Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Петрушко, О существовании граничных значений решений вырождающихся эллиптических уравнений, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 7, 41–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:37:58

УДК 517.956

И. М. Петрушко

О существовании граничных значений решений вырождающихся эллиптических уравнений

Работа посвящена поведению вблизи границы области решения эллиптического уравнения второго порядка, вырождающегося на части границы. Изучается тот случай обращения в нуль квадратичной формы, соответствующей главной части дифференциального оператора, на векторе (единичном) нормали к границе, в котором постановка первой краевой задачи (задача D или задача E) определяется значениями коэффициентов при первых производных (вырождение типа Келдыша).

Устанавливаются условия на решение уравнения, необходимые и достаточные для существования его предела на той части границы, на которой в первой краевой задаче задаются граничные значения. При этом оказывается, что удовлетворяющее этим условиям решение имеет предел и на оставшейся части границы.

Кроме того, исследуется близкий вопрос об однозначной разрешимости соответствующей краевой задачи с граничными функциями из L_p .

Библиография: 19 названий.

Хорошо известно (см. [1], [2]), что в случае равномерно эллиптического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = f \quad (1)$$

с “не слишком быстро растущей” вблизи границы области Q правой частью $f(x)$ справедливы естественные аналоги теорем Ф. Рисса [3] и Литтлвуда–Пэли [4]–[6].

Рассмотрим следующие условия:

1) функция $M(\delta) = \int_{\partial Q_\delta} |u(x)|^p ds$ ограничена вблизи нуля,

$$Q_\delta = \{x \in Q, r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) > \delta\}$$

(аналог принадлежности классу Харди);

2) $I = \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} r(x) dx < \infty$ (аналог условия Литтлвуда–Пэли).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00248).

Каждое из этих условий является необходимым и достаточным для существования предела в L_p , $p > 1$, решения уравнения (1) на границе, т.е. для существования функции $\varphi \in L_p(\partial Q)$ такой, что

$$\int_{\partial Q} |u(x - \delta \nu_x) - \varphi(x)|^p ds \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow +0, \quad (2)$$

$\partial Q \in C^2$, ν_x — внешняя нормаль к ∂Q в точке $x \in \partial Q$.

Условие гладкости границы ($\partial Q \in C^2$) можно ослабить (см. [7]). При наиболее слабых требованиях на гладкость границы области (и коэффициентов уравнения) критерий существования граничной функции установлен в работе [8]. При этом несколько изменена форма принятия граничного значения: в (2) выделенное направление нормали к границе заменено близкими к нему направлениями (см. [7], [9]). Более того, в случае равномерно эллиптического уравнения все направления оказываются равноправными. Как установлено в [8], решение обладает свойством, аналогичным непрерывности по совокупности переменных. Дальнейшие усиления этого свойства получены в работах [10]–[12].

Мы рассматриваем случай вырождения уравнения на границе области, когда направления не являются равноправными; более того, постановка первой краевой задачи определяется типом вырождения, поэтому мы будем изучать принятие граничных значений в смысле, аналогичном (2).

Известно [13], если значения соответствующей уравнению (1) квадратичной формы на векторе нормали отделены от нуля,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \nu_i(x) \nu_j(x) \geq \delta_0 > 0 \quad \forall x \in \partial Q,$$

$\nu_i(x)$ — координаты нормали $\nu(x)$ (коэффициенты уравнения предполагаются гладкими), то корректна задача Дирихле (граничные условия задаются на всей границе) и свойства решений такого вырождающегося уравнения весьма близки к свойствам решений равномерно эллиптического уравнения. В частности, в этой ситуации справедливы аналоги теорем Рисса и Литтлвуда–Пэли (см. [14]).

В случае, когда на части границы $\Gamma_0 \subset \partial Q$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu_i \nu_j = 0, \quad x \in \Gamma_0,$$

ситуация более сложная. Постановка первой краевой задачи и поведение решения вблизи границы определяются порядком вырождения, а в случае “сильного” вырождения — коэффициентами при младших членах. Для “слабого” вырождения (если порядок убывания квадратичной формы для уравнения (1) является степенным с показателем меньше единицы) ситуация близка к невырожденному случаю: также корректна задача Дирихле и справедливы критерии существования граничных значений (см. [15]).

В настоящей работе мы изучаем случай “сильного” вырождения, когда квадратичная форма убывает на части границы как $r(x)$ и постановка первой краевой задачи определяется коэффициентом при первой производной по нормали. При этом

рассматривается как случай, в котором корректна задача Дирихле, так и более интересный случай, когда корректна (в классе ограниченных решений) задача

$$u|_{\partial Q \setminus \Gamma_0} = \varphi$$

(в терминах М. В. Келдыша – задача Е).

Мы ограничимся изучением простейшей ситуации, когда Γ_0 является пересечением ∂Q с гиперплоскостью $\{x_n = 0\}$. Рассматриваемая область Q расположена в полупространстве $\{x_n > 0\}$, а уравнение (1) не содержит смешанных производных по переменным $x_n, x_i, i = 1, 2, \dots, n-1$. Последнее ограничение не является существенным, но отказ от него значительно усложнил бы доказательство и привел бы к заметному увеличению объема работы.

Итак, будем рассматривать уравнение

$$Lu \equiv - \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + x_n u_{x_n x_n} \right\} - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au = f, \quad (3)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C^1(\overline{Q}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad a_n \in C^1(\overline{Q}), \\ a_i &\in C(\overline{Q}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad a \in C(\overline{Q}) \end{aligned}$$

и для любых $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}, x \in \overline{Q}$ существует такая $\gamma_0 > 0$, что

$$\gamma_0 \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \gamma_0^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2. \quad (4)$$

Отметим, что к уравнению (3) легко сводятся уравнения вида

$$- \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} (\bar{a}_{ij} u_{x_i})_{x_j} + x_n (\bar{a}_{nn} u_{x_n})_{x_n} \right\} - \sum_{i=1}^n \bar{a}_i u_{x_i} + au = f$$

с коэффициентами $\bar{a}_{ij}, \bar{a}_{nn} \in C^1(\overline{Q}), i, j = 1, 2, \dots, n-1, \bar{a}_{nn} > 0, x \in \overline{Q}, \bar{a}_n \in C^1(\overline{Q}), \bar{a}_i, \bar{a} \in C(\overline{Q})$, удовлетворяющими условию (4).

Наложим ограничения на рассматриваемую область Q .

Пусть Q – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, расположенная в полупространстве $x_n > 0$, часть границы Γ_0 которой лежит в гиперплоскости $x_n = 0$. Остальную часть границы обозначим через Γ_1 : $\Gamma_1 = \partial Q \cap \{x_n > 0\}, \overline{\Gamma}_0 \cup \Gamma_1 = \partial Q$.

Будем предполагать, что при достаточно малом $h_1 > 0$

$$Q \cap \{0 < x_n < h_1\} = Q_1 \times (0, h_1),$$

где Q_1 – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$, и пусть $\Gamma_1 \in C^2$.

Обозначим через D область, полученную продолжением области Q в нижнюю часть пространства $\mathbb{R}^n$ ($x_n < 0$) симметрично относительно гиперплоскости $x_n = 0$, и пусть $\bar{r} = \bar{r}(x', x_n)$ – расстояние от точки $x \in D$ до границы $\partial D \in C^2$.

Обозначим через δ_0 ($\delta_0 < h_1/4$) столь малое число, чтобы для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ подмножество $D_\delta = D \cap \{\bar{r}(x) > \delta\}$ было областью с границей $\partial D_\delta \in C^2$.

Пусть $\bar{\rho}(x)$ – функция, обладающая следующими свойствами:

$$\bar{\rho}(x) = \bar{r}(x), \quad x \in D \setminus D_{\delta_0},$$

$\bar{\rho}(x) \in C^2(\bar{D})$, и существует такая постоянная $\gamma_1 > 0$, что для всех $x \in D$

$$\gamma_1 \bar{r}(x) \leq \bar{\rho}(x) \leq \gamma_1^{-1} \bar{r}(x).$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} r_1(x) &= \bar{r}(x), \quad x \in Q, & \rho_1(x) &= \bar{\rho}(x), \quad x \in Q, \\ Q_\delta &= D_\delta \cap Q, & \Gamma_{1\delta} &= \partial D_\delta \cap Q, \\ \Gamma_{0\delta} &= \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', 0) \in D_\delta\}. \end{aligned}$$

Отметим, что $\Gamma_{1\delta} \cap \{0 < x < h_1\} = \partial \Gamma_{0\delta} \times (0, h_1)$.

Правую часть уравнения (3) $f(x)$ будем предполагать принадлежащей пространству $L_p^\theta(Q)$, $p > 1$, $0 \leq \theta < 2p - 1$, где $L_p^\theta(Q)$ – пространство измеримых в Q функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^\theta(Q)} = \left\{ \int_Q |f|^p \rho_1^\theta dx \right\}^{1/p}.$$

Будем говорить, что функция $u(x) \in W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ является обобщенным решением из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3), если для всех финитных в Q функций $\eta(x) \in W_q^1$, $1/p + 1/q = 1$, выполняется интегральное тождество

$$\int_Q \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + u_{x_n} (x_n \eta)_{x_n} - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \eta + a u \eta \right] dx = \int_Q f \eta dx. \quad (5)$$

Так как уравнение (3) эллиплично в области $Q \cap \{x_n > \beta\} \quad \forall \beta \in (0, h_1/4)$, то справедливо следующее утверждение (см. [2], [9]).

