Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, Двумерные классы Ватермана и u -сходимость рядов Фурье, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 7, 23–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:16:09

УДК 517.52

М. И. Дьяченко

Двумерные классы Ватермана и u -сходимость рядов Фурье

В статье получены новые результаты об u -сходимости двойных рядов Фурье функций из классов Ватермана. Оказывается, что никакой класс Ватермана, более широкий, чем $BV(T^2)$, не обеспечивает даже равномерной ограниченности u -сумм двойного ряда Фурье функции из этого класса. В то же время, вводится понятие $u(K)$ -сходимости (областям, по которым берутся суммы, запрещается сильно вытягиваться вдоль координатных осей) и доказывается, что принадлежность функции $f(x, y)$ классу $\Lambda_{1/2}BV(T^2)$, где $\Lambda_a = \left\{ \frac{n^{1/2}}{(\ln(n+1))^a} \right\}_{n=1}^{\infty}$, обеспечивает равномерную ограниченность $u(K)$ -частичных сумм, а если $f(x, y) \in \Lambda_aBV(T^2)$, где $a < \frac{1}{2}$, то двойной ряд Фурье функции $f(x, y)$ $u(K)$ -сходится всюду.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

Целью настоящей статьи является получение новых результатов об u -сходимости двойных рядов Фурье функций из классов Ватермана [1]. Предварительно введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathbb{Z}$ — это множество целых чисел, $T^2 = [-\pi, \pi)^2$. Все рассматриваемые ниже функции будут предполагаться 2π -периодическими по каждой переменной. Для функций $f(x, y) \in L(T^2)$ через

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(f) e^{i(mx+ny)}$$

будет обозначаться их двойной ряд Фурье. Если ограниченное множество $U \subset \mathbb{Z}^2$, то обозначим

$$S_U(f, x) = \sum_{(m,n) \in U} a_{m,n}(f) e^{i(mx+ny)}.$$

В отличие от одномерного случая здесь необходимо пояснить, что будет пониматься под сходимостью двойного ряда.

Пусть дан двойной числовой ряд

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00010) и Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 96/97-15-96073).

Известно много различных определений сходимости ряда (1). Например, пусть

$$S_\nu = \sum_{|m| \leq \nu} \sum_{|n| \leq \nu} a_{m,n}$$

для натуральных ν ,

$$S_r = \sum_{|(m,n)| \leq r} a_{m,n}$$

для $r > 0$ и

$$S_{m,n} = \sum_{|k_1| \leq m} \sum_{|k_2| \leq n} a_{k_1,k_2}$$

для $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \cap [0, \infty)^2$. Если существуют конечные пределы

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu = \alpha, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} S_r = \alpha \quad \text{или} \quad \lim_{\min(m,n) \rightarrow \infty} S_{m,n} = \alpha,$$

то говорят, что ряд (1) сходится к числу α по квадратам, по сферам или по прямоугольникам (по Прингсхейму) соответственно. Существуют и другие определения сходимости двойных рядов, например сходимость по гиперболическим крестам. Все эти определения базируются на нижеследующем: частичные суммы берутся по множествам $U \subset \mathbb{Z}^2$ таким, что

1. U симметрично по отношению к обеим осям координат;
2. если $(k_1, k_2) \in U$, то

$$\prod_{j=1}^2 [\min(0, k_j), \max(0, k_j)] \cap \mathbb{Z}^2 \subseteq U.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть ограниченное множество $U \subset \mathbb{Z}^2$. Тогда скажем, что $U \in A_3$, если при любом $k = (k_1, k_2) \in U$ всегда получим

$$\prod_{j=1}^2 [-|k_j|, |k_j|] \cap \mathbb{Z}^2 \subseteq U.$$

Далее, пусть задано число $K > 1$. Будем говорить, что ограниченное целочисленное $U \in A_3(K)$, если $U \in A_3$ и для любых точек $(0, N) \in U$ и $(M, 0) \in U$ целочисленные ромбы $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : K|m| + |n| \leq N\} \subseteq U$ и $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : |m| + K|n| \leq M\} \subseteq U$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $U \in A_3(K)$, то $\frac{R(U)}{r(U)} \leq 2K$, где $R(U)$ и $r(U)$ суть стороны наименьшего целочисленного квадрата, содержащего U , и наибольшего целочисленного квадрата, содержащегося в U , соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что ряд (1) *u-сходится* (*u(K)-сходится*) к числу α , если для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для каждого множества $U \in A_3$ ($U \in A_3(K)$), содержащего шар $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : |(m, n)| \leq N\}$, имеем

$$\left| \sum_{(m,n) \in U} a_{m,n} - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Нетрудно обобщить эти определения на пространства более высокой размерности.

Ясно, что если ряд (1) *u-сходится* к числу α , то он сходится к тому же самому числу по квадратам и по сферам. Аналогичный вывод можно сделать из *u(K)-сходимости* для некоторого $K > 1$. Отметим, что из *u-сходимости* вытекает и сходимость по Прингсхейму, а также по гиперболическим крестам, а для *u(K)-сходимости* это, вообще говоря, не так, каково бы ни было K . Определение 2 (для *u-сходимости*) было введено Ф. Г. Арутюняном в работах [2], [3], посвященных задаче представления функции кратными тригонометрическими рядами. В статье [4] автором установлены наилучшие достаточные условия для *u-сходимости* рядов Фурье в метрике $L_p(T^m)$, где $1 \leq p \leq \infty$, $L_\infty \equiv C$, в терминах модулей гладкости, а в работе [5] для пространства $C(T^2)$ более точный результат был установлен в терминах смешанного модуля непрерывности.

