Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Завадский, У. С. Ревецкая, Об одной матричной задаче над дискретно нормированным кольцом, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 6, 59–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm412>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:26:36

УДК 512.55+512.64

А. Г. Завадский, У. С. Ревецкая

Об одной матричной задаче над дискретно нормированным кольцом

Рассматривается плоская матричная задача смешанного типа (над дискретно нормированным кольцом и его телом частных), к которой естественно приводит ряд вопросов теории целочисленных представлений и теории колец. Для этой задачи доказывается критерий модульной ограниченности, который формулируется в терминах пары частично упорядоченных множеств $(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B))$, сопоставляемой паре определяющих задачу преобразующих алгебр (A, B) . Формулировка фактически совпадает с формулировкой известного критерия конечности типа Клейнера для представлений пар частично упорядоченных множеств над полем. В основе доказательства – базирующаяся на использовании техники дифференцирования редукция к представлениям полумаксимальных колец (черепичных порядков) и частично упорядоченных множеств.

Библиография: 14 названий.

Введение

В настоящей работе рассматривается плоская матричная задача смешанного типа (над дискретно нормированным кольцом и его телом частных), к которой естественно приводит ряд вопросов теории целочисленных представлений и теории колец. Ранее близкие по духу задачи изучались в [1]–[4], и наша схема объединяет и развивает некоторые из содержащихся в этих статьях результатов.

С другой стороны, исследуемая ситуация включает в себя в качестве предельного случая задачу о представлениях пар частично упорядоченных множеств над полем в смысле М. М. Клейнера [5], а формулировка основной теоремы – критерия модульной ограниченности (помещенного в конце §1) – фактически повторяет критерий конечности типа М. М. Клейнера для пар.

Столь тесная связь вопроса с классической теорией представлений над полем вполне естественна. Напомним, что ранее сходным образом в [1], [2] была расширена на дискретно нормированный случай задача о представлениях частично упорядоченных множеств над полем в смысле Л. А. Назаровой и А. В. Ройтера [6], причем тоже с сохранением формулировки критерия конечности типа [2]. При этом, однако, прямой редукции критерия к классической ситуации получено не было. Доказательство в [2] велось с помощью специально разработанной техники дифференцирования определяющих матричную задачу первичных полумаксимальных колец (называемых также черепичными порядками).

В данной работе, как и в [2], также не удастся непосредственно свести основную теорему к классическому случаю. В основе доказательства – более сложная, опосредованная редукция к представлениям полумаксимальных колец [1], [2] и частично упорядоченных множеств [5], [6], включающая в себя, в частности, разработку

и применение соответствующего алгоритма дифференцирования. Вероятно, в последующем этот подход может быть в необходимой степени упрощен, развит и использован при исследовании аналогичных задач модульно неограниченного типа.

Изложим кратко содержание статьи. В §1 приводится постановка задачи и формулируется основная теорема в терминах пары частично упорядоченных множеств $(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B))$, сопоставляемой паре определяющих матричную задачу алгебр (A, B) .

В §2 разрабатывается комбинаторика, касающаяся множества $\mathcal{P}(A)$ (наделенного структурой $\mathbb{Z}$ -множества), в частности, описываются комбинаторные свойства используемого в доказательстве алгоритма дифференцирования.

В §3 полностью решается (A, B) -задача в предположении, что $\mathcal{P}(A)$ – цепь, а $\mathcal{P}(B)$ – гирлянда (полупечь).

В §4 детально исследуется (T, A) -задача, где T – исходное дискретно нормированное тело, и строится соответствующий функтор дифференцирования.

В §5 с помощью развитого аппарата доказывается основная теорема. Отдельно выделяется и доказывается критерий модульной ограниченности для (T, A) -задачи (теорема 5.2), обобщающий критерии конечности типа для полумаксимальных колец [2] и частично упорядоченных множеств [5].

§1. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть D – дискретно нормированное кольцо (не обязательно коммутативное) с телом частных T и $\pi \in D$ – некоторый фиксированный образующий радикала. Напомним (см. [7; гл. VI]), что каждый ненулевой элемент $x \in T$ однозначно представим в виде $x = \varepsilon \pi^k$, где ε – обратимый элемент кольца D и $k \in \mathbb{Z}$. Любой собственный ненулевой D -подмодуль $X \subset T$ (в частности, любой ненулевой идеал кольца D) является циклическим и имеет вид $X = \pi^k D = D \pi^k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что πD – единственный максимальный идеал в D .

Обозначим через $M_n(T)$ алгебру всех $n \times n$ -матриц над T с матричными единицами e_{ij} . Рассмотрим в ней D -подалгебру $A = \bigoplus_{i,j=1}^n e_{ij} A_{ij}$, состоящую из таких матриц, у которых элемент на месте (i, j) принадлежит D -подмодулю $A_{ij} \subset T$, причем выполняются следующие условия:

- 1) $A_{ii} = D$ или $A_{ii} = T$ при любом i ; 2) $A_{ij} A_{jk} \subset A_{ik}$ при всех i, j, k ;
- 3) $A_{ij} A_{ji} \neq A_{ii}$ при $i \neq j$. Будем называть алгебру A такого типа *преобразующей*.

Очевидно, если $A_{ij} \neq 0$, то $A_{ij} = T$ или $A_{ij} = \pi^{\alpha_{ij}} D$, где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$, причем если дополнительно $A_{ii} = T$ или $A_{jj} = T$, то, конечно, $A_{ij} = T$.

Полагая $0 = \pi^{+\infty} D$ и $T = \pi^{-\infty} D$, будем записывать алгебру A также в виде $\bigoplus_{i,j=1}^n e_{ij} \pi^{\alpha_{ij}} D$, где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ и $A_{ij} = \pi^{\alpha_{ij}} D$. Поскольку матрица обобщенных показателей (α_{ij}) полностью определяет алгебру A , то мы будем иногда их отождествлять: $A = (\alpha_{ij})$.

Отметим, что алгебра A является (первичным) *полумаксимальным кольцом* в смысле [1] (в иной терминологии – *черепичным порядком*) тогда и только тогда, когда все показатели α_{ij} конечны. Часто будем в этом случае называть алгебру A просто *порядком*.

Пусть $A \subset M_n(T)$ и $B \subset M_m(T)$ – две преобразующие алгебры. Тогда пространство всех матриц размеров $n \times m$ над T является естественным A - B -бимодулем, задающим разделенную матричную задачу в смысле [8] над алгебрами A и B .

Именно эта задача является объектом исследования в данной работе. Сформулируем ее на матричном языке. Положим $B = \bigoplus_{i,j=1}^m e_{ij} B_{ij}$.

Условимся называть левыми D -элементарными преобразованиями строк некоторой матрицы над T преобразования двух типов:

- а) умножение любой строки на обратимый элемент кольца D слева;
- б) прибавление любой строки, умноженной слева на произвольный элемент из D , к любой другой строке.

Совершенно аналогично определяются левые T -элементарные преобразования строк, а также, по симметрии, правые D -элементарные и T -элементарные преобразования столбцов.

Интересующая нас плоская (т.е. задаваемая A - B -бимодулем) матричная задача выглядит так. Имеется прямоугольная матрица $X = (X_i^j)$, разделенная на горизонтальные полосы $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ и вертикальные полосы $\{X^j\}_{j=1,\dots,m}$ (так что клетка X_i^j является пересечением полос X_i и X^j). Некоторые из полос могут быть пустыми. Над этой матрицей осуществляются *допустимые преобразования* следующих типов:

- 1) левые D -элементарные (T -элементарные) преобразования строк полосы X_i при $A_{ii} = D$ ($A_{ii} = T$);
- 1*) правые D -элементарные (T -элементарные) преобразования столбцов полосы X_i при $B_{ii} = D$ ($B_{ii} = T$);
- 2) прибавления строк полосы X_j , умноженных на элементы A_{ij} слева, к строкам полосы X_i ;
- 2*) прибавления столбцов полосы X^i , умноженных на элементы из B_{ij} справа, к столбцам полосы X^j .

Неразложимые и эквивалентные матрицы определяются естественно. Будем говорить, что задача имеет *конечный тип*, если существует лишь конечное число неэквивалентных неразложимых матриц.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из рассмотрения не исключаются также *пустые*, или *идеальные*, матрицы, содержащие нулевое число строк или столбцов. Неразложимыми среди них считаются те, которые имеют одну строку и нуль столбцов либо нуль строк и один столбец (см. [6]). Таким образом, число пустых неэквивалентных неразложимых матриц равно $n + m$.

Размерностью располосованной матрицы X назовем вектор $d = d(X) = (d_1, \dots, d_n; d^1, \dots, d^m)$, где d_i (d^j) — число строк (столбцов) полосы X_i (X^j). Положим $d_0 = d_0(X) = \sum_{i=1}^n d_i + \sum_{j=1}^m d^j$.

Будем говорить, что задача имеет *модульно ограниченную тип*¹, если существует такая константа C , что $d_0(X) < C$ для всех неразложимых матриц X . Нашей целью в этой статье будет получение критерия модульной ограниченности для сформулированной задачи, которую мы условимся называть (A, B) -задачей (а соответствующие матрицы — (A, B) -матрицами).

ПРИМЕР 1. Если $A = B = D$ (и, следовательно, $m = n = 1$), то квадратные матрицы первого порядка (π^k) неэквивалентны при различных $k \in \mathbb{Z}$, причем ими исчерпываются все неразложимые матрицы. Следовательно, (D, D) -задача имеет бесконечный, но модульно ограниченный тип.

¹Понятие модульной ограниченности было введено Р. Уорфилдом в [9] для колец.

ПРИМЕР 2. Если $A_{ii} = T$ и $B_{jj} = T$ при всех возможных i, j , то все ненулевые D -модули A_{ik}, B_{jl} тоже совпадают с T и алгебры A, B являются алгебрами инцидентов двух конечных частично упорядоченных множеств P, Q . Получаем задачу о представлениях пары частично упорядоченных множеств (P, Q) над телом T , и критерий модульной ограниченности превращается в критерий конечности типа Клейнера для пар [5].

ПРИМЕР 3. Если $A = T$, а B – первичное полумаксимальное кольцо, то возникает описанная в [2] матричная задача, соответствующая классификации наборов полных D -решеток в векторном пространстве над T . Критерий модульной ограниченности здесь совпадает с критерием конечности типа и имеет формулировку основного критерия Клейнера [5] по отношению к бесконечному периодическому частично упорядоченному множеству $\mathcal{P}(B)$, сопоставляемому кольцу B .

Будем говорить, что частично упорядоченное множество $\mathcal{P}$ является *суммой* своих подмножеств $\mathcal{P}_i$ ($i \in I$) и записывать $\mathcal{P} = \sum_i \mathcal{P}_i$, если $\mathcal{P} = \bigcup_i \mathcal{P}_i$ и $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset$ при $i \neq j$ (при этом точки разных множеств $\mathcal{P}_i$ могут быть сравнимы между собой).