ЛЕММА 1. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (3) с правой частью $f(x) \in L_{p,\text{loc}}(Q)$. Тогда для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ и $\beta \in (0, h/4)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} (p-1) \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} & \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \frac{x_n - \beta}{x_n} + u_{x_n}^2 (x_n - \beta) \right] |u|^{p-2} (p_1 - \delta) dx \\ & - \frac{1}{p} \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \beta\}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \rho_{1x_i} \rho_{1x_j} \frac{x_n - \beta}{x_n} + \rho_{1x_n}^2 (x_n - \beta) \right] |u|^p ds \\ & - \frac{1}{p} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' + \frac{\beta}{2} \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} a_n(x) |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{p} \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p (\rho_1 x_n (x_n - \beta) + 2\rho_1 x_n) dx \\
& -\frac{1}{p} \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} \rho_1 x_i)_{x_j} + [a_n(\rho_1 - \delta)]_{x_n} \right] |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} dx \\
& + \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_{x_i} + a u \right] |u|^{p-1} \frac{x_n - \beta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx \\
& = \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} f |u|^{p-1} (\rho_1 - \delta) \operatorname{sign} u dx.
\end{aligned} \tag{6}$$

Введем обозначение:

$$J_{\delta\beta}(u) = \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} \left[|\nabla' u|^2 \frac{x_n - \beta}{x_n} + u_{x_n}^2 (x_n - \beta) \right] |u|^{p-2} (\rho_1 - \delta) dx,$$

где $\nabla' u = \{u_{x_1}, \dots, u_{x_{n-1}}\}$; $J_\delta(u) = J_{\delta\delta}(u)$.

ЛЕММА 2. Пусть $u(x) \in W_{p,\text{loc}}^1(Q)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и произвольного $\overline{\Theta}_1$, $\overline{\Theta}_1 > -1$, справедливы неравенства:

$$\begin{aligned}
\int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p dx & \leq \varepsilon J_{\delta\beta}(u) + C_1(\varepsilon) \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx, \\
& \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} (\rho_1 - \delta)^{\Theta_1} dx \\
& \leq \varepsilon J_{\delta\beta}(u) + C_2(\varepsilon) \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx.
\end{aligned}$$

В силу ограничения на область Q ($Q \cap \{0 < x_n < h_1\} = \Gamma_0 \times (0, h_1)$) лемма 2 доказывается так же, как и лемма 2 в работе [16].

ЛЕММА 3. Пусть $u(x) \in W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ – обобщенное решение уравнения (3). Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
& \left| \beta \int_\beta^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \int_{\Gamma_{0\delta}} a_n(x', x_n) |u|^p (\rho_1 - \delta) dx' \right. \\
& \quad \left. - \left(1 - \frac{\beta}{\delta_0} \right) \int_{\Gamma_{0\delta}} a_n(x', \beta) |u(x', \beta)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' \right| \\
& \leq C_3 \left[\beta \int_\beta^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u|^{p-1} |u_{x_n}| (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' \right. \\
& \quad \left. + \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} dx \right]
\end{aligned} \tag{7}$$

с постоянной C_3 , не зависящей ни от δ , ни от β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы воспользуемся равенством

$$\begin{aligned}
& \beta \int_{\beta}^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \int_{\Gamma_{0\delta}} a_n(x', x_n) |u(x', x_n)|^p (\rho_1(x', x_n) - \delta) dx' \\
&= \beta \int_{\beta}^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \int_{\Gamma_{0\delta}} (a_n(x', x_n) - a_n(x', \beta)) |u|^p (\rho_1(x', x_n) - \delta) dx' \\
&\quad + \beta \int_{\beta}^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \int_{\Gamma_{0\delta}} a_n(x', \beta) |u(x)|^p (\rho_1(x', x_n) - \rho_1(x', \beta)) dx' \\
&\quad + \beta \int_{\beta}^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \int_{\Gamma_{0\delta}} a_n(x', \beta) |u|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' = I_1 + I_2 + I_3. \quad (8)
\end{aligned}$$

Заметим, что в силу свойств функции $\rho_1(x)$ и коэффициента $a_n(x)$

$$|I_1| + |I_2| \leq C_4 \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} dx. \quad (9)$$

Оценим I_3 .

$$\begin{aligned}
I_3 &= \beta \int_{\beta}^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \int_{\Gamma_{0\delta}} a_n(x', \beta) |u(x', x_n)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' \\
&= \beta \int_{\beta}^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \int_{\Gamma_{0\delta}} a_n(x', \beta) |u(x', \beta)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' \\
&\quad + \beta \int_{\beta}^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \int_{\Gamma_{0\delta}} a_n(x', \beta) \int_{\beta}^{x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} |u(x', \xi_n)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) d\xi_n dx' \\
&= \left[1 - \frac{\beta}{\delta_0}\right] \int_{\Gamma_{0\delta}} a_n(x', \beta) |u(x', \beta)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' + I_{31}, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_{31}| &\leq p \beta \int_{\beta}^{\delta_0} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \xi_n)|^{p-1} |u_{\xi_n}(x', \xi_n)| |a_n(x', \beta)| \\
&\quad \times (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' d\xi_n \int_{\xi_n}^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \\
&\leq C_5 \beta \int_{\beta}^{\delta_0} \int_{\Gamma_{0\delta}} \frac{|u|^{p-1} |u_{x_n}|}{x_n} (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' dx_n, \quad (11)
\end{aligned}$$

тогда из равенства (8) с учетом оценок (9), (11) вытекает неравенство (7). Лемма 3 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что функция $u(x) \in W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ принадлежит классу H_p , если функция

$$M_\delta \equiv M_\delta(u) = \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p ds + \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \delta)|^p (\rho_1(x', \delta) - \delta) dx'$$

ограничена на $(0, \delta_0]$, т. е.

$$\sup_{\delta \in (0, \delta_0]} M_\delta < \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что функция $u(x) \in W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ принадлежит классу $\overline{H}_p$, если функция

$$M_{\delta\beta} \equiv M_{\delta\beta}(u) = \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p ds + \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx'$$

ограничена на $(0, \delta_0] \times (0, \delta_0]$, т.е.

$$\sup_{\substack{\delta \in (0, \delta_0] \\ \beta \in (0, \delta_0]}} M_{\delta\beta} < \infty.$$

Рассмотрим сначала уравнение (3) в случае, когда коэффициент $a_n(x)$ удовлетворяет условию: $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \overline{\Gamma}_0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(x)$ — обобщенное решение уравнения (3) с $f(x) \in L_p^\theta(Q)$ и $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \overline{\Gamma}_0$. Тогда для того чтобы $u(x)$ принадлежала классу H_p , необходимо и достаточно, чтобы функция $(|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} \rho_1(x)$ была интегрируема по области Q , т.е.

$$\int_Q (|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} \rho_1(x) dx < \infty. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. *Необходимость.* Прежде всего отметим, что из принадлежности $u(x)$ классу H_p немедленно вытекает справедливость для любых $\delta \in (0, \delta_0]$ следующих неравенств:

$$\delta \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx' dx_n}{x_n^2} < C_6, \quad (13)$$

$$\int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p \frac{x_n - \delta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx < C_7. \quad (14)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \delta \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} &\leq C_8 \left[\delta \int_\delta^{\delta_0} \frac{d\mu(\mu - \delta)}{\mu^2} \int_{\Gamma_{1\mu}} |u|^p ds_\mu \right. \\ &\quad \left. + \delta \int_\delta^{\delta_0} \frac{d\mu}{\mu^2} \int_{\Gamma_{0\mu}} |u(x', \mu)|^p (\rho_1 - \delta) dx' \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, из принадлежности $u(x)$ классу H_p немедленно вытекает неравенство (13). Неравенство (14) доказывается аналогично.

