda_0 T} \left(\|u_0\|_{V_0}^p e^{-\alpha T} + \|u_1\|_{V_0}^p e^{-\alpha(M-T)-p\lambda_0 M} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^M e^{-\alpha|T-s|-p\lambda_0 s} \|g(s)\|_{0,p}^p ds \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Более того, константа C в последнем неравенстве не зависит от $M \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывода априорной оценки (1.30) в случае ограниченного цилиндра $\Omega_{0,M}$ совершенно аналогичен доказательству оценки (1.8) в случае неограниченного цилиндра Ω_+ , проведенному выше (леммы 1.3–1.5), и поэтому здесь не приводится. Существование решения задачи (1.29) доказывается на основе априорной оценки (1.30) при помощи принципа Лере–Шаудера (см., например, [4]). Лемма 1.6 доказана.

Завершим доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим последовательность u_M решений задач (1.29) в цилиндрах $\Omega_{0,M}$, $M \in \mathbb{N}$, с условиями $u_M|_{t=0} = u_0$, $u_M|_{t=M} = 0$. Согласно равномерной оценке (1.30) последовательность u_M ($M \geq T$) ограничена в пространстве $W_{2,p}(\Omega_T)$ для любого $T \geq 0$. Используя рефлексивность пространства $W_{2,p}$ и канторовскую диагональную процедуру, выделим из u_M подпоследовательность u_{M_k} , слабо сходящуюся к некоторой функции u в пространстве $W_{2,p}(\Omega_T)$ для любого $T \in \mathbb{N}$. Нетрудно проверить (см. [4]), что u – искомое решение задачи (1.1). Теорема 1.1 доказана.

В дальнейшем нам понадобится оценка снизу норм решений задачи (1.1).

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть функция $u \in W_{2,2}(\Omega_T)$ для любого $T \geq 0$ и удовлетворяет уравнению (1.1) с $g \equiv 0$. Тогда справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{1,2}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{0,2}^2 \geq C(\|u(0)\|_{1,2}^2 + \|\partial_t u(0)\|_{0,2}^2) e^{-\beta t^2 + C_u t}. \quad (1.31)$$

Здесь константа $C_u \in \mathbb{R}$ зависит, вообще говоря, от функции u , а константы $\beta, C \in \mathbb{R}_+$ зависят лишь от коэффициентов уравнения (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы при немного более сильных предположениях относительно функции u приведено в работе [14]. Для удобства читателя мы приводим ниже схему этого доказательства с необходимыми в нашем случае изменениями.

Введем функции

$$p(t) = \partial_t u(t) + (-\Delta_x)^{1/2} u(t) \quad \text{и} \quad r(t) = \partial_t u(t) - (-\Delta_x)^{1/2} u(t). \quad (1.32)$$

Тогда, так как $u \in W_{2,2}(\Omega_T)$ при любом $T > 0$, то для любого $M > 0$

$$p, r \in W_{1,2}([0, M], L_2(\omega)) \cap L_2([0, M], W_{1,2}^0(\omega)) \subset C([0, M], L_2(\omega)). \quad (1.33)$$

Так как u удовлетворяет уравнению (1.1), то, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} \partial_t p - (-\Delta_x)^{1/2} p &= a^{-1} \gamma \frac{p+r}{2} + a^{-1} q (-\Delta_x)^{-1/2} \frac{p-r}{2}, \\ \partial_t r + (-\Delta_x)^{1/2} r &= a^{-1} \gamma \frac{p+r}{2} + a^{-1} q (-\Delta_x)^{-1/2} \frac{p-r}{2}. \end{aligned}$$

Или, обозначив $\xi_u(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ r(t) \end{pmatrix}$,

$$\partial_t \xi_u(t) - \mathcal{B} \xi_u(t) = \mathcal{T}(t) \xi_u(t), \quad \text{где} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -(-\Delta_x)^{1/2} & 0 \\ 0 & (-\Delta_x)^{1/2} \end{pmatrix},$$

а оператор $\mathcal{T}(t)$ удовлетворяет равномерной по $t \in [0, \infty]$ оценке

$$\|\mathcal{T}(t)\xi_u\|_{0,2} \leq C\|\xi_u\|_{0,2}. \quad (1.34)$$

Пусть $y(t) = \|\xi_u(t)\|_{0,2}^2$. Предположим, что $y(0) > 0$ (в противном случае доказывать нечего). Тогда согласно (1.33) $y(t) > 0$ при $t \in [0, M]$ для некоторого $M > 0$.

Рассмотрим функцию

$$l(t) = \ln y(t) - \int_0^t F(s) ds, \text{ где } t \in [0, M], \text{ а } F(t) = \frac{2(\mathcal{T}(t)\xi_u(t), \xi_u(t))}{y(t)}. \quad (1.35)$$

Для завершения доказательства теоремы 1.2 понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 1.7. *Пусть $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1), а функция $l(t)$ определена формулой (1.35). Тогда $l \in AC([0, M])$, $l' \in AC([0, M])$ и справедлива оценка*

$$l''(t) + 4C^2 \geq 0. \quad (1.36)$$

Здесь константа C такая же, как и в формуле (1.34).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод оценки (1.36) приведен в [14]. Абсолютная непрерывность функции $l(t)$ следует из (1.33). Абсолютная непрерывность производной $l'(t)$ следует из (1.33) и формулы

$$l'(t) = \frac{2(\mathcal{B}\xi_u(t), \xi_u(t))}{y(t)},$$

которая проверяется непосредственным вычислением. Лемма 1.7 доказана.

Завершим доказательство теоремы 1.2. Интегрируя дважды оценку (1.36), получим:

$$y(t) \geq y(0)e^{-2C^2t^2 + l'(0)t + \int_0^t F(s) ds}. \quad (1.37)$$

Из неравенства (1.34) следует, что $\int_0^t F(s) ds \geq -4Ct$. Таким образом,

$$\|p(t)\|_{0,2}^2 + \|r(t)\|_{0,2}^2 \geq (\|p(0)\|_{0,2}^2 + \|r(0)\|_{0,2}^2)e^{-2C^2t^2 - 4Ct + l'(0)t}.$$

Теорема 1.2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения уравнения (1.1). Тогда если для некоторого $T \geq 0$ $u_1(T) = u_2(T)$, то $u_1 \equiv u_2$.*

Действительно, $u(t) = u_1(t) - u_2(t) = 0$ для любого $t \geq T$ согласно теореме 1.1, следовательно, $\partial_t u(T) = 0$. Из оценки (1.31) получаем теперь, что $u(0) = 0$, а значит, $u(t) = 0$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

§ 2. Нелинейная система.

Априорные оценки. Существование решений

В этом параграфе мы выведем априорную оценку (0.9) и на ее основе покажем, что для любого $u_0 \in V_0$ задача (0.1) имеет хотя бы одно решение. Предполагается, что a и γ – самосопряженные матрицы ($a, \gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$), причем $a > 0$, а нелинейная функция $f \in C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ и удовлетворяет п. 2 условий (0.3).

В отличие от предыдущего параграфа здесь мы будем рассматривать лишь *ограниченные* при $t \rightarrow \infty$ решения уравнения (0.1), т.е. решения $u(t)$, имеющие конечную норму (0.5). При этом предполагается, что g удовлетворяет условию (0.4) и $u_0 \in V_0$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия и пусть u – решение задачи (0.1). Тогда справедлива оценка (0.9).*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2.1. *Пусть u – решение задачи (0.1). Тогда*

$$\|u(T)\|_{0,2}^2 \leq C(\|u(0)\|_{0,2}^2 e^{-\alpha T} + 1 + |g|_b^2) \quad (2.1)$$

для некоторой положительной константы α .

Доказательство этой оценки также будет проведено в несколько шагов. На первом шаге будет получена грубая оценка вида (2.1), которая в дальнейшем будет уточняться.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть u – решение задачи (0.1). Тогда*

$$\|u(T)\|_{0,2}^2 \leq C e^{mT} (1 + |g|_b^2 + \|u_0\|_{0,2}^2) \quad (2.2)$$

для некоторой положительной константы m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим скалярно в пространстве H уравнение (0.1) на функцию $u e^{-\varepsilon t} \chi_\tau(t)$, где $\chi_\tau(t) = \chi(t - \tau)$ ($\chi(z)$ – функция Хевисайда), а $\varepsilon > 0$ – достаточно малое положительное число, которое будет определено позднее, и проинтегрируем полученное соотношение по $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \langle a \partial_t^2 u, u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle - \langle \gamma \partial_t u, u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle \\ - \langle a \nabla_x u, \nabla_x u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle - \langle f(u), u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle = \langle g, u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Преобразуем первое и второе слагаемое формулы (2.3) при помощи интегрирования по частям

$$\begin{aligned} -\langle a \partial_t^2 u, u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle &= \langle a \partial_t u, \partial_t u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle - \varepsilon \langle a \partial_t u, u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle + (a \partial_t u(\tau), u(\tau)) e^{-\varepsilon \tau} \\ &\geq C \langle |\partial_t u|^2, \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle - C_1 \varepsilon^2 \langle |u|^2, \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle + y'(\tau) e^{-\varepsilon \tau}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь и далее $y(\tau) = \frac{1}{2}(au(\tau), u(\tau))$. Имеем:

$$\begin{aligned} -\langle \gamma \partial_t u, u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle &= -\frac{1}{2} \varepsilon \langle \gamma u, u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle + \frac{1}{2} (\gamma u(\tau), u(\tau)) e^{-\varepsilon \tau} \\ &\leq C_2 \varepsilon \langle |u|^2, \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle + C_3 y(\tau) e^{-\varepsilon \tau}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Согласно п. 2 условий (0.3)

$$-\langle f(u), u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle \leq \langle C, \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle \leq C_1. \quad (2.6)$$

Согласно неравенству Фридрихса

$$\langle a \nabla_x u, \nabla_x u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle \geq 2C_4 \langle |u|^2, \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle.$$

Оценив последнее слагаемое в формуле (2.3) при помощи неравенства Гёльдера, получим:

$$\begin{aligned} |\langle g, u \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle| &\leq C_4 \langle |u|^2, \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle + C_5 \langle |g|^2, \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle \\ &\leq C_4 \langle |u|^2, \chi_\tau e^{-\varepsilon t} \rangle + C_6 |g|_b^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставив эти оценки в формулу (2.3) и выбрав $\varepsilon > 0$ так, чтобы $C_1 \varepsilon^2 + C_2 \varepsilon \leq C_3$, получим:

$$(y'(\tau) - C_3 y(\tau)) e^{-\varepsilon \tau} \leq C(1 + |g|_b^2). \quad (2.8)$$