Запись $x - y$ будет обозначать несравнимость элементов $x, y \in \mathcal{P}$.

Для подмножеств $X, Y \subset \mathcal{P}$ и некоторого отношения ρ на точках $\mathcal{P}$ пишем $X\rho Y$, если $x\rho y$ для всех $x \in X, y \in Y$. В частности, $X - Y$ ($X < Y$) соответствует тому, что подмножества X, Y образуют *кардинальную (ординальную) сумму* в $\mathcal{P}$ в смысле [10].

Линейно упорядоченное множество будем называть *цепью*, а произвольную ординальную сумму (любого числа) одноточечных и двухточечных множеств – *гирляндой* (или *полуцепью*). Пару (тройку) попарно несравнимых точек условимся называть *диадой (триадой)*. Одноточечное множество мы часто отождествляем с точкой: $\{x\} = x$.

Перейдем к формулировке критерия модульной ограниченности.

Сопоставим преобразующей алгебре $A = (\alpha_{ij})$ частично упорядоченное множество $\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i$, являющееся суммой n цепей следующего типа:

$\mathcal{P}_i = \{p_i^0\}$ – одноточечная цепь, если $A_{ii} = T$, и $\mathcal{P}_i = \{p_i^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – бесконечная цепь, если $A_{ii} = D$.

Отношение порядка на $\mathcal{P}(A)$ определим формулой $p_i^k \leq p_j^l \Leftrightarrow k - l \geq \alpha_{ij}$. В частности, $\mathcal{P}_i \leq \mathcal{P}_j$ в случае $A_{ij} = T$, а внутри любой цепи $p_i^k < p_i^l$ при $k > l$.

Очевидно, $\mathcal{P}(A)$ – бесконечное множество тогда и только тогда, когда $A_{ii} = D$ хотя бы при одном i . В частном случае полумаксимального кольца A получаем в точности бесконечное периодическое множество, определенное в [1].

В дальнейшем для множества $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A)$ мы будем использовать стандартное разложение $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\infty + \mathcal{P}^0$, где $\mathcal{P}^\infty$ ($\mathcal{P}^0$) – сумма всех бесконечных (одноточечных) цепей $\mathcal{P}_i$.

Обозначим через $(l_1, \dots, l_s)$ кардинальную сумму s цепей, состоящих из $l_1, \dots, l_s$ элементов соответственно. Положим $K_1 = (1, 1, 1, 1)$, $K_2 = (2, 2, 2)$, $K_3 = (1, 3, 3)$, $K_4 = (N, 4)$, $K_5 = (1, 2, 5)$. Здесь $(N, 4)$ – кардинальная сумма четырехточечной цепи и множества $N = \{a < b > c < d\}$. Множества $K_1, \dots, K_5$ принято называть *критическими*.

Будем говорить, что пара частично упорядоченных множеств (P, Q) является *критической парой множеств* (в смысле Клейнера), если с точностью до пере-

становки множеств P, Q выполняется одно из следующих условий

- 1) $P = (1), \quad Q = K_i$ при $i = 1, \dots, 5$; 5) $P = (5), \quad Q = N$;
- 2) $P = (2), \quad Q = (1, 1, 1), (2, 5), (3, 3)$; 6) $P = (6), \quad Q = (1, 2)$;
- 3) $P = (3), \quad Q = (1, 5), (2, 2)$; 7) $P = Q = (1, 1)$.
- 4) $P = (4), \quad Q = (1, 3)$;

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Плоская матричная задача, определяемая парой преобразующих алгебр (A, B) указанного выше вида, имеет модульно ограниченный тип тогда и только тогда, когда пара частично упорядоченных множеств $(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B))$ не содержит критических пар множеств в смысле Клейнера.*

Переходя к доказательству теоремы, будем предполагать тело T коммутативным. Это создаст для нас некоторое удобство, избавив от необходимости говорить о левых-правых умножениях на элементы T . В то же время все приводимые ниже рассуждения практически без всяких изменений остаются справедливыми и в некоммутативном случае.

§ 2. Комбинаторика множества $\mathcal{P}(A)$

Назовем $\mathbb{Z}$ -множеством абстрактное частично упорядоченное множество P , представимое в виде суммы двух подмножеств $P = P^\infty + P^0$ со следующими условиями:

- 1) $P^\infty = \sum_{i \in I^\infty} P_i$ является суммой любого числа бесконечных цепей вида $P_i = \{p_i^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с отношениями внутри цепей $p_i^{k+l} < p_i^k$ (I^∞ – некоторое множество индексов);
- 2) если $p_i^k, p_j^l \in P^\infty$, то $p_i^k < p_j^l \Leftrightarrow p_i^{k+1} < p_j^{l+1}$;
- 3) если $p_i^k \in P^\infty, x \in P^0$, то $p_i^k < x \Leftrightarrow p_i^{k+1} < x$ ($x < p_i^k \Leftrightarrow x < p_i^{k+1}$).

Бесконечные цепи P_i условимся называть *орбитами* множества P , их точки – *орбитальными*, а точки подмножества P^0 – *простыми*. В дальнейшем будем простые точки обозначать через p_i^0 , т.е. представлять P^0 в виде $P^0 = \{p_i^0\}_{i \in I^0}$, где $I^0 \cap I^\infty = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически $\mathbb{Z}$ -множество представляет собой частично упорядоченное множество P с так действующей на нем группой $\mathbb{Z}$, что $\mathbb{Z}$ -орбиты являются либо одноэлементными (составляющими подмножество P^0), либо бесконечными (составляющими P^∞). Из соображений удобства термин “орбита” мы сохраняем лишь за последними.

Примером $\mathbb{Z}$ -множества является введенное в § 1 множество $\mathcal{P}(A)$, где A – преобразующая алгебра (в этом случае множество индексов $I = I^\infty \cup I^0$ конечно). Обычное частично упорядоченное множество является частным случаем $\mathbb{Z}$ -множества (при $P^\infty = \emptyset$).

Подмножество $X \subset \mathcal{P}$ будем называть $\mathbb{Z}$ -подмножеством, если любая орбита P либо содержится в X , либо не пересекается с X (при этом X автоматически наделяется структурой $\mathbb{Z}$ -множества, индуцируемой с P).

Вообще говоря, на одном и том же множестве P можно разными способами задать структуру $\mathbb{Z}$ -множества. Два $\mathbb{Z}$ -множества P и Q следует считать *изоморфными*, если существует такой изоморфизм $\varphi: P \rightarrow Q$ частично упорядоченных

множеств, что $\varphi(P^\infty) = Q^\infty$ (и автоматически $\varphi(P^0) = Q^0$) и из $p_i^k \in P^\infty$ и $\varphi(p_i^k) = q_j^l$ следует $\varphi(p_i^{k+1}) = q_j^{l+1}$.

Каждому $\mathbb{Z}$ -множеству $P = \sum_{i \in I} P_i$ с конечным множеством индексов $I = I^\infty \cup I^0$, где $P_i = \{p_i^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ при $i \in I^\infty$ и $P_i = \{p_i^0\}$ при $i \in I^0$, можно естественно сопоставить преобразующую алгебру $\text{Alg } P = (\alpha_{ij})_{i,j \in I}$, полагая $\alpha_{ij} = -\infty$ при $i, j \in I^0$ и $p_i^0 \leq p_j^0$ и $\alpha_{ij} = \inf_{k,l} \{k - l : p_i^k \leq p_j^l\}$ в остальных случаях (заметим, что $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ и $\inf \emptyset = +\infty$). Легко видеть, что $\text{Alg } \mathcal{P}(A) = A$ и $\mathcal{P}(\text{Alg } P) = P$ и, таким образом, между классами изоморфизма преобразующих алгебр и классами изоморфизма $\mathbb{Z}$ -множеств с конечным множеством индексов I устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Введем в рассмотрение некоторое фактормножество множества $\mathcal{P}(A)$, которое понадобится в дальнейшем. Пусть, как и выше, $A = \bigoplus_{i,j=1}^n e_{ij} A_{ij}$, где $A = \pi^{\alpha_{ij}} D$ ($\alpha_{ij} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$), и $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A) = \{p_i^k\}$. Назовем точки $p_i^k, p_j^l \in \mathcal{P}$ (а также индексы i, j) *сцепленными*, если $A_{ij} \neq 0$ и $A_{ji} \neq 0$, т.е. $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} < \infty$. Ясно, что отношение сцепленности является отношением эквивалентности, которое обозначим знаком $\sim$. Легко видеть, что $p_i^k \sim p_j^l$ тогда и только тогда, когда либо $i = j$, либо $i \neq j$ и $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \mathbb{Z}$ (во втором случае автоматически $A_{ii} = A_{jj} = D$). В частности, все точки любой орбиты $\mathcal{P}_i = \{p_i^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ являются сцепленными.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{P}}$ конечное фактормножество множества $\mathcal{P}$, состоящее из классов эквивалентности $\tilde{p}_i^k$ точек $p_i^k \in \mathcal{P}$. Введем на $\tilde{\mathcal{P}}$ отношение порядка $\leq$, полагая $\tilde{p}_i^k \leq \tilde{p}_j^l \Leftrightarrow A_{ij} \neq 0$.

Назовем точку $\tilde{p}_i^k \in \tilde{\mathcal{P}}$ *простой* (*кратной*), если $A_{ii} = T$ ($A_{ii} = D$). Отношения между точками фактормножества $\tilde{\mathcal{P}}$ разделим на *сильные* и *слабые*, считая отношение $\tilde{p}_i^k < \tilde{p}_j^l$ слабым в том и только том случае, когда $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$ (при этом автоматически точки $\tilde{p}_i^k, \tilde{p}_j^l$ являются кратными). Для сильного (слабого) отношения $x < y$, где $x, y \in \tilde{\mathcal{P}}$, используем обозначение $x \triangleleft y$ ($x \prec y$).

Если $x < y$, где $x, y \in \mathcal{P}$, и $\tilde{x} \triangleleft \tilde{y}$ ($\tilde{x} \prec \tilde{y}$), то исходное отношение $x < y$ тоже будем называть *сильным* (*слабым*) и записывать $x \triangleleft y$ ($x \prec y$).

При $X \subset \tilde{\mathcal{P}}$ естественно определим *прообраз* $[X]$ множества X в $\mathcal{P}$ формулой $[X] = \{x \in \mathcal{P} : \tilde{x} \in X\}$. Очевидно, прообраз является $\mathbb{Z}$ -подмножеством в $\mathcal{P}$. Будем рассматривать соответствующую подалгебру алгебры A вида $A_X = A[X] = \bigoplus_{i,j=1}^n e_{ij} A_{ij}$, где сумма берется по всем тем индексам i, j , для которых $\tilde{p}_i^k, \tilde{p}_j^l \in X$ (в частности, $A_\emptyset = A$). Ясно, что если $x \in \mathcal{P}$ — кратная (простая) точка и $X = \{x\}$, то алгебра A_x является порядком (телом T).