Далее, так как

$$\begin{aligned} \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |f| |u|^{p-1} \frac{x_n - \delta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx \\ \leq \int_Q |f|^p \rho_1^\theta dx + \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p \frac{x_n - \delta}{x_n} (\rho_1 - \delta)^{\frac{p-\theta}{p-1}} dx, \end{aligned}$$

то из леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |f| |u|^{p-1} \frac{x_n - \delta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx \\ & \leq \int_Q |f|^p \rho_1^\theta dx + \varepsilon J_\delta(u) + C_2(\varepsilon) \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p \frac{x_n - \delta}{x_n} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Следовательно, используя равенство (6) леммы 1 (при $\beta = \delta$), получаем неравенство

$$\begin{aligned} & (p-1) \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \frac{x_n - \delta}{x_n} + u_{x_n}^2 (x_n - \delta) \right] |u|^{p-2} (\rho_1 - \delta) dx \\ & \leq C_9 \left[M_\delta + \delta \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} \right. \\ & \quad + \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p \frac{x_n - \delta}{x_n} dx + \int_Q |f|^p \rho_1^\theta dx + \varepsilon J_\delta(u) \\ & \quad \left. + (C_2(\varepsilon) + 1) \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p \frac{x_n - \delta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx \right], \end{aligned} \quad (16)$$

из которого следует с учетом неравенств (4), (13), (14) и выбора достаточно малого ε , что существует такая постоянная $K > 0$, что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$

$$J_\delta(u) \leq K,$$

т.е. справедливо неравенство (12). Необходимость доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что при доказательстве необходимости теоремы мы не использовали условие

$$a_n(x', 0) < 1, \quad x' \in \bar{\Gamma}_0.$$

2. *Достаточность.* Пусть $u(x)$ — обобщенное решение из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) с $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, и пусть

$$\int_Q (|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} \rho_1(x) dx < \infty.$$

Прежде всего отметим, что из (12) вытекает неравенство

$$\int_Q |u|^p \rho_1(x) dx < \infty. \quad (17)$$

Действительно, в силу строгой эллиптичности уравнения (3) при $x_n > \delta_0/2$ из (12) следует (см. [2], [9]), что

$$\int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta_0/2\}} |u|^p dx < \infty. \quad (18)$$

Значит, существует $x_n^1 \in (\delta_0/2, \delta_0)$, при котором

$$\int_{\Gamma_0} |u(x', x_n^1)|^p dx' < \infty. \quad (19)$$

Возьмем произвольные $\delta, \beta \in (0, \delta_0/2]$.

$$\begin{aligned} \int_{Q_\delta \cap \{\beta < x_n < x_n^1\}} |u|^p (\rho_1 - \delta) dx &= \int_\beta^{x_n^1} dx_n \int_{\Gamma_{0\delta}} |u|^p (\rho_1 - \delta) dx' \\ &\leq \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', x_n^1)|^p (\rho_1(x', x_n^1) - \delta) dx' \\ &\quad + p \int_\beta^{x_n^1} (x_n - \beta) dx_n \int_{\Gamma_{0\delta}} |u|^{p-1} |u_{x_n}| (\rho_1 - \delta) dx' \\ &\quad + \int_\beta^{x_n^1} \int_{\Gamma_{0\delta}} (x_n - \beta) |u|^p \rho_{1x_n} dx \\ &\leq \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', x_n^1)|^p (\rho_1(x', x_n^1) - \delta) dx' + \varepsilon \int_\beta^{x_n^1} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u|^p (\rho_1 - \delta) dx \\ &\quad + \frac{p^2}{\varepsilon} \int_Q x_n u_{x_n}^2 |u|^{p-2} \rho_1 dx + C_{10} \int_\beta^{x_n^1} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u|^p (x_n - \beta) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь мы воспользовались свойством функции $\rho_1(x)$:

$$\rho_{1x_n} \equiv 0, \quad x_n \in (0, \delta_0/2], \quad x' \in \overline{Q}_1 \setminus \overline{Q}_{1\delta_0}.$$

Оценим теперь интеграл

$$\begin{aligned} II &= \int_\beta^{x_n^1} \int_{\Gamma_{0\delta_0}} |u|^p (x_n - \beta) dx. \\ II &\leq (x_n^1)^2 \int_{\Gamma_{0\delta_0}} |u(x', x_n^1)|^p dx' + \varepsilon \int_\beta^{x_n^1} (x_n - \beta) dx_n \int_{\Gamma_{0\delta_0}} |u|^p dx' \\ &\quad + \frac{1}{\delta_0 \varepsilon} \int_Q x_n u_{x_n}^2 |u|^{p-2} \rho_1 dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно, на основании (12) из оценок (19)–(21) и вытекает неравенство (17).

Вернемся к доказательству достаточности.

Из равенства (6) на основании лемм 2 и 3 следует

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \beta\}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \rho_{1x_i} \rho_{1x_j} \frac{x_n - \beta}{x_n} + \rho_{1x_n}^2 (x_n - \beta) \right] |u|^p ds \\ + \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p (\rho(x', \beta) - \delta) dx' \\ \leq \beta \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} a_n(x) |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} \\ + C_{11} \left[J_0(u) + \int_Q |u|^p \rho_1 dx + \int_Q |f|^p \rho_1^\theta dx \right]. \end{aligned}$$

Обозначим через β'_0 столь малое число ($\beta'_0 < \delta_0/2$), чтобы

$$a_n^0 = \max_{x \in Q_0 \cap \{0 \leq x_n \leq \beta'_0\}} a_n(x) < 1,$$

и выберем $\beta > 0$ таким, чтобы $\sqrt{\beta} < \beta_0^1$.

Тогда для таких β получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \beta\}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \rho_{1x_i} \rho_{1x_j} \frac{x_n - \beta}{x_n} + \rho_{1x_n}^2 (x_n - \beta) \right] |u|^p ds \\ & + \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p (\rho(x', \beta) - \delta) dx' \\ & \leq a_n^0 \beta \int_{Q_\delta \cap \{\beta < x_n < \sqrt{\beta}\}} |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} \\ & + C_{12} \left[J_0(u) + \int_Q |u|^p \rho_1 dx + \int_Q |f|^p \rho_1^\theta dx \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как в силу леммы 3 (полагая в ней $a_n(x) \equiv 1$)

$$\begin{aligned} & \beta \int_{\Gamma_{0\delta} \times \{\beta < x_n < \sqrt{\beta}\}} |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} \\ & \leq \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p (\rho(x', \beta) - \delta) dx' + \varepsilon \beta \int_{\Gamma_{0\delta} \times \{\beta < x_n < \sqrt{\beta}\}} |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} \\ & + C(\varepsilon) \int_{\Gamma_{0\delta} \times \{\beta < x_n < \sqrt{\beta}\}} x_n u_{x_n}^2 |u|^{p-2} (\rho_1 - \delta) dx \\ & + C_3 \int_{Q_\delta \cap \{\beta < x_n < \sqrt{\beta}\}} |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} dx, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} & \beta \int_{\Gamma_{0\delta} \times \{\beta < x_n < \sqrt{\beta}\}} |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} \\ & \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' \\ & + C_{12} \left[\int_{\Gamma_{0\delta} \times \{\beta < x_n < \sqrt{\beta}\}} x_n u_{x_n}^2 |u|^{p-2} (\rho_1 - \delta) dx \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_{0\delta} \times \{\beta < x_n < \sqrt{\beta}\}} |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} dx \right], \end{aligned} \quad (23)$$

и, следовательно, подставляя (23) в (22), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \beta\}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \rho_{1x_i} \rho_{1x_j} \frac{x_n - \beta}{x_n} + \rho_{1x_n}^2 (x_n - \beta) \right] |u|^p ds \\ & + \left(1 - \frac{a_n^0}{1 - \varepsilon} \right) \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' \\ & \leq C_{13} \left[J_0(u) + \int_Q |u|^p \rho_1(x) dx + \int_Q |f|^p \rho_1^\theta dx \right]. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\frac{a_n^0}{1-\varepsilon} < 1$. Тогда получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \beta\}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \rho_{1x_i} \rho_{1x_j} \frac{x_n - \beta}{x_n} + \rho_{1x_n}^2 (x_n - \beta) \right] |u|^p ds \\ + \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' \leq C_{14}, \end{aligned}$$

в котором постоянная C_{14} не зависит ни от $\delta \in (0, \delta_0/2]$, ни от $\beta \in (0, \delta_0/2]$. Следовательно, $u(x)$ принадлежит классу $\overline{H}_p$ и, тем самым, классу H_p . Теорема 1 доказана.

Так как из принадлежности обобщенного решения из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) классу $\overline{H}_p$ вытекает принадлежность его классу H_p , то мы на самом деле доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $u(x)$ – обобщенное решение из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) с $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \overline{\Gamma}_0$. Тогда для того чтобы $u(x)$ принадлежала классу $\overline{H}_p$, необходимо и достаточно, чтобы функция $(|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2)|u|^{p-2} \rho_1(x)$ была интегрируема по области Q .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теорем 1 и 1' следует, что для того чтобы обобщенное решение из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) с $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \overline{\Gamma}_0$, принадлежало классу H_p , необходимо и достаточно, чтобы функция $u(x)$ принадлежала классу $\overline{H}_p$.

Будем говорить, что функция $u(x) \in W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ принимает граничное значение φ на Γ_1

$$u|_{\Gamma_1} = \varphi \quad (\varphi \in L_p(\Gamma_1)) \quad (24)$$

в L_p , если

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \delta\}} |u(x_\delta(x)) - \varphi(x)|^p ds = 0. \quad (25)$$

Будем также говорить, что функция $u(x) \in W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ принимает граничное значение ψ на Γ_0

$$u|_{\Gamma_0} = \psi \quad \left(\int_{\Gamma_0} |\psi(x)|^p r_1(x) dx < \infty \right) \quad (26)$$

в L_p с весом $r_1(x)$, если

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x, \delta) - \psi(x)|^p r_1(x) dx = 0. \quad (27)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $u(x)$ является обобщенным решением из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ задачи Дирихле (3), (24), (26), если она принадлежит пространству $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$, является обобщенным решением уравнения (3), удовлетворяет граничному условию (24) в смысле равенства (25) и граничному условию (26) в смысле равенства (27).