Здесь следует сказать несколько слов о смысле изучения *u-* и *u(K)-сходимости* рядов Фурье. Рассмотрение *u-сходимости* позволяет выделить закономерности, присущие всем более или менее разумным способам определения сходимости кратного ряда Фурье. Интерес понятия *u(K)-сходимости* состоит в следующем. Разные частичные суммы рядов Фурье вообще ведут себя совершенно непохожим образом (например кубические и сферические частичные суммы), особенно сильно их свойства меняются тогда, когда мы разрешаем множествам, по которым берутся суммы, вытягиваться вдоль координатных осей. Классическим примером здесь является ситуация с кубическими и прямоугольными суммами кратных рядов Фурье непрерывных функций, первые из которых сходятся почти всюду, а вторые могут расходиться в каждой точке. Еще один пример дает приводимая ниже теорема 2. Нам неизвестны результаты такого рода о суммах, взятых по гиперболическим крестам, однако, скорее всего, и здесь следует ожидать чего-то подобного. В связи с этим представляется интересным выявить закономерности поведения частичных сумм, взятых по множествам, которым запрещено “расползаться” вдоль осей координат. На наш взгляд, *u(K)-сходимость* является одним из наиболее широких обобщений такого рода способов задания сходимости, хотя, разумеется, возможно, это определение не является оптимальным для описания поведения кратных рядов Фурье. Во всяком случае, ниже приводится теорема 1, которая позволяет сделать некоторые интересные выводы о том, как ведут себя все не слишком деформированные частичные суммы двойных рядов Фурье функций с ограниченной обобщенной вариацией.

Для дальнейшего нам понадобится определение классов Ватермана $ABV(T^2)$. Вначале определим соответствующий одномерный класс.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \in \Phi$, т.е. Λ является монотонно неубывающей последовательностью положительных чисел такой, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} = \infty,$$

и $f(x) - 2\pi$ -периодическая функция. Тогда говорят, что $f(x)$ принадлежит классу Ватермана $\Lambda BV(T)$, если

$$\Lambda V_T(f) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \frac{|f(I_k)|}{\lambda_k} \equiv \sup_{a \in \mathbb{R}} \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \frac{|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|}{\lambda_k} < \infty,$$

где Γ — система неперекрывающихся интервалов $\{I_k = (\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$ из $T + a = [-\pi + a, \pi + a)$.

В двумерном случае соответствующее определение таково.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть последовательность $\Lambda \in \Phi$ и $f(x, y)$ является 2π -периодической по каждой переменной и измеримой на T^2 функцией. Тогда говорят, что $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$ в том и только том случае, когда:

1. $f(x, -\pi), f(-\pi, y) \in \Lambda BV(T)$;
2. $\Lambda V_{T^2}(f) = \sup_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \sup_{\Gamma_1, \Gamma_2} \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^m \frac{|f(I_k \times J_r)|}{\lambda_k \lambda_r} < \infty$, где

$$f(I_k \times J_r) = f(\alpha_k, \gamma_r) - f(\alpha_k, \delta_r) - f(\beta_k, \gamma_r) + f(\beta_k, \delta_r)$$

для всех k и r , а Γ_1 и Γ_2 — суть две системы неперекрывающихся интервалов $\{I_k = (\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$ и $\{J_r = (\gamma_r, \delta_r)\}_{r=1}^m$ из $T + a$ и $T + b$ соответственно.

Если $\Lambda \equiv 1$, то соответствующий класс обозначаем через $BV(T^2)$.

Отметим, что поскольку любая функция из класса Ватермана, очевидно, ограничена, для $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$ можно определить величину

$$\Lambda V(f) = \Lambda V_{T^2}(f) + \Lambda V_T(f(-\pi, y)) + \Lambda V_T(f(x, -\pi)) + \sup_{T^2} |f(x, y)|.$$

Всюду ниже через C будут обозначаться положительные абсолютные постоянные (не обязательно одинаковые в различных случаях), через $C(f)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от функции $f(x, y)$, и т. д.

Различные суммы рядов Фурье функций, имеющих ограниченную в том или ином смысле вариацию, изучались рядом авторов. Так, обобщая одномерный результат Д. Ватермана [1], А. А. Саакян [6] доказал, что если $\Lambda_1 \equiv \{n\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x, y) \in \Lambda_1 BV(T^2)$, то прямоугольные частичные суммы ряда Фурье функции $f(x, y)$ равномерно ограничены и сходятся по Прингсхейму в каждой точке непрерывности функции. А. И. Саблин [7] распространил этот результат на функции трех и более переменных. Помимо прямоугольных рассматривались и другие частичные суммы. Так, К. Чандрасекхаран и С. Минакхисундарам [8] установили,

что если $f(x, y) = \varphi(x)g(y)$, где функции $\varphi(x)$, $g(y)$ имеют ограниченную вариацию, то сферические частичные суммы ее ряда Фурье сходятся всюду. Б.И. Голубов [9] доказал сходимость всюду средних Бохнера–Рисса критического порядка рядов Фурье функций из значительно более широкого класса, чем $BV(T^m)$, $m \geq 2$. Автором [10] было показано, что если функция $f(x, y) \in BV(T^m)$, $m \geq 2$, то, в частности, ее ряд Фурье сферически сходится всюду. Им же [11] установлено, что сферические частичные суммы рядов Фурье функций из класса $\Lambda_0 BV(T^2)$, где $\Lambda_0 \equiv \{\sqrt{n}\}_{n=1}^\infty$, равномерно ограничены постоянной, зависящей лишь от величины $\Lambda_0 V(f)$. При этом если $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$, где $\lambda_j = o(\sqrt{j})$ при $j \rightarrow \infty$, то ряд Фурье функции $f(x, y)$ сферически сходится всюду. В работе [12] автором при некоторых дополнительных условиях была установлена равномерная ограниченность двумерных сферических сумм для более широкого класса Ватермана с $\Lambda_\varepsilon \equiv \left\{ \frac{n^{3/4}}{(\ln(n+1))^{1/2+\varepsilon}} \right\}_{n=1}^\infty$, где $\varepsilon > 0$. Ш. А. Алимов и В. А. Ильин установили [13], что для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f(x, y) \in \text{Lip}(\frac{1}{2} - \varepsilon)$ с неограниченными сферическими частичными суммами, откуда вытекает, что в вышеупомянутом результате из [12] нельзя вместо Λ_ε взять какую-либо последовательность вида $\{n^{3/4+\varepsilon}\}_{n=1}^\infty$ с $\varepsilon > 0$. Вопрос о нахождении наиболее широкого класса $\Lambda BV(T^2)$, для которого имеет место равномерная ограниченность сферических частичных сумм, остается пока открытым. Далее, В.Н. Темляков [14] установил, что для функций класса $BV(T^m)$ в каждой точке имеет место сходимость частичных сумм их рядов Фурье, взятых по гиперболическим крестам. Это утверждение основывалось на теореме, ранее доказанной С.А. Теляковским [15]. Автор [10] заметил, что на самом деле из результата С.А. Теляковского следует, что для функций класса $BV(T^m)$ в каждой точке имеет место u -сходимость их рядов Фурье. Позднее этот факт был обобщен на еще более сильный метод сходимости С.А. Теляковским и В.Н. Темляковым [16]. Недавно А.Н. Бахваловым были получены теоремы о сходимости по треугольникам рядов Фурье функций двух переменных из классов Ватермана. С любезного согласия автора мы их сформулируем.

