Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Нгуен Мань Хунг, Асимптотика решений первой краевой задачи для сильно гиперболических систем вблизи конической точки границы области, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 7, 103–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:05:16

УДК 517.956

Нгуен Мань Хунг

**Асимптотика решений первой краевой
задачи для сильно гиперболических систем
вблизи конической точки границы области**

В работе устанавливается теорема существования и единственности обобщенного решения первой начально-краевой задачи для сильно гиперболических систем в ограниченных областях. Рассматривается вопрос об оценках в пространствах Соболева производных по временной переменной обобщенного решения. Доказывается, что гладкость обобщенных решений по временной переменной не зависит от структуры границы области, а зависит от коэффициентов и правой части. Получены также теоремы о гладкости обобщенного решения и его асимптотике вблизи конической точки границы области.

Библиография: 14 названий.

К настоящему моменту теория эллиптических краевых задач находится в завершенном состоянии. Это относится к задачам как в гладких областях, так и в областях, граница которых имеет особенности. В случае цилиндрической области с гладкой границей принципиальные результаты о существовании и единственности гладкого решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения установлены в работах Х. О. Крейсс [1], Р. Сакамото [2]. Значительно меньше результатов имеется в случае, когда область не является гладкой. Отметим работы [3]–[5]. В работах [3], [5] изучалась задача с наклонной производной для волнового уравнения в области типа двугранного угла. В работе [4] Б. А. Пламеневский изучал задачу Дирихле для волнового уравнения в соболевских пространствах с весовой нормой.

Настоящая работа посвящена специальному классу гиперболических систем – “сильно гиперболическим системам”. Это понятие введено О. А. Ладыженской. В работе [6] О. А. Ладыженская доказала существование и единственность обобщенного решения первой краевой задачи для таких систем без каких-либо ограничений на границу области. В монографии [7] рассмотрены основные краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка.

Здесь будут рассматриваться сильно гиперболические системы, имеющие порядок $2m$ по пространственным переменным в области $\Omega \times [0, T]$, где $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $T < \infty$. Предполагается, что граница $\partial\Omega$ области Ω – гладкая поверхность всюду, кроме конечного числа точек, в окрестности каждой из которых она имеет коническую структуру. Такие задачи изучались в работах [8], [9] для уравнений второго порядка, где был найден главный член асимптотического представления решения. Методы работ [7]–[9] здесь будут существенно использованы.

Введем необходимые обозначения: Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_{a,b} = \Omega \times [a,b]$, $\Gamma_{a,b} = \partial\Omega \times [a,b]$, $\Omega_{0,b} = \Omega_b$, $\Gamma_{0,b} = \Gamma_b$.

Будут использованы следующие функциональные пространства.

$H^l(\Omega)$ – пространство комплекснозначных вектор-функций $u(x) = (u_1(x), \dots, u_s(x))$, имеющих в Ω обобщенные производные до порядка l включительно, такие, что

$$\|u\|_{H^l(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^s |D^\alpha u_i|^2 dx < \infty,$$

где $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $dx = dx_1 \dots dx_n$.

$\mathring{H}^l(\Omega)$ – подпространство $H^l(\Omega)$, плотным множеством в котором являются функции из $\mathring{C}^\infty(\Omega)$.

Всюду в дальнейшем функции – это комплекснозначные вектор-функции.

$H_\beta^l(\Omega)$ – пространство функций с нормой:

$$\|u\|_{H_\beta^l(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^s r^{2(\beta-l+|\alpha|)} |D^\alpha u_i|^2 dx \right]^{1/2},$$

где $r = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$.

$H^{l,k}(\Omega_{a,b})$ – пространство функций $u(x, t)$ таких, что $D^\alpha u_i \in L_2(\Omega_{a,b})$, $|\alpha| \leq l$, $\frac{\partial^j u_i}{\partial t^j} \in L_2(\Omega_{a,b})$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i \leq s$, где

$$\|u\|_{H^{l,k}(\Omega_{a,b})}^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega_{a,b}} |D^\alpha u|^2 dx dt + \sum_{1 \leq j \leq k} \int_{\Omega_{a,b}} |u_{tj}|^2 dx dt,$$

$$|D^\alpha u|^2 = \sum_{i=1}^s |D^\alpha u_i|^2, u_{tj} = \frac{\partial^j u}{\partial t^j}.$$

$\mathring{H}^{l,k}(\Omega_{a,b})$ – подпространство $H^{l,k}(\Omega_{a,b})$, плотным множеством в котором являются гладкие функции, равные нулю вблизи $\Gamma_{a,b}$.

$H^l(\Omega_{a,b})$ – пространство функций, снабженное нормой

$$\|u\|_{H^l(\Omega_{a,b})} = \left[\sum_{|\alpha|+j \leq l} \int_{\Omega_{a,b}} r^{2(|\alpha|+j-l)} |D^\alpha u_{tj}|^2 dx dt \right]^{1/2}.$$

$H_\beta^{l,k}(\Omega_{a,b})$ – пространство функций, в котором норма определена так:

$$\|u\|_{H_\beta^{l,k}(\Omega_{a,b})} = \left[\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega_{a,b}} r^{2(\beta+|\alpha|-l)} |D^\alpha u|^2 dx dt + \sum_{j \leq k} \int_{\Omega_{a,b}} |u_{tj}|^2 dx dt \right]^{1/2}.$$

Рассмотрим матричный дифференциальный оператор

$$L(x, t; D) = \sum_{|p|, |q|=1}^m D^p a_{pq}(x, t) D^q + \sum_{|p|=1}^m a_p(x, t) D^p + a(x, t),$$

где a_{pq}, a_p, a – ограниченные матрицы $s \times s$, причем $a_{pq} = (-1)^{|p|+|q|} a_{qp}^*$. Предполагается, что

$$\sum_{|p|=|q|=m} a_{pq}(x, t) \xi^p \xi^q \bar{\zeta} > 0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_T, \quad (0.1)$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\zeta \in \mathbb{C}^s \setminus \{0\}$.

Первая краевая задача для сильно гиперболических систем состоит в нахождении решения уравнения

$$(-1)^{m-1} L(x, t; D)u - u_{tt} = f, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (0.2)$$

такого, что

$$u = u_t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad x \in \Omega \quad (0.3)$$

и

$$D_\nu^j u|_{\Gamma_T} = 0, \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (0.4)$$

где ν – направление внешней нормали к Ω .

В качестве решения задачи (0.2)–(0.4) понимается обобщенное решение. Обобщенным решением задачи (0.2)–(0.4) называется вектор-функция $u(x, t) \in \mathring{H}^{m,2}(\Omega_T)$ такая, что $u_t \in \mathring{H}^{m,0}(\Omega_T)$, $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ и

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t_1, t_2}} (-1)^{m-1} \left[\sum_{|p|, |q|=1}^m (-1)^{|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p \eta} + \sum_{|p|=1}^m a_p D^p u \bar{\eta} + a u \bar{\eta} \right] dx dt \\ - \int_{\Omega_{t_1, t_2}} u_{tt} \bar{\eta} dx dt = \int_{\Omega_{t_1, t_2}} f \bar{\eta} dx dt, \end{aligned} \quad (0.5)$$

каковы бы ни были t_1, t_2 ($0 \leq t_1 < t_2 \leq T$) и $\eta(x, t) \in \mathring{H}^{m,0}(\Omega_{t_1, t_2})$.

Обозначим через $B(u, v)$ билинейную форму:

$$B(u, v) = \sum_{|p|, |q|=1}^m (-1)^{|p|} \int_{\Omega} a_{pq} D^q u \overline{D^p v} dx.$$

Если выполнено (0.1) и a_{pq} при $|p| = |q| = m$ непрерывны в $\bar{\Omega}_T$, то имеет место хорошо известное неравенство Гординга [10]:

$$(-1)^m B(u, u) \geq \mu_0 \|u\|_{H^m(\Omega)}^2 - \lambda_0 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (0.6)$$

где $\mu_0 = \text{const} > 0, \lambda_0 = \text{const}$.

В дальнейшем будет существенно использоваться следующая лемма.