Применив неравенство Гронуолла к оценке (2.8), получим оценку (2.2). Предложение 2.1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть u – решение уравнения (0.1). Тогда для $T \geq 1$ справедлива следующая оценка:

$$\|u, \Omega_T\|_{1,2}^2 \leq C(\|u, \Omega_0\|_{0,2}^2 e^{-\alpha T} + 1 + |g|_b^2). \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем еще одну срезающую функцию $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ такую, что $\psi(t) \geq 0$, $\psi(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $\psi(t) = 1$ при $t \geq 1$. Умножим аналогично доказательству леммы 1.3 уравнение (0.1) скалярно в пространстве $L_2(\Omega_+)$ на функцию $u(t)\psi(t)e^{-\alpha|T-t|} = u\psi\varphi_T$. Получим:

$$\begin{aligned} \langle a \partial_t^2 u, u \psi \varphi_T \rangle - \langle a \nabla u, \nabla(u \psi \varphi_T) \rangle \\ - \langle \gamma \partial_t u, u \psi \varphi_T \rangle - \langle f(u), u \psi \varphi_T \rangle = \langle g, u \psi \varphi_T \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Оценим отдельно каждое слагаемое в формуле (2.10). Интегрируя по частям и используя тот факт, что $\text{supp } \psi' \subset [0, 1]$, получим аналогично (1.14)

$$\begin{aligned} -\langle a \partial_t^2 u, u \psi \varphi_T \rangle &= \langle a \partial_t u, \partial_t u, \psi \varphi_T \rangle + \frac{1}{2} \langle \partial_t [au, u], \psi' \varphi_T \rangle + \langle a \partial_t u, u \psi \varphi'_T \rangle \\ &= \langle a \partial_t u, \partial_t u, \psi \varphi_T \rangle + \langle a \partial_t u, u \psi \varphi'_T \rangle - \frac{1}{2} \langle au, u, (\psi' \varphi_T)' \rangle \\ &\geq C \langle |\partial_t u|^2, \psi \varphi_T \rangle - C_1 \alpha^2 \langle |u|^2, \psi \varphi_T \rangle - C_2 \|u, \Omega_0\|_{0,2}^2 e^{-\alpha T}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Используя самосопряженность матрицы γ , получим аналогично (1.15)

$$\begin{aligned}\langle \gamma \partial_t u, u \psi \varphi_T \rangle &= -\frac{1}{2} \langle \gamma u, u, \psi \varphi'_T \rangle - \frac{1}{2} \langle \gamma u, u, \psi' \varphi_T \rangle \\ &\geq -C (\alpha \langle |u|^2, \psi \varphi_T \rangle + \|u, \Omega_0\|_{0,2}^2 e^{-\alpha T}).\end{aligned}\quad (2.12)$$

Согласно п. 2 условий (0.3)

$$\langle f(u), u \psi \varphi_T \rangle = \langle f(u), u, \psi \varphi_T \rangle \geq -\langle C, \psi \varphi_T \rangle \geq -C_1. \quad (2.13)$$

Согласно неравенству Гёльдера

$$|\langle g, u \psi \varphi_T \rangle| \leq \mu \langle |u|^2, \psi \varphi_T \rangle + C_\mu \langle |g|^2, \psi \varphi_T \rangle. \quad (2.14)$$

Подставив оценки (2.11)–(2.14) в уравнение (2.10), получим

$$\langle |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2, \psi \varphi_T \rangle \leq C (\|u, \Omega_0\|_{0,2}^2 e^{-\alpha T} + 1 + \langle |g|^2, \varphi_T \rangle). \quad (2.15)$$

Оценка (2.9) следует из оценки (2.15) так же, как и при доказательстве леммы 1.3. Предложение 2.2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Подставив оценку (2.2) в оценку (2.9) и используя очевидную оценку

$$\|u(T)\|_{0,2} \leq C \|u, \Omega_T\|_{1,2},$$

получаем неравенство (2.1) в случае $T \geq 1$. В случае $T \leq 1$ неравенство (2.1) немедленно следует из оценки (2.2). Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть u – решение задачи (0.1). Тогда

$$\|u(T)\|_{0,\infty} \leq C (\|u_0\|_{V_0} e^{-\alpha T} + 1 + |g|_b). \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $w(t, x) = au(t, x).u(t, x)$. Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t) + \Delta_x w(t) = h_u(t), \\ w|_{t=0} = au_0.u_0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned}h_u(t) &= 2(a \partial_t u(t). \partial_t u(t) + a \nabla u(t). \nabla u(t) + \gamma \partial_t u(t). u(t) \\ &\quad + f(u(t)). u(t) + g(t). u(t)) \\ &\geq -C_1 (1 + |g(t)|. |u(t)| + |u(t)|^2) \equiv h(t).\end{aligned}\quad (2.18)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \partial_t^2 v(t) + \Delta_x v(t) = h(t), \\ v|_{t=0} = au_0, u_0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Согласно теореме вложения С. Л. Соболева $W_{2,p} \subset C$ при $p > (n+1)/2$. Таким образом, из условия (0.5) следует, что $h \in L_p(\Omega_T)$ при любом $T \geq 0$ и $|h|_b < \infty$.

Согласно теореме 1.1 с $\gamma = 0$, $q = 0$, $K = 0$, $\lambda_0 = 0$

$$\|v, \Omega_T\|_{2,p}^p \leq C \left(\|u_0\|_{V_0}^{2p} e^{-\alpha T} + \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha|T-s|} \|h(s)\|_{0,p}^p ds \right). \quad (2.20)$$

Согласно принципу максимума для ограниченных решений уравнения (2.19) (см. [4])

$$w(t, x) \leq v(t, x) \text{ почти всюду в } \Omega_+. \quad (2.21)$$

Так как $p > (n+1)/2$, то из (2.20) и (2.21), учитывая положительность функции w , получаем:

$$\|u(T)\|_{0,\infty}^{2p} \leq C \left(\|u_0\|_{V_0}^{2p} e^{-\alpha T} + \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha|T-s|} \|h(s)\|_{0,p}^p ds \right). \quad (2.22)$$

Оценим функцию h при помощи неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \|h(s)\|_{0,p}^p &\leq C(1 + (|g(s)|^p |u(s)|^p, 1) + \|u(s)\|_{0,2p}^{2p}) \\ &\leq C_1(1 + \|g(s)\|_{0,p}^p \|u(s)\|_{0,\infty}^p + \|u(s)\|_{0,2p}^{2p}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Оценим последнее слагаемое в правой части формулы (2.23) следующим образом:

$$\|u(s)\|_{0,2p}^{2p} \leq \|u(s)\|_{0,\infty}^{2p(1-\theta)} \|u(s)\|_{0,2}^{2p\theta} \leq C_\mu \|u(s)\|_{0,2}^{2p} + \mu \|u(s)\|_{0,\infty}^{2p}. \quad (2.24)$$

Здесь $\theta = 1/p \in (0, 1)$ и оценка (2.24) справедлива при любом $\mu > 0$.

Аналогично

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha|T-s|} \|g(s)\|_{0,p}^p \|u(s)\|_{0,\infty}^p ds \\ &\leq C |g|_b^p \sup_{s \geq 0} \{e^{-\alpha|T-s|/2} \|u(s)\|_{0,\infty}^p\} \\ &\leq C_\mu |g|_b^{2p} + \mu \sup_{s \geq 0} \{e^{-\alpha|T-s|} \|u(s)\|_{0,\infty}^{2p}\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подставляя оценки (2.23), (2.24) и (2.25) в неравенство (2.22) и используя оценку L_2 -нормы функции $u(s)$, доказанную в лемме 2.1, получим после несложных преобразований

$$\|u(T)\|_{0,\infty}^{2p} \leq C_\mu (1 + |g|_b^{2p} + \|u_0\|_{V_0}^{2p} e^{-\alpha T}) + \mu \sup_{s \geq 0} \{e^{-\alpha|T-s|} \|u(s)\|_{0,\infty}^{2p}\}. \quad (2.26)$$

Для завершения доказательства леммы 2.2 нам понадобится следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть функция $z \in C_b(\mathbb{R}_+)$ такова, что выполнено следующее неравенство

$$z(t) \leq C_1 + C_0 e^{-\alpha t} + \mu \sup_{s \geq 0} \{e^{-\beta|t-s|} z(s)\} \quad (2.27)$$

при некоторых $\alpha \geq \beta > 0$ и $\mu < 1/2$. Тогда

$$z(t) \leq 2(C_0 e^{-\beta t} + C_1). \quad (2.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим неравенство (2.27) на $e^{-\beta|l-t|}$, $l \in \mathbb{R}_+$, и возьмем $\sup_{t \geq 0}$ от обеих частей полученного неравенства. Получим:

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} e^{-\beta|l-t|} z(t) &\leq C_0 \sup_{t \geq 0} e^{-\beta|l-t|} e^{-\alpha t} + C_1 \sup_{t \geq 0} e^{-\beta|l-t|} \\ &\quad + \mu \sup_{t \geq 0} \sup_{s \geq 0} \{e^{-\beta(|t-s|+|t-l|)} z(s)\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Имеем: $\sup_{t \geq 0} e^{-\beta|l-t|-\alpha t} = e^{-\beta l}$. Изменяя порядок предельных переходов в последнем слагаемом в правой части неравенства (2.29), получим:

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \sup_{s \geq 0} \{e^{-\beta(|t-s|+|t-l|)} z(s)\} &= \sup_{s \geq 0} \left\{ \sup_{t \geq 0} e^{-\beta(|t-s|+|t-l|)} z(s) \right\} \\ &= \sup_{s \geq 0} e^{-\beta|l-s|} z(s) = \sup_{t \geq 0} \{e^{-\beta|l-t|} z(t)\}. \end{aligned}$$

Подставив эти формулы в неравенство (2.29) и используя, что $\mu \leq 1/2$, будем иметь

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\beta|l-t|} z(t) \leq 2(C_0 e^{-\beta l} + C_1).$$

Подставив эту оценку в неравенство (2.27), получим оценку (2.28). Предложение 2.3 доказано.

Завершим доказательство леммы 2.2. Применим предложение 2.3 к неравенству (2.26) и $z(t) = \|u(t)\|_{0,\infty}^{2p}$. Оценка (2.16) немедленно следует теперь из неравенства (2.28). Лемма 2.2 доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть u — решение уравнения (0.1). Тогда

$$\|f(u), \Omega_T\|_{0,\infty} \leq Q(\|u_0\|_{V_0}) e^{-\alpha T} + Q(|g|_b) \quad (2.30)$$

для некоторой монотонной функции Q .

Вывод оценки (2.30) из оценки (2.16) приведен в [4].