Пусть для функции $f(x, y) \in L(T^2)$ треугольные частичные суммы ее ряда Фурье определены формулой

$$S_k(f, (x, y)) = \sum_{|m|+|n| \leq k} a_{m,n}(f) e^{i(mx+ny)}$$

при $k = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА А (А.Н. Бахвалов). Если $\Lambda_a \equiv \left\{ \frac{n^{1/2}}{(\ln(n+1))^a} \right\}_{n=1}^\infty$ и функция $f(x, y) \in \Lambda_1 BV(T^2)$, то треугольные частичные суммы ее ряда Фурье равномерно ограничены в совокупности, а если $f(x, y) \in \Lambda_a BV(T^2)$, где $a > 1$, то треугольные частичные суммы ряда Фурье функции $f(x, y)$ сходятся в каждой точке.

ТЕОРЕМА Б (А.Н. Бахвалов). Для любого $a < 0$ существует функция $f(x, y) \in \Lambda_a BV(T^2)$, у которой треугольные частичные суммы ряда Фурье не являются равномерно ограниченными в совокупности.

В этой статье будет установлено, что теорема А может быть обобщена. Основываясь на вспомогательных результатах §2, в §3 будет получено такое утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Если фиксировано произвольное $K > 1$ и функция $f(x, y) \in \Lambda_{1/2}BV(T^2)$, то для любого $U \in A_3(K)$ и для любой точки $(x, y) \in T^2$ имеем $|S_U(f, (x, y))| \leq CK\Lambda_{1/2}V(f)$. Если же последовательность $\Lambda \in \Phi$ такова, что $\frac{n^{1/2}}{\sqrt{\ln(n+1)\lambda_n}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и функция $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$, то ее ряд Фурье $u(K)$ -сходится в каждой точке.

Вопрос о возможности расширения класса Ватермана в этой теореме остается открытым, но из теоремы Б ясно, что расширение возможно только в логарифмической шкале.

Естественным образом возникает следующая задача: нельзя ли в теореме 1 для какого-либо класса Ватермана, не совпадающего с $BV(T^2)$, заменить $u(K)$ -сходимость на u -сходимость. Оказывается, что ответ отрицательный. А именно в § 4 будет получен такой результат.

ТЕОРЕМА 2. Если $\Lambda \in \Phi$ и $\lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, то существует функция $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$, у которой ряд Фурье не является u -сходящимся в точке $(0, 0)$ и суммы $S_U(f, (0, 0))$ не являются равномерно ограниченными по всем $U \in A_3$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть задано $K > 1$, множество $U \in A_3(K)$ и число

$$N(U) = \max\{N : [-N, N]^2 \cap \mathbb{Z}^2 \subseteq U\} \geq 1.$$

Тогда для ядра Дирихле

$$D_U(x, y) = \sum_{(m, n) \in U} e^{i(mx + ny)}$$

справедливы такие оценки:

$$|D_U(x, y)| \leq \frac{CK(N(U))^2}{\sqrt{N(U)x+1} \sqrt{N(U)y+1}}, \quad (2)$$

$$\left| \int_x^\pi D_U(t, y) dt \right| \leq \frac{CKN(U) \sqrt{\ln(N(U)x+2)} \sqrt{\ln(N(U)y+2)}}{\sqrt{N(U)x+1} \sqrt{N(U)y+1}}, \quad (3)$$

$$\left| \int_y^\pi D_U(x, s) ds \right| \leq \frac{CKN(U) \sqrt{\ln(N(U)y+2)} \sqrt{\ln(N(U)x+2)}}{\sqrt{N(U)x+1} \sqrt{N(U)y+1}}, \quad (4)$$

$$\left| \int_x^\pi \int_y^\pi D_U(t, s) dt ds \right| \leq \frac{CK \sqrt{\ln(N(U)x+2)} \sqrt{\ln(N(U)y+2)}}{\sqrt{N(U)x+1} \sqrt{N(U)y+1}} \quad (5)$$

для любых $x, y \in (0, \pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты записи обозначим $l = N(U)$. Отметим прежде всего, что для одномерного ядра Дирихле при $k \geq 1$ и $x \in (0, \pi]$ выполняются такие неравенства:

$$|D_k(x)| \leq \min \left(k + 1, \frac{C}{x} \right) \leq \frac{C}{x + 1/k} = \frac{Ck}{kx + 1}$$

и по второй теореме о среднем

$$\left| \int_x^\pi D_k(t) dt \right| \leq \min \left(C, \frac{C}{kx} \right) \leq \frac{C}{kx + 1}.$$

Поэтому если квадрат $U' = [-l, l]^2$, то для ядра Дирихле $D_{U'}(x, y) = D_l(x)D_l(y)$ выполняются даже гораздо более сильные, чем (2)–(5), оценки. Отсюда ясно, что утверждение леммы будет установлено, если мы докажем (2)–(5) для ядра Дирихле $D_V(x, y)$, где $V = U \setminus U'$.