ЛЕММА 1. Если $u(x, t)$ – обобщенное решение задачи (0.2)–(0.4), $f(x, t) \in L_2(\Omega_T)$, то почти при всех $t \in [0, T]$ функция $u(x, t)$ является обобщенным решением из $\mathring{H}^m(\Omega)$ эллиптической системы

$$(-1)^{m-1} Lu = F(x, t),$$

где $F = u_{tt} + f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\chi_k(x) \in \mathring{C}^\infty(\Omega), k = 1, 2, \dots\}$ – всюду плотное в $\mathring{H}^m(\Omega)$ множество. Рассмотрим функцию $\theta(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ такую, что $\theta(\tau) = 0$ при $|\tau| > 1/2$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\tau) d\tau = 1.$$

Положим в (0.5)

$$\eta = h^{-1} \chi_k(x) \theta\left(\frac{|t - t'|}{h}\right),$$

где $0 < t' < T, h < \min(t', T - t')$. В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} (-1)^{m-1} \left[\sum_{|p|, |q|=1}^m (-1)^{|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p \chi_k} + \sum_{|p|=1}^m a_p D^p u \overline{\chi_k} + a u \overline{\chi_k} \right] \\ \times h^{-1} \theta\left(\frac{|t - t'|}{h}\right) dx dt = \int_{\Omega_T} [u_{tt} \overline{\chi_k} + f \overline{\chi_k}] h^{-1} \theta\left(\frac{|t - t'|}{h}\right) dx dt, \end{aligned}$$

т.е. осреднение функции

$$\begin{aligned} \xi(t) = (-1)^{m-1} \int_{\Omega} \left[\sum_{|p|, |q|=1}^m (-1)^{|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p \chi_k} + \sum_{|p|=1}^m a_p D^p u \overline{\chi_k} + a u \overline{\chi_k} \right] dx \\ - \int_{\Omega} [u_{tt} \overline{\chi_k} + f \overline{\chi_k}] dx, \quad \varepsilon < t < T - \varepsilon, \end{aligned}$$

равно нулю. Отсюда следует, что $\xi(t) = 0$ на $(0, T) \setminus E_k$, где $\text{mes } E_k = 0$, причем E_k зависит от k . Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда $\xi(t) = 0$ на $(0, T) \setminus E$. Из плотности $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathring{H}^m(\Omega)$ следует, что

$$(-1)^{m-1} \int_{\Omega} \left[\sum_{|p|, |q|=1}^m (-1)^{|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p \chi} + \sum_{|p|=1}^m a_p D^p u \overline{\chi} + a u \overline{\chi} \right] dx = \int_{\Omega} [u_{tt} + f] \overline{\chi} dx$$

для любой $\chi(x) \in \mathring{H}^m(\Omega)$ и $t \in (0, T) \setminus E$, т.е.

$$(-1)^{m-1} Lu = F(x, t)$$

по определению обобщенного решения эллиптических систем. Лемма доказана.

§1. Существование и единственность решения первой краевой задачи

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $a_{pq} \in C(\overline{\Omega}_T)$ при $|p| = |q| = m$, $\left| \frac{\partial^2 a_{pq}}{\partial t^2} \right|$, $\left| \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} \right|$, $\left| \frac{\partial a_p}{\partial t} \right|$, $\left| \frac{\partial a}{\partial t} \right|$ ограничены при $1 \leq |p|, |q| \leq m$. Пусть, кроме того, $f \in L_2(\Omega_T)$,

$f_t \in L_2(\Omega_T)$, $f(x, 0) = 0$. Тогда задача (0.2)–(0.4) имеет единственное обобщенное решение и

$$\|u\|_{H^{m,2}(\Omega_T)}^2 \leq C [\|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \|f_t\|_{L_2(\Omega_T)}^2], \quad C = \text{const}. \quad (1.1)$$

Теорема 1.1 будет доказана методом Галеркина. О. А. Ладыженская [7] применяла этот метод при $m = 1$. В работе [6], где она рассматривала случай $m > 1$, был использован другой метод, основанный на применении теории дифференциальных уравнений для функций со значениями в гильбертовом пространстве. Этот метод требует значительно более сильных ограничений на гладкость коэффициентов. Здесь будет показано, что метод Галеркина из [7] хорошо работает и при $m > 1$ (что, впрочем, отмечается в [7]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задача (0.2)–(0.4) имеет два обобщенных решения u_1 и u_2 . Обозначим $u = u_1 - u_2$. Из (0.5) следует при $\eta = u_t$:

$$\begin{aligned} (-1)^m \int_{\Omega_\tau} \left[\sum_{|p|, |q|=1}^m (-1)^{|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p u_t} + \sum_{|p|=1}^m a_p D^p u \overline{u_t} + a u \overline{u_t} \right] dx dt \\ + \int_{\Omega_\tau} u_{tt} \overline{u_t} dx dt = 0, \quad 0 < \tau \leq T. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Сложив равенство (1.2) с его комплексно-сопряженным, находим

$$\begin{aligned} (-1)^m \int_{\Omega_\tau} \sum_{|p|, |q|=0}^m (-1)^{|p|} \frac{\partial}{\partial t} (a_{pq} D^q u \overline{D^p u}) dx dt + \int_{\Omega_\tau} \frac{\partial}{\partial t} (u_t \overline{u_t}) dx dt \\ = \int_{\Omega_\tau} \sum_{|p|, |q|=0}^m (-1)^{m+|p|} \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} D^q u \overline{D^p u} dx dt \\ - (-1)^m 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega_\tau} \left[\sum_{|p|=1}^m a_p D^p u \overline{u_t} + a_0 u \overline{u_t} \right] dx dt, \end{aligned}$$

где $a_{00} = (-1)^m \lambda_0 I$, $a_0 = a - a_{00}$, λ_0 из (0.6), I – единичная матрица. С помощью интегрирования по частям и неравенства (0.6) получим

$$J(\tau) \leq C \int_0^\tau J(t) dt,$$

где

$$J(\tau) = \int_{\Omega} \left[|u_t(x, \tau)|^2 + \sum_{|p| \leq m} |D^p u(x, \tau)|^2 \right] dx.$$

Отсюда и из классического неравенства Гронуолла–Беллмана следует, что $J(\tau) \equiv 0$, т.е. $u_1 = u_2$ в Ω_T .

Существование решения будем доказывать методом Галеркина.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – система функций из $\overset{\circ}{H}^m(\Omega)$, замыкание линейной оболочки которых есть $\overset{\circ}{H}^m(\Omega)$, и эта система ортонормирована в $L_2(\Omega)$. Рассмотрим последовательность $u^N(x, t)$ вида $u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \varphi_k(x)$, где $c_k^N(t)$ таковы, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[u_{tt}^N \overline{\varphi_l} + \sum_{|p|, |q|=0}^m (-1)^{m+|p|} a_{pq} D^q u^N \overline{D^p \varphi_l} \right] dx \\ & + (-1)^m \int_{\Omega} \left(\sum_{|p|=1}^m a_p D^p u^N + a_0 u^N \right) \overline{\varphi_l} dx \\ & = - \int_{\Omega} f \overline{\varphi_l} dx, \quad l = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$c_k^N(0) = 0, \quad \frac{d}{dt} c_k^N(0) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь и далее обозначаем $B_0(w, w) = B(w, w) + (-1)^m \lambda_0 \|w\|_{L_2(\Omega)}^2$. Умножим (1.3) на $\frac{dc_l^N(t)}{dt}$ и просуммируем по l от 0 до N . Проинтегрируем полученное равенство от 0 до t , после этого сложим его с комплексно-сопряженным. В результате получим

$$\begin{aligned} & (-1)^m B_0(u^N, u^N)(t) + \int_{\Omega} |u_t^N(x, t)|^2 dx \\ & + (-1)^m 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega_t} \left[\sum_{|p|=1}^m a_p D^p u^N \overline{u_t^N} + a_0 u^N \overline{u_t^N} \right] dx dt \\ & - \sum_{|p|, |q|=0}^m (-1)^{|p|+m} \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} D^q u^N \overline{D^p u^N} dx dt \\ & = -2 \operatorname{Re} \int_{\Omega_t} f \overline{u_t^N} dx dt. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Положим

$$J_N(t) = \|u^N(x, t)\|_{H^m(\Omega)}^2 + \|u_t^N(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Из (1.5) и (0.6) имеем

$$J_N(t) \leq C_1 \left[\int_0^t J_N(\tau) d\tau + \|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right], \quad C_1 = \operatorname{const}.$$

Отсюда с помощью неравенства Гронуолла–Беллмана получаем

$$\|u^N\|_{H^m(\Omega_T)}^2 + \|u_t^N\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq C_2 \|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2, \quad (1.6)$$

где C_2 – константа, не зависящая от N .

Продифференцируем каждое из соотношений (1.3) по t , потом умножим на $\frac{d^2 c_l^N}{dt^2}$ и просуммируем все полученные равенства по l от 1 до N . В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{ttt}^N \overline{u_{tt}^N} dx + \sum_{|p|, |q|=0}^m \int_{\Omega} (-1)^{m+|p|} \frac{\partial}{\partial t} (a_{pq} D^q u^N) \overline{D^p u_{tt}^N} dx \\ + (-1)^m \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{|p|=1}^m a_p D^p u^N + a_0 u^N \right) \overline{u_{tt}^N} dx = - \int_{\Omega} f_t \overline{u_{tt}^N} dx. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (u_{tt}^N \overline{u_{tt}^N}) dx dt + 2 \operatorname{Re} \sum_{|p|, |q|=0}^m \int_{\Omega_t} (-1)^{m+|p|} \frac{\partial}{\partial t} (a_{pq} D^q u^N) \overline{D^p u_{tt}^N} dx dt \\ + 2 \operatorname{Re} (-1)^m \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{|p|=1}^m a_p D^p u^N + a_0 u^N \right) \overline{u_{tt}^N} dx dt = -2 \operatorname{Re} \int_{\Omega_t} f_t \overline{u_{tt}^N} dx dt. \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как и при выводе (1.6), можно доказать

$$\|u_{tt}^N\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq C_3 \|f_t\|_{L_2(\Omega_T)}^2, \quad (1.7)$$

где C_3 — константа, не зависящая от N .