Для точки x произвольного частично упорядоченного множества $\mathcal{M}$ обозначим $x^\vee = \{t \in \mathcal{M} : x \leq t\}$, $x_\wedge = \{t \in \mathcal{M} : t \leq x\}$. Пусть $N(X) = \{t \in \mathcal{M} : t - X\}$ для подмножества $X \subset \mathcal{M}$.

Через N^+ обозначим множество всех формальных сумм вида $x + y$, где x, y — несравнимые точки подмножества N некоторого частично упорядоченного множества $\mathcal{M}$. Сумму $\mathcal{M} + N^+$ будем рассматривать как новое частично упорядоченное множество (содержащее $\mathcal{M}$ в качестве подмножества), где отношение порядка внутри N^+ и между точками $\mathcal{M}$ и N^+ определено так:

- a) $x + y \leq u + v \Leftrightarrow (x \leq u \text{ или } x \leq v) \text{ и } (y \leq u \text{ или } y \leq v)$;
- b) $x + y \leq z \Leftrightarrow x \leq z \text{ и } y \leq z$ ($z \leq x + y \Leftrightarrow z \leq x \text{ или } z \leq y$).

Иными словами, $\mathcal{M} + N^+$ есть подмножество свободной полурешетки (с опера-

шей $+$), порожденной $\mathcal{M}$.

В §4 будет построен алгоритм дифференцирования (T, A) -задачи, комбинаторное действие которого (на множестве $\mathcal{P}(A)$ и алгебре A) уместно описать сейчас.

Обозначим через $w(X)$ *ширину* частично упорядоченного множества X , т.е. максимальное число его попарно несравнимых элементов.

Комбинаторика алгоритма дифференцирования. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}^\infty + \mathcal{P}^0$, где $\mathcal{P}^\infty = \sum_{i \in I^\infty} \mathcal{P}_i$ с $\mathcal{P}_i = \{p_i^z\}_{z \in \mathbb{Z}}$ и $\mathcal{P}^0 = \{p_i^0\}_{i \in I^0}$. Простую точку $a \in \max \mathcal{P}$ назовем *подходящей* для дифференцирования, если $w(N) \leq 2$, где $N = N(a)$ – множество точек, не сравнимых с a (заметим, что N является $\mathbb{Z}$ -подмножеством множества $\mathcal{P}$). *Производным множеством* множества $\mathcal{P}$ по точке a назовем $\mathbb{Z}$ -множество $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_a$, определяемое следующим образом:

- 1) $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus a) + N^+$ с определенным выше отношением порядка;
- 2) орбитами множества $\mathcal{P}'$ являются все орбиты исходного множества $\mathcal{P}$, а также новые орбиты (состоящие из точек подмножества N^+) следующих двух типов:

- (a) $\{p_i^{k+z} + p_j^{l+z}\}_{z \in \mathbb{Z}}$, где $p_i^k, p_j^l \in N^\infty$;
- (b) $\{p_i^z + p_j^0\}_{z \in \mathbb{Z}}$, где $p_i^z \in N^\infty$, $p_j^0 \in N^0$.

Очевидно, с чисто комбинаторной точки зрения такая операция есть не что иное, как дифференцирование по максимальной точке a в смысле [6], распространенное на случай бесконечного множества N и согласованное с $\mathbb{Z}$ -структурой множества $\mathcal{P}$.

Ясно, что число новых простых точек всегда конечно, а число новых орбит конечно тогда и только тогда, когда фактормножество $\tilde{N}$ не содержит подмножеств типа $\{x, y\}$ и $\{x \prec y\}$, где x, y – кратные точки (т.е. когда множество кратных точек $\tilde{N}$ образует сильную цепь). В этом случае, фиксируя некоторую (соответствующую определению $\mathbb{Z}$ -множества) нумерацию точек множества $\mathcal{P}'$, получим *производную алгебру* $A'_a = \text{Alg } \mathcal{P}'_a$, не зависящую с точностью до изоморфизма от способа нумерации.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во всех случаях, с которыми мы в дальнейшем будем сталкиваться, кратные точки фактормножества $\tilde{N}$ будут образовывать сильную цепь. Таким образом, производная преобразующая алгебра A'_a всегда будет определена.

Если $\mathcal{M}$ – обычное конечное частично упорядоченное множество с максимальной точкой a такой, что $w(N) \leq 2$, где $N = N(a)$, то, как следует непосредственно из результатов [5], [6] (см. также [2]), множество $\mathcal{M}$ не содержит критических подмножеств $K_1, \dots, K_5$ тогда и только тогда, когда производное множество $\mathcal{M}'_a$ их не содержит. Из этого непосредственно вытекает

ЛЕММА 2.1. *Множество $\mathcal{P}$ не содержит критических подмножеств $K_1, \dots, K_5$ тогда и только тогда, когда производное множество $\mathcal{P}'_a$ их не содержит.*

Более того, покажем, что в ситуации леммы 2.1 производное множество $\mathcal{P}'_a$ в некотором смысле проще исходного множества $\mathcal{P}$.

Обозначим $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Вектором (соответствующим множеству $\mathcal{P}$) назовем любую функцию $d: \widehat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{Z}_+$, принимающую лишь конечное число ненулевых значений. Напомним, что *носитель* $\text{Supp } d$ вектора d определяется соотношением $\text{Supp } d = \{x \in \mathcal{P}: d(x) > 0\}$, а квадратичная *форма Титса* f множества $\mathcal{P}$ – равенством

$$f(d) = d^2(0) + \sum_x d^2(x) + \sum_{x < y} d(x)d(y) - d(0) \sum_x d(x) \quad (x, y \in \mathcal{P}).$$

При этом векторы с условием $f(d) = 1$ называются (положительными) *корнями* формы Титса (или множества $\mathcal{P}$). Корень d будем называть *тривиальным*, если $d(x) \leq 1$ при всех $x \in \widehat{\mathcal{P}}$.

Два подмножества $X, Y \subset \mathcal{P}$ назовем *подобными*, если существует такой автоморфизм φ $\mathbb{Z}$ -множества $\mathcal{P}$, что $\varphi(X) = Y$. Два корня d, d' будем называть *подобными*, если $d'(0) = d(0)$ и $d'(x) = d(\varphi(x))$ при всех $x \in \mathcal{P}$ для некоторого автоморфизма φ $\mathbb{Z}$ -множества $\mathcal{P}$. Ясно, что носители подобных корней подобны.

Полученный в [11] список точных частично упорядоченных множеств конечного типа состоит (в обозначениях из [12]) из 12 рассматриваемых с точностью до анти-изоморфизма множеств $F_1, \dots, F_{12}$, при этом множества $F_1 = (1)$ и $F(7) = (1, 1)$ имеют лишь тривиальные точные корни.

Обозначим через $\lambda(\mathcal{P})$ число классов подобия всех корней множества $\mathcal{P}$ с носителями ширины 3, отличными от множества $F_8 = (1, 1, 2)$.

ЛЕММА 2.2. *Если множество $\mathcal{P}$ не содержит критических подмножеств, то $\lambda(\mathcal{P}) < \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, рассмотрим фиксированное точное множество $F = F_i$ ($i \neq 1, 7, 8$) и полную совокупность A попарно неподобных нетривиальных корней множества $\mathcal{P}$ с носителем, изоморфным F . Предположим, что $|A| = \infty$ и выберем некоторый бесконечный набор $R \subset A$ с общим подмножеством $(\text{Supp } r) \cap \mathcal{P}^0$ при всех $r \in R$. Фиксируя произвольно изоморфизмы $\varphi_r: \text{Supp } r \rightarrow F$, можем также считать (сужая, если нужно, R), что при любом $x \in (\text{Supp } r) \cap \mathcal{P}^\infty$ все точки $\varphi_r(x)$, $r \in R$, принадлежат одной орбите.

Далее, так как $\mathcal{P}$ не содержит критических подмножеств, то фактормножество $\widetilde{\mathcal{P}}$ не содержит подмножеств типа $\{x, u, v\}$, $\{x; u \prec v\}$, $\{u \prec w \succ v\}$ и $\{u \prec v \prec w\}$, где $u \prec w\}$, в которых x – простая точка, а u, v – кратные точки. Следовательно, в каждой триаде точек множества $\mathcal{P}$ либо две точки являются простыми (а третья – произвольная), либо одна точка является простой, а две другие – орбитальными сцепленными. Используя этот факт, нетрудно проверить непосредственно (учитывая явный вид точных множеств F_i), что при любом $F = F_i$ ($i \neq 1, 7, 8$) и любом $r \in R$ все орбитальные точки носителя $\text{Supp } r$ являются взаимно сцепленными, причем для каждой орбитальной точки найдется другая, не сравнимая с ней орбитальная точка. С другой стороны, можно считать (используя при необходимости автоморфизмы $\mathbb{Z}$ -множества $\mathcal{P}$), что существует точка $x \in \mathcal{P}^\infty$ такая, что $x \in \text{Supp } r$ для всех r и $\varphi_r(x) = \varphi_s(x)$ при всех $r, s \in R$. Таким образом, объединение $\bigcup_{r \in R} [(\text{Supp } r) \cap \mathcal{P}^\infty]$ не может быть бесконечным, т.е. $|R| < \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко проверить, что если $\tilde{\mathcal{P}} = \{u \prec v\}$ ($\tilde{\mathcal{P}} = \{x, y, u\}$), где x, y — простые точки, а u, v — кратные, то множество $\mathcal{P}$ имеет бесконечно много попарно неподобных корней с носителем F_7 (F_8).

ЛЕММА 2.3. Пусть множество $\mathcal{P} = a_{\wedge} + N$ с максимальной подходящей точкой a не содержит критических подмножеств, причем $w(N) = 2$. Тогда $\lambda(\mathcal{P}'_a) < \lambda(\mathcal{P}) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что по леммам 2.1 и 2.2 $\lambda(\mathcal{P}) < \infty$ и $\lambda(\mathcal{P}'_a) < \infty$. Далее, поскольку неразложимые представления частично упорядоченных множеств конечного типа над полем имеют общее положение и их размерности являются корнями (см. [12], [13]), то дифференцирование (интегрирование) неразложимых представлений индуцирует дифференцирование (интегрирование) соответствующих корней. Более того, так как дифференцирование представлений над полем по максимальной точке состоит в выполнении стандартных структурных операций над подпространствами векторного пространства (см., например, [14]), то соответствующее синхронное дифференцирование их размерностей переводит подобные корни-размерности в подобные. Легко видеть, что при дифференцировании по максимальной точке a корень r с носителем $F = F_8 = (1, 1, 2)$ может переходить в корень r' с носителем-триадой G лишь в следующих случаях:

- (а) $F = \{x; y; z < a\}$, где $x, y \in N$ (здесь $G = \{x, y, z\}$ и $r'(0) = 2$);
- (б) $F = \{x < y; z; t\}$, где $x, y, z \in N$ и $t < a$ (здесь $G = \{y, (x, z), t\}$ и $r'(0) = 1$).