ТЕОРЕМА 2. Существует такая постоянная $\lambda_0 > 0$, что для любых $\varphi \in L_p(\Gamma_1)$, $\psi \in L_p(\Gamma_0, r_1)$ и $f \in L_p^\theta(Q)$, $0 \leq \theta < 2p - 1$, существует при $a(x) \geq \lambda_0$, $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, решение из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ задачи (3), (24), (26). Это решение единственно, и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_Q (|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} r_1(x) dx \\ & + \max_{\delta, \beta \in (0, \delta_0]} \left[\int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \beta\}} |u(x_\delta(x))|^p ds + \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p r_1(x', \beta) dx' \right] \\ & + \int_Q |u(x)|^p r_1(x) dx \\ & \leq C [\|f\|_{L_p^\theta(Q)}^p + \|\varphi\|_{L_p(\Gamma_1)}^p + \|\psi\|_{L_p(\Gamma_0, r_1)}^p]. \end{aligned} \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала для обобщенного решения из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ задачи (3), (24), (26) (в предположении существования решения) справедливость при достаточно большом $\lambda_0 > 0$ оценки (28).

Пусть $u(x)$ – обобщенное решение из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ задачи Дирихле (3), (24), (26). Из равенств (25) и (27) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p ds &= \int_{\Gamma_1} |\varphi|^p ds, \\ \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \delta)|^p r_1(x', \delta) dx' &= \int_{\Gamma_0} |\psi|^2 r_1 dx'. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $u(x)$ принадлежит классу H_p и, тем самым, классу $\bar{H}_p$ и функция $(|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} r_1(x)^n$ интегрируема по Q . В силу теоремы Лебега при $\delta \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} J_\delta &\rightarrow J_0(u), \\ \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p \frac{x_n - \delta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx &\rightarrow \int_Q |u|^p \rho_1(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогично, из принадлежности функции $u(x)$ классу $\bar{H}_p$ следует существование такой постоянной C_{15} , что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$

$$\delta \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} \leq C_{15}. \quad (29)$$

Рассмотрим равенство (6). Из него на основании лемм 2 и 3 следует

$$\begin{aligned} & J_\delta(u) + \int_{Q_\delta} a |u|^p \frac{x_n - \delta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx \\ & \leq C_{16} \left(\|f\|_{L_p^\theta(Q)}^p \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{p} \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \rho_{1x_i} \rho_{1x_j} \frac{x_n - \delta}{x_n} + \rho_{1x_n}^2 (x_n - \delta) \right] ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{p} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \delta)|^p (\rho_1(x', \delta) - \delta) dx' \\
& - \frac{1}{p} \int_{\Gamma_{0\delta}} a_n(x', \delta) |u(x', \delta)|^p (\rho_1(x', \delta) - \delta) dx' \\
& + \delta \int_{Q_\delta \cap \{\delta < x_n < \sqrt{\delta}\}} |u|^{p-1} |u_{x_n}| (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n} \\
& + \int_{Q_\delta} |u|^p \frac{x_n - \delta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx \Big). \tag{30}
\end{aligned}$$

Учитывая (29) и (12), получаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \delta \int_{Q_\delta \cap \{\delta < x_n < \sqrt{\delta}\}} |u|^{p-1} |u_{x_n}| (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n} = 0.$$

Поэтому, переходя к пределу при $\delta \rightarrow +0$ в неравенстве (30), с учетом (4) имеем

$$\begin{aligned}
J(u) + \int_Q a |u|^p \rho_1 dx & \leq C_{17} \left(\|f\|_{L_p^\theta(Q)}^p + \int_{\Gamma_1} |\varphi|^p ds \right. \\
& + \int_{\Gamma_0} |\psi|^p (1 - a_n(x', 0)) \rho_1(x', 0) dx' \\
& \left. + \int_Q |u|^p \rho_1 dx \right). \tag{31}
\end{aligned}$$

Следовательно, так как $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$,

$$\begin{aligned}
J(u) + \int_Q (a - C_{17}) |u|^p \rho_1(x) dx \\
\leq C_{18} [\|f\|_{L_p^\theta(Q)}^p + \|\varphi\|_{L_p^\theta(\Gamma_1)}^p + \|\psi\|_{L_p(Q, r)}^p]. \tag{32}
\end{aligned}$$

Выбирая $\lambda_0 = C_{17} + 1$, из неравенства (32) получаем (28).

Перейдем к доказательству существования решения. Возьмем произвольные функции $\varphi \in L_p(\Gamma_1)$, $\psi \in L_p(\Gamma_0, r_1)$ и $f \in L_p^\theta(Q, r_1)$. Пусть $\{\varphi_m\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\Gamma_1)$, финитных в Γ_1 , сходящаяся в $L_p(\Gamma_1)$ к функции $\varphi(x)$: $\|\varphi_m - \varphi\|_{L_p(\Gamma_1)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$; $\{\psi_m\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\Gamma_0)$, финитных в Γ_0 , сходящаяся в $L_p(\Gamma_0, r_1)$ к функции $\psi(x)$: $\|\psi_m - \psi\|_{L_p(\Gamma_0, r_1)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$; и пусть $\{f_m\}$ — некоторая последовательность функций из $C^1(\bar{Q})$, сходящаяся в $L_p^\theta(Q, r_1)$ к функции $f(x)$.

Обозначим через $u_m(x)$ решение задачи

$$\begin{aligned}
L' u_m & \equiv - \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \left(x_n + \frac{1}{m} \right) u_{x_n x_n} \right) - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a u = f_m(x), \\
u|_{\Gamma_1} & = \varphi_m(x); \quad u|_{\Gamma_0} = \psi_m(x).
\end{aligned}$$

Такое решение существует (напомним, что $a(x) > \lambda_0$), и для него, как нетрудно видеть, справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_Q (|\nabla' u_m|^2 + x_n u_{mx_n}^2) |u_m|^{p-2} \rho_1(x) dx + \int_Q |u_m|^p \rho_1(x) dx \\
& + \max_{\delta \in [0, \delta_0]} \left[\int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \delta\}} |u_m|^p ds + \int_{\Gamma_{0\delta}} |u_m(x', \delta)|^p (\rho_1(x', \delta) - \delta) dx' \right] \\
& \leq \int_Q \left(|\nabla' u_m|^2 + \left(x_n + \frac{1}{m} \right) u_{mx_n}^2 \right) |u_m|^{p-2} \rho_1(x) dx + \int_Q |u_m|^p \rho_1(x) dx \\
& + \max_{\delta \in [0, \delta_0]} \left[\int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \delta\}} |u_m|^p ds + \int_{\Gamma_{0\delta}} |u_m(x', \delta)|^p (\rho_1(x', \delta) - \delta) dx' \right] \\
& \leq C_{19} [\|f_m\|_{L_p^\theta(Q)}^p + \|\varphi\|_{L_p(\Gamma_1)}^p + \|\psi\|_{L_p(\Gamma_0, r_1)}^p] \tag{33}
\end{aligned}$$

с постоянной C_{19} , не зависящей ни от m , ни от u .

Следовательно, последовательность $\{u_m\}$, $m \rightarrow \infty$, сходится в банаховом пространстве B с нормой

$$\begin{aligned}
\|u\|_B^p &= \int_Q (|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} \rho_1(x) dx \\
& + \max_{\delta \in [0, \delta_0]} \left[\int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \delta\}} |u|^p ds + \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \delta)|^p (\rho_1(x', \delta) - \delta) dx' \right] \\
& + \int_Q |u|^p \rho_1(x) dx \tag{B}
\end{aligned}$$

к некоторой функции $u(x)$: $\|u_m - u\|_B \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Покажем, что функция $u(x)$ является обобщенным решением из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3).

Пусть $1 < p < 2$. В силу неравенства

$$\int_{Q'} |\nabla' u|^p dx \leq C \left[\int_Q (|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} r_1(x) dx + \int_Q |u|^p r_1(x) dx \right],$$

справедливого для любой $Q' \Subset Q$, получаем, что последовательность $\{u_m\}$ сходится к функции $u(x)$ в $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ и, следовательно, функция $u(x)$ является обобщенным решением из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3).

Пусть $p \geq 2$. Из (B) следует, что для любой $Q' \Subset Q$ последовательность $\{u_m\}$ сходится в $W_2^1(Q')$, т.е. $u(x)$ является обобщенным решением из $W_{2, \text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3), и в силу принадлежности $f(x)$ пространству $L_{p, \text{loc}}(Q)$ из результатов работы [17] следует, что $u(x)$ является обобщенным решением из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3).

Выполнение соотношений (25), (27) очевидно. Теорема 2 доказана.