Из (1.6) и (1.7) получим

$$\|u^N\|_{H^{m,2}(\Omega_T)}^2 \leq C [\|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \|f_t\|_{L_2(\Omega_T)}^2], \quad (1.8)$$

где C — константа, не зависящая от N . Следовательно, из последовательности $\{u^N\}_1^\infty$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся слабо в $H^{m,2}(\Omega_T)$ к некоторому элементу u . Нетрудно показать, что u удовлетворяет тождеству (0.5). Теорема доказана.

§ 2. Гладкость обобщенного решения по временной переменной

В этом параграфе покажем, что обобщенное решение является гладкой функцией переменной t , если коэффициенты системы и ее правая часть гладкие. Никаких условий на Ω при этом не требуется.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $a_{pq} \in C(\overline{\Omega}_T)$, $|p| = |q| = m$, u

- (i) $f_{t^k} \in L_2(\Omega_T)$, $k \leq h+1$,
- (ii) $f_{t^k}(x, 0) = 0$, $k \leq h$,
- (iii) $\left| \frac{\partial^k a_{pq}}{\partial t^k} \right|, \left| \frac{\partial^{k-1} a_p}{\partial t^{k-1}} \right|, \left| \frac{\partial^{k-1} a}{\partial t^{k-1}} \right| < \mu$,

$1 \leq |p|, |q| \leq m$, $k \leq h+2$, $\mu = \text{const}$, $(x, t) \in \overline{\Omega}_T$. Тогда обобщенное решение задачи (0.2)–(0.4) имеет производные по t до порядка h включительно из $H^{m,2}(\Omega_T)$ и справедливо неравенство

$$\|u_{t^h}\|_{H^{m,2}(\Omega_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{h+1} \|f_{t^k}\|_{L_2(\Omega_T)}^2, \quad C = \text{const}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство

$$\|u_{t^h}^N\|_{H^{m,2}(\Omega_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{h+1} \|f_{t^k}\|_{L_2(\Omega_T)}^2, \quad (2.2)$$

где u^N — приближенное решение из доказательства теоремы 1.1, C — константа, не зависящая от N . Будем применять метод индукции по h . Из (1.8) следует, что (2.2) верно для $h = 0$. Допустим, что (2.2) справедливо при замене h на $h - 1$.

Пусть $j \leq h + 1$. Продифференцируем каждое из соотношений (1.3) j раз по t , затем умножим на $\frac{d^{j+1}c_l^N}{dt^{j+1}}$ и просуммируем все полученные равенства по l от 1 до N . После этого проинтегрируем полученное равенство от 0 до t и сложим его с комплексно-сопряженным. В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (u_{t^{j+1}}^N \overline{u_{t^{j+1}}^N}) dx dt \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{|p|, |q|=0}^m \int_{\Omega_t} (-1)^{m+|p|} \frac{\partial^j}{\partial t^j} (a_{pq} D^q u^N) \overline{D^p u_{t^{j+1}}^N} dx dt \\ & + 2 \operatorname{Re} (-1)^m \int_{\Omega_t} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left(\sum_{|p|=1}^m a_p D^p u^N + a_0 u^N \right) \overline{u_{t^{j+1}}^N} dx dt \\ & = -2 \operatorname{Re} \int_{\Omega_t} f_{t^j} \overline{u_{t^{j+1}}^N} dx dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Так как $a_{pq} = (-1)^{|p|+|q|} a_{qp}^*$, то

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{|p|, |q|=0}^m (-1)^{|p|} \frac{\partial^j}{\partial t^j} (a_{pq} D^q u^N) \overline{D^p u_{t^{j+1}}^N} \\ & = \sum_{|p|, |q|=0}^m (-1)^{|p|} \frac{\partial}{\partial t} (a_{pq} D^q u_{t^j}^N \overline{D^p u_{t^j}^N}) - \sum_{|p|, |q|=0}^m (-1)^{|p|} \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} D^q u_{t^j}^N \overline{D^p u_{t^j}^N} \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{|p|, |q|=0}^m (-1)^{|p|} \sum_{s=1}^j \binom{j}{s} \frac{\partial^s a_{pq}}{\partial t^s} D^q u_{t^{j-s}}^N \overline{D^p u_{t^{j+1}}^N}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.3), (2.4) с помощью интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} & \|u_{t^{j+1}}^N(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + (-1)^m B_0(u_{t^j}^N, u_{t^j}^N)(t) \\ & = \sum_{|p|, |q|=0}^m (-1)^{m+|p|} \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} D^q u_{t^j}^N \overline{D^p u_{t^j}^N} dx dt \\ & - 2 \operatorname{Re} \sum_{|p|, |q|=0}^m \sum_{s=1}^j (-1)^{m+|p|} \binom{j}{s} \int_{\Omega_t} \frac{\partial^s a_{pq}}{\partial t^s} D^q u_{t^{j-s}}^N \overline{D^p u_{t^{j+1}}^N} dx dt \\ & - 2 \operatorname{Re} (-1)^m \int_{\Omega_t} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left(\sum_{|p|=1}^m a_p D^p u^N + a_0 u^N \right) \overline{u_{t^{j+1}}^N} dx dt \\ & - 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega_t} f_{t^j} \overline{u_{t^{j+1}}^N} dx dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \frac{\partial^s a_{pq}}{\partial t^s} D^q u_{t^{j-s}}^N \overline{D^p u_{t^{j+1}}^N} dx dt &= \int_{\Omega} \frac{\partial^s a_{pq}}{\partial t^s} D^q u_{t^{j-s}}^N \overline{D^p u_{t^j}^N} dx \\ &- \int_{\Omega_t} \frac{\partial^{s+1} a_{pq}}{\partial t^{s+1}} D^q u_{t^{j-s}}^N \overline{D^p u_{t^j}^N} dx dt - \int_{\Omega_t} \frac{\partial^s a_{pq}}{\partial t^s} D^q u_{t^{j-s+1}}^N \overline{D^p u_{t^j}^N} dx dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя неравенство Коши и (0.6), а также соотношения (2.5), (2.6), находим

$$\begin{aligned} \|u_{t^{j+1}}^N\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_{t^j}^N\|_{H^m(\Omega)}^2 &\leq C_1 \int_0^t [\|u_{t^j}^N\|_{H^m(\Omega)}^2 + \|u_{t^{j+1}}^N\|_{L_2(\Omega)}^2] dt \\ &+ C_2 \left[\sum_{s=0}^{j-1} \|u_{t^s}^N\|_{H^m(\Omega)}^2 + \sum_{s=0}^{j-1} \|u_{t^s}^N\|_{H^{m,0}(\Omega_T)}^2 + \|f_{t^j}\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $C_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$.

Положим

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t [\|u_{t^{j+1}}^N\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_{t^j}^N\|_{H^m(\Omega)}^2] dt, \\ c_2(t) &= C_2 \left[\sum_{s=0}^{j-1} \|u_{t^s}^N\|_{H^m(\Omega)}^2 + \sum_{s=0}^{j-1} \|u_{t^s}^N\|_{H^{m,0}(\Omega_T)}^2 + \|f_{t^j}\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.7) следует, что

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq C_1 y(t) + c_2(t). \quad (2.8)$$

С помощью [7; гл. III, лемма 1.1] из (2.8) получим

$$y(t) \leq e^{tC_1} \int_0^t c_2(t) dt.$$

При $t = T$ будем иметь

$$\|u_{t^j}^N\|_{H^{m,1}(\Omega_T)}^2 \leq C \left[\sum_{s=0}^{j-1} \|u_{t^s}^N\|_{H^{m,0}(\Omega_T)}^2 + \|f_{t^j}\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right], \quad (2.9)$$

где C — константа, не зависящая от N .

Положив $j = h$ в неравенстве (2.9), получим

$$\|u_{t^h}^N\|_{H^{m,1}(\Omega_T)}^2 \leq C \left[\sum_{s=0}^{h-1} \|u_{t^s}^N\|_{H^{m,0}(\Omega_T)}^2 + \|f_{t^h}\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right].$$

С другой стороны, из (2.9) при $j = h + 1$ следует, что

$$\|u_{t^{h+2}}^N\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq C \left[\sum_{s=0}^h \|u_{t^s}^N\|_{H^{m,0}(\Omega_T)}^2 + \|f_{t^{h+1}}\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right].$$

Следовательно,

$$\|u_{t^h}^N\|_{H^{m,2}(\Omega_T)}^2 \leq C \left[\sum_{s=0}^{h-1} \|u_{t^s}^N\|_{H^{m,0}(\Omega_T)}^2 + \|f_{t^h}\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \|f_{t^{h+1}}\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right], \quad (2.10)$$

где C — константа, не зависящая от N .

Неравенство (2.2) следует из (2.10) и индуктивной гипотезы. Оценка (2.2) позволяет выполнить предельный переход по $N \rightarrow \infty$. Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Гладкость обобщенного решения в областях с конической точкой на границе

В этом и следующем параграфе предполагаем, что коэффициенты оператора L – бесконечно дифференцируемые функции в $\overline{\Omega}_T$. Граница $\partial\Omega$ области Ω предполагается бесконечно гладкой вне начала координат, а в малой окрестности начала координат она является конической поверхностью, т.е. существует такое $\delta > 0$, что $\{x : x \in \Omega, |x| < \delta\} = \{x : x \in K, |x| < \delta\}$, где K – конус в $\mathbb{R}^n$, т.е. $K = \{x : x/|x| \in G\}$, где G – гладкая область на единичной сфере S^{n-1} .