Наличие у производного множества $\mathcal{P}'_a$ любого корня r' типа (а) с носителем G “компенсируется” наличием у множества $\mathcal{P}$ корня ρ с носителем-триадой $\{x, y, z\}$, где $\rho(0) = 2$ и $\rho(i) = 1$ при $i \neq 0$, который при дифференцировании переходит в корень с двухточечным носителем $\{(x, y), z\}$. А наличие у $\mathcal{P}'_a$ любого корня r' типа (б) “компенсируется” наличием у $\mathcal{P}$ корня ρ с носителем $F_3 = \{x < y; z; t < a\} = (1, 1, 2)$, где тоже $\rho(0) = 2$ и $\rho(i) = 1$ при $i \neq 0$, который при дифференцировании переходит в корень с канонически вложенным в $\mathcal{P}'_a$ носителем $F = \{x < y; z; t\} = (1, 1, 2)$. Поскольку, кроме этого, все корни множества $\mathcal{P}$ с носителем-триадой $\{a, x, y\}$, где $x, y \in N$, переходят в корни с носителем-диадой, то имеет место строгое неравенство $\lambda(\mathcal{P}'_a) < \lambda(\mathcal{P})$. Лемма доказана.

§3. Решение задачи типа “цепь-гирлянда”

В этом параграфе решим (A, B) -задачу в предположении, что $\mathcal{P}(A)$ — цепь, а $\mathcal{P}(B)$ — гирлянда. Предварительно рассмотрим ситуацию “цепь-цепь”.

Обозначим через $H = H_n$ порядок в алгебре $M_n(T)$ вида $H = (h_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, где $h_{ij} = 1$ при $i < j$ и $h_{ij} = 0$ при $i \geq j$. Напомним (см. [1]), что для порядка $A \subset M_n(T)$ равносильны следующие три условия: 1) $\mathcal{P}(A)$ — цепь; 2) A — наследственный порядок; 3) $A \cong H$.

ЛЕММА 3.1. Если $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$ — цепи, то (A, B) -задача имеет модульно ограниченный тип, причем все непустые неразложимые (A, B) -матрицы исчерпываются, с точностью до эквивалентности единичными матрицами первого порядка вида $X = X_i^j = (\pi^k)$, где $k = 0$ при $A_{ii} = T$ или $B_{jj} = T$ и $k \in \mathbb{Z}$ при $A_{ii} = B_{jj} = D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\tilde{\mathcal{P}}(A)$ и $\tilde{\mathcal{P}}(B)$ – одноточечные множества, то необходимо рассмотреть три случая.

1) Случай $(A, B) = (T, T)$ тривиален.

2) Случай $(A, B) = (T, H_n)$ отвечает задаче о представлениях наследственно-го порядка H_n , решение которой, соответствующее утверждению леммы, хорошо известно (см., например, [1]).

3) Случай $(A, B) = (H_m, H_n)$ равносильен случаю $(A, B) = (H_m, H_n^t)$, где t – операция транспонирования. Здесь в матрице $X = (X_i^j)$ строки горизонтальной полосы X_i прибавляются к строкам полосы X_s с коэффициентами из D (πD) при $i < s$ ($i > s$), и так же осуществляются прибавления столбцов вертикальных полос X^j . Пусть $x = \varepsilon \pi^k$ – элемент тела T с наименьшим показателем k , встречающийся в матрице X . Занумеруем клетки X_i^j числами от 1 до mn , присваивая номера $1, \dots, n$ клеткам первой строки (слева направо), номера $n+1, \dots, 2n$ – клеткам второй строки (в том же направлении) и т. д. Найдем клетку с минимальным номером, содержащую элемент вида $\varepsilon \pi^k$, и приведем ее допустимыми преобразованиями к диагональному виду с блоками типа $\pi^{k+l} E$ по диагонали и нулями на остальных местах, где $l \geq 0$, а E – единичные матрицы (быть может, разных размеров). Так как блок вида $\pi^k E$ заведомо встречается на диагонали и содержит элементы матрицы X с наименьшим возможным k , то, очевидно, слева, справа, сверху и снизу от него можно сделать допустимыми преобразованиями нули, тем самым выделив его прямым слагаемым. Таким образом, в неразложимом случае должно быть $X = (\pi^k)$.

Если же $\tilde{\mathcal{P}}(A) = \{a_1 \triangleleft \dots \triangleleft a_r\}$ и $\tilde{\mathcal{P}}(B) = \{b_1 \triangleleft \dots \triangleleft b_s\}$, где $rs > 1$, то, группируя вместе клетки X_i^j , отвечающие каждой конкретной паре (a_λ, b_μ) , получим разделение матрицы X на укрупненные клетки Y_λ^μ , каждая из которых в отдельности отвечает уже рассмотренному случаю одноточечных множеств $\tilde{\mathcal{P}}(A_\lambda)$ и $\tilde{\mathcal{P}}(B_\mu)$. Нумеруя клетки Y_λ^μ числами от 1 до rs тем же способом, что и выше, и представляя первую из них, отличную от нуля, в виде прямой суммы уже описанных неразложимых матриц типа (π^k) , замечаем, что за счет сильных прибавлений в цепях $\tilde{\mathcal{P}}(A)$ и $\tilde{\mathcal{P}}(B)$ эти матрицы (π^k) выделяются прямыми слагаемыми. Лемма доказана.

Выделим теперь главный случай в ситуации “цепь–гирлянда”. Через $\Gamma = \Gamma_n$ будем обозначать любой порядок в $M_n(T)$ вида $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, где $\gamma_{ij} \in \{0, 1\}$ при всех i, j (т.е. Γ является так называемым 01-кольцом), причем конечное частично упорядоченное множество $Q(\Gamma) = \{q_1, \dots, q_n\}$, определенное условием $q_i \leq q_j \Leftrightarrow \gamma_{ij} = 0$, есть гирлянда (ординальной суммой счетного числа экземпляров которой является множество $\mathcal{P}(\Gamma)$). Заметим, что порядок H является частным случаем порядка типа Γ .

ЛЕММА 3.2. (H, Γ) -задача имеет модульно ограниченный тип, причем все непустые неразложимые (H, Γ) -матрицы исчерпываются с точностью до эквивалентности матрицами четырех типов:

$$\begin{array}{cccc}
 \boxed{\pi^k} & , & \boxed{\pi^k \quad \pi^k} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline \pi^k & \pi^k \\ \hline 0 & \pi^l \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline \pi^k & \pi^k \\ \hline 0 & \pi^l \\ \hline \end{array} \\
 (a) & & (b) & & (c) & & (d) \\
 & & & & l \geq k+1 & & l \geq k \\
 & & & & (k, l \in \mathbb{Z}), & &
 \end{array}$$

где любая горизонтальная полоса соответствует некоторой точке множества $Q(H)$; в каждой из матриц (b), (c), (d) пара вертикальных полос соответствует диаде множества $Q(\Gamma)$, а в матрице (d) стрелка символизирует наличие допустимых прибавлений над D строк верхней полосы к строкам нижней.

ЗАМЕЧАНИЕ. Автоматически являются допустимыми прибавления над πD строк (столбцов) любой горизонтальной (вертикальной) полосы к строкам (столбцам) другой полосы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Ограничимся рассмотрением характерного частного случая: $H = H_2$ и $\Gamma = \Gamma_4$, где $Q(\Gamma) = \{1, 2, 3, 4\}$ и $\{1, 2\} < \{3, 4\}$ (как будет следовать из дальнейшего, общий случай существенного отличия от данного не имеет). Пусть $X = (X_i^j)$, где $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, \dots, 4\}$, – некоторая неразложимая (H, Γ) -матрица. Можем считать все ее элементы принадлежащими кольцу D (выделяя, если нужно, общий множитель π^k , где $k \in \mathbb{Z}$).

Шаг 1. Приведем сначала клетку X_1^1 к виду $\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$, где $*$ обозначает матрицу над πD , затем допустимыми прибавлениями строк горизонтальных полос $1 \xrightarrow{D} 2$ матрицы X сделаем нулевыми столбцы матрицы X_2^1 , соответствующие клетке E , а допустимыми преобразованиями столбцов вертикальных полос $1 \xrightarrow{D} 3, 4$ сделаем нулевыми соответствующие клетке E строки матриц X_1^3 и X_1^4 . Рассматривая разделенную теперь на две горизонтальные полосы матрицу $X_1^2 = \left(\begin{array}{c} U \\ V \end{array}\right)$, замечаем, что V есть матрица над πD (иначе после приведения V к виду $\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$ слева, справа, сверху и снизу от E можно допустимыми преобразованиями сделать нули и выделить из X прямое слагаемое типа (а)). С другой стороны, строки матрицы U невырождены по модулю πD (иначе прибавлениями столбцов типа $1 \xrightarrow{\pi D} 2$ тоже можно выделить из X прямое слагаемое вида (а), отвечающее части клетки E в X_1^1). Таким образом, матрица X_1^2 приводится к виду $\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline V' & V'' \end{array}\right)$, где V', V'' – матрицы над πD .

Далее, применяя к нижним полосам матриц X_1^3, X_1^4 аналогичные случаю матриц X_1^1, X_1^2 рассуждения, приведем матрицу X к виду

E		E					
				E		E	
	*	*	*		*	*	*
	Y_1	L	Y_2		Y_3	M	Y_4

где все пустые клетки (здесь и в последующих матрицах) – нулевые, звездочкой обозначены матрицы над πD , а $Y_1, \dots, Y_4$ и L, M – некоторые матрицы над D . После этого, повторно используя описанные выше для матриц $X_1^1, \dots, X_1^4$ рассуждения по отношению к четверке матриц $Y_1, \dots, Y_4$ (а также опираясь, где необходимо,

на некоторые простые дополнительные аргументы, основанные на отсутствии у X прямых слагаемых типа (a), ..., (d)), получим запись X в виде

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline E & & & E & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & E & & & E & & \\ \hline & & A_1 & * & * & A_2 & & & A_3 & * & * & A_4 \\ \hline & E & & & E & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & E & & & E & \\ \hline & & B_1 & * & * & B_2 & & & B_3 & * & * & B_4 \\ \hline \end{array}, \quad (3.1)$$

где не только матрицы, помеченные $*$, но также все матрицы A_i , B_i — над πD . Легко видеть, что по отношению к допустимым преобразованиям, не изменяющим

нулевых клеток и единичных, набор матриц $\pi X' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \hline B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline \end{array}$ над πD

образует (H, Γ) -задачу.