Завершим доказательство теоремы 2.1. Запишем уравнение (0.1) в виде линейного уравнения

$$a \partial_t^2 u - \gamma \partial_t u + a \Delta_x u = g(t) + f(u(t)) = h(t). \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) имеет вид (1.1) при $q(t, x) \equiv 0$. Кроме того, очевидно, что пучок (0.7) с $K = 0$ удовлетворяет условиям (0.8) при $\lambda_0 = 0$. Применив к уравнению (2.31) оценку (1.8) с $\lambda_0 = 0$, получим:

$$\|u, \Omega_T\|_{2,p}^p \leq C \|u_0\|_{V_0}^p e^{-\alpha T} + C \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha|T-s|} \|h(s)\|_{0,p}^p ds. \quad (2.32)$$

Подставив оценку (2.30) в неравенство (2.32), получим оценку (0.9). Теорема 2.1 доказана.

Для доказательства разрешимости задачи (0.1) нам, как и в § 1, понадобится вспомогательная задача вида (0.1) в конечном цилиндре $\Omega_{0,M}$, $M \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 u + \Delta_x u) - \gamma \partial_t u - f(u) = g(t), \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{t=M} = u_1, \quad u|_{\partial\omega} = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $u_0, u_1 \in V_0$ и u — решение задачи (2.33). Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|u, \Omega_T\|_{2,p} \leq Q(\|u_0\|_{V_0}^2 + \|u_1\|_{V_0}^2)(e^{-\alpha T} + e^{-\alpha(M-T)}) + Q(\|g\|_b). \quad (2.34)$$

Здесь Q — некоторая монотонная функция, не зависящая от $M \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод оценки (2.34) совершенно аналогичен доказательству оценки (0.9), проведенному выше (леммы 2.1–2.3). Поэтому ниже мы приведем лишь схему доказательства теоремы 2.2.

Аналогом оценки (2.1) для случая задачи (2.33) будет следующая равномерная по $M \in \mathbb{N}$ оценка.

ЛЕММА 2.4. Пусть u — решение задачи (2.33). Тогда при $T \in [0, M]$

$$\|u(T)\|_{0,2}^2 \leq C(\|u(0)\|_{0,2}^2 + \|u(M)\|_{0,2}^2)(e^{-\alpha T} + e^{-\alpha(M-T)}) + 1 + |g|_b^2. \quad (2.35)$$

Для доказательства леммы 2.4 нам понадобятся следующие предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть u — решение задачи (2.33). Тогда равномерно по $M \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|u(T)\|_{0,2}^2 \leq C(\|u(0)\|_{0,2}^2 + \|u(M)\|_{0,2}^2) \min\{e^{mT}, e^{m(M-T)}\}. \quad (2.36)$$

Здесь m — некоторое положительное число, $0 \leq T \leq M - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножив уравнение (2.33) скалярно в $L_2(\omega)$ на функцию $ue^{-\varepsilon t}$ и проинтегрировав по отрезку $[\tau, s] \subset [0, M]$, получим аналогично выводу оценки (2.8) следующую равномерную по M оценку:

$$(y'(\tau) - C_1 y(\tau))e^{-\varepsilon \tau} - (y'(s) + C_2 y(s))e^{-\varepsilon s} \leq C(1 + |g|_b^2). \quad (2.37)$$

Без ограничения общности можно считать, что $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$.

Умножив неравенство (2.37) на $e^{(\varepsilon + C_2)s}$ и проинтегрировав по $s \in [\tau, M]$, получим после несложных преобразований

$$(y'(\tau) - C_1 y(\tau))e^{-\varepsilon \tau} \leq C(1 + |g|_b^2) + (C_2 + \varepsilon)y(M)e^{C_2 M} (e^{(C_2 + \varepsilon)M} - e^{(C_2 + \varepsilon)\tau})^{-1}. \quad (2.38)$$

Без ограничения общности можно считать также, что $\tau \leq M - 1$. В этом случае, как нетрудно проверить,

$$e^{C_2 M} (e^{(C_2 + \varepsilon)M} - e^{(C_2 + \varepsilon)\tau})^{-1} \leq (1 - e^{-C_2 - \varepsilon})^{-1} \leq C.$$

Таким образом, из (2.38) следует оценка

$$(y'(\tau) - C_1 y(\tau))e^{-\varepsilon \tau} \leq C(1 + |g|_b^2 + y(M)). \quad (2.39)$$

Применив неравенство Гронсуолла к оценке (2.39), получим:

$$y(t) \leq C(1 + |g|_b^2 + |y(0)| + |y(M)|)e^{mt} \quad \text{при } t \leq M - 1 \quad (2.40)$$

для некоторого $m > 0$. Применяя оценку (2.40) к задаче (2.33), в которой t заменено на $M - t$, получим оценку

$$y(t) \leq C(1 + |g|_b^2 + |y(0)| + |y(M)|)e^{m(M-t)} \quad \text{при } t \geq 1. \quad (2.41)$$

Неравенство (2.36) следует из оценок (2.40) и (2.41). Предложение 2.4 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть u – решение задачи (2.33). Тогда при $T \in [1, M - 2]$ справедлива оценка

$$\|u, \Omega_T\|_{1,2}^2 \leq C(\|u, \Omega_0\|_{0,2}^2 e^{-\alpha T} + \|u, \Omega_{M-1}\|_{0,2}^2 e^{-\alpha(M-T)} + 1 + |g|_b^2). \quad (2.42)$$

Доказательство предложения 2.5 почти дословно повторяет доказательство предложения 2.2, только вместо умножения на функцию $u(t)\psi(t)\varphi_T(t)$ необходимо умножать уравнение (2.33) на функцию $u(t)\psi(t)\psi(M-t)\varphi_T(t)$.

Оценка (2.35) следует из оценок (2.36) и (2.42) (см. доказательство леммы 2.1). Лемма 2.4 доказана.

ЛЕММА 2.5. Пусть u – решение задачи (2.33). Тогда

$$\|u(T)\|_{0,\infty}^2 \leq C(\|u_0\|_{V_0}^2 + \|u_1\|_{V_0}^2)(e^{-\alpha T} + e^{-\alpha(M-T)}) + 1 + |g|_b^2. \quad (2.43)$$

Доказательство леммы 2.5 аналогично доказательству леммы 2.2, только для оценки C -нормы решения вспомогательного уравнения (2.19) нужно воспользоваться оценкой (1.30) вместо оценки (1.8).

Как показано в работе [4], из оценки (2.43) и непрерывности функции f следует оценка

$$\|f(u), \Omega_T\|_{0,\infty} \leq Q(\|u_0\|_{V_0}^2 + \|u_1\|_{V_0}^2)(e^{-\alpha T} + e^{-\alpha(M-T)}) + Q(|g|_b) \quad (2.44)$$

для некоторой монотонной функции Q .

Записав теперь уравнение (2.33) в виде (2.31) и применив к нему оценку (1.30) с $\lambda_0 = 0$, получим оценку (2.34). Теорема 2.2 доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Задача (0.1) имеет хотя бы одно решение при любом $u_0 \in V_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в линейном случае (см. §1), сначала доказывается разрешимость задачи (2.33) в ограниченном цилиндре $\Omega_{0,M}$. Разрешимость задачи (2.33) выводится на основе априорной оценки (2.34) при помощи принципа Лере–Шаудера (см., например, [4]). Существование решения задачи (0.1) доказывается предельным переходом при $M \rightarrow \infty$ (см. доказательство теоремы 1.1). Теорема 2.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Оценка (0.9) получена в работе [4] при несколько более ограничительных условиях на нелинейную функцию f ($f(u) \cdot u \geq -C_1 + C_2|u|^{2+\varepsilon}$, $C_2, \varepsilon > 0$), но без требования самосопряженности матрицы γ .

§3. Дифференцируемость решений нелинейного эллиптического уравнения по “начальному” условию u_0

В этом параграфе мы докажем *однозначную* разрешимость краевой задачи (0.1). Кроме того, будет доказана дифференцируемость решений задачи (0.1) по начальному условию u_0 и проверена эквивалентность задач (0.1) и (0.11).

Всюду в дальнейшем мы вновь предполагаем, что a и γ – положительно определенные самосопряженные матрицы, нелинейная функция f удовлетворяет условиям (0.3), а операторный пучок (0.7) – условию (0.8) при некотором $\lambda_0 > 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда для любых двух решений u_1 и u_2 уравнения (0.1) имеет место следующая оценка:

$$\|u_1 - u_2, \Omega_T\|_{2,p} \leq C\|u_1(0) - u_2(0)\|_{V_0} e^{(\lambda_0 - \alpha)T}, \quad (3.1)$$

причем константа C в последней формуле зависит от $\|u_1(0)\|_{V_0}$ и $\|u_2(0)\|_{V_0}$, а константа $\alpha > 0$ – только от коэффициентов пучка $L_K(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = u_2 - u_1$. Тогда, как нетрудно проверить,

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 v + \Delta_x v) - \gamma \partial_t v - q_{u_1, u_2}(t, x)v = 0, \\ v|_{t=0} = u_1(0) - u_2(0), \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$q_{u_1, u_2}(t, x) = \int_0^1 f'(u_1(t, x) + \rho(u_2(t, x) - u_1(t, x))) d\rho. \quad (3.3)$$

Из оценки (0.9) и теоремы вложения С. Л. Соболева $W_{2,p} \subset C$ при $p > (n+1)/2$ получаем:

$$\|u_i, \Omega_+\|_{0,\infty} \leq C(\|u_i(0)\|_{V_0}), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, согласно формуле (3.3) и условиям (0.3)

$$\begin{aligned} 1. \quad & \|q_{u_1, u_2}(t, x), \Omega_+\|_{0,\infty} \leq C_1(\|u_1(0)\|_{V_0}, \|u_2(0)\|_{V_0}), \\ 2. \quad & q_{u_1, u_2}(t, x) \geq -K \text{ Id}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заметим, что по определению решения задачи (0.1) функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ ограничены при $t \rightarrow \infty$ (т.е. $\|u_i\|_b < \infty$), следовательно, функция $v(t)$ также ограничена при $t \rightarrow \infty$, а значит, заведомо

$$\|v\|_{\lambda_0} = \sup_{T \geq 0} e^{-\lambda_0 T} \|v, \Omega_T\|_{2,p} < \infty. \quad (3.5)$$

Таким образом, для уравнения (3.2) выполнены все условия теоремы 1.1. Оценка (3.1) следует теперь из оценки (1.8). Теорема 3.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Из формулы (3.1) следует, что для любого $t \geq 0$ корректно определен разрешающий оператор $S_t: V_0 \rightarrow V_0$, который начальному условию $u_0 \in V_0$ ставит в соответствие решение задачи (0.1) в момент “времени” t . Более того, этот оператор является (локально) липшицевым по u_0 , т.е.