ЛЕММА 3.1. Если $f, f_t \in L_2(K_T)$, $f(x, 0) = 0$ и u – обобщенное решение задачи (0.2)–(0.4) такое, что $u \equiv 0$ при $|x| > R = \text{const}$, то $u \in H_m^{2m,2}(K_T)$ и

$$\|u\|_{H_m^{2m,2}(K_T)}^2 \leq C[\|f\|_{L_2(K_T)}^2 + \|f_t\|_{L_2(K_T)}^2], \quad C = \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем систему (0.2) в виде

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} b_\alpha(x, t) D^\alpha u = F, \quad (3.1)$$

где $u_{tt} + f = F$. Из теоремы 2.1 следует, что $F \in L_2(K_T)$.

Рассмотрим последовательность областей Ω_k ,

$$\Omega_k = \{x : x \in K, 2^{-k} \leq |x| \leq 2^{-k+1}\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из теорем о гладкости решения эллиптических систем внутри области и вблизи гладкого куска границы [11] следует, что

$$\int_{\Omega_2} |D^\alpha u(x, t)|^2 dx \leq C \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3} (|F(x, t)|^2 + |u(x, t)|^2) dx, \quad (3.2)$$

$$|\alpha| \leq 2m, \quad C = \text{const}.$$

Сделаем в (3.1) замену $x = (4/2^{k_1})x'$ при $k_1 > 2$. Затем применим оценку (3.2). В результате получим

$$\int_{\Omega_2} |D_{x'}^\alpha u(x', t)|^2 dx' \leq C_1 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3} \left(|F(x', t)|^2 \left(\frac{4}{2^{k_1}} \right)^{4m} + |u(x', t)|^2 \right) dx',$$

$$C_1 = \text{const}.$$

Возвращаясь к переменным $x_1, \dots, x_n$, находим:

$$\int_{\Omega_{k_1}} |D^\alpha u(x, t)|^2 r^{2(|\alpha| - m)} dx$$

$$\leq C_2 \int_{\Omega_{k_1-1} \cup \Omega_{k_1} \cup \Omega_{k_1+1}} (|F(x, t)|^2 r^{2m} + r^{-2m} |u(x, t)|^2) dx, \quad C_2 = \text{const}.$$

Отсюда получим

$$\int_K |D^\alpha u(x, t)|^2 r^{2(|\alpha|-m)} dx \leq C_2 \int_K (|F(x, t)|^2 r^{2m} + r^{-2m} |u(x, t)|^2) dx. \quad (3.3)$$

Из условий $D_\nu^j u|_{S_T} = 0$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, следует оценка

$$\int_K r^{-2m} |u(x, t)|^2 dx \leq C_3 \int_K |D^m u|^2 dx, \quad C_3 = \text{const}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) имеем:

$$\int_K r^{2(|\alpha|-m)} |D^\alpha u(x, t)|^2 dx \leq C_4 \int_K (|f|^2 + |u_{tt}|^2 + |D^m u|^2) dx, \quad C_4 = \text{const}.$$

Проинтегрировав это неравенство по t от 0 до T , получим

$$\int_{K_T} r^{2(|\alpha|-m)} |D^\alpha u(x, t)|^2 dx dt \leq C_4 \int_{K_T} (|f|^2 + |u_{tt}|^2 + |D^m u|^2) dx dt. \quad (3.5)$$

В силу теоремы 1.1 из (3.5) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть ω – локальная система координат на S^{n-1} . Главную часть оператора L в точке 0 можно записать в виде

$$L_0(0, t; D) = r^{-2m} Q(\omega, t, rD_r, D_\omega), \quad D_r = i \frac{\partial}{\partial r},$$

где Q – линейный оператор с гладкими коэффициентами.

В дальнейшем большое значение будет иметь спектральная задача:

$$Q(\omega, t, \lambda, D_\omega) v(\omega) = 0, \quad \omega \in G, \quad (3.6)$$

$$D_\omega^j v(\omega) = 0, \quad \omega \in \partial G, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (3.7)$$

Известно, что при каждом $t \in [0, T]$ спектр ее дискретный.

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть u – обобщенное решение задачи (0.2)–(0.4), $u \equiv 0$ при $|x| > R = \text{const}$, и пусть $f_{tk} \in L_2(K_T)$ при $k \leq 2m$, $f_{tk}(x, 0) = 0$ при $k \leq 2m-1$. Кроме того, предположим, что полоса

$$m - \frac{n}{2} \leq \text{Im } \lambda \leq 2m - \frac{n}{2}$$

не содержит точек спектра задачи (3.6)–(3.7) ни при каких $t \in [0, T]$. Тогда $u \in H^{2m}(K_T)$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{H^{2m}(K_T)}^2 \leq C \sum_{k \leq 2m} \|f_{tk}\|_{L_2(K_T)}^2, \quad C = \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем следующее неравенство.

$$\|u_{ts}\|_{H_0^{2m,0}(K_T)}^2 \leq C \sum_{k \leq 2m} \|f_{tk}\|_{L_2(K_T)}^2, \quad C = \text{const}, \quad s \leq 2m - 1. \quad (3.8)$$

Из (0.2) следует, что

$$(-1)^{m-1} L_0(0, t; D)u = F(x, t), \quad (3.9)$$

где $F(x, t) = u_{tt} + f + (-1)^{m-1} [L_0(0, t; D) - L(x, t; D)]u$. Из теоремы 1.1 и леммы 3.1 следует, что $F \in H_{m-1}^{0,0}(K_T)$. Так как в полосе $m - n/2 \leq \text{Im } \lambda \leq m + 1 - n/2$ нет точек спектра задачи (3.6)–(3.7) ни при каких $t \in [0, T]$, то из теоремы 3.2 работы [12] и априорной оценки решений эллиптических систем [13] получим, что $u \in H_{m-1}^{2m}(K)$ при почти всех $t \in [0, T]$ и

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_{m-1}^{2m}(K)}^2 &\leq C [\|F\|_{H_{m-1}^{0,0}(K)}^2 + \|u\|_{H_m^{2m}(K)}^2] \\ &\leq C [\|f\|_{L_2(K)}^2 + \|u_{tt}\|_{L_2(K)}^2 + \|u\|_{H_m^{2m}(K)}^2], \end{aligned}$$

где $C = \text{const}$. Повторение проведенных выше рассуждений приводит к неравенству

$$\|u\|_{H_0^{2m}(K)}^2 \leq C [\|f\|_{L_2(K)}^2 + \|u_{tt}\|_{L_2(K)}^2 + \|u\|_{H_m^{2m}(K)}^2]$$

и, более того,

$$\|u\|_{H_0^{2m,0}(K_T)}^2 \leq C [\|f\|_{L_2(K_T)}^2 + \|u\|_{H_m^{2m,2}(K_T)}^2].$$

Отсюда и из леммы 3.1 следует, что

$$\|u\|_{H_0^{2m,0}(K_T)}^2 \leq C [\|f\|_{L_2(K_T)}^2 + \|f_t\|_{L_2(K_T)}^2],$$

т.е. (3.8) доказано при $s = 0$.

Пусть (3.8) верно для $s - 1$. Продифференцируем систему (0.2) s раз по t и положим $v = u_{ts}$. В результате получим

$$(-1)^{m-1} Lv = v_{tt} + f_{ts} + \sum_{k=1}^s \binom{s}{k} L_k u_{ts-k}, \quad (3.10)$$

где

$$L_k = \sum_{|p|, |q|=1}^m D^p \frac{\partial^k a_{pq}}{\partial t^k} D^q + \sum_{|p|=1}^m \frac{\partial^k a_p}{\partial t^k} D^p + \frac{\partial^k a}{\partial t^k}.$$

Из предположения индукции, рассуждая так же, как в случае $s = 0$, получим (3.8).