Шаг 2. Повторяя рассуждения шага 1 по отношению к (H, Γ) -матрице X' и приводя ее, в свою очередь, к виду (3.1), представим исходную матрицу X в форме

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline E & & & & & E & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & E & & & & E & & \\ \hline & & \pi E & & & & \pi E & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & \pi E & & & & \pi E & \\ \hline & & & & A'_1 & * & * & * & * & A'_2 & & & & A'_3 & * & * & * & * & A'_4 \\ \hline & E & & & & E & & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & E & & & & E & & \\ \hline & & & & \pi E & & & & \pi E & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \pi E & & & & \pi E & \\ \hline & & & & B'_1 & * & * & * & * & B'_2 & & & & B'_3 & * & * & * & * & B'_4 \\ \hline \end{array}, \quad (3.2)$$

где все матрицы, помеченные $*$, а также A'_i , B'_i , — над $\pi^2 D$, причем набор матриц $A'_1, \dots, A'_4, B'_1, \dots, B'_4$ опять образует (H, Γ) -задачу.

ЗАМЕЧАНИЕ. Некоторые части матриц, помеченных $*$ в (3.1) (т.е. рассматриваемых в (3.1) над πD), фактически оказываются в (3.2) над $\pi^2 D$, в чем можно убедиться с помощью упомянутых выше простых дополнительных аргументов.

Выполняя последующие шаги, насколько возможно, придем в итоге к ситуации, когда при некотором i матрицы с нечетными номерами $A_1^{(i)}$, $B_1^{(i)}$, $A_3^{(i)}$, $B_3^{(i)}$ (которые приводятся всегда первыми) окажутся нулевыми. Что произойдет в этом случае, легче всего объяснить, используя форму (3.2). Предположим, что в ней

клетки A'_1, B'_1, A'_3, B'_3 нулевые. Тогда оставшиеся неприведенными клетки (т.е. A'_2, B'_2, A'_4, B'_4 , а также помеченные $*$) образуют задачу типа “цепь-цепь”, более точно, символически записанные прибавления столбцов $\alpha_5 \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \alpha_1 \xrightarrow{D} \beta_5 \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \beta_1$ и $\beta_1 \xrightarrow{\pi D} \alpha_5$, где $\alpha_i(\beta_i)$ – i -я подполоса вертикальной полосы $2(4)$, реально осуществимы и задаются, очевидно, наследственным порядком H_{10} . Применяя к получившейся (H_2, H_{10}) -задаче лемму 3.1, немедленно получаем требуемые канонические формы (а), $\dots$, (d). Остается лишь добавить, что увеличение числа шагов, а также размеров порядков H и Γ принципиальных изменений не вносит. Лемма доказана.

Теперь можем завершить решение задачи “цепь-гирлянда”. Алгебру A , у которой множество $\mathcal{P}(A)$ является гирляндой, назовем *канонической*, если $A_x = H$ или $A_x = \Gamma$ для любой кратной точки $x \in \tilde{\mathcal{P}}(A)$. Если обе алгебры A, B – канонические, то (A, B) -задачу будем называть *канонической*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Если $\mathcal{P}(A)$ – цепь, а $\mathcal{P}(B)$ – гирлянда, то (A, B) -задача имеет модульно ограниченный тип, причем в каноническом случае все непустые неразложимые (A, B) -матрицы исчерпываются с точностью до эквивалентности следующими матрицами (везде $k, l \in \mathbb{Z}$):*

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I)} & \begin{array}{cc} T & T \\ T \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & D \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{cc} D & D \\ T \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & D \begin{bmatrix} \pi^k \end{bmatrix} \end{array} \\
 \text{(II)} & \begin{array}{cc} T & T \\ T \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & D \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{cc} T & T \\ D \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} D \\ D \end{array} \right) \pi \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix} \end{array} \\
 & & l \geq 1 & l \geq 0 \\
 & \begin{array}{cc} T & T \\ T \left(\begin{array}{c} T \\ T \end{array} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & T \left(\begin{array}{c} T \\ D \end{array} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & T \left(\begin{array}{c} T \\ D \end{array} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & T \left(\begin{array}{c} D \\ D \end{array} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix} \\
 \text{(III)} & \begin{array}{cc} T & T \\ T \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & D \begin{bmatrix} \pi^k & \pi^k \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{cc} D & D \\ D \begin{bmatrix} \pi^k & \pi^k \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} D \\ D \end{array} \right) \pi \\ \begin{bmatrix} \pi^k & \pi^k \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix} \end{array} \\
 & & l \geq k+1 & l \geq k \\
 & \begin{array}{cc} T & T \\ T \left(\begin{array}{c} T \\ T \end{array} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & T \left(\begin{array}{c} T \\ D \end{array} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & T \left(\begin{array}{c} D \\ T \end{array} \right) \begin{bmatrix} \pi^k & \pi^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & T \left(\begin{array}{c} D \\ D \end{array} \right) \begin{bmatrix} \pi^k & \pi^k \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

где в случае (III) преобразования столбцов задаются с помощью подалгебры $\Omega = \begin{pmatrix} D & \pi D \\ \pi D & D \end{pmatrix}$ алгебры B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО базируется на использовании двух предыдущих лемм и их аналогов для существенно более простых случаев (T, Γ) -задачи и (H, T^2) -задачи, где $T^2 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$. Ясно, что (T, Γ) -задача – это в точности задача о представлениях 01-порядка Γ , равносильная (см. [1; теорема 3.7]) задаче о представлениях над T обычной конечной гирлянды $Q(\Gamma)$. Ее тривиальные решения дают третью матрицу в группе (I) и первую матрицу в группе (III).

Решение (H, T^2) -задачи тоже простое, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения. Указание: сначала привести одну вертикальную полосу матрицы X (образующую (H, T) -задачу типа “цепь-цепь”), получив во второй полосе (L, T) -задачу, где $L = \begin{pmatrix} H_p & 0 \\ W & H_q \end{pmatrix}$ с некоторым блоком W ; затем решить ее (H_p, T) -подзадачу типа “цепь-цепь”, получив в итоге (пока без учета блока W) опять задачу типа “цепь-цепь”; после приведения последней восстановить неразложимые (H, T^2) -матрицы, учитывая дополнительное действие блока W (лишь уменьшающее число неразложимых). Результатом будут вторая матрица группы (I) и вторая, третья, четвертая матрицы группы (II) (что составляет аналогию с леммой 3.2).

Первые матрицы групп (I) и (II) – тривиальные решения (T, T) -задачи и (T, T^2) -задачи, отвечающие результатам [5]. Таким образом, рассмотрение общей ситуации дополнительно должно привести к последним четырем формам каждой из групп (II), (III).

Предположим, что X – неразложимая (A, B) -матрица и $\tilde{\mathcal{P}}(A) = \{x_1 \triangleleft \dots \triangleleft x_r\}$, $\tilde{\mathcal{P}}(B) = \{Y_1 \triangleleft \dots \triangleleft Y_s\}$, где все x_i – точки, а каждое Y_j есть либо точка, либо диада простых точек. Рассмотрим набор $\bar{X}$ нескольких первых горизонтальных полос матрицы X , отвечающий подалгебре B_{x_1} . Так как $A_{x_1} = T$ или $A_{x_1} = H$ и все задачи типа (M, N) при $M \in \{T, H\}$, $N \in \{T, T^2, \Gamma\}$ уже решены, то $\bar{X}$ можно представить в виде прямой суммы указанных выше неразложимых матриц. При этом квадратные слагаемые (т.е. имеющие размеры 1×1 или 2×2) выделяются, как легко видеть, прямыми слагаемыми из X и, следовательно, отсутствуют. Остаются лишь матрицы первого и второго типа каждой из групп (II), (III). Под одной из двух клеток каждого такого слагаемого можно сделать нули допустимыми прибавлениями над T . Получающаяся в оставшейся части матрицы X (ниже полос $\bar{X}$) задача будет, как нетрудно проследить, опять (A', B') -задачей, где $\mathcal{P}(A')$ – цепь, а $\mathcal{P}(B')$ – гирлянда для некоторых алгебр A', B' . Более того, возникающие в этой задаче новые вертикальные полосы (отвечающие упомянутым неквадратным слагаемым матрицы $\bar{X}$) будут соответствовать одноточечным звеньям гирлянды $\mathcal{P}(B')$. Предполагая теперь по индукции (которую проведем по размерности $d_0(X)$) неразложимые матрицы новой задачи имеющими указанный в предложении вид и возвращаясь к исходной матрице X , получим неразложимые матрицы таких же типов. Этим завершается доказательство.

В качестве следствия получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(B)$ – гирлянды, то (A, B) -задача имеет модульно ограниченный тип (конечный тип) тогда и только тогда, когда одно из множеств $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ является цепью (конечной цепью).*

В самом деле, достаточность условия каждого критерия следует из предложе-

ния 3.1. Необходимость вытекает из предложения 3.1 с учетом модульной неограниченности задач типа (T^2, T^2) , (Ω, Ω) и (Ω, T^2) . Подтверждение последнего факта – бесконечная серия неразложимых матриц вида $\left(\begin{array}{c|c} E & E \\ \hline E & J \end{array} \right)$, где J – клетка Жордана любого размера (рассматриваемая над T в первом случае и над телом вычетов $\overline{D} = D/\pi D$ – во втором и третьем случаях).

§ 4. (T, A) -задача и алгоритм дифференцирования

Рассмотрим детально случай, когда одна из алгебр A, B совпадает с телом T . Нам будет удобно иметь дело с (T, A) -задачей, где, как и прежде, $A = \bigoplus_{i,j=1}^n e_{ij} A_{ij}$ – преобразующая алгебра и $A_{ij} = \pi^{\alpha_{ij}} D$.

Здесь (T, A) -матрица X состоит из одной горизонтальной полосы $X_1 = X$, разбитой на клетки X^i ($i = 1, \dots, n$), причем над строками X производятся T -элементарные преобразования, а над столбцами клеток X^i – D -элементарные либо T -элементарные (в зависимости от типа колец A_{ii}) плюс соответствующие прибавления столбцов, определяемые D -подмодулями $A_{ij} \subset T$. Выбирая некоторое T -пространство U_0 , размерность которого равна числу строк матрицы X , и отождествляя столбцы X с векторами из U_0 , сопоставим каждому индексу i D -подмодуль (возможно, являющийся T -подпространством или содержащий T -подпространство) $U_i \subset U_0$, порожденный столбцами матриц X^k , взятыми с коэффициентами из A_{ki} (в том числе при $k = i$ столбцами X^i с коэффициентами из A_{ii}). В результате получим следующую задачу о классификации D -подмодулей в векторном пространстве над T (сформулируем ее на категорном языке).