$$\|S_t(u_{01}) - S_t(u_{02})\|_{V_0} \leq C\|u_{01} - u_{02}\|_{V_0} e^{(\lambda_0 - \alpha)t}, \quad u_{01}, u_{02} \in V_0. \quad (3.6)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $V_0' = W_{1-1/p,p}^0(\omega)$. Тогда из оценки (3.1) следует также

$$\|\partial_t u_1(0) - \partial_t u_2(0)\|_{V_0'} \leq C\|u_1(0) - u_2(0)\|_{V_0}.$$

Поэтому корректно определен локально липшицев оператор $\Phi: V_0 \rightarrow V_0'$, который начальному условию $u_0 \in V_0$ ставит в соответствие производную по t решения задачи (0.1) в момент времени $t = 0$

$$\partial_t u|_{t=0} = \Phi(u|_{t=0}). \quad (3.7)$$

Рассматривая момент времени $t = \tau > 0$ вместо $t = 0$, аналогично (3.7) получим соотношение

$$\begin{cases} \partial_t u|_{t=\tau} = \Phi_\tau(u|_{t=\tau}), \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (3.8)$$

справедливое для любого решения u задачи (0.1) и любого $\tau \geq 0$ (здесь через $\Phi_\tau: V_0 \rightarrow V_0'$ обозначен оператор Φ , соответствующий задаче (0.1), в которой $g(t)$ заменено на $g(t + \tau)$).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Оператор $S_t: V_0 \rightarrow V_0$, определенный в следствии 3.1, является инъективным при любом $t \geq 0$, т.е. из $S_t \xi_1 = S_t \xi_2$ для некоторого $t \geq 0$ следует, что $\xi_1 = \xi_2$.*

Действительно, утверждение следствия 3.3 сразу следует из следствия 1.1, примененного к уравнению (3.2).

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда разрешающий оператор $S_t: V_0 \rightarrow V_0$ дифференцируем по Фреше в пространстве V_0 при любом фиксированном $t \geq 0$ и его производная $w(t) = \mathcal{D}_{u_0} S_t(u_0)\xi$, $\xi \in V_0$, является единственным (согласно теореме 1.1) решением следующей задачи:*

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 w + \Delta_x w) - \gamma \partial_t w - f'(S_t(u_0))w = 0, \\ w|_{t=0} = \xi, \quad \|w\|_{\lambda_0} < \infty. \end{cases} \quad (3.9)$$

Оператор $\Phi: V_0 \rightarrow V'_0$ дифференцируем по Фреше, и его производная имеет вид

$$\mathcal{D}_{u_0} \Phi(u_0)\xi = \partial_t w(0), \quad w(t) - \text{решение задачи (3.9) с } w(0) = \xi.$$

Более того, $S_t \in C(\mathbb{R}_+ \times V_0, V_0)$, $\Phi \in C^1(V_0, V'_0)$ и производная Фреше $\mathcal{D}_{u_0} S_t(u_0)$ равномерно непрерывна по $u_0 \in B$ для любого ограниченного подмножества $B \subset V_0$ и $t \in [T, T+1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_{01}, u_{02} \in B$, $\|B\|_{V_0} \leq M$. Обозначим через $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – решения задач (0.1) с начальными условиями u_{01} и u_{02} соответственно. Пусть также $v(t) = u_2(t) - u_1(t)$ и $w(t)$ – решение задачи (3.9) с начальным условием $\xi = u_{02} - u_{01}$. Тогда, как нетрудно проверить, функция $\theta(t) = v(t) - w(t)$ является решением следующего уравнения:

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 \theta + \Delta_x \theta) - \gamma \partial_t \theta - f'(u_1)\theta = (q_{u_1, u_2} - f'(u_1))v \equiv L(t)v(t), \\ \theta|_{t=0} = 0, \quad \|\theta\|_{\lambda_0} < \infty. \end{cases} \quad (3.10)$$

Напомним, что функция q_{u_1, u_2} в правой части уравнения (3.10) определяется формулой (3.3).

Уравнение (3.10) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1, следовательно, согласно оценке (1.8)

$$\|\theta, \Omega_T\|_{2,p}^p \leq C e^{p\lambda_0 T} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha|T-s|-p\lambda_0 s} \|L(s)v(s)\|_{0,p}^p ds. \quad (3.11)$$

Оценивая $\|v(s)\|_{0,p}$ при помощи неравенства (3.6), получим:

$$\|\theta, \Omega_T\|_{2,p}^p \leq C_1 e^{p\lambda_0 T} \|v(0)\|_{V_0}^p \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha|T-s|-p\alpha s} \|L(s)\|_{0,\infty}^p ds. \quad (3.12)$$

Таким образом, необходимо доказать, что

$$Z(\|v(0)\|) \equiv \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha|T-s|-p\alpha s} \|L(s)\|_{0,\infty}^p ds \quad (3.13)$$

стремится к нулю при $\|v(0)\|_{V_0} \rightarrow 0$.

Так как согласно теореме 2.1 и теореме вложения С. Л. Соболева ($W_{2,p} \subset C$) $\|u_i\|_{0,\infty} \leq M_1 = M_1(\|B\|_{V_0})$, то из непрерывности функции f' и определения функции L следует, что $\|L, \Omega_+\|_{0,\infty} \leq M_2 = M_2(\|B\|_{V_0})$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $R(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\int_{R(\varepsilon)}^{\infty} e^{-p\alpha s} M_2^p ds < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда из равенства (3.13) после элементарных оценок получим:

$$Z(\|v(0)\|) \leq R(\varepsilon) \|L, \Omega_{0,R(\varepsilon)}\|_{0,\infty}^p + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.14)$$

Так как функция f' непрерывна, то существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ такое, что

$$|f'(\xi + \xi_1) - f'(\xi)| < \left(\frac{\varepsilon}{2R(\varepsilon)} \right)^{1/p}$$

при $|\xi| < 2M_1$ и $|\xi_1| < \delta_1$. Таким образом, при $\|v, \Omega_{0,R(\varepsilon)}\|_{0,\infty} < \delta_1$

$$|L(t, x)|^p \leq \int_0^1 |f'(u_1(t, x) + \rho v(t, x)) - f'(u_1(t, x))|^p d\rho \leq \frac{\varepsilon}{2R(\varepsilon)}$$

при $(t, x) \in \Omega_{0,R(\varepsilon)}$. Значит, $Z(\|v(0)\|_{V_0}) < \varepsilon$ при $\|v, \Omega_{0,R(\varepsilon)}\|_{0,\infty} < \delta_1$. Однако из оценки (3.6) и теоремы вложения следует, что

$$\|v, \Omega_{0,R(\varepsilon)}\|_{0,\infty} \leq C e^{\lambda_0 R(\varepsilon)} \|v(0)\|_{V_0}.$$

Поэтому $Z < \varepsilon$ при $\|v(0)\|_{V_0} < \delta = \delta_1 C^{-1} e^{-\lambda_0 R(\varepsilon)}$. Таким образом, доказана следующая оценка:

$$\|\theta, \Omega_T\|_{2,p} = e^{\lambda_0 T} o(\|v(0)\|_{V_0}) \quad \text{при} \quad \|v(0)\|_{V_0} \rightarrow 0. \quad (3.15)$$

Дифференцируемость оператора S_t в точке $u_{01} \in V_0$ следует из неравенства (3.15) и оценки $\|\theta(t)\|_{V_0} \leq C \|\theta, \Omega_t\|_{2,p}$.

Дифференцируемость оператора Φ немедленно следует из неравенства (3.15) и оценки $\|\partial_t \theta(0)\|_{V_0'} \leq C \|\theta, \Omega_0\|_{2,p}$. Заметим, что правая часть формулы (3.15) стремится к нулю при $v \rightarrow 0$ *равномерно* по $u_{01}, u_{02} \in B$ и $t \in [T, T+1]$, следовательно,

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{D}_{u_0} S_t(u_{01}) - \mathcal{D}_{u_0} S_t(u_{02}))v(0)\|_{V_0} \\ & \leq \|u_2(t) - u_1(t) - \mathcal{D}_{u_0} S_t(u_{02})v(0)\|_{V_0} + \|u_1(t) - u_2(t) + \mathcal{D}_{u_0} S_t(u_{01})v(0)\|_{V_0} \\ & \leq C \|u_2 - u_1 - \mathcal{D}_{u_0} S_t(u_{02})v(0), \Omega_T\|_{2,p} + C \|u_1 - u_2 + \mathcal{D}_{u_0} S_t(u_{02})v(0), \Omega_T\|_{2,p} \\ & \leq o(\|v(0)\|_{V_0}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Равномерная непрерывность $\mathcal{D}_{u_0} S_t(u_0)$ по $u_0 \in B$ следует из оценки (3.16). Так как согласно (3.16) семейство операторов $\{S_t, t \in [T, T+1]\}$ равностепенно непрерывно по $u_0 \in B$, то для доказательства непрерывности S_t по (t, u_0) достаточно проверить непрерывность по t функции $t \rightarrow S_t(u_0)$ при фиксированном $u_0 \in V_0$. Но согласно теореме 2.1 $u(t) = S_t(u_0) \in W_{2,p}(\Omega_T)$ для любого $T \geq 0$, а следовательно, по теореме вложения С. Л. Соболева $u \in C(\mathbb{R}_+, V_0)$. Теорема 3.2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Производная Фреше $\mathcal{D}_{u_0} S_t(u_0)$ удовлетворяет оценке (0.10).

Действительно, применив к уравнению (3.9) теорему 1.1, получим оценку (0.10).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Отметим, что в теореме 3.2 в действительности доказано, что

$$\|\theta\|_{\lambda_0} = o(\|v(0)\|_{V_0}). \quad (3.17)$$

То есть отображение $u_0 \rightarrow S_t(u_0)$ является дифференцируемым как отображение из пространства V_0 в пространство $W_{2,p}^{\lambda_0}$ обобщенных функций, имеющих конечную норму (1.4).