Так как

$$\|u\|_{H^{2m}(K_T)}^2 \leq \sum_{s \leq 2m-1} \|u_{ts}\|_{H_0^{2m,0}(K_T)}^2 + \|u_{t^{2m}}\|_{L_2(K_T)}^2,$$

то из (3.8) и теоремы 2.1 следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть u – обобщенное решение задачи (0.2)–(0.4) такое, что $u \equiv 0$ при $|x| > R = \text{const}$. Пусть, кроме того, $u \in H_{\beta-1}^{2m+l-1,0}(K_T)$, $u_{tt} \in H_{\beta}^{l,0}(K_T)$, $f \in H_{\beta}^{l,0}(K_T)$. Тогда $u \in H_{\beta}^{2m+l,0}(K_T)$ и

$$\|u\|_{H_{\beta}^{2m+l,0}(K_T)}^2 \leq C [\|f\|_{H_{\beta}^{l,0}(K_T)}^2 + \|u_{tt}\|_{H_{\beta}^{l,0}(K_T)}^2 + \|u\|_{H_{\beta-1}^{2m+l-1,2}(K_T)}^2],$$

где $C = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [11], что

$$\int_{\Omega_2} |D^{2m+l} u(x, t)|^2 dx \leq C \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3} \left(\sum_{|\alpha| \leq l} |D^{\alpha} F(x, t)|^2 + |u(x, t)|^2 \right) dx, \quad (3.11)$$

где $F = u_{tt} + f$, $C = \text{const}$. Из этого неравенства, рассуждая, как при доказательстве (3.3), получаем

$$\begin{aligned} & \int_K r^{2\beta} |D^{2m+l} u(x, t)|^2 dx \\ & \leq C \int_K \left(\sum_{|\alpha| \leq l} r^{2(\beta+|\alpha|-l)} |D^{\alpha} F(x, t)|^2 + r^{2(\beta-2m-l)} |u(x, t)|^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Интегрируя это равенство по t от 0 до T , находим:

$$\begin{aligned} & \int_{K_T} r^{2\beta} |D^{2m+l} u(x, t)|^2 dx dt \\ & \leq C \left[\|F\|_{H_{\beta}^{l,0}(K_T)}^2 + \int_{K_T} r^{2(\beta-2m-l)} |u(x, t)|^2 dx dt \right] \\ & \leq C [\|F\|_{H_{\beta}^{l,0}(K_T)}^2 + \|u\|_{H_{\beta-1}^{2m+l-1,0}(K_T)}^2]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Имеем:

$$\|u\|_{H_{\beta}^{2m+l,0}(K_T)}^2 = \int_{K_T} r^{2\beta} |D^{2m+l} u(x, t)|^2 dx dt + \|u\|_{H_{\beta-1}^{2m+l-1,0}(K_T)}^2.$$

Отсюда и из (3.12) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $f_{tk} \in H^l(K_T)$ при $k \leq 2m$, $f_{tk}(x, 0) = 0$ при $k \leq l + 2m - 1$, и пусть u – обобщенное решение задачи (0.2)–(0.4) такое, что $u \equiv 0$ при $|x| > R = \text{const}$. Кроме того, предположим, что в полосе

$$m - \frac{n}{2} \leq \text{Im } \lambda \leq 2m + l - \frac{n}{2}$$

нет точек спектра задачи (3.6)–(3.7) ни при каких $t \in [0, T]$. Тогда $u \in H^{2m+l}(K_T)$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{H^{2m+l}(K_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{2m} \|f_{tk}\|_{H^l(K_T)}^2, \quad C = \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема будет доказываться индукцией по l . При $l = 0$ утверждение теоремы следует из теоремы 3.1. Пусть утверждение теоремы верно при замене l на $l - 1$.

Докажем неравенство:

$$\|u_{ts}\|_{H^{2m+l-s}(K_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} \|f_{tk}\|_{H^l(K_T)}^2 \quad (3.13)$$

при $s = l, l - 1, \dots, 0$, где $C = \text{const}$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 3.1, можно получить неравенство (3.13) для $s = l$. Допустим, что (3.13) верно при $s = l, l - 1, \dots, j + 1$.

Положим $v = u_{tj}$. Из (3.10) следует

$$(-1)^{m-1}Lv = F_j, \quad (3.14)$$

где

$$F_j = v_{tt} + f_{tj} + \sum_{k=1}^j \binom{j}{k} L_k u_{tj-k}.$$

Из индуктивной гипотезы по l получим

$$\sum_{k=1}^j \binom{j}{k} L_k u_{tj-k} \in H^{l-j}(K_T).$$

С другой стороны, с помощью предположения индукции по s имеем $v_{tt} \in H^{l-j}(K_T)$. Следовательно, $F_j \in H^{l-j}(K_T)$. Так как $H_{-1}^{l-j-1,0}(K_T) \in H^{l-j}(K_T)$, то $F_j \in H_{-1}^{l-j-1,0}(K_T)$.

Повторяя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3.1, получаем: $v \in H_{-1}^{2m+l-j-1,0}(K_T)$. Отсюда и из леммы 3.2 имеем $u_{tj} = v \in H_0^{2m+l-j,0}(K_T)$ и

$$\|u_{tj}\|_{H_0^{2m+l-j,0}(K_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} \|f_{tk}\|_{H^l(K_T)}^2, \quad C = \text{const}. \quad (3.15)$$

Тогда

$$\|u_{tj}\|_{H^{2m+l-j}(K_T)}^2 = \|u_{tj+1}\|_{H^{2m+l-j-1}(K_T)}^2 + \|u_{tj}\|_{H_0^{2m+l-j,0}(K_T)}^2. \quad (3.16)$$

Из (3.13) при $s = j + 1$ получим

$$\|u_{tj+1}\|_{H^{2m+l-j-1}(K_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} \|f_{tk}\|_{H^l(K_T)}^2, \quad C = \text{const}.$$

Отсюда и из (3.15), (3.16) следует, что

$$\|u_{tj}\|_{H^{2m+l-j}(K_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} \|f_{tk}\|_{H^l(K_T)}^2, \quad C = \text{const}.$$

При $j = 0$ получим утверждение теоремы.

Переходим теперь к теореме о гладкости обобщенного решения в областях с конической точкой на границе.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть u – обобщенное решение задачи (0.2)–(0.4), и пусть $f_{tk} \in H^l(\Omega_T)$ при $k \leq 2m$, $f_{tk}(x, 0) = 0$ при $k \leq l + 2m - 1$. Кроме того, предположим, что полоса

$$m - \frac{n}{2} \leq \operatorname{Im} \lambda \leq l + 2m - \frac{n}{2}$$

не содержит точек спектра задачи (3.6)–(3.7) ни при каких $t \in [0, T]$. Тогда $u \in H^{2m+l}(\Omega_T)$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{H^{2m+l}(\Omega_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} \|f_{tk}\|_{H^l(\Omega_T)}^2, \quad C = \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точку 0 окружим окрестностью U_0 столь малого диаметра, что пересечение Ω и U_0 совпадает с K .

Рассмотрим функцию $\varphi_0 \in \mathring{C}^\infty(U_0)$, равную единице в некоторой окрестности нуля. Она удовлетворяет системе

$$(-1)^{m-1} L(x, t; D) u_0 - (u_0)_{tt} = \varphi_0 f + L^*(x, t; D) u_0, \quad u_0 = \varphi_0 u,$$

где L^* – линейный дифференциальный оператор порядка меньше чем $2m$. Коэффициенты этого оператора зависят от выбора функции φ_0 и обращаются в нуль вне U_0 . Отсюда и из рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 3.2, получим

$$\|\varphi_0 u\|_{H^{2m+l}(\Omega_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} \|f_{tk}\|_{H^l(\Omega_T)}^2. \quad (3.17)$$

Функция $\varphi_1 u = (1 - \varphi_0)u$ обращается в нуль в окрестности конической точки. К $\varphi_1 u$ можно применить теоремы о дифференцируемости решения эллиптической задачи в гладкой области, на основании которых заключаем, что $\varphi_1 u \in H^{2m+l}(\Omega)$ и, тем более, $\varphi_1 u \in H^{2m+l}(\Omega_T)$, при этом

$$\|\varphi_1 u\|_{H^{2m+l}(\Omega_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} \|f_{tk}\|_{H^l(\Omega_T)}^2. \quad (3.18)$$

Представим теперь функцию $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \varphi_0 u(x, t) + \varphi_1 u(x, t).$$

Отсюда и из (3.17), (3.18) получим

$$\|u\|_{H^{2m+l}(\Omega_T)}^2 \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} \|f_{tk}\|_{H^l(\Omega_T)}^2, \quad C = \text{const}.$$

Теорема доказана.

§ 4. Асимптотика решения в окрестности конической точки

В этом параграфе установим асимптотические формулы для обобщенного решения задачи (0.2)–(0.4) в области Ω , определенной в § 3.

Сначала рассмотрим в K задачу Дирихле для системы:

$$L_0 u = r^{-i\lambda_0(t)-2m} \sum_{s=0}^M \ln^s r f_s(\omega, t). \quad (4.1)$$

Справедлива следующая лемма [13].

ЛЕММА 4.1. Пусть $f_s(\omega, t)$, $s = 0, \dots, M$, – бесконечно дифференцируемые по ω функции. Тогда существует решение системы (4.1) вида

$$u(x, t) = r^{-i\lambda_0} \sum_{s=0}^{M+\nu} \ln^s r \tilde{f}_s(\omega, t),$$

где $\tilde{f}_s$, $s = 0, \dots, M + \nu$, – бесконечно дифференцируемые по ω функции, $\nu = 1$, если λ_0 – простое собственное значение задачи (3.6)–(3.7), и $\nu = 0$, если λ_0 не является собственным значением задачи (3.6)–(3.7).