Объектами *категорий представлений* $\mathcal{R} = \mathcal{R}(A)$ алгебры A служат наборы вида $U = (U_0; U_1, \dots, U_n)$, где U_0 – конечномерное векторное пространство над T , в котором выделена совокупность D -подмодулей $U_1, \dots, U_n$, удовлетворяющая двум условиям:

- (a) $U_i A_{ij} \subset U_j$ при всех i, j , т.е. прямая сумма $M = M(U) = \bigoplus_{i=1}^n U_i$ является естественным правым A -модулем (называемым *модулем представления* и содержащимся в $U_0^{(n)}$ – прямой сумме n экземпляров пространства U_0);
- (b) M – конечнопорожденный A -модуль (т.е. $U_i/\underline{U}_i$ – конечнопорожденный A_{ii} -модуль при любом i , где $\underline{U}_i = \sum_{k \neq i} U_k A_{ki}$).

Морфизм $U \rightarrow V$ в категории $\mathcal{R}$ есть любое такое T -линейное отображение $\varphi: U_0 \rightarrow V_0$, для которого $\varphi(U_i) \subset V_i$ при всех i . Ясно, что морфизм φ является изоморфизмом категории $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда он является изоморфизмом векторных пространств и $\varphi(U_i) = V_i$ при всех i .

Классификация представлений алгебры A (т.е. объектов категории $\mathcal{R}$) с точностью до изоморфизма эквивалентна рассматриваемой (T, A) -задаче (если не учитывать матрицы с нулевым числом строк). В частном случае, когда алгебра A является первичным полумаксимальным кольцом, получаем задачу о классификации наборов полных D -решеток в векторном пространстве над T , рассмотренную в [2]. Другой предельный случай возникает, если $A_{ii} = T$ при всех i , – это задача о представлениях обычного частично упорядоченного множества над T [6].

Размерность представления U есть вектор $d = \underline{\dim} U = (d_0, d_1, \dots, d_n)$, где $d_0 = \dim_T U_0$, а d_i – минимальное число образующих A_{ii} -модуля $U_i/\underline{U}_i$. Если вектор d не имеет нулевых координат, то его (и представление U) называют *точным*.

Алгебра A называется *точной*, если она имеет точное неразложимое представление.

Обозначим через $\text{Ind } A$ совокупность всех классов изоморфизма неразложимых представлений алгебры A . Класс изоморфизма представления U обозначим через $[U]$.

Будем называть алгебру A *расщепляемой*, если множество $\mathcal{P}(A)$ представимо в виде $\mathcal{P}(A) = X + Y + C$, где $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \triangleleft Y$ и C – любая цепь (которая, в частности, может быть пустой или бесконечной).

ЛЕММА 4.1. *Расщепляемая алгебра не является точной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, предположим, что $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A) = X + Y + C$, где X, Y, C – указанные выше подмножества, которые можем считать $\mathbb{Z}$ -подмножествами (расширяя при необходимости X, Y). Пусть $I = I_X \cup I_Y \cup I_C$ – соответствующее разбиение множества индексов $I = \{1, \dots, n\}$, т.е. $i \in I_X \Leftrightarrow \mathcal{P}_i \subset X$ (и аналогично определены I_Y, I_C). Рассмотрим некоторое представление U алгебры A и представим T -пространство U_0 в виде $U_0 = U'_0 \oplus U''_0$, где U'_0 – наименьшее T -подпространство, порожденное D -модулями $U_i, i \in I_X$, а U''_0 – некоторое дополнение. Тогда, очевидно, (T, A) -матрица представления U приводится к виду

$$U_0 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & * & \mathcal{L} \\ \hline * & 0 & * \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} U''_0 \\ U'_0 \end{array}$$

$I_X \quad I_Y \quad I_C$

где, в свою очередь, располосованную матрицу $\mathcal{L}$ можно привести согласно лемме 3.1 допустимыми преобразованиями к прямой сумме нескольких единичных матриц (стоящих в разных вертикальных полосах $\mathcal{L}$). После этого прибавлениями строк $U''_0 \xrightarrow{T} U'_0$ под этими единичными матрицами в нижней горизонтальной полосе делаются нули, а “испорченный” при этом нуль вертикальной полосы I_Y подправляется (за счет отношения $X \triangleleft Y$) указанными стрелкой прибавлениями столбцов над T . Таким образом, представление U распадается в прямую сумму $U = U' \oplus U''$, где U' неточно на подмножестве индексов I_Y (т.е. $d_i = 0$ при $i \in I_Y$ и $d = \underline{\dim} U'$), а U'' неточно на I_X , что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4.2. *Если $\mathcal{P}(A) = C + G$, где C – цепь, а G – гирлянда, являющиеся $\mathbb{Z}$ -подмножествами, то (T, A) -задача имеет модульно ограниченный тип, причем все непустые неразложимые (T, A) -матрицы исчерпываются с точностью до эквивалентности матрицами следующего вида:*

- 1) $X = (X^i) = (1)$;
- 2) $X = (X^i \mid X^j) = (\pi^{-k} \mid \pi^{-l})$, где $\{p_i^k, p_j^l\}$ – диада;
- 3) $X = (X^i \mid X^j \mid X^u) = (\pi^{-k} \mid \pi^{-l} \mid \pi^{-r})$ и $X = (X^i \mid X^j \mid X^u) = \left(\begin{array}{c|c|c} \pi^{-k} & 0 & \pi^{-r} \\ 0 & \pi^{-l} & \pi^{-r} \end{array} \right)$, где $\{p_i^k, p_j^l, p_u^r\}$ – триада;
- 4) $X = (X^i \mid X^j \mid X^u \mid X^v) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \pi^{-k} & 0 & \pi^{-r} & 0 \\ 0 & \pi^{-l} & \pi^{-r} & \pi^{-s} \end{array} \right)$, где $\{p_i^k, p_j^l, p_u^r, p_v^s\}$ – подмножество типа $(1, 1, 2)$ (здесь при $u = v$ две последние полосы сливаются в одну).

ЗАМЕЧАНИЕ. Среди перечисленных матриц есть эквивалентные (отличающиеся множителем π^z).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.2 состоит в редукции к предложению 3.1. Предполагая сначала точки цепи C не сравнимыми с точками гирлянды G , приведем в (T, A) -матрице X (используя лемму 3.1) (T, A') -подзадачу типа “цепь-цепь”, где $A' \subset A$ – подалгебра, для которой $\mathcal{P}(A') = C$. В оставшейся части возникает задача типа “цепь-гирлянда”, неразложимые матрицы которой описаны предложением 3.1. Прослеживая обратный переход от этих матриц к неразложимым матрицам исходной (T, A) -задачи и отсекая от них лишние (путем учета возможных отношений между точками подмножеств C и G), получим в точности матрицы вида 1), ..., 4).

В дальнейшем классы изоморфизма неразложимых представлений алгебры A , отвечающих (T, A) -матрицам вида 1) и 2), будем обозначать соответственно через $[i] = [p_i^k]$ и $[p_i^k, p_j^l]$.

Опишем теперь функтор для (T, A) -задачи. Чтобы сделать это наиболее естественно, будем записывать каждый объект $U = (U_0; U_1, \dots, U_n)$ категории представлений $\mathcal{R}(A)$ в несколько модифицированной форме (с избытком D -подмодулей), а именно $U = (U_0; U_x, x \in \mathcal{P})$, где $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A)$ и $U_x = \pi^k U_i$ при $x = p_i^k$.

Пусть множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A)$ содержит простую максимальную подходящую точку a (т.е. $\mathcal{P} = a_{\wedge} + N$, где $w(N) \leq 2$), и пусть $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_a$ – соответствующее производное множество, определенное в §2 и отвечающее выбранной производной алгебре $A' = A'_a$.

Функтор дифференцирования $': \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ сопоставляет объекту $U = (U_0; U_x, x \in \mathcal{P})$ категории $\mathcal{R} = \mathcal{R}(A)$ производный объект $U' = (U'_0; U'_x : x \in \mathcal{P}')$ категории $\mathcal{R}' = \mathcal{R}(A')$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} U'_0 &= U_a; \\ U'_x &= U_x \cap U_a \quad \text{при } x \in \mathcal{P} \setminus a; \\ U'_{x+y} &= (U_x + U_y) \cap U_a \quad \text{при } x + y \in N^+. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для морфизма $U \xrightarrow{\varphi} V$ категории $\mathcal{R}$, рассматриваемого как линейное отображение $\varphi: U_0 \rightarrow V_0$, производный морфизм $\varphi': U'_0 \rightarrow V'_0$ определим, ограничивая φ на $U'_0 = U_a$.

Легко видеть, что $U'_{u+v} = U'_{x+y} \cdot \pi^z$ при $x = p_i^k, y = p_j^l, u = p_i^{k+z}, v = p_j^{l+z}$ и что линейное отображение $\varphi': U'_0 \rightarrow V'_0$ действительно является морфизмом категории $\mathcal{R}'$. Следовательно, функтор определен корректно.

Отметим, что несмотря на наличие в наборе U “разнородных” D -подмодулей (T -пространств, D -решеток и их прямых сумм), формулы дифференцирования (4.1) сохраняются такими же, как и в случае T -пространств, т.е. представлений над полем [14].

В этой работе мы не будем заниматься полным исследованием категорных свойств функтора дифференцирования. Установим лишь связь между неразложимыми объектами категорий $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$.

Прежде всего заметим, что $U' = 0$ тогда и только тогда, когда $U_a = 0$, т.е. когда U фактически является представлением алгебры $\text{Alg } N$. Если при этом U неразложимо, то согласно лемме 4.2 $[U] = [i] = [p_i^k]$, где $p_i^k \in N$, или $[U] = [p_i^k, p_j^l]$, где $\{p_i^k, p_j^l\}$ – диада в N . Обозначив совокупность всех классов $[U]$ такого типа через Θ , зафиксируем факт в следующей форме.

ЛЕММА 4.3. Если представление U неразложимо, то $U' = 0 \Leftrightarrow [U] \in \Theta$.

Определим операцию *интегрирования* (практически обратную дифференцированию), сопоставляющую любому представлению W алгебры A' *первообразное* представление $U = W^\dagger$ алгебры A такое, что $(W^\dagger)' \cong W$. Условимся обозначать через $T\{e_1, \dots, e_s\}$ ($D\{e_1, \dots, e_s\}$) T -пространство (D -решетку) с базисом $e_1, \dots, e_s$.