Имеем $D_V(x, y) = D_{V,1}(x, y) + D_{V,2}(x, y)$, где

$$D_{V,1}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{n=l+1}^{n_0} \cos ny + \sum_{m=1}^l \sum_{n=l+1}^{n_m} \cos mx \cos ny,$$

$$D_{V,2}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{m=l+1}^{m'_0} \cos mx + \sum_{n=1}^l \sum_{m=l+1}^{m'_n} \cos mx \cos ny,$$

$l \leq n_l \leq n_{l-1} \leq \dots \leq n_0 \leq 2Kl$ и $l \leq m'_l \leq m'_{l-1} \leq \dots \leq m'_0 \leq 2Kl$ (здесь и ниже: если в сумме верхний предел меньше нижнего, то считаем ее равной нулю). Мы проведем рассуждения для $D_{V,1}(x, y)$, из которых нужные нам оценки (2)–(5) будут следовать в силу очевидной симметрии. Мы будем также пользоваться следующим представлением:

$$D_{V,1}(x, y) = \sum_{n=l+1}^{n_0} D_{m_n}(x) \cos ny,$$

где $0 \leq m_{n_0} \leq \dots \leq m_{l+1} \leq l$ и, поскольку $U \in A_3(K)$, для каждого n выполняется оценка $m_n \geq \frac{n_0 - n}{K} - 1$.

Имеем

$$|D_{V,1}(x, y)| \leq \sum_{m=0}^l |D_{m_m}(y) - D_l(y)| \leq \frac{C(l+1)}{y + 1/(2Kl)} \leq \frac{CKl^2}{ly + 1}. \quad (6)$$

Меняя порядок суммирования, получаем

$$|D_{V,1}(x, y)| \leq \sum_{n=l+1}^{n_0} |D_{m_n}(x)| \leq \frac{CKl}{x + 1/l} \leq \frac{CKl^2}{lx + 1}. \quad (7)$$

Из оценок (6) и (7) вытекает, что

$$|D_{V,1}(x, y)| \leq \frac{CKl^2}{\sqrt{lx+1}\sqrt{ly+1}}.$$

Учитывая симметрию, видим, что оценка (2) справедлива.

Далее, если $y \geq x$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\pi D_{V,1}(t, y) dt \right| &\leq \sum_{m=1}^l \left| \int_x^\pi \cos mt dt \right| |D_{n_m}(y) - D_l(y)| + \pi |D_{n_0}(y) - D_l(y)| \\ &\leq \sum_{m=1}^l \frac{|\sin mx|}{m} \frac{C}{y+1/(2Kl)} + \frac{CKl}{ly+1} \\ &\leq x \sum_{m=1}^{[1/x]} \frac{CKl}{ly+1} + \sum_{m=[1/x]+1}^l \frac{1}{m} \frac{CKl}{ly+1} + \frac{CKl}{ly+1} \\ &\leq \frac{CKl \ln(lx+2)}{ly+1} \leq \frac{CKl \sqrt{\ln(lx+2)} \sqrt{\ln(ly+2)}}{\sqrt{lx+1}\sqrt{ly+1}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если же $x > y$, то, учитывая, что функция $\frac{\ln(t+1)}{t}$ монотонно убывает на $[1, \infty)$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\pi D_{V,1}(t, y) dt \right| &\leq \sum_{n=l+1}^{n_0} \left| \int_x^\pi D_{m_n}(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{n=l+1}^{n_0} \frac{C}{m_n x + 1} \leq \frac{CK}{x+1/l} + \frac{C}{x+1/l} \cdot \sum_{n=l+1}^{n_0 - [4K/x]} \frac{K}{n_0 - n} \\ &\leq \frac{CKl \ln(lx+2)}{lx+1} \leq CKl \cdot \frac{\sqrt{\ln(lx+2)}}{\sqrt{lx+1}} \cdot \frac{\sqrt{\ln(ly+2)}}{\sqrt{ly+1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Поэтому (см. (8) и (9)) при любых $x, y \in (0, \pi)$

$$\left| \int_x^\pi D_{V,1}(t, y) dt \right| \leq \frac{CKl \sqrt{\ln(lx+2)} \sqrt{\ln(ly+2)}}{\sqrt{lx+1}\sqrt{ly+1}}. \quad (10)$$

Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned} \left| \int_y^\pi D_{V,1}(x, s) ds \right| &\leq \sum_{m=0}^l \left| \int_y^\pi (D_{n_m}(s) - D_l(s)) ds \right| \\ &\leq \sum_{m=0}^l \frac{C}{ly+1} \leq \frac{CKl}{ly+1} \end{aligned} \quad (11)$$

и

$$\begin{aligned} \left| \int_y^\pi D_{V,1}(x, s) ds \right| &\leq \sum_{n=l+1}^{n_0} \left| \int_y^\pi \cos ns ds \right| |D_{m_n}(x)| \\ &\leq \sum_{n=l+1}^{n_0} \frac{1}{n} \frac{C}{x+1/m_n} \leq \frac{CKl}{lx+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из неравенств (11) и (12) следует, что

$$\left| \int_y^\pi D_{V,1}(x, s) ds \right| \leq \frac{CKl}{\sqrt{lx+1}\sqrt{ly+1}}. \quad (13)$$

Теперь, используя симметрию, выводим нужные нам оценки (3) и (4) из неравенств (10) и (13). Перейдем к получению оценки (5). При $y \geq x$ имеем (см. (8))

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\pi \int_y^\pi D_V(t, s) dt ds \right| &\leq \sum_{m=1}^l \left| \int_x^\pi \cos mt dt \right| \cdot \left| \int_y^\pi (D_{n_m}(s) - D_l(s)) ds \right| \\ &\quad + \pi \cdot \left| \int_y^\pi (D_{n_0}(s) - D_l(s)) ds \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^l \frac{|\sin mx|}{m} \cdot \frac{C}{ly+1} + \frac{C}{ly+1} \\ &\leq \frac{C \ln(lx+2)}{ly+1} \leq \frac{C \sqrt{\ln(lx+2)} \sqrt{\ln(ly+2)}}{\sqrt{lx+1}\sqrt{ly+1}}, \end{aligned} \quad (14)$$

а при $x > y$ (см. (9))