ЛЕММА 4.2. Пусть u – решение задачи (0.2)–(0.4) такое, что $u \equiv 0$ при $|x| > R = \text{const}$, и пусть $u_{tk} \in H_{\beta}^{2m+l,0}(K_T)$, $u_{tk+2} \in H_{\beta'}^{l,0}(K_T)$, $f_{tk} \in H_{\beta'}^{l,0}(K_T)$, $k \leq h$, $\beta > \beta'$. Кроме того, предположим, что прямые

$$\text{Im } \lambda = -\beta + 2m + l - \frac{n}{2} \quad \text{и} \quad \text{Im } \lambda = -\beta' + 2m + l - \frac{n}{2}$$

не содержат точек спектра задачи (3.6)–(3.7) ни при каких $t \in [0, T]$, а в полосе

$$-\beta + 2m + l - \frac{n}{2} < \text{Im } \lambda < -\beta' + 2m + l - \frac{n}{2}$$

есть только одно простое собственное значение $\lambda(t)$ задачи (3.6)–(3.7). Тогда справедливо представление

$$u(x, t) = c(t) r^{-i\lambda(t)} \varphi(\omega, t) + u_1(x, t), \quad (4.2)$$

где φ – не зависящая от решения бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов, $c_{tk} \in L_2(0, T)$ и $(u_1)_{tk} \in H_{\beta'}^{2m+l,0}(K_T)$ при $k \leq h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [12; теорема 3.2] следует, что

$$u(x, t) = c(t) r^{-i\lambda(t)} \varphi(\omega, t) + u_1(x, t), \quad (4.3)$$

где $\varphi(\omega, t)$ – собственная функция задачи (3.6)–(3.7), отвечающая собственному значению $\lambda(t)$, $u_1 \in H_{\beta'}^{2m+l}(K)$ и $c(t)$ определяется формулой:

$$c(t) = i \int_K F(x, t) r^{-i\overline{\lambda(t)}+2m-n} \psi(x, t) dx,$$

где $F = u_{tt} + f$, ψ — собственная функция задачи, сопряженной к задаче (3.6)–(3.7), соответствующая собственному значению $\bar{\lambda}(t)$. Так как $\text{Im } \bar{\lambda}(t) > -\beta' - 2m - l + n/2$ и $F \in H_{\beta'}^{l,0}(K_T)$, то $c(t) \in L_2(0, T)$. Лемма доказана при $h = 0$.

Допустим, что утверждение леммы справедливо для $h-1$. Продифференцируем систему (3.9) h раз по t и положим $v = u_{t^h}$. В результате получим

$$(-1)^{m-1} L_0 v = F_{t^h} + (-1)^m \sum_{k=1}^h \binom{h}{k} L_{0t^k} u_{t^{h-k}}, \quad (4.4)$$

$$\text{где } L_{0t^k} = \sum_{|p|=|q|=m} \frac{\partial^k a_{pq}(0, t)}{\partial t^k} D^p D^q.$$

Положим $S_0(\omega, t) = r^{-i\lambda(t)} \varphi_0(\omega, t)$. Так как $\varphi_0(\omega, t) \in C^\infty(\omega, t)$ [14], то из (4.4) находим

$$\sum_{k=1}^h \binom{h}{k} L_{0t^k} u_{t^{h-k}} = \sum_{k=1}^h \binom{h}{k} L_{0t^k} [c(S_0)_{t^{h-k}}] + \sum_{k=1}^h \binom{h}{k} L_{0t^k} (u_1)_{t^{h-k}}.$$

Из этого равенства с помощью индуктивной гипотезы получаем

$$\sum_{k=1}^h \binom{h}{k} L_{0t^k} u_{t^{h-k}} = F_1 - \sum_{k=1}^h \binom{h}{k} c_{t^{h-k}} L_0(S_0)_{t^k}, \quad (4.5)$$

где $F_1 \in H_{\beta'}^{l,0}(K_T)$. Из (4.4) и (4.5) имеем

$$(-1)^{m-1} L_0 v = F_2 - \sum_{k=1}^h \binom{h}{k} c_{t^{h-k}} L_0(S_0)_{t^k}, \quad (4.6)$$

где $F_2 \in H_{\beta'}^{l,0}(K_T)$. Отсюда и из леммы 4.1 находим

$$u_{t^h} = v = \sum_{k=1}^h \binom{h}{k} c_{t^{h-k}} (S_0)_{t^k} + d(t) S_0 + u_2, \quad (4.7)$$

где $d(t) \in L_2(0, T)$, $u_2 \in H_{\beta'}^{l,0}(K_T)$. Из этого равенства следует, что

$$S_{0,1} = u_{t^h} - \sum_{k=2}^h \binom{h}{k} c_{t^{h-k}} (S_0)_{t^k} - (h-1) c_{t^{h-1}} (S_0)_t = c_{t^{h-1}} (S_0)_t + d S_0 + u_2. \quad (4.8)$$

Теперь продифференцируем равенство (4.3) $h-1$ раз по t . В результате получим

$$u_{t^{h-1}} = \sum_{k=0}^{h-1} \binom{h-1}{k} c_{t^{h-k-1}} (S_0)_{t^k} + (u_1)_{t^{h-1}}. \quad (4.9)$$

Перепишем (4.9) в виде

$$S_{0,2} = u_{t^{h-1}} - \sum_{k=1}^{h-1} \binom{h-1}{k} c_{t^{h-k-1}}(S_0)_{t^k} = c_{t^{h-1}}S_0 + (u_1)_{t^{h-1}}. \quad (4.10)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (S_{0,2})_t &= u_{t^h} - \sum_{k=1}^{h-1} \binom{h-1}{k} [c_{t^{h-k}}(S_0)_{t^k} + c_{t^{h-k-1}}(S_0)_{t^{k+1}}] \\ &= u_{t^h} - \sum_{k=2}^h \binom{h}{k} c_{t^{h-k}}(S_0)_{t^k} - (h-1)c_{t^{h-1}}(S_0)_t. \end{aligned}$$

Из этого равенства и (4.9) имеем

$$(S_{0,2})_t = c_{t^{h-1}}(S_0)_t + dS_0 + u_2.$$

Отсюда и из (4.10) следует, что

$$S_0^{-1}S_{0,2} = c_{t^{h-1}} + S_1, (S_0^{-1}S_{0,2})_t = d + S_2,$$

где $S_1 = S_0^{-1}(u_1)_{t^{h-1}}$, $S_2 = S_0^{-1}u_2 - S_0^{-2}(S_0)_t(u_1)_{t^{h-1}}$. Поэтому

$$I(t) = c_{t^{h-1}} - \int_0^t d(\tau) d\tau = \int_0^t S_2(x, \tau) d\tau - S_1(x, t).$$

Так как $u_{t^{h-1}}, u_2 \in H_{\beta'}^{l,0}(K_T)$, то $S_1, S_2 \in H_{-n/2}^{0,0}(K_T)$. Следовательно, $I(t) \in H_{-n/2}^0(K)$, т.е. $I(t) \equiv 0$. Отсюда находим, что $c_{t^h} = d \in L_2(0, T)$ и $(u_1)_{t^h} = u_2 \in H_{m-\beta}^{2m,0}(K_T)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть u – обобщенное решение задачи (0.2)–(0.4), $u \equiv 0$ при $|x| > R = \text{const}$, и пусть $f_{t^k} \in H_0^{l,0}(K_T)$ при $k \leq 2l + h + 1$, $f_{t^k}(x, 0) = 0$ при $k \leq 2l + h$. Предположим, что прямые

$$\text{Im } \lambda = m - \frac{n}{2} \quad \text{и} \quad \text{Im } \lambda = 2m + l - \frac{n}{2}$$

не содержат точек спектра задачи (3.6)–(3.7) ни при каких $t \in [0, T]$, а в полосе

$$m - \frac{n}{2} < \text{Im } \lambda < 2m + l - \frac{n}{2}$$

имеется только одно простое собственное значение $\lambda(t)$ задачи (3.6)–(3.7). Тогда справедливо представление

$$u(x, t) = \sum_{s=0}^{l+m-1} c_s(t) r^{-i\lambda(t)+s} P_{3l+m-1,s}(\ln r) + u_1(x, t), \quad (4.11)$$

где $P_{3l+m-1,s}$ – полином степени меньше $3l + m$, коэффициенты которого есть бесконечно дифференцируемые функции от (ω, t) , а $(c_s)_{t^k} \in L_2[0, T]$ и $(u_1)_{t^k} \in H_0^{2m+l,0}(K_T)$ при $0 \leq k \leq h$.

Далее через $P \dots$ и $\tilde{P} \dots$ будем обозначать полиномы различных степеней, коэффициенты которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями от (ω, t) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать метод индукции по l . При $l = 0$ имеем: $m - n/2 < \operatorname{Im} \lambda(t) < 2m - n/2$.

Прежде всего докажем, что в случае $m - n/2 < \operatorname{Im} \lambda(t) < m + m_0 - n/2$, $1 \leq m_0 \leq m$,

$$u(x, t) = \sum_{s=0}^{m_0-1} c_s(t) r^{-i\lambda(t)+s} P_{m_0-1,s}(\ln r) + u_1(x, t), \quad (4.12)$$

где $P_{m_0-1,s}$ — полином степени меньше m_0 , $(c_s)_{t^k} \in L_2[0, T]$, $(u_1)_{t^k} \in H_{m-m_0}^{2m,0}(K_T)$ при $k \leq h$.

Введем обозначение: $L_1 = (-1)^{m-1}[L_0(0, t; D) - L(x, t; D)]$. Из системы (0.2) имеем

$$(-1)^{m-1} L_0(0, t; D)u = F, \quad (4.13)$$

где $F = u_{tt} + f + L_1 u$.