Пусть $\{p_{i_\alpha}^{k_\alpha}, p_{j_\alpha}^{l_\alpha}\}$, $\alpha = 1, \dots, r$, — некоторый фиксированный полный набор парно неподобных диад множества N и $\{q_{u_\alpha}^{m_\alpha} = p_{i_\alpha}^{k_\alpha} + p_{j_\alpha}^{l_\alpha}\}$, $\alpha = 1, \dots, r$, — набор соответствующих точек множества N^+ , где q_u^m — точки производного $\mathbb{Z}$ -множества $\mathcal{P}'$, занумерованные согласно выбору алгебры $A' = \bigoplus_{u,v} e_{uv} A'_{uv}$. Пусть, далее, $f_\alpha^1, \dots, f_\alpha^{s_\alpha}$ — минимальная система образующих $A'_{u_\alpha u_\alpha}$ -модуля W_q , где $q = q_{u_\alpha}^{m_\alpha}$, взятая по модулю подмодуля $\underline{W}_q = \sum_{t < q} W_t$.

Обозначим через N^1 множество всех точек подмножества N , не входящих вообще ни в одну диаду N (т.е. сравнимых со всеми точками N). Рассматривая каждую из выбранных диад как упорядоченную пару точек $(p_{i_\alpha}^{k_\alpha}, p_{j_\alpha}^{l_\alpha})$, обозначим $L(i) = \{\alpha : i_\alpha = i\}$, $R(i) = \{\alpha : j_\alpha = i\}$ (ясно, что $L(i) \cap R(i) = \emptyset$ и $L(i) \cap L(j) = R(i) \cap R(j) = \emptyset$ при $i \neq j$, хотя, быть может, $L(i) \cap R(j) \neq \emptyset$ для некоторых $i \neq j$).

Выбирая теперь некоторое новое T -пространство E_0 размерности $s_1 + \dots + s_r$ с базисом $e_1^1, \dots, e_1^{s_1}, \dots, e_r^1, \dots, e_r^{s_r}$, положим $W^\dagger = U$, где

$$\begin{aligned} U_0 &= W_0 \oplus E_0; \quad U_a = W_0; \\ U_x &= W_x \quad \text{при } x < a; \\ U_x &= U_i = \underline{U}_x + W_x + \sum_{\alpha \in L(i)} \pi^{-k_\alpha} A_{ii} \{e_\alpha^1, \dots, e_\alpha^{s_\alpha}\} \\ &\quad + \sum_{\alpha \in R(i)} \pi^{-l_\alpha} A_{ii} \{e_\alpha^1 + f_\alpha^1, \dots, e_\alpha^{s_\alpha} + f_\alpha^{s_\alpha}\} \quad \text{при } x = p_i^0 \in N \setminus N^1; \\ U_y &= U_x \cdot \pi^k \quad \text{при } x = p_i^0 \in N \setminus N^1, \quad y = p_i^k; \\ U_x &= \underline{U}_x + W_x \quad \text{при } x \in \Gamma^1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Хотя эти соотношения выглядят несколько громоздкими, несложно проверить, что действительно $(W^\dagger)' \cong W$. При этом прояснить конструкцию операций дифференцирования и интегрирования (и суть соотношения $(W^\dagger)' \cong W$) помогает использование матричного языка. Именно, рассмотрим (T, A) -матрицу X , отвечающую представлению U , и выделим в нижней ее части строки, соответствующие подпространству U_a , после чего в верхней горизонтальной полосе E_0 получим матричную задачу, определяемую множеством N ширины 2. Приводя эту задачу (согласно лемме 4.2) и предполагая X нетривиальной неразложимой матрицей, получим в полосе E_0 прямые слагаемые лишь типа $(X^i \mid X^j) = (\pi^{-k} E \mid \pi^{-l} E)$, соответствующие диадам (p_i^k, p_j^l) множества N (которые считаем упорядоченными). Делая теперь прибавлениями строк над T под каждым блоком $\pi^{-k} E$ нули в нижней полосе, получим в последней в точности (T, A') -матрицу X' , отвечающую представлению U' . Обратный ход — интегрирование — очевиден и соответствует

приписыванию к X' сверху блоков типа $(\pi^{-k}E \mid \pi^{-l}E)$. Изображенный ниже матричный фрагмент отвечает случаю одной диады (p_i^k, p_j^l) :

(напомним, что в матричной записи представлений столбцы полосы U_t (U'_t) образованы координатами образующих соответствующего D -модуля по модулю $\underline{U}_t$ ($\underline{U}'_t$)).

Итак, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Функтор $'$ индуцирует биекцию $(\text{Ind } A) \setminus \Theta \rightarrow \text{Ind } A'$, причем обратная биекция задается операцией $\uparrow$. В частности, алгебра A имеет модульно ограниченный тип тогда и только тогда, когда производная алгебра A' имеет модульно ограниченный тип.*

§ 5. Доказательство основной теоремы

а) Сначала сведем вопрос к случаю (T, A) -задачи. Рассматривая произвольную (A, B) -задачу, можем предполагать, что одно из множеств $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ не является гирляндой, иначе результат сводится к предложению 3.2.

Пусть множество $\mathcal{P}(B)$ не является гирляндой, т.е. содержит подмножество типа $(1, 1, 1)$ или $(1, 2)$. Если при этом множество $\mathcal{P}(A)$ бесконечно или не является цепью, то, с одной стороны, очевидно, пара $(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B))$ содержит критическую пару множеств в смысле Клейнера. С другой стороны, имеет место следующий факт.

ЛЕММА 5.1. *Если множество $\mathcal{P}(A)$ не является конечной цепью, а множество $\mathcal{P}(B)$ не является гирляндой, то (A, B) -задача имеет модульно неограниченный тип.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $A_1 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$, $A_2 = D$, $B_1 = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & T \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}$,
 $B_2 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} D & \pi D & \pi D \\ \pi D & D & D \\ \pi D & \pi D & D \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} D & \pi^2 D \\ \pi D & D \end{pmatrix}$, $\Omega = \begin{pmatrix} D & \pi D \\ \pi D & D \end{pmatrix}$
(заметим, что $\mathcal{P}(A_1) = (1, 1)$, $\mathcal{P}(A_2) = (\infty)$, $\mathcal{P}(B_1) = (1, 2)$, $\mathcal{P}(B_2) = (1, \infty)$ и $(1, 2) \subset \mathcal{P}(B_3)$, $\mathcal{P}(B_4)$, а $Q(\Omega) = (1, 1)$). Легко убедиться, что проверка утверждения леммы сводится к перебору вариантов $(A, B) = (A_i, B_j)$ при $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, \dots, 4\}$.

1) $(A, B) = (A_1, B_j)$ при $j = 1, 2$. Очевидно, каждая из этих задач более трудная, чем (A_1, A_1) -задача — классическая задача о представлениях в смысле [5] пары

диад над T . Последняя имеет неразложимые матрицы вида $\left(\begin{array}{c|c} E & E \\ \hline E & J \end{array}\right)$ сколь угодно большого размера (J – клетка Жордана) и, следовательно, является задачей модульно неограниченного типа.

2) $(A, B) = (A_1, B_j)$ при $j = 3, 4$. Эти задачи сложнее (A_1, Ω) -задачи, имеющей неразложимые матрицы такого же вида, как в предыдущем пункте (заметим, что прибавления столбцов одной вертикальной полосы к столбцам другой с коэффициентами из πD не изменяет матриц по модулю πD , т.е. (A_1, Ω) -задача не проще задачи о приведении обычной пары диад над телом вычетов $D/\pi D$).

3) $(A, B) = (D, B_1)$. Приводя тривиальную (D, B') -подзадачу этой задачи, где $B' = \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$, получим в оставшейся матрице (после транспонирования)

(T, A') -задачу, где $A' = \begin{pmatrix} D & D & D \\ 0 & D & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$, которая, очевидно, труднее (T, A'') -задачи,

где $A'' = \begin{pmatrix} D & D & D \\ \pi^4 D & D & D \\ \pi^6 D & \pi^4 D & D \end{pmatrix}$. Однако A'' – полумаксимальное кольцо бесконечного типа [2] ($K_2 \subset \mathcal{P}(A'')$) и, следовательно, имеет модульно неограниченный тип.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из результатов [2; § 1, п. 5] следует, что полумаксимальное кольцо бесконечного типа имеет и модульно неограниченный тип (всегда есть серия неразложимых матричных представлений, в которой задействована клетка Жордана J сколь угодно большого порядка).

4) $(A, B) = (D, B_2)$. Приводя здесь (D, T) -подзадачу, получим в оставшейся матрице (после транспонирования) (D, B'') -подзадачу, где $B'' = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$, которая, очевидно, труднее рассмотренной ниже (D, B_4) -задачи.

5) $(A, B) = (D, B_j)$ при $j = 3, 4$. Рассмотрим здесь в качестве вспомогательной серию неразложимых матриц для представлений пары обычных частично упорядоченных множеств $M = (1, 2)$, $N = (6)$ в смысле [5] следующего вида

E	0	0	E	0	0	0
0	E	E	0	E	0	0
0	E	0	0	0	E	0
E	0	E	0	0	0	E
0	0	E	0	0	0	0
J	E	0	0	0	0	0

где J – клетка Жордана (например, с собственным числом 0). Эта серия получается из классической серии критического множества $K_5 = (1, 2, 5)$ приведением цепи длины 5. Умножая в этой матрице i -ю горизонтальную полосу на π^{i-l} ($i = 1, \dots, 6$), получим серию неразложимых матриц для (D, B_3) -задачи. Умножая после этого дополнительно весь третий вертикальный блок на π и объединяя

его со вторым, получим серию для (D, B_4) -задачи (неразложимость новых серий легко устанавливается непосредственной матричной выкладкой). Лемма доказана.

Итак, можем считать $\mathcal{P}(A)$ конечной цепью, состоящей только из простых точек. Пусть $|\mathcal{P}(A)| = m$. Тогда при $m = 1$ сразу имеем дело с (T, B) -задачей. Если же $m \geq 2$, то рассмотрим (T, B') -задачу, где B' — такая алгебра, у которой множество $\mathcal{P}(B')$ имеет вид кардинальной суммы $\mathcal{P}(B') = \mathcal{P}(B) + C_{m-1}$, где C_{m-1} — цепь из простых точек длины $m - 1$. Очевидно, приводя в (T, B') -матрице все полосы, соответствующие цепи C_{m-1} (т.е. решая обычную тривиальную задачу о представлении цепи C_{m-1} над T в смысле [6]), получим в оставшейся части в точности (A, B) -матрицу. Ясно, что при этом модульная ограниченность (A, B) -задачи равносильна модульной ограниченности (T, B') -задачи. Более того, как фактически показано в [5], $\mathcal{P}(B')$ не содержит критических подмножеств $K_1, \dots, K_5$ точно тогда, когда пара $(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B))$ не содержит критических пар. Таким образом, дело свелось к рассмотрению случая (T, B') -задачи или, после переобозначения, (T, A) -задачи.

б) Докажем критерий модульной ограниченности для (T, A) -задачи (обобщающий, в частности, критерий конечности типа для полумаксимальных колец [2]).