Будем говорить, что функция $u(x) \in W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ имеет предел в смысле L_p на Γ_1 , если существует такая функция $\varphi(x) \in L_p(\Gamma_1)$, что

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \beta\}} |u(x_\delta(x)) - \varphi(x)|^p ds = 0. \tag{34}$$

Будем также говорить, что функция $u(x) \in W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ имеет предел в смысле L_p с весом $r_1(x)$ на Γ_0 , если существует такая функция $\psi(x) \in L_p(\Gamma_0, r_1)$, т.е.

$$\int_{\Gamma_0} |\psi|^p r_1(x', 0) dx' < \infty,$$

что

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \int_{\Gamma_0} |u(x', \beta) - \psi|^p r_1(x', 0) ds = 0. \quad (35)$$

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы обобщенное решение $u(x)$ из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) с $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, имело предел в смысле L_p на Γ_1 и предел в смысле L_p с весом r_1 на Γ_0 , необходимо и достаточно, чтобы $u(x) \in H_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ — обобщенное решение из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) с $f \in L_{p,\text{loc}}^\theta(Q, r_1)$, $0 \leq \theta \leq 2p - 1$, принадлежащее классу H_p . Пусть λ_0 — число, определенное в теореме 2. Обозначим через $u_0(x)$ обобщенное решение из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ задачи

$$\begin{aligned} L_{\lambda_0} u_0 &\equiv - \sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} u_{0x_i})_{x_j} - x_n u_{0x_n x_n} \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_{0x_i} - a_n u_{0x_n} + \lambda_0 u_0 = f(x) - (a - \lambda_0)u, \\ u_0|_{\Gamma_1} &= 0, \quad u_0|_{\Gamma_0} = 0. \end{aligned}$$

Такое решение существует в силу теоремы 2 и принадлежит классу $\bar{H}_p$. Тогда разность $V = u - u_0$ принадлежит классу $\bar{H}_p$ и является решением из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения

$$L_{\lambda_0} V = 0. \quad (36)$$

Таким образом, достаточно доказать утверждение теоремы 3 для уравнения (36).

Предположим вначале, что $p = 2$.

Пусть $p = 2$ и u — обобщенное решение из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (36) с $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, принадлежащее классу H_2 (и, тем самым, классу $\bar{H}_2$).

Рассмотрим множество принадлежащих $L_2(\Gamma_1)$ функций

$$u(x_\delta(x)) \sqrt{\zeta_\beta(x_n)}, \quad 0 < \delta < \delta_0, \quad 0 < \beta < \delta_0,$$

где

$$\zeta_\beta(x_n) = \begin{cases} 1, & \beta \leq x_n, \\ 0, & 0 \leq x_n < \beta. \end{cases}$$

Из принадлежности функции $u(x)$ классу $\bar{H}_2$ немедленно следует ограниченность в $L_2(\Gamma_1)$ этого множества и, тем самым, его слабая компактность. Следовательно, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4. Если обобщенное решение $u(x)$ из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) принадлежит классу $\overline{H}_2$, то существует такая функция $\varphi(x) \in L_2(\Gamma_1)$ и такие последовательности $\delta_k, k = 1, 2, \dots, 0 < \delta_k < \delta_0, \delta_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и $\beta_m, m = 1, 2, \dots, 0 < \beta_m < \delta_0, \beta_m \downarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, что

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \beta_m\}} (u(x_{\delta_k}(x)) - \varphi(x))g(x) ds = 0 \quad (37)$$

для любой функции $g(x) \in L_2(\Gamma_1)$.

Аналогично, из принадлежности $u(x)$ классу $\overline{H}_2$ следует, что множество

$$\left\{ u(x', \beta) \sqrt{\frac{\zeta_2(\delta, x', \beta)}{\rho_1(x', \beta)}}, 0 < \delta < \delta_0, 0 < \beta < \delta_0 \right\},$$

где

$$\zeta_2(\delta, x', \beta) = \begin{cases} \rho_1(x', \beta) - \delta, & (x', \beta) \in Q_\delta, \\ 0, & (x', \beta) \in Q \setminus Q_\delta, \end{cases}$$

ограничено в $L_2(\Gamma_0, r_1)$ и, следовательно, слабо компактно, т.е. справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Если обобщенное решение из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) принадлежит классу $\overline{H}_2$, то существует такая функция $\psi(x) \in L_2(\Gamma_0, r_1)$ и такие последовательности $\delta'_k, k = 1, 2, \dots, 0 < \delta'_k < \delta_0, \delta'_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и $\beta'_m, m = 1, 2, \dots, 0 < \beta'_m < \delta_0, \beta'_m \downarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, что

$$\lim_{k, m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{0\delta'_k}} (u(x', \beta'_m) - \psi(x'))r_1(x', 0)v(x', 0)dx' = 0$$

для любой функции $v(x') \in L_2(\Gamma_0, r_1)$.

ЛЕММА 6. Если обобщенное решение $u(x)$ из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) с $a_n(x', 0) < 1, x' \in \overline{\Gamma}_0$, принадлежит классу $\overline{H}_2$, то функция

$$G(\delta, \beta) = \int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \beta\}} u(x_\delta(x))g(x)ds, \quad 0 < \delta < \delta_0, \quad 0 < \beta < \delta_0,$$

где $g(x)$ – произвольная функция, принадлежащая $L_2(\Gamma_1)$, имеет предел при $\delta \rightarrow +0, \beta \rightarrow +0$:

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} G(\delta, \beta) = (\varphi, g)_{L_2(\Gamma_1)},$$

и функция

$$\Phi(\delta, \beta) = \int_{\Gamma_{0\delta}} u(x', \beta)r_1(x', 0)v(x')dx', \quad 0 < \delta < \delta_0, \quad 0 < \beta < \delta_0,$$

где $v(x')$ – произвольная функция, принадлежащая $L_2(\Gamma_0, r_1)$, также имеет предел при $\delta \rightarrow +0, \beta \rightarrow +0$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству соответствующих лемм в работах [1], [14], поэтому мы его приводить не будем.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение леммы 6 остается справедливым и в случае, если $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$.

Отметим, что из принадлежности $u(x)$ классу $\overline{H}_2$ следует, что

$$\int_Q (|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) r_1(x) dx < \infty,$$

и, следовательно, для любого $\beta_1 > 0$ в силу эллиптичности уравнения (3) при $x_n > \beta_1$ получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \beta_1\}} (u(x_\delta(x)) - \varphi)^2 ds = 0.$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2 при $p = 2$ нам достаточно установить равенства

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_1 \cap \{\beta < x_n < \delta_0\}} (u(x_\delta(x)) - \varphi(x))^2 ds = 0, \quad (38)$$

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_{0\delta}} (u(x', \beta) - \psi(x'))^2 r_1(x', 0) ds = 0. \quad (39)$$

Пусть $\xi(x_n) \in C^\infty[0, \infty)$,

$$\xi(x_n) = \begin{cases} 1, & 0 < x_n \leq \delta_0, \\ 0, & x_n > 2\delta_0, \end{cases} \quad (*)$$

и рассмотрим функцию $u_1(x) = u(x)\xi(x_n)$. Очевидно, что $u_1(x) \equiv 0$ при $x_n > 2\delta_0$ и удовлетворяет в Q уравнению

$$\begin{aligned} & - \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} u_{1x_i})_{x_j} - x_n u_{1x_n x_n} \right) - \sum_{i=1}^n a_i u_{1x_i} + \lambda_0 u_1 \\ & = 2x_n u_{x_n} \xi_{x_n} + u(\xi_{x_n x_n} x_n + a_n \xi_n) \equiv f_1, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\int_Q f_1^2 \rho_1(x) dx < \infty.$$

Обозначим $\overline{Q}_1 = Q \cap \{0 < x_n < h_1\}$; тогда $\overline{Q}_1 = \Gamma_0 \times (0, h_1)$ в силу ограничения на область Q . Следовательно, функция $u(x)$ удовлетворяет в Q уравнению (40) и существуют такие функции $\varphi_1 \in L_2(\partial\Gamma_0 \times (0, h_1))$ и $\psi \in L_2(\Gamma_0, r_1)$, что

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_\beta^{h_1} \int_{\partial\Gamma_0} (u_1(x_\delta(x)) - \varphi_1(x)) g(x) ds = 0 \quad (41)$$

для любой функции $g(x) \in L_2(\partial\Gamma_0 \times (0, h_1))$ и

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_{0\delta}} (u_1(x', \beta) - \psi(x')) r_1(x', 0) v(x') dx' = 0 \quad (42)$$

для любой функции $v(x') \in L_2(\Gamma_0, r_1)$.

Как и в случае строго эллиптического уравнения [1], [7], [9], будем предполагать сначала, что область Γ_0 – звездная область. Не ограничивая общности, можно считать, что Γ_0 содержит начало координат и является строго звездной относительно начала координат. В этом случае границу области Γ_0 можно задать уравнением $|x'| = F(x')$, где $F(x')$ – положительно определенная функция нулевой степени. Наряду с областями $\Gamma_{0\delta}$, $0 < \delta < \delta_0$, для звездной области Γ_0 будем рассматривать области $\Gamma_{0\delta}^*$, $\Gamma_{0\delta}^* = \{|x'| < (1 - \delta)F(x')\}$, $0 < \delta < \delta'_0 < \delta_0$, с границей $\partial\Gamma_{0\delta}^* = \{|x'| = (1 - \delta)F(x')\}$, и пусть $\bar{\rho}(x') = \rho_1(x', 0)$.