Исследуем теперь оператор Φ_τ , определенный в следствии 3.2. Для этого введем шкалу банаховых пространств $X_0 = V'_0$, $X_1 = V_0$, $X_\beta = (-\Delta_x)^{-\beta/2} X_0$ при $0 \leq \beta \leq 1$. Можно показать (см., например, [2]), что

$$X_\beta = W_{1-1/p+\beta,p}(\omega) \cap \{u_0 |_{\partial\omega} = 0\} \quad \text{при} \quad \beta \neq \frac{1}{p}. \quad (3.18)$$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда нелинейный оператор Φ_τ , определенный в следствии 3.2, может быть представлен в виде

$$\Phi_\tau(v) = -(-\Delta_x)^{1/2} v + F(\tau, v) + G(\tau), \quad v \in V_0, \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (3.19)$$

Здесь $G \in C_b(\mathbb{R}_+, X_0)$, а нелинейный оператор $F(\tau, \cdot) \in C(X_1, X_1) \cap C^1(X_1, X_\beta)$ для некоторого $\beta > 0$ при любом фиксированном $\tau \geq 0$. Кроме того,

$$F \in C_b(\mathbb{R}_+, C(X_1, X_1)) \quad \text{и} \quad \|F'_v(\tau, \xi)\|_{L(X_1, X_\beta)} \leq Q(\|\xi\|_{X_1}) \quad (3.20)$$

равномерно по $\tau \in \mathbb{R}_+$. Здесь $Q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — некоторая монотонная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $f(0) = 0$. Представим решение $u(t)$ задачи (0.1) (в которой $g(t)$ заменено на $g(t + \tau)$) как сумму двух функций $u(t) = v(t) + \theta(t)$, где функция v — решение задачи

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 v + \Delta_x v) - \gamma \partial_t v = g(t + \tau), \\ v|_{t=0} = u_0, \quad \|v\|_b < \infty, \end{cases} \quad (3.21)$$

а функция $\theta = u - v$ — решение задачи

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 \theta + \Delta_x \theta) - \gamma \partial_t \theta = f(S_t(u_0)), \\ \theta|_{t=0} = 0, \quad \|\theta\|_b < \infty. \end{cases} \quad (3.22)$$

Определим операторы $F_1(\tau, u_0)$ и $F_2(\tau, u_0)$ по формулам

$$F_1(\tau, u_0) = \partial_t \theta|_{t=0}, \quad F_2(\tau, u_0) = \partial_t v|_{t=0}. \quad (3.23)$$

Тогда $\Phi_\tau = F_1 + F_2$.

Исследуем сначала оператор F_1 . Так как $f \in C^1$ и $f(0) = 0$, то согласно оценке (0.9) $\|f(u), \Omega_{0,2}\|_{1,p} \leq Q_1(\|u_0\|_{V_0})$ для некоторой функции Q_1 и $f(u)|_{\partial\omega} = 0$. Так как $\theta(0) = 0$, то согласно теореме об $(W_{3,p}, W_{1,p}^0)$ -регулярности решений уравнения Лапласа аналогично доказательству леммы 1.5 получаем, что $\theta \in W_{3,p}(\Omega_0)$, и справедлива оценка

$$\|\theta, \Omega_0\|_{3,p} \leq C\|f(u), \Omega_{0,2}\|_{1,p} \leq CQ_1(\|u_0\|_{V_0}). \quad (3.24)$$

Таким образом, $\partial_t \theta \in W_{2,p}(\Omega_0)$, а следовательно, $F_1(\tau, u_0) = \partial_t \theta(0) \in X_1$. Непрерывность оператора F_1 устанавливается совершенно аналогично доказательству теоремы 3.2. Проверим его (X_1, X_β) -дифференцируемость.

Нетрудно показать, используя результат замечания 3.1, вложение $W_{2,p}$ в C и дифференцируемость нелинейной функции f , что отображение $u_0 \rightarrow f(S_t(u_0))$ дифференцируемо как отображение из X_1 в пространство $L_q^{\lambda_0}(\Omega_+)$ обобщенных функций из $L_q^{\text{loc}}(\Omega_+)$, имеющих конечную норму (1.3) (в которой показатель p заменен на q) для любого q , $1 \leq q \leq \infty$. Применив теорему 1.1 к уравнению (3.22), получим, что отображение $\Theta: u_0 \rightarrow \theta(t)$ дифференцируемо как отображение из X_1 в $W_{2,q}^{\lambda_0}(\Omega_+)$. Фиксируем теперь некоторое $q > p$. Тогда согласно теореме о следах отображение $u_0 \rightarrow \partial_t \theta(0)$ дифференцируемо как отображение из X_1 в $W_{1-1/q,q}^0(\omega) \subset X_{1/p-1/q}$. Итак, оператор $F_1(\tau, \cdot)$ (X_1, X_β) -дифференцируем при $\beta = 1/p - 1/q > 0$.

Непрерывность производной $\mathcal{D}_u F_1$ доказывается так же, как и в теореме 3.2.

Для доказательства оценки (3.20) рассмотрим уравнение в вариациях, соответствующее задаче (3.22) $(Q(t) = \mathcal{D}_{u_0} F_1(\tau, u_0)\xi)$:

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 Q(t) + \Delta_x Q(t)) - \gamma \partial_t Q(t) = f'(u(t))w(t), \\ Q|_{t=0} = 0, \quad \|Q\|_{\lambda_0} < \infty. \end{cases} \quad (3.25)$$

Здесь $w(t)$ – решение задачи (3.9), а $u(t)$ – решение уравнения (0.1), в котором $g(t)$ заменено на $g(t + \tau)$. Применив теорему 1.1 к уравнениям (3.9) и (3.25) и используя оценку (0.9), получим оценку (3.20) для F_1 .

Исследуем теперь оператор $F_2(\tau, u_0)$. Согласно теореме 1.1 существует единственное решение v_g уравнения (3.21) с нулевыми начальными условиями. Определим функцию $G(\tau) = \partial_t v_g(0) \in V_0'$. Тогда, как нетрудно проверить, $G \in C_b(\mathbb{R}_+, V_0')$. Определим теперь функцию $V_{u_0}(t)$ как единственное решение задачи

$$\begin{cases} \partial_t^2 V_{u_0} + \Delta_x V_{u_0} = 0, \\ V_{u_0}|_{t=0} = u_0, \quad \|V_{u_0}\|_b < \infty. \end{cases} \quad (3.26)$$

Стандартными методами теории аналитических полугрупп (см. [15]) нетрудно показать, что $V_{u_0}(t) = e^{-t(-\Delta_x)^{1/2}} u_0$. Таким образом, $\partial_t V_{u_0}(0) = -(-\Delta_x)^{1/2} u_0$.

И, наконец, рассмотрим функцию $w(t) = v(t) - v_g(t) - V_{u_0}(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{cases} a(\partial_t^2 w + \Delta_x w) - \gamma \partial_t w = \gamma \partial_t V_{u_0}(t), \\ w|_{t=0} = 0, \quad \|w\|_b < \infty. \end{cases} \quad (3.27)$$

Так как правая часть $\gamma \partial_t V_{u_0}(t)$ уравнения (3.27) принадлежит пространству $W_{1,p}^{\text{loc}}(\Omega_+)$, то так же, как и для оператора F_1 , доказывается, что линейный оператор $F_3: u_0 \rightarrow \partial_t w(0)$ ограничен как оператор из X_1 в X_1 . Итак,

$$F_2(\tau, u_0) = -(-\Delta_x)^{1/2} u_0 + F_3 u_0 + G(\tau).$$

Обозначив $F = F_1 + F_3$, получим разложение (3.19). Теорема 3.3 доказана.

Соотношение (3.8) может быть рассмотрено как эволюционное уравнение в пространстве V_0 .

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Задачи (0.1) и (0.11) эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по построению оператора Φ_τ всякое решение задачи (0.1) является также и решением задачи (3.8) или, что то же самое, задачи (0.11). Поэтому существование решения задачи (0.11) следует из разрешимости задачи (0.1). Таким образом, для доказательства эквивалентности достаточно доказать единственность решения задачи (0.11).

Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения задачи (0.11) такие, что $u_1(0) = u_2(0)$. Тогда функция $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ удовлетворяет следующему соотношению (см. [15]):

$$v(t) = \int_0^t e^{(s-t)(-\Delta_x)^{1/2}} (F(s, u_1(s)) - F(s, u_2(s))) ds. \quad (3.28)$$

Из теоремы 3.3 следует, что $\|F(s, u_1(s)) - F(s, u_2(s))\|_{X_\beta} \leq C \|v(s)\|_{X_1}$, а из секториальности оператора $(-\Delta_x)^{1/2}$ получаем (см. [16], [17]), что

$$\|e^{(s-t)(-\Delta_x)^{1/2}}\|_{L(X_\beta, X_1)} \leq C(t-s)^{\beta-1}. \quad (3.29)$$

Оценив норму правой части соотношения (3.28) при помощи оценки (3.29), получим:

$$\|v(t)\|_{X_1} \leq C \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|v(s)\|_{X_1} ds. \quad (3.30)$$

Напомним, что $\beta - 1 > -1$, поэтому, применив неравенство Гронуолла к оценке (3.30), получим $\|v(t)\|_{X_1} \equiv 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Задача (3.9) эквивалентна следующей эволюционной задаче в пространстве V_0 :*

$$\begin{cases} \partial_t w + (-\Delta_x)^{1/2} w = F'_u(t, u(t))w, \\ w|_{t=0} = \xi, \quad w \in C(\mathbb{R}_+, V_0) \cap C^1(\mathbb{R}_+, V'_0). \end{cases} \quad (3.31)$$

Здесь оператор F определен формулой (3.19), а $u(t)$ — решение задачи (0.1).

Доказательство следствия 3.6 совершенно аналогично доказательству следствия 3.5.

§ 4. Нелинейное эллиптическое уравнение в окрестности гиперболической стационарной точки

В этом параграфе мы будем изучать автономное уравнение (0.1), т.е. уравнение (0.1) с правой частью, не зависящей от t :

$$g(t, x) \equiv g(x) \in L_p(\omega). \quad (4.1)$$

В этом случае, как нетрудно проверить, операторы $\{S_t: V_0 \rightarrow V_0, t \geq 0\}$ образуют полугруппу в V_0

$$S_{t_1+t_2} = S_{t_1}S_{t_2}, \quad t_1, t_2 \geq 0. \quad (4.2)$$

Пусть z_0 – стационарная точка этой полугруппы, т.е. $S_t z_0 = z_0 \quad \forall t \geq 0$ или, что то же самое,

$$\begin{cases} a\Delta_x z_0 - f(z_0) = g, \\ z_0|_{\partial\omega} = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Аналогично доказательству теорем 2.1 и 2.3, но существенно проще, доказывается, что множество решений системы (4.3) непусто и любое ее решение $z_0 \in V_0$ принадлежит пространству $W_{2,p}(\omega)$.