Так как $u_{tt}, f \in L_2(K_T)$ и $u \in H_m^{2m,0}(K_T)$, то $F \in H_{m-1}^{0,0}$. Пусть $m - n/2 < \operatorname{Im} \lambda(t) < m + 1 - n/2$. Из леммы 4.2 следует, что

$$u(x, t) = c(t) r^{-i\lambda(t)} \varphi(\omega, t) + u_1(x, t), \quad (4.14)$$

где φ — не зависящая от решения бесконечно дифференцируемая по ω, t функция, а $c_{t^k} \in L_2(0, T)$ и $(u_1)_{t^k} \in H_{m-1}^{2m,0}(K_T)$ при $k \leq h$. Итак, (4.12) при $m_0 = 1$ доказано.

Пусть (4.12) верно для $m_0 \leq m - 1$. Рассмотрим следующие случаи.

1-й случай: $m - n/2 < \operatorname{Im} \lambda(t) < m + m_0 - n/2$. В силу индуктивной гипотезы получим (4.12). Положим

$$S_{m_0} = (-1)^m \sum_{s=0}^{m_0-1} c_s(t) r^{-i\lambda(t)+s} P_{m_0-1,s}(\ln r). \quad (4.15)$$

Отсюда находим

$$LS_{m_0} = F_1(x, t) + \sum_{j+s \leq m_0} \sum_{s=0}^{m_0-1} c_s(t) r^{-i\lambda(t)-2m+s+j} \tilde{P}_{m_0-1,s,j}(\ln r), \quad (4.16)$$

где $(F_1)_{t^k} \in H_{m-m_0-1}^{0,0}(K_T)$ при $0 \leq k \leq h$, а $\tilde{P}_{m_0-1,s,j}$ — полином степени меньше m_0 .

Из (4.12), (4.13) и (4.16) получаем

$$\begin{aligned} & (-1)^{m-1} L_0(0, t; D)u_1 \\ &= F_2(x, t) + \sum_{j+s \leq m_0} \sum_{s=0}^{m_0-1} c_s(t) r^{-i\lambda(t)-2m+s+j} \tilde{P}_{m_0-1,s,j}(\ln r), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $F_2 = u_{tt} + f + L_1 u_1 + F_1 \in H_{m-m_0-1}^{0,0}(K_T)$.

В силу леммы 4.1 функция

$$w_1 = \sum_{j+s \leq m_0} \sum_{s=0}^{m_0-1} c_s(t) r^{-i\lambda(t)+s+j} P_{m_0,s,j}(\ln r) \quad (4.18)$$

такова, что

$$\begin{aligned} & (-1)^{m-1} L_0(0, t; D) w_1 \\ &= \sum_{j+s \leq m_0} \sum_{s=0}^{m_0-1} c_s(t) r^{-i\lambda(t)-2m+s+j} \tilde{P}_{m_0-1,s,j}(\ln r), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $P_{m_0,s,j}$ — полином степени меньше m_0 .

Положим $v_1 = u_1 - w_1$. Из (4.17) и (4.19) следует, что

$$(-1)^{m-1} L_0(0, t; D) v_1 = F_2(x, t).$$

С помощью леммы 4.2 получим

$$v_1(x, t) = c_0(t) r^{-i\lambda(t)} \varphi(\omega, t) + u_2(x, t), \quad (4.20)$$

где φ — не зависящая от решения бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов, а $(u_2)_{tk} \in H_{m-m_0-1}^{2m,0}(K_T)$ при $0 \leq k \leq h$.

Из (4.18) и (4.20) имеем

$$u_1(x, t) = c_0(t) r^{-i\lambda(t)} \varphi(\omega, t) + \sum_{j+s \leq m_0} \sum_{s=0}^{m_0-1} c_s(t) r^{-i\lambda(t)+s+j} P_{m_0,s,j}(\ln r) + u_2(x, t).$$

Отсюда и из (4.12) находим

$$u(x, t) = \sum_{s=0}^{m_0} \tilde{c}_s(t) r^{-i\lambda(t)+s} \tilde{P}_{m_0,s}(\ln r) + u_2(x, t), \quad (4.21)$$

где $\tilde{P}_{m_0,s}$ — полином степени меньше $m_0 + 1$, а $(\tilde{c}_s)_{tk} \in L_2[0, T]$ и $(u_2)_{tk} \in H_{m-m_0-1}^{2m,0}(K_T)$ при $0 \leq k \leq h$.

2-й случай: $m + m_0 - n/2 < \operatorname{Im} \lambda(t) < m + m_0 + 1 - n/2$. Так как в полосе $m - n/2 \leq \operatorname{Im} \lambda(t) \leq m + m_0 - n/2$ нет собственных значений задачи (3.6)–(3.7), то $u \in H_{m-m_0}^{2m,0}(K_T)$. С другой стороны, $m + m_0 - n/2 < \operatorname{Im} \lambda(t) < m + m_0 + 1 - n/2$. Следовательно, из леммы 4.2 следует, что

$$u(x, t) = c(t) r^{-i\lambda(t)} \varphi(\omega, t) + u_1(x, t), \quad (4.22)$$

где φ — не зависящая от решения бесконечно дифференцируемая функция, $c_{tk} \in L_2(0, T)$ и $(u_1)_{tk} \in H_{m-m_0-1}^{2m,0}(K_T)$ при $k \leq h$.

3-й случай: существует t_0 такое, что $\operatorname{Im} \lambda(t_0) = m + m_0 - n/2$. Можно считать, что $m + m_0 - \mu - n/2 < \operatorname{Im} \lambda(t) < m + m_0 - \mu + 1 - n/2$, $0 < \mu < 1$. Повторяя рассуждения доказательства 2-го случая, получим (4.22), где $(u_1)_{tk} \in H_{m-m_0-1+\mu}^{2m,0}(K_T)$ при $k \leq h$. Отсюда аналогично доказательству 1-го случая получим (4.21).

Итак, (4.12) доказано, т.е. утверждение теоремы верно для $l = 0$.

Допустим, что утверждение теоремы верно при l . Пусть $m - n/2 < \operatorname{Im} \lambda(t) < 2m + l - n/2$. Из индуктивной гипотезы имеем (4.11). Следовательно,

$$(-1)^{m-1} L_0(0, t; D) u_1 = F_3 + (-1)^m LS - S_{tt}, \quad (4.23)$$

где $F_3 = (u_1)_{tt} + f + L_1 u_1$, а

$$S = \sum_{s=0}^{l+m-1} c_s(t) r^{-i\lambda(t)+s} P_{3l+m-1,s}(\ln r).$$

Так как $f_{tk} \in H_0^{l+1,0}(K_T)$, $k \leq 2(l+1) + h + 1$, то $(c_s)_{tk} \in L_2(0, T)$ и $(u_1)_{tk} \in H_0^{2m+l,0}(K_T)$ при $k \leq h + 2$. Следовательно, $(F_3)_{tk} \in H_0^{l+1,0}(K_T)$. С другой стороны, имеем

$$(-1)^m LS - S_{tt} = F_4 + \sum_{s=0}^{l+m} \tilde{c}_s(t) r^{-i\lambda(t)-2m+s} \tilde{P}_{3l+m+1,s}(\ln r),$$

где $\tilde{P}_{3l+m+1,s}$ — полином степени меньше $3l + m + 2$, а $(F_4)_{tk} \in H_0^{l+1,0}(K_T)$ и $(\tilde{c}_s)_{tk} \in L_2(0, T)$. Поэтому из (4.23) получим

$$(-1)^{m-1} L_0(0, t; D) u_1 = F_5 + \sum_{s=0}^{l+m} \tilde{c}_s(t) r^{-i\lambda(t)-2m+s} \tilde{P}_{3l+m+1,s}(\ln r), \quad (4.24)$$

где $F_5 = F_3 + F_4 \in H_0^{l+1,0}(K_T) \subseteq H_{-1}^{l,0}(K_T)$. В силу леммы 4.2, рассуждая, как при доказательстве 1-го случая, из (4.24) находим

$$u_1(x, t) = \sum_{s=0}^{l+m} \tilde{c}_s(t) r^{-i\lambda(t)+s} \tilde{P}_{3l+m+2,s}(\ln r) + u_2(x, t), \quad (4.25)$$

где $\tilde{P}_{3l+m+2,s}$ — полином степени меньше $3l + m + 3$, а $(u_2)_{tk} \in H_{-1}^{2m+l,0}(K_T)$ при $k \leq h$. С помощью леммы 3.2 имеем: $(u_2)_{tk} \in H_0^{2m+l+1,0}(K_T)$, $k \leq h$. Отсюда и из (4.11) следует, что

$$u(x, t) = \sum_{s=0}^{l+m} c_s(t) r^{-i\lambda(t)+s} P_{3l+m+2,s}(\ln r) + u_2(x, t), \quad (4.26)$$

где $P_{3l+m+2,s}$ — полином степени меньше $3l + m + 3$, а $(c_s)_{tk} \in L_2[0, T]$ и $(u_2)_{tk} \in H_0^{2m+l+1,0}(K_T)$ при $0 \leq k \leq h$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве 2-го и 3-го случаев, можно доказать, что если $2m + l - n/2 < \operatorname{Im} \lambda(t) < 2m + l + 1 - n/2$ или существует t_0 такое, что $\operatorname{Im} \lambda(t_0) = 2m + l - n/2$, то справедливо представление (4.26). Отсюда получим утверждение теоремы для $l + 1$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть u – обобщенное решение задачи (0.2)–(0.4), $u \equiv 0$ при $|x| > R = \text{const}$, и пусть $f_{tk} \in H_0^{l,0}(K_T)$ при $k \leq 2l + h + 1$, $f_{tk}(x, 0) = 0$ при $k \leq 2l + h$. Предположим, что прямые

$$\text{Im } \lambda = m - \frac{n}{2} \quad \text{и} \quad \text{Im } \lambda = 2m + l - \frac{n}{2}$$