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\pi \int_y^\pi D_V(t, s) dt ds \right| &\leq \sum_{n=l+1}^{n_0} \left| \int_x^\pi D_{m_n}(t) dt \right| \cdot \left| \int_y^\pi \cos ns ds \right| \\ &\leq \sum_{n=l+1}^{n_0} \frac{1}{n} \frac{C}{m_n x + 1} \leq \frac{CK \ln(lx+2)}{lx+1} \\ &\leq \frac{CK \sqrt{\ln(lx+2)} \sqrt{\ln(ly+2)}}{\sqrt{lx+1}\sqrt{ly+1}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (14) и (15) вытекает, что при любых $x, y \in (0, \pi)$

$$\left| \int_x^\pi \int_y^\pi D_V(t, s) dt ds \right| \leq \frac{CK \sqrt{\ln(lx+2)} \sqrt{\ln(ly+2)}}{\sqrt{lx+1}\sqrt{ly+1}}.$$

С учетом симметрии отсюда вытекает оценка (5), и тем самым лемма 1 полностью доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $\{\Delta_i = B_i \times E_i\}_{i=1}^\infty$ – набор замкнутых прямоугольников из T^2 таких, что $B_i \cap B_j = \emptyset$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty \in \Phi$, а числовая последовательность $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ монотонно убывает к нулю, причем

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{\alpha_i}{\lambda_i} < \infty.$$

Тогда функция

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i X_{\Delta_i}(x, y) \in \Lambda BV(T^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $f(-\pi, y)$ и $f(x, -\pi)$ являются функциями ограниченной вариации на T . Пусть $\{I_k\}_{k=1}^m$ и $\{J_r\}_{r=1}^n$ – системы попарно непересекающихся интервалов из T . Рассмотрим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^n \frac{|f(I_k \times J_r)|}{\lambda_k \lambda_r}.$$

Ясно, что в этой сумме могут быть отличны от нуля только те слагаемые, для которых при данных k и r найдется такое i , что $B_i \cap \bar{I}_k \neq \emptyset$, $E_i \cap \bar{J}_r \neq \emptyset$, $B_i \setminus \bar{I}_k \neq \emptyset$ и $E_i \setminus \bar{J}_r \neq \emptyset$.

Из условия леммы вытекает, что при любом фиксированном k таких слагаемых может быть не более четырех. Соответствующие значения r обозначим через $r_{k,s}$, где $1 \leq s \leq 4$. Поскольку оценки аналогичны, наше утверждение будет доказано, если мы, например, установим, что

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{i_k}}{\lambda_k \lambda_{r_{k,1}}} \leq C,$$

где $i_k \neq i_l$ при $k \neq l$, а C – не зависящая от m и выбора отрезков постоянная. В самом деле, используя тот факт, что при $a \geq c > 0$ и $b \geq d > 0$ имеем $ab + cd \geq ad + bc$, мы получаем, что

$$\sigma_1 \leq \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{i_k}}{\lambda_k} \leq \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \leq \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha_k}{\lambda_k} = C.$$

Лемма 2 полностью доказана.

ЛЕММА А. Пусть функция $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$, точка $(x_0, y_0) \in T^2$ и в этой точке функция $f(x, y)$ непрерывна. Тогда $\Lambda V_{[x_0-\delta, x_0+\delta] \times [y_0-\delta, y_0+\delta]}(f) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$.

Эта лемма была доказана А. А. Саакяном [6] для случая $\Lambda \equiv \{n\}_{n=1}^\infty$. В общем случае доказательство остается практически тем же.

§3. Доказательство теоремы 1

Перейдем к доказательству теоремы 1. Достаточно показать, что при любом $K > 1$ существует постоянная $C(f)$ такая, что для всех $U \in A_3(K)$ имеем

$$|S_U(f, (0, 0))| \leq CK\Lambda_{1/2}V(f).$$

Мы можем также предположить, что на T^2 функция $f(x, y) \neq 0$ только в тех точках, где $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Отметим, что

$$S_U(f, (0, 0)) = \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} f(x, y) D_U(x, y) dx dy.$$

Зафиксируем некоторые $K > 1$ и $U \in A_3(K)$ и определим точки $t_k = \pi k/l$ для $k = 0, 1, 2, \dots, l = N(U)$, одномерные отрезки $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ для $k = 1, 2, \dots, l$ и двумерные отрезки $\Delta_{k,r} = \Delta_k \times \Delta_r$ для $k, r = 1, 2, \dots, l$. Теперь определим функцию

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^l f(x_k, y_r) X_{\Delta_{k,r}}(x, y),$$

где $x_k = y_k = t_k$ для всех k (здесь и далее через $X_E(x, y)$ обозначается характеристическая функция множества $E \subseteq T^2$).

Рассмотрим вначале выражение

$$\begin{aligned} S_U(g, (0, 0)) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^l f(x_k, y_r) \int_{\Delta_{k,r}} D_U(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{k=2}^l \sum_{r=2}^l f(\Delta_{k,r}) \int_{x_{k-1}}^{\pi} \int_{y_{r-1}}^{\pi} D_U(x, y) dx dy \right. \\ &\quad + \sum_{k=2}^l (f(x_k, y_1) - f(x_{k-1}, y_1)) \int_{x_{k-1}}^{\pi} \int_0^{\pi} D_U(x, y) dy dx \\ &\quad + \sum_{r=2}^l (f(x_1, y_r) - f(x_1, y_{r-1})) \int_{y_{r-1}}^{\pi} \int_0^{\pi} D_U(x, y) dx dy \\ &\quad \left. + f(x_1, y_1) \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} D_U(x, y) dx dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} (F_1 + F_2 + F_3 + F_4). \end{aligned} \tag{16}$$

Используя оценку (5), получаем

$$|F_1| \leq CK \sum_{k=2}^l \sum_{r=2}^l \frac{|f(\Delta_k \times \Delta_r)| \sqrt{\ln(k+1)} \sqrt{\ln(r+1)}}{\sqrt{k} \sqrt{r}} \leq CK\Lambda_{1/2}V(f), \tag{17}$$

$$|F_2| \leq C \sum_{k=2}^l \frac{|f(x_k, y_1) - f(x_{k-1}, y_1)| \sqrt{\ln(k+1)}}{\sqrt{k}} \leq CK\Lambda_{1/2}V(f), \tag{18}$$