Согласно теореме 3.2 оператор $S_t \in C^1(V_0, V_0)$ при любом $t \geq 0$, следовательно, корректно следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Стационарная точка $z_0 \in V_0$ полугруппы S_t называется *гиперболической*, если спектр производной Фреше $\mathcal{D}_{u_0} S_t(z_0)$ при $t = 1$ не пересекается с единичной окружностью

$$\sigma(\mathcal{D}_{u_0} S_1(z_0)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \emptyset. \quad (4.4)$$

Размерность корневого подпространства, соответствующего части спектра оператора $\mathcal{D}_{u_0} S_t(z_0)$, лежащей вне единичной окружности, называется *индексом неустойчивости* гиперболической точки z_0

$$\text{ind}_{z_0} = \#\{\lambda \in \sigma(\mathcal{D}_{u_0} S_1(z_0)), |\lambda| > 1\}. \quad (4.5)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть S_t – полугруппа, соответствующая автономному уравнению (0.1), z_0 – ее стационарная точка. Тогда

- 1) оператор $\mathcal{D}_{u_0} S_1(z_0) : V_0 \rightarrow V_0$ компактен и, следовательно, его спектр дискретен и состоит из нормальных собственных значений конечной кратности;
- 2) точка z_0 является гиперболической тогда и только тогда, когда операторный пучок

$$L_{z_0}(\lambda) = a\lambda^2 - \gamma\lambda + a\Delta_x - f'(z_0) : W_{2,p}(\omega) \cap W_{1,p}^0(\omega) \rightarrow L_p(\omega) \quad (4.6)$$

не имеет собственных значений на мнимой оси

$$\sigma(L_{z_0}(\cdot)) \cap \{\text{Re } \lambda = 0\} = \emptyset; \quad (4.7)$$

- 3) индекс неустойчивости гиперболической точки z_0 конечен и вычисляется по следующей формуле:

$$\text{ind}_{z_0} = \#\{\lambda \in \sigma(L_{z_0}(\cdot)) : 0 < \text{Re } \lambda < \lambda_0\}; \quad (4.8)$$

здесь показатель λ_0 определяется условием (0.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.3 и следствию 3.6 уравнение в вариациях (3.9), определяющее оператор $\mathcal{D}_{u_0}S_1(z_0)$, может быть записано в виде

$$\begin{cases} \partial_t w = -(-\Delta_x)^{1/2} w + F'(z_0)w, \\ w|_{t=0} = \xi, \quad w \in C([0, 1], V_0) \cap C^1([0, 1], V'_0), \\ \mathcal{D}_{u_0}S_1(z_0)\xi = w(1). \end{cases} \quad (4.9)$$

Согласно теореме 3.3 оператор $F'(z_0) = \mathcal{D}_{u_0}F(z_0): X_1 \rightarrow X_\beta$, а следовательно, оператор $F'(z_0)$ компактен как оператор из X_1 в X_0 . Таким образом, согласно теореме о компактных возмущениях секториальных операторов (см. [15]) оператор $A_{z_0} = -(-\Delta_x)^{1/2} + F'(z_0): X_1 \rightarrow X_0$ также является секториальным и согласно теореме об отображении спектров (см. [18])

$$\mathcal{D}_{u_0}S_1(z_0) = e^{A_{z_0}} \quad \text{и} \quad \sigma(\mathcal{D}_{u_0}S_1(z_0)) \setminus \{0\} = e^{\sigma(A_{z_0})}. \quad (4.10)$$

Так как операторы $(-\Delta_x)^{-1/2}$, $(-\Delta_x)^{1/2}F'(z_0): X_1 \rightarrow X_1$ являются компактными, то, как нетрудно показать (см. [17], [18]), оператор $e^{tA_{z_0}}$ компактен при любом $t > 0$. Пункт 1) теоремы 4.1 доказан.

Докажем, что справедливо следующее равенство:

$$\sigma(-(-\Delta_x)^{1/2} + F'(z_0)) = \sigma(L_{z_0}(\cdot)) \cap \{\operatorname{Re} \lambda < \lambda_0\}, \quad (4.11)$$

причем соответствующие собственные векторы и их корневые подпространства также совпадают. Действительно, пусть $\lambda \in \sigma(-(-\Delta_x)^{1/2} + F'(z_0))$ и z – соответствующий собственный вектор. Тогда функция $w(t) = e^{\lambda t}z$ – решение уравнения (4.9), а значит, согласно следствию 3.6 – и уравнения (3.9), в котором u_0 заменено на z_0 . Подставив $w(t)$ в уравнение (3.9), получим $e^{\lambda t}L_{z_0}(\lambda)z = 0$. Таким образом, z – собственный вектор оператора $L_{z_0}(\lambda)$. По определению решения системы (3.9) получаем также, что $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_0$. Обратное включение, а также утверждение о совпадении присоединенных векторов доказывается совершенно аналогично. Итак, формула (4.11) доказана. Пункт 2) теоремы 4.1 немедленно следует из формул (4.10) и (4.11). Докажем третью часть теоремы. Пусть E_+ и E_- – корневые подпространства оператора A_{z_0} , соответствующие спектральным множествам $\sigma_+ = \sigma(A_{z_0}) \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$ и $\sigma_- = \sigma(A_{z_0}) \cap \{\operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Тогда $V_0 = E_+ + E_-$ и, как нетрудно показать (см. [17]),

$$\|e^{A_{z_0}t}z\|_{V_0} \leq C e^{-\varepsilon t} \|z\|_{V_0} \quad \forall z \in E_- \quad \text{и} \quad \|e^{A_{z_0}t}z\|_{V_0} \geq C e^{\varepsilon t} \|z\|_{V_0} \quad \forall z \in E_+ \quad (4.12)$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Таким образом, $\operatorname{ind}_{z_0} = \dim E_+$. Формула (4.8) сразу следует теперь из равенства (4.11). Теорема 4.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Как известно (см., например, [2]), спектр пучка (4.6) не зависит от p , $1 < p < \infty$, и состоит из нормальных собственных значений конечной кратности. Таким образом, при вычислении индекса неустойчивости ind_{z_0} можно считать, что пучок (4.6) действует в гильбертовом пространстве ($p = 2$).

В случае, когда нелинейная функция является потенциальной, можно получить более простую формулу для ind_{z_0} .

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть нелинейная функция f удовлетворяет условию (0.13). Тогда индекс неустойчивости стационарной гиперболической точки z_0 равен числу положительных собственных значений оператора $a\Delta_x - f'(z_0)$ (с учетом их кратности):

$$\text{ind}_{z_0} = \#\{\lambda \in \sigma(a\Delta_x - f'(z_0)) : \lambda > 0\}. \quad (4.13)$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и условие (0.13). Тогда спектр операторного пучка (4.6) является вещественным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 4.2 спектр пучка L_{z_0} не зависит от показателя p , $1 < p < \infty$, поэтому достаточно рассмотреть гильбертов случай $p = 2$. Пусть $\lambda = \omega + i\alpha \in \sigma(L_{z_0})$. Тогда, так как спектр L_{z_0} является дискретным, то существует $x_0 \in W_{1,2}^0(\omega)$ такой, что

$$L_{z_0}(\lambda)x_0 = 0. \quad (4.14)$$

Следовательно, согласно условию (0.8) и самосопряженности матрицы $f'(z_0)$

$$\begin{aligned} 0 &< -(L_{z_0}(\lambda_0)x_0, x_0) = ([L_{z_0}(\lambda) - L_{z_0}(\lambda_0)]x_0, x_0) \\ &= (\lambda^2 - \lambda_0^2)(ax_0, x_0) - (\lambda - \lambda_0)(\gamma x_0, x_0) \\ &= (\omega^2 - \alpha^2 - \lambda_0^2)(ax_0, x_0) - (\omega - \lambda_0)(\gamma x_0, x_0) + i\{2\alpha\omega(ax_0, x_0) - \alpha(\gamma x_0, x_0)\}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \alpha[(\gamma x_0, x_0) - 2\omega(ax_0, x_0)] &= 0, \\ (\omega^2 - \alpha^2 - \lambda_0^2)(ax_0, x_0) - (\omega - \lambda_0)(\gamma x_0, x_0) &> 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Таким образом, если $\alpha \neq 0$, то $(\gamma x_0, x_0) = 2\omega(ax_0, x_0)$. Подставляя эту формулу в неравенство (4.15), получим:

$$(\omega^2 + \alpha^2 + \lambda_0^2 - 2\omega\lambda_0)(ax_0, x_0) < 0,$$

что противоречит положительной определенности оператора a . Лемма 4.1 доказана.

Рассмотрим семейство операторных пучков

$$L^s(\lambda) = sL_{z_0}(\lambda) + (1-s)(\lambda^2 a_- Id - \lambda\gamma_+ Id + a\Delta_x - f'(z_0)), \quad (4.16)$$

где $s \in [0, 1]$, а $\gamma_+ > 0$ — достаточно большое положительное число, удовлетворяющее условию $\gamma_+ Id - \gamma > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Назовем *индексом неустойчивости* пучка (4.16) количество его собственных значений пучка (с учетом их кратности), принадлежащих интервалу $(0, \lambda_0)$:

$$\text{ind } L^s = \#\{\sigma(L^s) \cap (0, \lambda_0)\}.$$

Тогда из условий (0.8) и определения $L^s(\lambda)$ следует, что

$$-(L^s(\lambda_0)x, x) > 0 \quad \forall x \in W_{1,2}^0(\omega), \quad x \neq 0, \quad s \in [0, 1]. \quad (4.17)$$

Таким образом, $\lambda_0 \notin \sigma(L^s)$ при $s \in [0, 1]$. Очевидно также, что $0 \notin \sigma(L^s)$ при $s \in [0, 1]$, а из леммы 4.1 следует, что спектр пучков L^s является вещественным при любом $s \in [0, 1]$. Следовательно, согласно теореме об устойчивости корневых кратностей (см. [19]) $\text{ind } L^s$ не зависит от $s \in [0, 1]$. То есть

$$\text{ind}_{z_0} = \text{ind } L_{z_0} = \text{ind } L^0. \quad (4.18)$$

Таким образом, достаточно проверить утверждение теоремы для пучка

$$L^0(\lambda) = \lambda^2 a_- \text{Id} - \lambda \gamma_+ \text{Id} + a \Delta_x - f'(z_0). \quad (4.19)$$

ЛЕММА 4.2. *Справедливо равенство*

$$\text{ind } L^0 = \#\{\lambda \in \sigma(a \Delta_x - f'(z_0)) : \lambda > 0\}. \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — полная в L_2 ортонормированная система собственных векторов самосопряженного оператора $-a \Delta_x + f'(z_0)$,

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_N < 0 < \mu_{N+1} \leq \dots$$

— соответствующие собственные значения. Тогда, как нетрудно проверить, собственные значения пучка L^0 вычисляются по следующим формулам:

$$\lambda_i^+ = \frac{\gamma_+ + \sqrt{\gamma_+^2 + 4a_- \mu_i}}{2a_-}, \quad \lambda_i^- = \frac{\gamma_+ - \sqrt{\gamma_+^2 + 4a_- \mu_i}}{2a_-},$$