Обозначим

$$M^*(\delta, \beta) = \max_{\substack{\delta_1 \in [\delta, \delta'_0] \\ \beta_1 \in [\beta, \delta'_0]}} \left[\int_{\beta_1}^{\delta_1} dx_n \int_{\partial\Gamma_0} u_1^2((1 - \delta_1)x', x_n) ds + \int_{\Gamma_{0\delta_1}^*} u_1^2(x', \beta_1) \bar{\rho}(x') dx \right]. \quad (43)$$

Нетрудно доказать, что если $u(x) \in \overline{H}_2$, то функция $M^*(\delta, \beta)$ ограничена на $(0, \delta'_0] \times (0, \delta'_0]$ и существуют такие функции $\varphi^* \in L_2(\partial\Gamma_0 \times (0, h_1))$ и $\psi^* \in L_2(\Gamma_0, \bar{\rho})$, что

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_{\beta}^{\delta_1} \int_{\partial\Gamma_0} (u_1((1 - \delta)x', x_n) - \varphi^*(x)) g(x) ds = 0 \quad (44)$$

для любой функции $g(x) \in L_2(\partial\Gamma_0 \times (0, h_1))$ и

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_{0\delta}^*} (u(x', \beta) - \psi^*(x')) v(x') \bar{\rho}(x') dx' = 0 \quad (45)$$

для любой функции $v(x') \in L_2(\Gamma_0, \bar{\rho})$. При этом справедлива следующая лемма (доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения для параболического уравнения, см. [16]).

ЛЕММА 7. Пусть Γ_0 – звездная область, а $u(x)$ – обобщенное решение из $W_{2, \text{loc}}^1(Q)$ уравнения (40), принадлежащее классу $\overline{H}_2$. Тогда функции φ_1 и φ^* , определенные по формулам (41), (44), и функции ψ_1 и ψ^* , определенные по формулам (42), (45), совпадают, т.е. $\varphi_1 = \varphi^*$ на $\partial\Gamma_0 \times (0, h_1)$ и $\psi_1 = \psi^*$ на Γ_0 .

Докажем теперь справедливость формул (38), (39).

Выберем произвольные $\alpha \in (1 - \delta'_0, 1)$, $\beta_2 \in (0, \delta'_0]$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $\beta \in (0, \delta_0]$ и возьмем в качестве $\eta(x)$ в равенстве (5) функцию, равную

$$u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) \frac{x_n - \beta}{x_n} (\bar{\rho}(x') - \delta)$$

в $\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)$ и нулю в $Q \setminus \{\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)\}$. (Отметим, что $u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) \equiv 0$, $x_n > 3\delta_0$.) В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{1x_i} u_{1x_j} (\alpha x', x_n + \beta_2) \frac{x_n - \beta}{x_n} (\bar{\rho} - \delta) \right. \\ & \left. + u_{1x_n} u_{1x_n} (\alpha x', x_n + \beta_2) (x_n - \beta) (\bar{\rho} - \delta) \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\partial\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \bar{\rho}_{x_i} \bar{\rho}_{x_j} u_1 u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) \frac{x_n - \beta}{x_n} ds dx_n \\
& - \int_{\Gamma_{0\delta}} u_1(x', \beta) u_1(\alpha x', \beta + \beta_2) (\bar{\rho} - \delta) dx' \\
& + \int_{\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)} u_1(x) u_{1x_n}(\alpha x', x_n + \beta_2) dx \\
& + \beta \int_{\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)} a_n u_1 u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) \frac{\bar{\rho} - \beta}{x_n^2} dx \\
& - \int_{\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} \bar{\rho}_{x_i})_{x_j} + a_{nx_n} (\bar{\rho} - \delta) \frac{x_n - \beta}{x_n} \right] u_1 u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) dx \\
& + \int_{\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)} \lambda_0 u_1 u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) \frac{x_n - \beta}{x_n} (\bar{\rho} - \delta) dx \\
& - \int_{\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_{1x_i} u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) \right] \frac{x_n - \beta}{x_n} (\bar{\rho} - \delta) dx \\
& - \int_{\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \bar{\rho}_{x_i} u_{1x_j}(\alpha x', x_n + \beta_2) u_1(x) \frac{x_n - \beta}{x_n} dx \\
& + \int_{\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)} a_n(x) u_{1x_n}(\alpha x', x_n + \beta_2) u_1(x) \frac{x_n - \beta}{x_n} (\bar{\rho} - \delta) dx \\
& = \int_{\Gamma_{0\delta} \times (\beta, h_1)} f_1 u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) \frac{x_n - \beta}{x_n} (\bar{\rho} - \delta) dx.
\end{aligned}$$

Устремим β и δ к нулю:

$$\begin{aligned}
& \int_{\bar{Q}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{1x_i} u_{1x_j}(\alpha x', x_n + \beta_2) \bar{\rho} + u_{1x_n} u_{1x_n}(\alpha x', x_n + \beta_2) x_n \bar{\rho} \right] dx \\
& - \int_{\bar{Q}} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_{1x_i} \right] u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) dx + \int_{\bar{Q}} u_1(x) u_{1x_n}(\alpha x', x_n + \beta_2) dx \\
& + \int_{\bar{Q}} \lambda_0 u_1 u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) \bar{\rho} dx - \int_{\bar{Q}} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \bar{\rho}_{x_i} u_{1x_j}(\alpha x', x_n + \beta_2) u_1(x) dx \\
& + \int_{\bar{Q}} a_n u_{1x_n}(\alpha x', x_n + \beta_2) u_1(x) \bar{\rho} dx \\
& - \int_{\bar{Q}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} \bar{\rho}_{x_i})_{x_j} + a_{nx_n} \bar{\rho} \right] u_1(x) u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) dx \\
& = \int_{\bar{Q}} f_1 u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) \bar{\rho} dx + \int_{\Gamma_0} (1 - a_n(x', 0)) \psi u_1(\alpha x', \beta_2) \bar{\rho} dx' \\
& + \int_{\partial\Gamma_0 \times (\beta, h_1)} \varphi_1 u_1(\alpha x', x_n + \beta_2) \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \bar{\rho}_{x_i} \bar{\rho}_{x_j} ds dx_n. \tag{46}
\end{aligned}$$

Так как $\bar{u}_1 \equiv u_1(\alpha x', x_n + \beta_2)$ является решением в $\bar{Q}$ уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\bar{a}_{ij} \bar{u}_{1x_i})_{x_j} + (x_n + \beta_2) \bar{u}_{1x_n x_n} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{a}_i \bar{u}_{1x_i} + a_n u_{1x_n} - \bar{\lambda}_0 u_1 = -\bar{f}_1, \\ \bar{f}_1 \equiv f_1(\alpha x', x_n + \beta_2), \end{aligned} \quad (47)$$

где $\bar{a}_{ij} = a_{ij}(\alpha x', x_n + \beta_2)$, $\bar{a}_i = a_i(\alpha x', x_n + \beta_2)$, $i, j = 1, \dots, n-1$, $\bar{a}_n = a_n(\alpha x', x_n + \beta_2)$, то справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{Q}} \left[\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \bar{a}_{ij} \bar{u}_{1x_i} u_{1x_j} \frac{x_n}{x_n + \beta_2} + \bar{u}_{1x_n} u_{1x_n} x_n \right] \bar{\rho} dx \\ - \int_{\bar{Q}} u_{1x_n} u_1 \bar{\rho} dx - \int_{\bar{Q}} \left[\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{a}_i \bar{u}_{1x_i} - \lambda_0 \bar{u}_1 \right] u_1 \frac{x_n}{x_n + \beta_2} \bar{\rho} dx \\ - \int_{\bar{Q}} \bar{a}_n \bar{u}_{1x_n} u_1 \frac{x_n}{x_n + \beta_2} \bar{\rho} dx + \int_{\bar{Q}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha^2} \bar{a}_{ij} \bar{\rho}_{x_i} \bar{u}_{1x_j} u_1 \frac{x_n}{x_n + \beta_2} dx \\ = \int_{\bar{Q}} \bar{f}_1 u_1 \bar{\rho} dx. \end{aligned} \quad (48)$$

Сложим равенства (46) и (48):

$$\begin{aligned} \int_{\bar{Q}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} \left(a_{ij} + \frac{1}{\alpha^2} a_{ij} \frac{x_n}{x_n + \beta_2} \right) \bar{u}_{1x_i} u_{1x_j} + 2 \bar{u}_{1x_n} u_{1x_n} x_n \right] \bar{\rho} dx \\ + \int_{\bar{Q}} \left(\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_0 \frac{x_n}{x_n + \beta_2} \right) \bar{u}_1 u \bar{\rho} dx \\ - \int_{\bar{Q}} \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{ij} u_{1x_i} \bar{u}_1 + \frac{1}{\alpha} a_i \bar{u}_{1x_i} u_1 \frac{x_n}{x_n + \beta_2} \right) \bar{\rho} dx \\ + \int_{\bar{Q}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha^2} \bar{a}_{ij} \frac{x_n}{x_n + \beta_2} - a_{ij} \right) \bar{u}_{1x_i} u_{1x_j} \bar{\rho}_{x_j} dx \\ - \int_{\bar{Q}} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\bar{a}_{ij} \bar{\rho}_{x_i})_{x_j} \bar{u}_1 u_1 dx - \int_{\bar{Q}} (a_n \bar{\rho})_{x_n} \bar{u}_1 u dx \\ + \int_{\bar{Q}} \left(a_n - \bar{a}_n \frac{x_n}{x_n + \beta_2} \right) \bar{u}_{1x_n} u_1 \bar{\rho} dx \\ = \int_{\bar{Q}} \left(f_1 \bar{u}_1 + \bar{f}_1 u_1 \frac{x_n}{x_n + \beta_2} \right) \bar{\rho} dx \\ + \int_{\partial \Gamma_{0\delta} \times (0, h_1)} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \bar{\rho}_{x_i} \bar{\rho}_{x_j} \varphi \bar{u}_1 ds \\ + \int_{\Gamma_0} (1 - a_n(x', 0)) \psi \bar{u}_1(\alpha x', \beta_2) \bar{\rho}(x) dx. \end{aligned} \quad (49)$$