аналогично

$$|F_3| \leq CK\Lambda_{1/2}V(f) \quad (19)$$

и, очевидно,

$$|F_4| \leq CK\Lambda_{1/2}V(f). \quad (20)$$

Поэтому (см. (16)–(20))

$$|S_U(g, (0, 0))| \leq CK\Lambda_{1/2}V(f). \quad (21)$$

Теперь оценим величину

$$\begin{aligned} S_U(f - g, (0, 0)) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^l \int_{\Delta_{k,r}} (f(x, y) - f(x_k, y_r)) D_U(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^l \int_{\Delta_{k,r}} f((x, x_k) \times (y, y_r)) D_U(x, y) dx dy \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^l \int_{\Delta_{k,r}} (f(x_k, y) - f(x_k, y_r)) D_U(x, y) dx dy \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^l \int_{\Delta_{k,r}} (f(x, y_r) - f(x_k, y_r)) D_U(x, y) dx dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} (G_1 + G_2 + G_3). \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно (2) имеем

$$\begin{aligned} |G_1| &\leq CKl^2 \int_{\Delta_{1,1}} \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^l \frac{|f((x_{k-1} + x, x_k) \times (y_{r-1} + y, y_r))|}{\sqrt{k} \sqrt{r}} dx dy \\ &\leq CKl^2 \max_{(x,y) \in \Delta_{1,1}} \left(\sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^l \frac{|f((x_{k-1} + x, x_k) \times (y_{r-1} + y, y_r))|}{\sqrt{k} \sqrt{r}} \right) \int_{\Delta_{1,1}} dx dy \\ &\leq CK\Lambda_{1/2}V(f). \end{aligned} \quad (23)$$

Так как G_2 и G_3 оцениваются одинаково, рассмотрим G_2 . Используя преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{r=1}^l \sum_{k=2}^l \int_{\Delta_r} f((x_{k-1}, x_k) \times (y, y_r)) \int_{x_{k-1}}^{\pi} D_U(x, y) dx dy \\ &\quad + \sum_{r=1}^l \int_{\Delta_r} (f(x_1, y) - f(x_1, y_r)) \int_0^{\pi} D_U(x, y) dx dy = G'_2 + G''_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Применяя оценку (3), будем иметь

$$\begin{aligned}
 |G'_2| &\leq CKl \int_{\Delta_1} \sum_{r=1}^l \sum_{k=2}^l \frac{|f(\Delta_k \times (y_{r-1} + y, y_r))| \sqrt{\ln(k+1)} \sqrt{\ln(r+1)}}{\sqrt{k} \sqrt{r}} dy \\
 &\leq CKl \max_{y \in \Delta_1} \left(\sum_{r=1}^l \sum_{k=2}^l \frac{|f(\Delta_k \times (y_{r-1} + y, y_r))| \sqrt{\ln(k+1)} \sqrt{\ln(r+1)}}{\sqrt{k} \sqrt{r}} \right) \int_{\Delta_1} dy \\
 &\leq CK \Lambda_{1/2} V(f)
 \end{aligned} \tag{25}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}
 |G''_2| &\leq CKl \max_{y \in \Delta_1} \left(\sum_{r=1}^l \frac{|f(x_1, y_{r-1} + y) - f(x_1, y_r)| \sqrt{\ln(r+1)}}{\sqrt{r}} \right) \int_{\Delta_1} dy \\
 &\leq CK \Lambda_{1/2} V(f).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Из формул (22)–(26) вытекает, что

$$|S_U(f - g, (0, 0))| \leq CK \Lambda_{1/2} V(f), \tag{27}$$

и первое утверждение теоремы 1 следует из (21) и (27).

Из приведенного доказательства видно, что если $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$, где $\frac{n^{1/2}}{\sqrt{\ln(n+1)} \lambda_n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и для некоторого $\delta > 0$ функция $f(x, y) = 0$ при $(x, y) \in [-\delta, \delta]^2$, то ряд Фурье функции $f(x, y)$ при любом $K > 1$ $u(K)$ -сходится к нулю в точке $(0, 0)$.

Теперь установим справедливость второго утверждения теоремы 1. В статье [11] было показано, что при выполнении условий теоремы в каждой точке $(x_0, y_0) \in T^2$ существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \pm 0 \\ y \rightarrow y_0 \pm 0}} f(x, y) = f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0).$$

Пусть для определенности $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Прежде всего заметим, что если $T_1 = (0, \pi)^2$, $T_2 = (0, \pi) \times (-\pi, 0)$, $T_3 = (-\pi, 0) \times (0, \pi)$ и $T_4 = (-\pi, 0)^2$, а $Q = T_i$, где $1 \leq i \leq 4$, то при любом ограниченном $U \subset \mathbb{Z}^2$, содержащем точку $(0, 0)$, имеем

$$\frac{1}{\pi^2} \int_Q D_U(t, s) dt ds = \frac{1}{4}.$$

Отсюда ясно, что утверждение теоремы будет установлено, если мы докажем его для функции

$$\bar{f}(x, y) = f(x, y) - \sum_{i=1}^4 f_i X_{T_i}(x, y),$$

где f_i при $1 \leq i \leq 4$ суть пределы функции $f(x, y)$ при $x, y \rightarrow 0$ по квадрату T_i . Отметим, что функция $\bar{f}(x, y)$ после возможного обнуления значений на осях координат станет непрерывной в точке $(0, 0)$ (в дальнейшем мы будем считать, что это так). При этом, очевидно, $\bar{f}(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$. При любом $\delta > 0$ функцию $\bar{f}(x, y)$ можно представить в виде суммы $\bar{f}(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$, где $f_1(x, y) = \bar{f}(x, y)X_{[-\delta, \delta]^2}(x, y)$. Отметим, что $f_1, f_2 \in \Lambda BV(T^2)$ и что поскольку функция $\bar{f}(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$, то

$$\Lambda V(f_1) = \Lambda V_{[-\delta, \delta]^2}(\bar{f}) + \Lambda V_{[-\delta, \delta]}(\bar{f}(x, -\delta)) + \Lambda V_{[-\delta, \delta]}(\bar{f}(-\delta, y)) + o(1)$$

при $\delta \rightarrow +0$. Применяя уже доказанную часть теоремы, лемму А и хорошо известный результат о непрерывности одномерной вариации в точках непрерывности функции, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|S_U(f_1, (0, 0))| \leq CK\Lambda_{1/2}V(f_1) \leq CK\Lambda V(f_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

для любого $U \in A_3(K)$.