не содержат точек спектра задачи (3.6)–(3.7) ни при каких $t \in [0, T]$, а в полосе

$$m - \frac{n}{2} < \text{Im } \lambda < 2m + l - \frac{n}{2}$$

лежат только простые собственные значения $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_{N_0}(t)$ задачи (3.6)–(3.7) такие, что $\text{Im } \lambda_1(t) < \text{Im } \lambda_2(t) < \dots < \text{Im } \lambda_{N_0}(t)$, $\text{Im } \lambda_j(t) \neq \text{Im } \lambda_k(t) + N$, $j \neq k$, N – целое, $j, k = 1, \dots, N_0$, $t \in [0, T]$. Тогда справедливо представление

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{s=0}^{l+m-1} c_{s,j}(t) r^{-i\lambda_j(t)+s} P_{3l+m-1,s,j}(\ln r) + u_1(x, t), \quad (4.27)$$

где $P_{3l+m-1,s,j}$ – полином степени меньше $3l + m$, коэффициенты которого являются бесконечно дифференцируемыми по ω, t функциями, а $(c_{s,j})_{tk} \in L_2[0, T]$ и $(u_1)_{tk} \in H_0^{2m+l,0}(K_T)$ при $0 \leq k \leq h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $t_0 \in (0, T)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $m + \mu_{j-1} - n/2 < \text{Im } \lambda_j(t) < m + \mu_j - n/2$, $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $\mu_j = \text{const} \geq 0$, $j = 0, 1, \dots, N_0$. Так как отрезок $[0, T]$ является компактным множеством, то существуют числа $T_0 = 0, T_1, \dots, T_{M-1}, T_M = T$ такие, что $m + \mu_{j-1,s} - n/2 < \text{Im } \lambda_j(t) < m + \mu_{j,s} - n/2$, $t \in [T_{j-1}, T_j]$, $\mu_{j,s} = \text{const} \geq 0$, $j = 1, \dots, N_0$, $s = 0, 1, \dots, M$. Без ограничения общности можно считать, что $m - n/2 < \text{Im } \lambda_1(t) < m + \mu_1 - n/2 < \text{Im } \lambda_2(t) < \dots < m + \mu_{N_0-1} - n/2 < \text{Im } \lambda_{N_0}(t) < 2m + l - n/2$, $t \in [0, T]$.

Для доказательства теоремы воспользуемся методом индукции по N_0 . При $N_0 = 1$ утверждение теоремы следует из теоремы 4.1. Пусть утверждение теоремы верно для $N_0 - 1$. Для простоты считаем, что $\mu_{N_0-1} = l_0 < l$. Из индуктивной гипотезы получим

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{N_0-1} \sum_{s=0}^{l_0+m-1} c_{s,j}(t) r^{-i\lambda_j(t)+s} P_{3l_0+m-1,s,j}(\ln r) + u_1(x, t), \quad (4.28)$$

где $P_{3l_0+m-1,s,j}$ – полином степени меньше $3l_0 + m$, а $(c_{s,j})_{tk} \in L_2[0, T]$ и $(u_1)_{tk} \in H_0^{2m+l_0,0}(K_T)$ при $0 \leq k \leq h$. Рассуждая, как при доказательстве (4.24), получим

$$\begin{aligned} & (-1)^{m-1} L_0(0, t; D) u_1 \\ &= \tilde{F} + \sum_{j=1}^{N_0-1} \sum_{s=0}^{l_0+m} \tilde{c}_{s,j}(t) r^{-i\lambda_j(t)-2m+s} \tilde{P}_{3l_0+m+1,s,j}(\ln r), \end{aligned} \quad (4.29)$$

где $\tilde{F} \in H_0^{l_0+1,0}(K_T)$, $\tilde{P}_{3l_0+m-1,s,j}$ — полином степени меньше $3l_0 + m$, а $(\tilde{c}_{s,j})_{tk} \in L_2[0, T]$, $0 \leq k \leq h$. Отсюда следует, что если $2m + l_1 - n/2 < \operatorname{Im} \lambda_{N_0}(t) < 2m + l_1 + 1 - n/2$, $l_1 \geq l_0$, то

$$u_1(x, t) = \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{s=0}^{l_1+m} \tilde{c}_{s,j}(t) r^{-i\lambda_j(t)+s} \tilde{P}_{3l_1+m+2,s}(\ln r) + u_2(x, t), \quad (4.30)$$

где $\tilde{P}_{3l_1+m+2,s}$ — полином степени меньше $3l_1 + m + 3$, а $(u_2)_{tk} \in H_0^{2m+l_1+1,0}(K_T)$, $k \leq h$.

Так как в полосе $2m + l_1 + 1 - n/2 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq 2m + l - n/2$ нет собственных значений задачи (3.6)–(3.7), то из (4.28)–(4.30) получаем (4.27).

Если существует t_0 такое, что $\operatorname{Im} \lambda(t_0) = 2m + l_1 - n/2$, то в силу леммы 3.2 аналогично доказательству 3-го случая теоремы 4.1 получим (4.27). Теорема доказана.

Переходим к асимптотике обобщенного решения первой краевой задачи для сильно гиперболических систем в ограниченных областях с конической точкой на границе. Применяя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 3.3, из теоремы 4.2 получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть u — обобщенное решение задачи (0.2)–(0.4), и пусть $f_{tk} \in H_0^{l,0}(\Omega_T)$ при $k \leq 2l + h + 1$, $f_{tk}(x, 0) = 0$ при $k \leq 2l + h$. Пусть, кроме того, прямые $\operatorname{Im} \lambda = m - n/2$ и $\operatorname{Im} \lambda = 2m + l - n/2$ не содержат точек спектра задачи (3.6)–(3.7) ни при каких $t \in [0, T]$, а в полосе

$$m - \frac{n}{2} < \operatorname{Im} \lambda < 2m + l - \frac{n}{2}$$

лежат простые собственные значения $\lambda_1(t), \dots, \lambda_{N_0}(t)$ задачи (3.6)–(3.7) такие, что $\operatorname{Im} \lambda_1(t) < \operatorname{Im} \lambda_2(t) < \dots < \operatorname{Im} \lambda_{N_0}(t)$, $\operatorname{Im} \lambda_j(t) \neq \operatorname{Im} \lambda_k(t) + N$, $j \neq k$, N — целое, $j, k = 1, \dots, N_0$, $t \in [0, T]$. Тогда в окрестности конической точки справедливо представление

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{s=0}^{l+m-1} c_{s,j}(t) r^{-i\lambda_j(t)+s} P_{3l+m-1,s,j}(\ln r) + u_1(x, t),$$

где $P_{3l+m-1,s,j}$ — полином степени меньше $3l + m$, коэффициенты которого являются бесконечно дифференцируемыми по ω, t функциями, а $(c_{s,j})_{tk} \in L_2[0, T]$ и $(u_1)_{tk} \in H_0^{2m+l,0}(\Omega_T)$ при $0 \leq k \leq h$.

Автор выражает искреннюю благодарность В. А. Кондратьеву за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. *Kreiss H. O.* Initial boundary value problem for hyperbolic systems // *Comm. Pure Appl. Math.* 1970. V. 3. P. 277–298.
2. *Сакамото Р.* Смешанные задачи для гиперболических уравнений // *Математика.* 1972. Т. 16. № 1. С. 62–80.
3. *Блохин А. М., Ткачев Д. Л.* Смешанная задача для волнового уравнения в области с углом (скалярный случай) // *Сиб. матем. журн.* 1989. Т. 15. № 3. С. 16–23.
4. *Пламеневский Б. А.* О волновом уравнении в цилиндре с ребрами // *Функц. анализ и его прилож.* 1998. Т. 32. № 1. С. 81–84.
5. *Eskin G.* The wave equation in a wedge with general boundary conditions // *Comm. Partial Differential Equations.* 1992. V. 17. № 1, 2. P. 99–160.
6. *Ладыженская О. А.* О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // *Матем. сб.* 1958. Т. 45 (87). № 2. С. 123–158.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
8. *Мельников И. И.* Особенности решения смешанной задачи для гиперболических уравнений второго порядка в областях с кусочно гладкой границей // *УМН.* 1982. Т. 37. № 1. С. 149–150.
9. *Наваль Сайед Атмед Шериф.* Смешанная задача для гиперболических уравнений в областях с негладкой границей // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1980. № 3. С. 7–10.
10. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
11. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. М.: ИЛ, 1962.
12. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // *Math. Nachr.* 1977. V. 76. P. 29–60.
13. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
14. *Ени В. М.* Об устойчивости корневого числа аналитической оператор-функции и о возмущениях ее характеристических чисел и собственных векторов // *Докл. АН СССР.* 1967. Т. 173. № 6. С. 1251–1254.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
18.08.1997 и 20.01.1999