Положим в равенстве (49) $\beta_2 = (1 - \alpha)^2$ и отметим, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \int_Q \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha^2} \bar{a}_{ij} \frac{x_n}{x_n + (1 - \alpha)^2} - a_{ij} \right) \bar{\rho}_{x_j} \bar{u}_{1x_i} u_1 dx = 0 \quad (50)$$

и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \int_Q \left(\bar{a}_n \frac{x_n}{x_n + (1 - \alpha)^2} - a_n \right) \bar{u}_{1x_n} u \bar{\rho} dx = 0. \quad (51)$$

Действительно, для любого рассматриваемого α

$$\begin{aligned} & \int_Q \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha^2} \bar{a}_{ij} \frac{x_n}{x_n + (1 - \alpha)^2} - a_{ij} \right) \bar{u}_{1x_i} \bar{\rho}_{x_j} u_1 dx \\ &= \int_Q \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{x_n}{x_n + (1 - \alpha)^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \bar{\rho}_{x_j} \bar{u}_{1x_i} u_1 dx \\ &+ \int_Q \frac{1}{\alpha^2} \frac{x_n}{x_n + (1 - \alpha)^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\bar{a}_{ij} - a_{ij}) \bar{\rho}_{x_j} \bar{u}_{1x_i} u_1 dx \\ &- \int_Q \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{(1 - \alpha)^2}{x_n + (1 - \alpha)^2} \bar{\rho}_{x_j} \bar{u}_{1x_i} u_1 dx \\ &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 - \bar{I}_3. \end{aligned}$$

Отметим вначале, что

$$|\bar{I}_1| + |\bar{I}_2| \leq C_{24} \sqrt{1 - \alpha} \left[\int_Q |\nabla' \bar{u}_1|^2 (1 - \alpha) dx + \int_Q u^2 dx \right].$$

Представим теперь I_3 в виде

$$\begin{aligned} \bar{I}_3 &= \int_0^{h_1} dx_n \int_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_{0 \ 1-\alpha}^*} \sum_{i,j=1}^{n-1} \bar{a}_{ij} \frac{(1 - \alpha)^2}{x_n + (1 - \alpha)^2} \bar{\rho}_{x_j} \bar{u}_{1x_i} u_1 dx' \\ &+ \int_0^{h_1} dx_n \int_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_{0 \ 1-\alpha}^*} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{(1 - \alpha)^2}{x_n + (1 - \alpha)^2} \bar{\rho}_{x_j} \bar{u}_{1x_i} u_1 dx = \bar{I}_{31} + \bar{I}_{32}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bar{I}_{31}| &\leq C_{15} \left[\int_0^{h_1} \int_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_{0 \ 1-\alpha}^*} |\nabla' \bar{u}_1|^2 (1 - \alpha) dx \right]^{1/2} \\ &\times \left[\int_0^{h_1} dx_n \int_0^{1-\alpha} d\rho \int_{\partial \Gamma_{0 \ 1-\rho}^*} \frac{u^2}{1 - \alpha} ds_\rho \right]^{1/2} \\ &\leq C_{16} \left[\int_0^{h_1} \int_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_{0 \ 1-\alpha}^*} |\nabla' \bar{u}_1|^2 (1 - \alpha) dx \right]^{1/2} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 1 - 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{I}_{32} &= \int_0^{\sqrt{1-\alpha}} dx_n \int_{\Gamma_{0,1-\alpha}^*} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{(1-\alpha)^2}{x_n + (1-\alpha)^2} \rho_{x_j} \bar{u}_{1x_i} u_1 dx' \\
&\quad + \int_{\sqrt{1-\alpha}}^{h_1} dx_n \int_{\Gamma_{0,1-\alpha}^*} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{(1-\alpha)^2}{x_n + (1-\alpha)^2} \rho_{x_j} \bar{u}_{1x_i} u_1 dx' = \bar{I}'_{32} + \bar{I}''_{32}, \\
|\bar{I}'_{32}| &\leq C_{17} \left[\int_0^{\sqrt{1-\alpha}} dx_n \int_{\Gamma_{0,1-\alpha}^*} |\nabla' \bar{u}|^2 (1-\alpha) dx' \right]^{1/2} \\
&\quad \times \left[(1-\alpha)^2 \int_0^{\sqrt{1-\alpha}} \frac{dx_n}{[x_n + (1-\alpha)^2]^2} \int_{\Gamma_{0,1-\alpha}^*} \bar{u}_1^2 (1-\alpha) dx' \right]^{1/2} \\
&\leq C_{18} \left(\int_0^{\sqrt{1-\alpha}} dx_n \int_{\Gamma_{0,1-\alpha}^*} |\nabla' \bar{u}_1|^2 (1-\alpha) dx' \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 1-0, \\
|\bar{I}''_{32}| &\leq C_{19} \left(\int_{\sqrt{1-\alpha}}^{h_1} dx_n \int_{\Gamma_{0,1-\alpha}^*} |\nabla' \bar{u}_1|^2 (1-\alpha) dx' \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left((1-\alpha) \int_{\sqrt{1-\alpha}}^{h_1} dx_n \int_{\Gamma_{0,1-\alpha}^*} \bar{u}_1^2 dx' \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 1-0.
\end{aligned}$$

Аналогично показывается и равенство (51).

Перейдем в равенстве (49) (положив в нем $\beta = (1-\alpha)^2$) к пределу при $\alpha \rightarrow 1-0$. В силу (50), (51) имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\bar{Q}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{1x_i} u_{1x_j} + x_n u_{1x_n}^2 \right] \bar{\rho} dx \\
&\quad + \int_{\bar{Q}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_{1x_i} + x_n b u_{1x_n} \right) u_1 \bar{\rho} dx + \int_{\bar{Q}} \lambda_0 u_1^2 \bar{\rho} dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\bar{Q}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} \bar{\rho}_{x_i})_{x_j} + (a_n \bar{\rho})_{x_n} \right] u_1^2 dx \\
&= \int_{\bar{Q}} f_1 u_1 \bar{\rho} dx + \frac{1}{2} \int_{\partial \Gamma_0 \times (0, h_1)} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \bar{\rho}_{x_i} \bar{\rho}_{x_j} \varphi_1^2 ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} [1 - a_n(x', 0)] \psi_1^2 \bar{\rho} dx. \tag{52}
\end{aligned}$$

Из (52) в силу лемм 6 и 7, неравенства (4), условия $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, и свойств функции $\xi(x_n)$ получаем справедливость равенств (25), (27) при $p = 2$.

Таким образом, утверждение теоремы 3 при $p = 2$ для строго звездной области Γ_0 доказано. Если Γ_0 не является строго звездной, то поступим аналогично тому, как это делалось в работах [1], [7]. Это замечание завершает доказательство утверждения теоремы при $p = 2$.

Отметим, что доказательство теоремы 3 при $p \in (1, \infty)$, $p \neq 2$, совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы в работах [2], [7], поэтому мы его приводить не будем.

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим случай $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$.

Будем говорить, что функция $u(x) \in W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ обладает свойством (A), если функция

$$N(\delta, \beta) = \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p \rho_1(x', \beta) dx' \quad (A)$$

ограничена на $(0, \delta_0] \times (0, \delta_0]$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u(x)$ – обобщенное решение из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) с $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$. Тогда для того чтобы функция $u(x)$ принадлежала классу H_p , необходимо, а при условии, что $u(x)$ обладает свойством (A), и достаточно, чтобы функция $(|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2)|u|^{p-2} \rho_1(x)$ была интегрируема по области Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. *Необходимость* теоремы 4 следует из замечания 1.