Наконец, фиксируя $\delta > 0$, получим согласно доказанному ранее, что при достаточно больших l для всех $U \in A_3(K)$ таких, что $U \supseteq [-l, l]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, выполняется оценка

$$|S_U(f_2, (0, 0))| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из приведенных выше рассуждений вытекает, что ряд Фурье функции $f(x, y)$ $u(K)$ -сходится в точке $(0, 0)$ к числу

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 f_i.$$

§ 4. Доказательство теоремы 2

Хорошо известно, что можно подобрать такую невозрастающую последовательность положительных чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \infty,$$

в то время как

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\lambda_i} < \infty.$$

Далее, пусть возрастающая последовательность целых чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $n_0 = 0$, такова, что

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i > k$$

при всех k . Построим для $k = 1, 2, \dots$ функции

$$f_k(x, y) = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i X_{\Delta_i}(x, y),$$

где Δ_i – некоторые прямоугольники из T^2 , и множества $U_k \in A_3$ такие, что:

1. $\Delta_i = B_i \times E_i$, причем $B_i \cap B_j = \emptyset$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
2. $S_{U_k}(f_k, (0, 0)) > \frac{k}{10000}$ при $k = 1, 2, \dots$;
3. $\left| S_{U_k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} f_j, (0, 0) \right) \right| \leq 1$ при $k = 2, 3, \dots$;
4. при любом k найдется такое $\delta > 0$, что

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n_k} \Delta_i \right) \cap (((-\delta, \delta) \times T) \cup (T \times (-\delta, \delta))) = \emptyset;$$

5. при любом k множество $U_k \subseteq \left[-\frac{1}{\delta(k)}, \frac{1}{\delta(k)} \right]^2$, где $\delta(k)$ – максимальное из чисел, удовлетворяющих условию 4.

Проведем построение по индукции. Поскольку его принцип одинаков при всех k , предположим, что требуемые множества и функции уже построены при $l \leq k-1$.

Выберем натуральное ν'_k таким, чтобы $2^{-\nu'_k} < \delta(k-1)$. В статье [10] автором было доказано, что для любой функции $\varphi(x, y) \in BV(T^2)$ ее двойной ряд Фурье в каждой точке непрерывности $\varphi(x, y)$ u -сходится к ней. В частности, это имеет место для каждой функции $X_{\Delta_i}(x, y)$ в точке $(0, 0)$. Но тогда можно выбрать натуральное ν''_k столь большим, что для каждого множества $U \in A_3$ такого, что $U \supseteq [-2^{\nu''_k}, 2^{\nu''_k}]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, имеем

$$\left| S_U \left(\sum_{j=1}^{k-1} f_j, (0, 0) \right) \right| \leq 1. \quad (28)$$

После этого возьмем $\nu_k = \max(\nu'_k, \nu''_k)$. Теперь для $i = n_k + 1, \dots, n_{k+1}$ введем числа

$$l_i = \sum_{j=n_k+1}^i s_0 = (i - n_k) s_0, \quad (29)$$

где натуральное $s_0 \geq 2$ будет подобрано ниже, и множества

$$\Delta_i = [2^{-l_{n_{k+1}} - \nu_k + l_i - 1}, 2^{-l_{n_{k+1}} - \nu_k + l_i}] \times [2^{-l_{n_{k+1}} - \nu_k - l_i - 1}, 2^{-l_{n_{k+1}} - \nu_k - l_i}]. \quad (30)$$

Затем определим функцию

$$f_k(x, y) = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i X_{\Delta_i}(x, y)$$

и множество

$$\begin{aligned} U_k &= \bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \left([-2^{l_{n_{k+1}}+\nu_k-l_i}, 2^{l_{n_{k+1}}+\nu_k-l_i}] \times [-2^{l_{n_{k+1}}+\nu_k+l_i}, 2^{l_{n_{k+1}}+\nu_k+l_i}] \cap \mathbb{Z}^2 \right) \\ &\equiv \bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} V(i, k). \end{aligned} \quad (31)$$

Отметим, что при этом выполняется условие 1, а также условия 4 и 5 при $\delta(k) = 2^{-2l_{n_{k+1}}-\nu_k-1}$. Кроме того (см. (28)), справедлива и оценка из условия 3. Проверим выполнение условия 2. Для этого фиксируем некоторое $i \in [n_k + 1, n_{k+1}] \cap \mathbb{Z}$ и рассмотрим $S_{U_k}(X_{\Delta_i}, (0, 0))$. Заметим, что

$$\begin{aligned} U_k &= V(i, k) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=n_k+1}^{i-1} (V(j, k) \setminus V(j+1, k)) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=i+1}^{n_{k+1}} (V(j, k) \setminus V(j-1, k)) \right) \\ &= \bigsqcup_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} V'(j, k) \end{aligned} \quad (32)$$

и, следовательно,

$$S_{U_k}(X_{\Delta_i}, (0, 0)) = \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} S_{V'(j, k)}(X_{\Delta_i}, (0, 0)). \quad (33)$$

Ниже будут использованы следующие простые факты из теории одномерных рядов Фурье. Прежде всего, если $I_n = [2^{-n-1}, 2^{-n}]$, то

$$\begin{aligned} S_{2^n}(X_{I_n}, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \frac{\sin(2^n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{1}{2} + 2^{-n-2} \right) \cdot 2^{-n-1} \cdot 2^n \geq \frac{\sin \frac{1}{2}}{2\pi} = C_0 > 0. \end{aligned} \quad (34)$$

В то же время, при $k > n$ по второй теореме о среднем имеем

$$|S_{2^k}(X_{I_n}, 0)| \leq \frac{C}{2^{-n-1}} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{C}{2^{k-n}}. \quad (35)$$

Кроме того, из очевидных соображений при $1 \leq k < n$ выполняется неравенство

$$|S_{2^k}(X_{I_n}, 0)| \leq C \frac{2^k}{2^n} = \frac{C}{2^{n-k}}, \quad (36)$$

и поскольку вариация $V_T(X_{I_n}) = 2$ при любом n , то

$$|S_r(X_{I_n}, 0)| \leq C \quad (37)$$

при всех r .