ТЕОРЕМА 5.1. *Для того чтобы (T, A) -задача имела модульно ограниченный тип, необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathcal{P}(A)$ не содержало критических подмножеств $K_1, \dots, K_5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Предположим, что множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A)$ содержит критическое подмножество K . Сужая, если нужно, алгебру A , можем считать ее минимальной в том смысле, что все простые точки $\mathcal{P}$ содержатся в K и все орбиты пересекаются с K , причем любое другое критическое подмножество $K' \subset \mathcal{P}$ обладает теми же свойствами. Будем предполагать K содержащим хотя бы одну орбитальную точку (иначе попадаем в классическую ситуацию обычных представлений над T , решенную в [5]).

Если все точки K являются орбитальными, то можно считать A первичным полумаксимальным кольцом (в противном случае всегда можно добавить некоторые дополнительные отношения между точками разных орбит, не изменяющие вида K). Тогда согласно [2] кольцо A имеет бесконечный и одновременно модульно неограниченный тип, что противоречит условию.

Если $K = K_1$, то для любой орбитальной точки $x \in K$ можем (применяя, если нужно, перенумерацию точек орбит) предполагать $x = p_i^0$, откуда для двух разных орбитальных точек $x = p_i^0$ и $y = p_j^0$ в K будем иметь $\alpha_{ij} \geq 1$ и $\alpha_{ji} \geq 1$. Следовательно, стандартные неразложимые матрицы вида $\begin{pmatrix} E & 0 & E & E \\ 0 & E & E & J_0 \end{pmatrix}$, где J_0 — клетка Жордана с собственным числом 0, отвечающие обычным неразложимым представлениям множества K_1 (см. [6; лемма 2]) над любым телом (в частности, над телом вычетов $D/\pi D$), окажутся одновременно неразложимыми (T, A) -матрицами, что противоречит модульной ограниченности задачи. Поэтому далее предполагаем $K_1 \not\subset \mathcal{P}$.

Пусть K содержит как простые, так и орбитальные точки. Пусть $x, y \in K$ — две сравнимые точки, где x — простая точка, а y — орбитальная. Тогда между x и y расположено бесконечно много точек орбиты точки y , т.е. $\mathcal{P} \setminus x$ содержит

другое критическое подмножество K' , что невозможно. Значит, никакая простая точка K не сравнима ни с какой орбитальной, т.е. K имеет вид кардинальной суммы $K = X + Y$, где $X(Y)$ состоит из простых (орбитальных) точек, причем $w(X) \leq 2$ и $\max X \subset \max \mathcal{P}$. Поскольку $K_1 \notin \mathcal{P}$, то любая простая точка $a \in \max X$ является подходящей для дифференцирования и, более того, ввиду условия $w(X) \leq 2$ при дифференцировании по ней новые простые точки не возникают. Значит, $s(\mathcal{P}'_a) = s(\mathcal{P}) - 1$, где $s(\mathcal{P})$ – число простых точек $\mathcal{P}$. Заменяя $\mathcal{P}$ на $\mathcal{P}'_a$ и повторяя все рассуждения, через несколько шагов придем к случаю $s(\mathcal{P}) = 0$, т.е. к дающей противоречие ситуации, когда все точки K являются орбитальными (отметим, что наличие критического подмножества в производном множестве $\mathcal{P}'_a$ обеспечивается леммой 2.1).

Достаточность. Пусть множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A)$ не содержит критических подмножеств. Докажем модульную ограниченность (T, A) -задачи индукцией по определенному в §2 числу $\lambda(\mathcal{P})$. С учетом леммы 4.1 можем считать алгебру A нерасщепляемой.

База индукции – случай $\lambda(\mathcal{P}) = 0$, отвечающий множеству $\mathcal{P}$ ширины 2. Рассмотрим фактормножество $\tilde{\mathcal{P}}$. Если $x \in \tilde{\mathcal{P}}$ – простая точка, то $\tilde{\mathcal{P}} = X + \{x\} + Y + N$, где $X \triangleleft x \triangleleft Y$ и $N = N(x)$ – цепь, причем прообраз $[N]$ – тоже цепь. Поскольку A – нерасщепляемая алгебра, то $X = Y = \emptyset$ и к множеству $\mathcal{P} = \{x\} + [N]$ применима лемма 4.2.

Пусть $\mathcal{P}$ не содержит простых точек. Если $x \triangleleft y$ – сильное отношение в $\tilde{\mathcal{P}}$, то $\tilde{\mathcal{P}} = X + Y + Z$, где $X = x_{\wedge}$ и $Y = \{t \in \tilde{\mathcal{P}} : x \triangleleft t\}$, причем $x \prec z$ или $x - z$ для любой точки $z \in \mathbb{Z}$. Поскольку $w(\mathcal{P}) \leq 2$, то прообраз $[Z]$ есть цепь и алгебра A расщепляема, что не так. Следовательно, $\mathcal{P}$ содержит только слабые отношения. Учитывая, что в этих условиях $|\mathcal{P}| \leq 2$ (иначе $w(\mathcal{P}) \geq 3$), видим, что $\mathcal{P}$ либо сводится к точке, либо состоит из двух точек x, y таких, что $[x]$ и $[y]$ – цепи. В первом случае A – полумаксимальное кольцо конечного типа с условием $w(\mathcal{P}) \leq 2$, имеющее лишь тривиальные неразложимые представления в одномерном пространстве (см., например, [1; теорема 3.5]), а во втором используется лемма 4.2.

Шаг индукции. Пусть $\lambda(\mathcal{P}) > 0$. Если множество $\mathcal{P}$ содержит максимальную простую точку a , то $w(N) \leq 2$, где $N = N(a)$, и точка a является подходящей для дифференцирования. Более того, $w(N) = 2$, поскольку алгебра A нерасщепляема. Значит, по лемме 2.3 $\lambda(\mathcal{P}'_a) < \lambda(\mathcal{P})$ и по лемме 2.1 и предположению индукции производная алгебра A'_a имеет модульно ограниченный тип. Тогда по предложению 4.1 алгебра A тоже имеет модульно ограниченный тип.

Пусть $\max \mathcal{P}$ не содержит простых точек. Рассмотрим фактормножество $\tilde{\mathcal{P}}$ и выберем любую точку $a \in \max \tilde{\mathcal{P}}$. Тогда $\tilde{\mathcal{P}} = X + \{a\} + Y$, где $X = \{x \in \tilde{\mathcal{P}} : x \triangleleft a\}$ и Y – некоторое подмножество. Обозначим $C = [a]$, $G = [Y]$. Так как $y - a$ или $y \triangleleft a$ для любого $y \in Y$, то G – гирлянда.

Если $X = Y = \emptyset$, то $\mathcal{P} = [a]$, т.е. алгебра A является первичным полумаксимальным кольцом, имеющим согласно [2] конечный тип.

Если $X = \emptyset$, а $Y \neq \emptyset$, то $\mathcal{P} = C + G$, причем каждое из множеств C, G содержит орбитальные точки. Следовательно, одно из множеств C, G является цепью, а другое – гирляндой, и работает лемма 4.2.

Если, наконец, $X \neq \emptyset$, то $w(G) = 2$, поскольку алгебра A нерасщепляема. Рассмотрим кратную точку $b = \max Y$ и обозначим $W = \{x \in \tilde{\mathcal{P}} : x \triangleleft b\}$, $L = \mathcal{P} \setminus [W + b]$. Так как $\mathcal{P}$ не содержит критических подмножеств и все точки

Y не сравнимы или слабо сравнимы с точкой a , то $Y \setminus b \subset W$. Кроме того, из условия $w(G) = 2$ следует, что L — цепь (содержащая C в качестве подцепи). Таким образом, $\mathcal{P} = [W] + [b] + L$, где $[W] \triangleleft [b]$, и поскольку алгебра A нерасщепляема, то $W = \emptyset$. Следовательно, $\mathcal{P} = [b] + L$, где L — цепь, а $[b]$ — гирлянда, и опять применима лемма 4.2. Доказательство теоремы 5.1 и основной теоремы окончено.

Попутно получаем критерий конечности типа для (A, B) -задачи. В самом деле, как легко видеть, в случае (A, B) -задачи конечного типа ни одно из фактормножеств $\tilde{\mathcal{P}}(A)$, $\tilde{\mathcal{P}}(B)$ не может содержать подмножеств вида $\{x, y, u\}$, $\{u, v\}$ и $\{u \prec v\}$, где x, y — простые точки, а u, v — кратные, и, более того, одно из множеств $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ должно быть конечной цепью. С учетом этого факта и леммы 4.1 легко выводятся следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *(T, A) -задача модульно ограниченного типа имеет конечный тип тогда и только тогда, когда для любой орбитальной точки $x \in \mathcal{P}(A)$ множество $N(x)$ является конечной цепью.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *(A, B) -задача модульно ограниченного типа имеет конечный тип тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки алгебр A, B выполняются два условия:*

- 1) *множество $\mathcal{P}(A)$ является конечной цепью из t элементов ($t \geq 1$);*
- 2) *для любой орбитальной точки $x \in \mathcal{P}(B)$ множество $N(x)$ является конечной цепью, если $t = 1$, и является пустым, если $t \geq 2$.*

В заключение выскажем следующее естественное и весьма правдоподобное предположение (подтверждающееся в случае представлений пары обычных частично упорядоченных множеств над полем).

ГИПОТЕЗА. *Существует такая константа C , что для любой пары преобразующих алгебр (A, B) модульно ограниченного типа и любой неразложимой (A, B) -матрицы X выполняется неравенство $d_0(X) < C$.*

Список литературы

1. Завадский А. Г., Кириченко В. В. Модули без кручения над первичными кольцами // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 57. С. 100–116.
2. Завадский А. Г., Кириченко В. В. Подмаксимальные кольца конечного типа // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 3. С. 323–345.
3. Губарени Н. М. О полусовершенных наследственных справа кольцах модульно-ограниченного типа // Препринт 78.1. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978.
4. Кириченко В. В., Костюкевич П. П., Яременко Ю. В. Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их приложения. Киев. 1988. С. 43–74.
5. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 28. С. 32–41.
6. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 28. С. 5–31.
7. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
8. Дрозд Ю. А. Матричные задачи и категории матриц // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 28. С. 144–153.
9. Warfield R. B. Serial Rings and Finitely Presented Modules // J. Algebra. 1975. V. 37. № 2. P. 187–222.
10. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.

11. *Клейнер М. М.* О точных представлениях частично упорядоченных множеств конечного типа // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 28. С. 42–59.
12. *Завадский А. Г.* Алгоритм дифференцирования и классификация представлений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 5. С. 1007–1048.
13. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 34–42.
14. *Gabriel P.* Representations indecomposables des ensembles ordonnes // Sem. Dubreil (algebra). 1972/73. V. 13. P. 1301–1304.

Киевский государственный университет
строительства и архитектуры
E-mail: zavad@public.icyb.kiev.ua

Поступила в редакцию
16.02.1998