а условие (4.17) при $s = 0$ эквивалентно следующим условиям:

$$\gamma_+^2 + 4a_- \mu_1 > 0, \quad \lambda_1^- < \lambda_0 < \lambda_1^+.$$

Итак, в интервал $(0, \lambda_0)$ попадают собственные значения λ_i^- при $i = 1, \dots, N$ и только они. Лемма 4.2 доказана. Теорема 4.2 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. *Неустойчивым множеством* стационарной точки z_0 полугруппы S_t , определенной в §3, называется следующее множество:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+(z_0) = \Big\{ u_0 \in V_0 : \exists u \in C_b(\mathbb{R}, V_0), u(0) = u_0, \\ (S_t u)(s) = u(t+s) \text{ такая, что } \lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = z_0 \Big\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Из определения 4.3 следует, что множество $\mathcal{M}^+(z_0)$ является строго инвариантным относительно полугруппы S_t , т.е.

$$S_t \mathcal{M}^+(z_0) = \mathcal{M}^+(z_0) \text{ при } t \geq 0. \quad (4.22)$$

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть z_0 – гиперболическая стационарная точка полугруппы S_t , и пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда множество $\mathcal{M}^+(z_0)$ обладает структурой C^1 -многообразия размерности $d = \text{ind}_{z_0}$, т.е. существует вложение $\pi: \mathbb{R}^d \rightarrow V_0$ класса C^1 такое, что $\pi(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}^+(z_0)$.*

Для любого $t \geq 0$ сужение оператора S_t на многообразие $\mathcal{M}^+(z_0)$ является C^1 -диффеоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $\delta > 0$ аналогично (4.21) определим множество

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\delta^+(z_0) = \Big\{ u_0 \in V_0 : \exists u \in C(\mathbb{R}, V_0), u(0) = u_0, (S_t u)(s) = u(t+s) \\ \text{такая, что } \lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = z_0 \text{ и } \|u(s)\|_{V_0} < \delta \text{ при } s < 0 \Big\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Стандартными методами, используя гиперболичность стационарной точки z_0 и, например, теорему о неявной функции, можно показать, что при достаточно малых $\delta > 0$ множество (4.23) является $d = \text{ind}_{z_0}$ -мерным C^1 -подмногообразием пространства V_0 , диффеоморфным неустойчивому подпространству E_+ .

Фиксируем $\delta > 0$ столь малым, чтобы множество (4.23) являлось C^1 -многообразием, и определим последовательность множеств

$$\mathbb{M}_k^+ = S_k(\mathcal{M}_\delta^+(z_0)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.24)$$

Тогда согласно определению (4.23)

$$\mathbb{M}_{k-1}^+ \subset \mathbb{M}_k^+ \text{ и } \mathcal{M}^+(z_0) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{M}_k^+. \quad (4.25)$$

Как показано в [12], из инъективности отображения S_k и инъективности его дифференциала следует, что множество $\mathbb{M}_k$ диффеоморфно E_+ для любого $k \in \mathbb{N}$. Из представления множества $\mathcal{M}^+(z_0)$ в виде (4.25) следует теперь (см. [20]), что множество $\mathcal{M}^+(z_0)$ обладает структурой C^1 -многообразия, диффеоморфного $\mathbb{R}^d$, $d = \text{ind}_{z_0}$. Теорема 4.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Отметим, что множество $\mathcal{M}^+(z_0)$, вообще говоря, не является C^1 -подмногообразием пространства V_0 , т.е. топологии, задаваемые на множестве $\mathcal{M}^+(z_0)$ вложением $\mathcal{M}^+(z_0) \subset V_0$ и структурой C^1 -многообразия, определяемой представлением (4.25), могут не совпадать ($\pi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}^+(z_0)$ не является, вообще говоря, гомеоморфизмом). Однако, как показано в [12], в случае, когда полугруппа S_t обладает функцией Ляпунова, неустойчивое многообразие $\mathcal{M}^+(z_0)$ является C^1 -подмногообразием пространства V_0 . Как будет показано в §5, полугруппа S_t обладает функцией Ляпунова, если выполнено условие (0.13). Таким образом, при выполнении условия (0.13) неустойчивое множество гиперболической точки z_0 — C^1 -подмногообразие пространства V_0 размерности $d = \text{ind}_{z_0}$.

§5. Аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области

В этом параграфе будет построен аттрактор полугруппы (4.2), соответствующей автономному уравнению (0.1), в пространстве V_0 . Кроме того, в потенциальном случае (в случае выполнения условия (0.13)) доказана регулярность этого аттрактора.

Напомним прежде всего определение аттрактора и достаточные условия его существования (подробное изложение см. в [12]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Множество $\mathcal{A}$ называется аттрактором полугруппы S_t , действующей в банаховом пространстве V_0 , если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathcal{A}$ — компакт в пространстве V_0 ;
- (2) $\mathcal{A}$ строго инвариантно, т.е. $S_t \mathcal{A} = \mathcal{A}$ при $t \geq 0$;
- (3) $\mathcal{A}$ обладает свойством притяжения ограниченных подмножеств пространства V_0 , т.е. для любого ограниченного $\mathcal{B} \subset V_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S_t \mathcal{B}, \mathcal{A}) = 0, \quad \text{где} \quad \text{dist}(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_{V_0}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 (см. [12]). Пусть полугруппа $S_t: V_0 \rightarrow V_0$ непрерывна при каждом фиксированном $t \geq 0$, и пусть существует компактное подмножество $K \Subset V_0$, обладающее свойством притяжения ограниченных подмножеств пространства V_0 . Тогда полугруппа S_t обладает аттрактором $\mathcal{A} \subset K$, который может быть представлен в следующем виде:

$$\mathcal{A} = \left\{ \xi \in V_0 : \exists u(s), s \in \mathbb{R}, u(0) = \xi \text{ такая, что} \right. \\ \left. \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{V_0} < \infty \text{ и } S_t u(s) = u(t+s), t \in \mathbb{R}_+, s \in \mathbb{R} \right\}. \quad (5.1)$$

ТЕОРЕМА 5.1. Если выполнено условие (4.1), то полугруппа $S_t: V_0 \rightarrow V_0$, соответствующая уравнению (0.1), обладает аттрактором $\mathcal{A}$, компактным в пространстве $W_{2,p}(\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим выполнение условий предложения 5.1 для полугруппы S_t , порождаемой уравнением (0.1). Непрерывность операторов S_t при фиксированных $t \geq 0$ доказана в теореме 3.1. Проверим существование компактного притягивающего множества. Из оценки (0.9) следует, что множество $B = \{\zeta \in V_0 : \|\zeta\|_{V_0} \leq R\}$ является притягивающим множеством полугруппы S_t при достаточно большом $R = R(\|g\|_{0,p})$, а следовательно, множество $B_1 = S_1 B$ также обладает свойством притяжения ограниченных подмножеств пространства V_0 . Докажем, что $B_1 \subset W_{2,p}(\omega)$. Согласно замечанию 4.1 существует стационарная точка $z_0 \in W_{2,p}(\omega)$ (решение уравнения (4.3)). Умножим уравнение (0.1) на срезающую функцию $\varphi(t)$, равную нулю вне отрезка $t \in [0, 3]$ и единице на отрезке $t \in [1, 2]$, и перепишем его относительно новой неизвестной функции $w = \varphi(t)(u - z_0)$. Получим:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w + \Delta_x w = 2\varphi' \partial_t u + \varphi''(u - z_0) + a^{-1}\varphi(f(u) - f(z_0) + \gamma \partial_t u) \equiv h_w(t), \\ w|_{\partial\Omega_{0,3}} = 0. \end{cases}$$

Так как $f \in C^1$, то, как нетрудно проверить, $h_w \in W_{1,p}^0(\Omega_{0,3})$ и согласно (0.9) справедлива оценка

$$\|h_w, \Omega_{0,3}\|_{1,p} \leq Q_1(\|u, \Omega_{0,3}\|_{2,p}) \leq Q_2(\|u(0)\|_{V_0}).$$

Здесь Q_1 и Q_2 — некоторые монотонные функции.

Согласно теореме о следах и теореме об $(W_{3,p}, W_{1,p}^0)$ -регулярности решений уравнения Лапласа получим:

$$\|u(1) - z_0\|_{3-1/p,p} \leq C\|w, \Omega_{0,3}\|_{3,p} \leq C_1\|h_w, \Omega_{0,3}\|_{1,p} \leq C_1 Q_2(\|u_0\|_{V_0}).$$

Таким образом, множество $B_1 - z_0$ ограничено в пространстве $W_{3-1/p,p}(\omega)$, а следовательно, $B_1 \Subset W_{2,p}(\omega)$. Теорема 5.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть z_0 — гиперболическая стационарная точка полугруппы S_t . Тогда согласно (5.1)

$$\mathcal{M}^+(z_0) \subset \mathcal{A}. \quad (5.2)$$

Таким образом, аттрактор $\mathcal{A}$ содержит инвариантное C^1 -многообразие размерности $d = \text{ind}_{z_0}$.

Рассмотрим теперь случай наличия у полугруппы S_t функции Ляпунова.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполнено условие (0.13). Тогда функция

$$-\mathcal{L}(\xi) = \frac{1}{2}(a\Phi(\xi), \Phi(\xi)) - \frac{1}{2}(a\nabla\xi, \nabla\xi) - (P(\xi), 1) - (g, \xi): V_0 \rightarrow R, \quad (5.3)$$

где нелинейный оператор $\Phi: V_0 \rightarrow V_0'$ определен в следствии 3.2, а функция P — в формуле (0.13), удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(S_t\xi) = -(\gamma\Phi(S_t\xi), \Phi(S_t\xi)) \quad \forall \xi \in V_0 \quad (5.4)$$

и, таким образом, является функцией Ляпунова полугруппы S_t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t) = S_t \xi$ – решение задачи (0.1). Тогда согласно определению оператора Φ имеет место равенство $\Phi(u(t)) = \partial_t u(t)$, следовательно,

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{2}(a \nabla u(t), \nabla u(t)) - \frac{1}{2}(a \partial_t u(t), \partial_t u(t)) + (P(u(t)), 1) + (g, u(t)). \quad (5.5)$$

Продифференцировав функцию (5.5) по t и выразив $\partial_t^2 u(t)$ из уравнения (0.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(u(t)) &= -(\gamma \partial_t u(t), \partial_t u(t)) \\ \text{или} \\ \mathcal{L}(u(t_2)) - \mathcal{L}(u(t_1)) &= - \int_{t_1}^{t_2} (\gamma \partial_t u(t), \partial_t u(t)) dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Формула (5.4) доказана.

Так как $\gamma > 0$, то из (5.6) следует, что $\mathcal{L}(S_t \xi) \leq \mathcal{L}(\xi)$, причем знак равенства возможен лишь в случае $\partial_t u(s) \equiv 0 \quad \forall s \in [0, t]$, т.е. ξ – стационарная точка полугруппы S_t . Таким образом, $\mathcal{L}$ – функция Ляпунова полугруппы S_t . Теорема 5.2 доказана.