Используя оценку (34), имеем

$$\begin{aligned} S_{V'(i,k)}(X_{\Delta_i}, (0, 0)) \\ = S_{2^{l_{n_{k+1}} + \nu_k - l_i}}(X_{I_{l_{n_{k+1}} + \nu_k - l_i}}, 0) \cdot S_{2^{l_{n_{k+1}} + \nu_k + l_i}}(X_{I_{l_{n_{k+1}} + \nu_k + l_i}}, 0) \geq C_0^2. \end{aligned} \quad (38)$$

При $n_k + 1 \leq j < i$ согласно (31), (32), (36) и (37) имеем

$$\begin{aligned} & |S_{V'(j,k)}(X_{\Delta_i}, (0, 0))| \\ &= |(S_{2^{l_{n_{k+1}} + \nu_k - l_j}}(X_{I_{l_{n_{k+1}} + \nu_k - l_j}}, 0) - S_{2^{l_{n_{k+1}} + \nu_k - l_{j+1}}}(X_{I_{l_{n_{k+1}} + \nu_k - l_{j+1}}}, 0)) \\ &\quad \times S_{2^{l_{n_{k+1}} + \nu_k + l_j}}(X_{I_{l_{n_{k+1}} + \nu_k + l_j}}, 0)| \\ &\leq \frac{C}{2^{l_i - l_j}} \leq \frac{C}{2^{(i-j)s_0}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Совершенно аналогично при $i < j \leq n_{k+1}$ имеем (см. (31), (32), (35) и (37))

$$|S_{V'(j,k)}(X_{\Delta_i}, (0, 0))| \leq \frac{C}{2^{(j-i)s_0}}. \quad (40)$$

Тогда (см. (33) и (38)–(40))

$$S_{U_k}(X_{\Delta_i}, (0, 0)) \geq C_0^2 - \frac{4C}{2^{s_0}}.$$

Подобрав достаточно большое s_0 , будем иметь

$$S_{U_k}(X_{\Delta_i}, (0, 0)) \geq \frac{1}{2}C_0^2$$

при $i = n_k + 1, \dots, n_{k+1}$. Отсюда, учитывая выбор чисел n_k , получим, что

$$\begin{aligned} S_{U_k}(f_k, (0, 0)) &= \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i S_{U_k}(X_{\Delta_i}, (0, 0)) \geq \frac{C_0^2}{2} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i \\ &> \frac{C_0^2}{2} k \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8\pi} \right)^2 k > \frac{k}{10000}. \end{aligned}$$

Таким образом, требуемая последовательность функций и множеств построена. Отметим, что построение проводилось таким образом, что множества $\{\Delta_i\}_{i=1}^\infty$ удовлетворяют условиям, наложенным в лемме 2. Поэтому можно определить функцию

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_{\Delta_i}(x, y) \in \Lambda BV(T^2).$$

Наконец, учитывая свойства 2–5 функций $f_k(x, y)$ и множеств U_k , имеем для любого k

$$\begin{aligned} S_{U_k}(f, (0, 0)) &= S_{U_k}\left(\sum_{j=1}^{k-1} f_j, (0, 0)\right) + S_{U_k}(f_k, (0, 0)) + S_{U_k}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j, (0, 0)\right) \\ &> S_{U_k}\left(\sum_{j=1}^{k-1} f_j, (0, 0)\right) + S_{U_k}(f_k, (0, 0)) \geq \frac{k}{10000} - 1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и вытекает справедливость теоремы 2.

Список литературы

1. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of bounded generalized variation // *Studia Math.* 1972. V. 44. №1. P. 107–117.
2. *Арутюнян Ф. Г.* Представление функций кратными рядами // Докл. АН Арм.ССР. 1977. Т. 64. №2. С. 72–76.
3. *Арутюнян Ф. Г.* Представление измеримых функций многих переменных кратными тригонометрическими рядами // Матем. сб. 1985. Т. 126. №2. С. 267–285.
4. *Дьяченко М. И.* u -сходимость кратных рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. №2. С. 128–142.
5. *Дьяченко М. И.* Равномерная сходимость двойных рядов Фурье для классов функций с анизотропной гладкостью // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №6. С. 937–943.
6. *Саакян А. А.* О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // Изв. АН Арм.ССР. Сер. матем. 1986. Т. 21. №6. С. 517–527.
7. *Саблин А. И.* Λ -вариация и ряды Фурье // Изв. вузов. Сер. матем. 1987. №10. С. 66–68.
8. *Chandrasekharan K., Minaksisundaram S.* Some results on double Fourier series // *Duke Math. J.* 1947. V. 14. №3. P. 731–753.
9. *Голубов Б. И.* О сходимости сферических средних Рисса кратных рядов и интегралов Фурье от функций ограниченной обобщенной вариации // Матем. сб. 1972. Т. 89. №4. С. 630–653.
10. *Дьяченко М. И.* Некоторые проблемы теории кратных рядов Фурье // УМН. 1992. Т. 47. №5. С. 97–162.
11. *Dyachenko M. I.* Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series // *Anal. Math.* 1995. V. 21. №1. P. 3–21.
12. *Дьяченко М. И.* Сферические частичные суммы двойных рядов Фурье функций с ограниченной обобщенной вариацией // Матем. сб. 1997. Т. 188. №1. С. 29–58.
13. *Алимов Ш. А., Ильин В. А.* Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов. I // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. №4. С. 670–710.
14. *Теляков В. Н.* О поведении частичных сумм по гиперболическим крестам рядов Фурье периодических функций многих переменных // Труды МИАН. 1990. Т. 192. С. 197–206.
15. *Теляковский С. А.* Равномерная ограниченность некоторых тригонометрических полиномов многих переменных // Матем. заметки. 1987. Т. 42. №1. С. 33–39.
16. *Теляковский С. А., Теляков В. Н.* О сходимости рядов Фурье функций многих переменных ограниченной вариации // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №4. С. 583–595.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
28.10.1998