Предположим теперь, что множество стационарных точек полугруппы S_t

$$\mathcal{R} = \{z_i \in V_0 : i = 1, \dots, N; z_i \text{ – решение задачи (4.3)}\} \quad (5.7)$$

конечно. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, и пусть множество (5.7) конечно. Тогда для любого решения $u(t)$ уравнения (0.1) ($t \in \mathbb{R}$, $u \in C_b(\mathbb{R}, V_0)$) существуют $z_+ \in \mathcal{R}$ и $z_- \in \mathcal{R}$ такие, что $z_- \neq z_+$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - z_+\|_{V_0} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t) - z_-\|_{V_0} = 0. \quad (5.8)$$

Доказательство теоремы 5.3 приведено, например, в [4].

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $\mathcal{M}(z_i)$ – неустойчивое множество стационарной точки $z_i \in \mathcal{R}$, определенное формулой (4.21). Тогда из равенства (5.8) и представления аттрактора $\mathcal{A}$ в виде (5.1) следует, что

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{M}^+(z_i). \quad (5.9)$$

ТЕОРЕМА 5.4 (регулярность эллиптического аттрактора). Пусть полугруппа $S_t: V_0 \rightarrow V_0$, соответствующая уравнению (0.1), обладает непрерывной функцией Ляпунова $\mathcal{L}$, и пусть все ее стационарные точки (5.7) являются гиперболическими. Тогда аттрактор $\mathcal{A}$ системы (0.1) представим в виде (5.9), причем неустойчивые множества $\mathcal{M}^+(z_i)$ являются C^1 -подмногообразиями пространства V_0 размерности $d_i = \text{ind}_{z_i}$, диффеоморфными $\mathbb{R}^{d_i}$.

Доказательство теоремы 5.4 вытекает из формулы (5.9) и теоремы 4.3.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 5.4. Пусть стационарные точки (5.7) занумерованы в порядке возрастания функции Ляпунова, причем для простоты будем считать, что*

$$\mathcal{L}(z_1) < \mathcal{L}(z_2) < \dots < \mathcal{L}(z_N), \quad (5.10)$$

и пусть

$$\mathcal{A}_k = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{M}^+(z_i).$$

Тогда, рассуждая аналогично [12], можно показать, что справедливы следующие утверждения:

- 1) $\mathcal{A}_k$ устойчиво относительно S_t , т.е. для любой окрестности $\mathcal{O}_1(\mathcal{A}_k)$ множества $\mathcal{A}_k$ в пространстве V_0 найдется окрестность $\mathcal{O}_2(\mathcal{A}_k)$ такая, что

$$S_t \mathcal{O}_2(\mathcal{A}_k) \subset \mathcal{O}_1(\mathcal{A}_k) \quad \forall t \geq 0;$$

- 2) граница множества $\mathcal{M}^+(z_i)$ строго инвариантна относительно действия полугруппы S_t , т.е. $S_t \partial \mathcal{M}^+(z_i) = \partial \mathcal{M}^+(z_i)$; более того, $\partial \mathcal{M}^+(z_i) \subset \mathcal{A}_{i-1}$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S_t K, \mathcal{A}_{i-1}) = 0$ для любого компакта $K \subset \mathcal{A}_i \setminus z_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Как показано, например, в [12], условие гиперболичности всех стационарных точек является условием общего положения, т.е. множество правых частей g уравнения (0.1), удовлетворяющих этому условию, является открытым, всюду плотным подмножеством пространства $L_p(\omega)$. Кроме того, в этом случае из теории степени Лере–Шаудера следует, что количество стационарных точек нечетно: $N = 2m + 1$.

Исследуем теперь характер притяжения к аттрактору $\mathcal{A}$. Для этого нам понадобится следующее определение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть выполнены условия следствия 5.3. *Конечномерной составной траекторией* (к.с.т.) полугруппы S_t в пространстве V_0 называется кусочно непрерывная функция $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \infty]$, обладающая следующими свойствами:

- 1) существуют $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = +\infty$ такие, что

$$\hat{u} \in C([t_i, t_i + 1), V_0), \quad i = 0, \dots, m;$$

- 2) $\hat{u}(t) = S_{t-t_i} u(t_i)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$;
- 3) $\hat{u}(t_i) \in \mathcal{M}^+(z_{\pi(i)})$, где $\pi: \{1, \dots, m+1\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$.

Таким образом, к.с.т. $\hat{u}(t)$ является кусочно непрерывной кривой, составленной из конечного числа кусков непрерывных траекторий полугруппы S_t , лежащих на неустойчивых множествах $\mathcal{M}^+(z_i)$.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть выполнены условия следствия 5.3. Тогда для любого $u_0 \in V_0$ существует к.с.т. $\hat{u}(t)$ такая, что

$$\|S_t u_0 - \hat{u}(t)\|_{V_0} \leq C e^{-\nu t}, \quad t \geq 0. \quad (5.11)$$

Более того, константа C может быть выбрана равномерно по $u_0 \in K$, где K – произвольный компакт в V_0 , а константа $\nu > 0$ зависит лишь от полугруппы S_t .

Доказательство этой теоремы заключается в проверке условий следующей абстрактной теоремы о равномерной спектральной асимптотике (см. [12]).

ТЕОРЕМА 5.6 [12]. Предположим, что все стационарные точки полугруппы $S_t \in C(\mathbb{R}_+ \times V_0, V_0)$, действующей в некотором банаховом пространстве V_0 , являются гиперболическими. Пусть также полугруппа S_t обладает аттрактором $\mathcal{A}$ в V_0 , функцией Ляпунова $\mathcal{L} \in C(V_0, \mathbb{R})$, и пусть для любого ограниченного множества $B \subset V_0$ выполнено условие

$$\|\mathcal{D}_\xi S_t(\xi)\|_{L(V_0, V_0)} \leq C e^{\alpha t} \quad \forall \xi \in B, \quad C = C(B), \quad \alpha = \alpha(B).$$

Кроме того, пусть при любом фиксированном t производная $\mathcal{D}_\xi S_t(\xi)$ равномерно непрерывна на любом ограниченном множестве $\xi \in B \subset V_0$. Тогда для полугруппы S_t справедливо утверждение теоремы 5.5.

Все условия теоремы 5.6 в случае полугруппы S_t , соответствующей уравнению (0.1), проверены в теоремах 3.3, 4.1, 5.1, 5.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В формулировке теоремы 5.6 в работе [12] дополнительно требуется, чтобы $S_t \in C^{1+\alpha}(V_0, V_0)$. Это условие используется лишь для построения неустойчивых многообразий $\mathcal{M}^+(z_i)$. Однако для того чтобы $\mathcal{M}^+(z_i)$ было C^1 -многообразием, достаточно выполнения условий теоремы 5.6. Доказательство этого факта проводится аналогично доказательству теоремы 4.3.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть выполнены условия теоремы 5.5. Тогда для любого ограниченного множества $B \subset V_0$ справедлива оценка

$$\text{dist}(S_t B, \mathcal{A}) \leq C(B) e^{-\nu t} \quad (5.12)$$

для некоторого положительного ν . Таким образом, $\mathcal{A}$ является экспоненциальным аттрактором полугруппы S_t .

Действительно, в случае компактного B формула (5.12) немедленно следует из оценки (5.11). Однако, как показано в доказательстве теоремы 5.1, множество $S_1 B$ предкомпактно для любого ограниченного $B \subset V_0$. Таким образом, оценка (5.12) справедлива и для любого ограниченного $B \subset V_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Системы вида (0.1) возникают в приложениях, например, при исследовании решений вида бегущей волны для соответствующих эволюционных уравнений. Так, задача нахождения решений вида $A(t, x) = A(x_1 - \gamma t, x')$, $x = (x_1, x') \in \Omega_+$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}$, для обобщенного уравнения Гинзбурга–Ландау

$$\partial_t A = \mu A - (\lambda - i\beta)A|A|^2 + \Delta_x A,$$

в котором $A = A_1 + iA_2$, $\lambda, \beta, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, сводится, как нетрудно проверить, к нахождению всех ограниченных при $t \in \mathbb{R}$ решений уравнения вида (0.1) в полном цилиндре $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$, т.е. к нахождению аттрактора уравнения вида (0.1) в полужилиндре Ω_+ (см. формулу (5.1)). Отметим также, что при $\beta = 0$ это уравнение является потенциальным.

Список литературы

1. *Соболев С. Л.* Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
2. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
3. *Бабин А. В.* Аттрактор обобщенной полугруппы, порожденной эллиптическим уравнением в цилиндрической области // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №2. С. 3–18.
4. *Вишик М. И., Зелик С. В.* Траекторный аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области // Матем. сб. 1996. Т. 187. №12. С. 21–56.
5. *Зелик С. В.* Ограниченность решений нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №3. С. 447–450.
6. *Babin A. V.* Inertial manifolds for travelling-wave solutions of reaction-diffusion systems // Comm. Pure Appl. Math. 1995. V. 48. №2. P. 167–198.
7. *Brunovsky P., Mora X., Polacik P., Sola-Morales J.* Asymptotic behavior of solutions of semilinear elliptic equations on an unbounded strip // Acta Math. Univ. Comenian. 1991. V. 60. №2. P. 163–183.
8. *Calsina A., Mora X., Sola-Morales J.* The dynamical approach to elliptic problems in cylindrical domains, and a study of their parabolic singular limit // J. Differential Equations. 1993. V. 102. №2. P. 244–304.
9. *Kirchgässner K.* Wave-solutions of reversible systems and applications // J. Differential Equations. 1982. V. 45. P. 113–127.
10. *Mielke A.* Essential manifolds for an elliptic problem in an infinite strip // J. Differential Equations. 1994. V. 110. №2. P. 322–355.
11. *Scheel A.* Existence of fast travelling waves for some parabolic equations: A dynamical systems approach // J. Dynam. Differential Equations. 1996. V. 8. №4. P. 469–548.
12. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
13. *Hale J. K.* Asymptotic behaviour of dissipative systems // Math. Surveys Monographs. 1988. V. 25.
14. *Agmon S., Nirenberg L.* Lower bounds and uniqueness theorems for solutions of differential equations in a Hilbert space // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 207–229.
15. *Клеммент Ф., Хейманс Х., Ангелент А. и др.* Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.
16. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
17. *Хенри Д.* Геометрическая теория полудисипативных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
18. *Davies E.* One-parameter semigroups. London: Academic Press, 1980.

19. *Гохберг И., Крейн М.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
20. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.

Институт проблем передачи информации РАН;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
20.11.1998