2. *Достаточность.* Пусть функция $u(x) \in W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ является обобщенным решением из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3), обладающим свойством (A), и

$$J_0(u) = \int_Q (|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} \rho_1(x) dx < \infty.$$

Так как из ограниченности $J_0(u)$ следует (см. доказательство теоремы 1), что

$$\int_Q |u|^p \rho_1(x) dx < \infty,$$

то из равенства (6) на основании лемм 2 и 3 имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \beta\}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \rho_{1x_i} \rho_{1x_j} \frac{x_n - \beta}{x_n} + \rho_{1x_n}^2 (x_n - \beta) \right] |u|^p ds \\ & \leq \beta \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} a_n |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} + \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' \\ & + C_{20} \left[J_0(u) + \int_Q |u|^p \rho_1 dx + \int_Q |f|^p \rho_1^\Theta dx \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

А так как из условия (A) следует, что $\forall \beta, \delta \in (0, \delta_0]$ выполняется неравенство

$$\beta \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} a_n(x) |u|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} \leq A_2$$

с постоянной A_2 , не зависящей ни от β , ни от δ , то из (53) получим, что

$$\sup_{\substack{\delta \in (0, \delta_0] \\ \beta \in (0, \delta_0]}} \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p ds < \infty. \quad (54)$$

Из условия (A) и (54) вытекает, что функция $u(x)$ принадлежит классу $\overline{H}_p$ и, тем самым, H_p . Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из доказательства теоремы 4 следует, что для того чтобы обобщенное решение $u(x)$ из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) с $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, удовлетворяющее условию (А), принадлежало классу H_p , необходимо и достаточно, чтобы $u(x)$ принадлежало классу $\bar{H}_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $u(x)$ называется обобщенным решением из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ задачи Дирихле для уравнения (3) с $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, $f \in L_p^\Theta(Q)$, $0 \leq \Theta < 2p - 1$, если она принадлежит пространству $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$, является обобщенным решением уравнения (3) и удовлетворяет условию

$$u|_{\Gamma_1} = \varphi, \quad \varphi \in L_p(\Gamma_1), \quad (55)$$

в смысле равенства

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \beta\}} |u(x_\delta) - \varphi(x)|^p ds = 0. \quad (56)$$

ТЕОРЕМА 5. Если обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (3) с $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, обладает свойством (А), то существует такая функция $\psi(x) \in L_p(\Gamma_0, r_1)$, что

$$\lim_{\beta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_0} |u(x', \beta) - \psi(x')|^p r_1(x', 0) dx' = 0. \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и во всех предыдущих случаях, для доказательства достаточно ограничиться случаем $p = 2$. Случай $p \in (1, \infty)$, $p \neq 2$ доказывается совершенно аналогично тому, как это делалось в работах [2], [7], [14], и мы на нем останавливаться не будем. Отметим только, что никаких трудностей из-за вырождения уравнения при этом не возникает.

Пусть $u(x)$ — обобщенное решение из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ задачи Дирихле (3), (55) ($p = 2$) с $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, обладающее свойством (А). В силу замечания 4 функция $u(x)$ принадлежит классу $\bar{H}_2$ и, как и в случае $a_n(x', 0) < 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, легко доказывается следующая лемма (см. замечание 3).

ЛЕММА 8. Если обобщенное решение задачи Дирихле (3), (55) ($p = 2$) с $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \bar{\Gamma}_0$, обладает свойством (А), то существует такая функция $\psi(x') \in L_2(\Gamma_0, r_1)$, что для любой функции $v(x) \in L_2(\Gamma_0, r_1)$ следует

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \int_{\Gamma_{0\delta}} (u(x', \beta) - \psi(x')) r_1(x', 0) v(x') dx' \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_0} (u(x', \beta) - \psi(x')) r_1(x', 0) v(x') dx' = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что доказательство теоремы 5 достаточно провести для функции $u_1(x) = u \xi(x_n)$, где функция $\xi(x_n)$ определена при доказательстве теоремы 3 по формуле (*). Функция $u_1(x)$ является обобщенным решением из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ задачи (40), (55) с $\varphi_1 = \varphi \xi(x_n)$, обладающим свойством (А). Так же как

и при доказательстве теоремы 3, ограничимся случаем, когда Γ_0 является строго звездной областью относительно начала координат (напомним, что, не ограничивая общности, всегда можно предполагать, что начало координат находится внутри области).

Так как из принадлежности функции $u(x)$ классу H_2 вытекает ее принадлежность классу $\overline{H}_2$, то функция

$$M_1^*(\delta, \beta) = \max_{\substack{\delta_1 \in (\delta, \delta_0] \\ \beta_1 \in (\delta, \delta_0]}} \left[\int_{\beta_1}^{h_1} dx_n \int_{\partial\Gamma_0} u_1^2((1-\delta_1)x', x_n) ds + \int_{\Gamma_{\delta_1}^*} u_1^2(x', \beta_1) r_1(x', \beta_1) dx' \right]$$

ограничена на $(0, \delta_0] \times (0, \delta_0]$. Следовательно, функция

$$\overline{M}_1^*(\delta, \beta) = \max_{\substack{\delta_1 \in (\delta, \delta_0] \\ \beta_1 \in (\delta, \delta_0]}} \left[\int_{\beta_1}^{h_1} dx_n \int_{\partial\Gamma_0} u_1^2((1-\delta_1)x', x_n) ds + \int_{\Gamma_{\delta_1}^*} u_1^2(x', \beta_1) \overline{\rho}(x') dx' \right]$$

ограничена на $(0, \delta_0] \times (0, \delta_0]$. Здесь $\overline{\rho}(x')$ — функция, определенная в теореме 3, и, как уже отмечалось в теореме 3,

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \int_{\beta}^{h_1} \int_{\Gamma_0} (u_1((1-\delta)x', x_n) - \varphi_1) g(x) ds' dx_n = 0$$

для любой функции $g(x) \in L_2(\partial\Gamma_0 \times (0, h_1))$,

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \int_{\Gamma_{0\delta}^*} (u(x', \beta) - \psi(x')) v(x') \overline{\rho}(x') dx' = 0$$

для любой функции $v(x) \in L_2(\Gamma_0, \overline{\rho}_1)$.

Утверждение теоремы будет следовать из равенства (49) на основании (56) (с $\varphi = \varphi_1$), леммы 8 и условия $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \overline{\Gamma}_0$. Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В силу теоремы 5 каждой функции $\varphi \in L_p(\Gamma_1)$ ставится в соответствие единственная функция $\psi(x') \in L_p(\Gamma_0, r_1)$, которая удовлетворяет условию (57). Ее в дальнейшем мы будем обозначать через $\psi_\varphi(x')$.

ТЕОРЕМА 6. *Существует такая постоянная $\lambda_0 > 0$, что для всех $\varphi \in L_p(\Gamma_1)$, $f \in L_p^\Theta(Q)$, $0 \leq \Theta < 2p - 1$, существует при $a(x) \geq \lambda_0$, $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \overline{\Gamma}_0$, обобщенное решение из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ задачи (3), (55), удовлетворяющее условию (A). Это решение единственно, и для него справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \int_Q (|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} r_1(x) dx + \int_Q |u|^p r_1(x) dx \\ & + \int_Q |\psi_\varphi|^p r_1(x', 0) dx' \leq C_{20} [\|f\|_{L_p^\Theta(Q)}^p + \|\varphi\|_{L_p(\Gamma_1)}^p]. \end{aligned} \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим вначале для обладающего свойством (А) обобщенного решения из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ задачи (3), (55) оценку (58).

Пусть функция $u(x)$ является обобщенным решением из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ задачи Дирихле (3), (55), обладающим свойством (А). Тогда функция $u(x)$ принадлежит классу $\overline{H}_p$ и на основании теоремы 4

$$\int_Q (|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} \rho_1(x) dx < \infty,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} J_{\delta, \beta}(u) &= J_0(u), \\ \lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx &= \int_Q |u|^p \rho_1(x) dx. \end{aligned}$$

Из принадлежности $u(x)$ классу $\overline{H}_p$ следует также справедливость оценки (29). Поэтому из равенства (6) на основании лемм 1–3 следует

$$\begin{aligned} J_{\delta, \beta}(u) &+ \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} a |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{0\delta}} (a_n(x', \beta) - 1) |u(x', \beta)|^p (\rho_1(x', \beta) - \delta) dx' \\ &\leq C_{21} \left[\|f\|_{L_p^\ominus(Q, r_1)}^p + \int_{\Gamma_{1\delta} \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p ds \right. \\ &+ \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} |u|^p \frac{x_n - \beta}{x_n} (\rho_1 - \delta) dx \\ &\left. + \beta \int_{Q_\delta \cap \{\beta \leq x_n \leq \sqrt{\beta}\}} |u|^{p-1} |u_{x_n}| (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Переходя в (59) к пределу при $\delta, \beta \rightarrow +0$, учитывая, что $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \overline{\Gamma}_0$, и

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_{Q_\delta \cap \{\beta \leq x_n \leq \sqrt{\beta}\}} |u|^{p-1} |u_{x_n}| (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n} = 0,$$

получаем неравенство

$$\begin{aligned} J_0(u) + \int_Q (a - C_{21}) |u|^p \rho_1 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (a_n(x', 0) - 1) |\psi_2|^p \rho(x', 0) dx' \\ \leq C_{22} [\|f\|_{L_p^\ominus(Q, r_1)}^p + \|\varphi\|_{L_p^\ominus(\Gamma_1)}^p], \end{aligned}$$

из которого при $\lambda_0 = C_{21} + 1$ и следует оценка (58).

Докажем теперь, что обобщенное решение из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ задачи (3), (55), удовлетворяющее условию (А), существует.

Возьмем произвольные функции $\varphi \in L_p(\Gamma_1)$ и $f \in L_p^\Theta(Q)$, $0 \leq \Theta < 2p - 1$. Пусть $\{\varphi_m\}$ – некоторая последовательность финитных в Γ_1 функций из $C^3(\Gamma_1)$, сходящаяся в $L_p(\Gamma_1)$ к функции $\varphi(x)$:

$$\|\varphi_m - \varphi\|_{L_p(\Gamma_1)} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (60)$$

и пусть $\{f_m(x)\}$ – некоторая последовательность функций из $C^1(\overline{Q})$, сходящаяся в $L_p^\Theta(Q)$ к функции $f(x)$:

$$\|f_m - f\|_{L_p^\Theta(Q)} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (61)$$

Пусть также $\{a_i^m\}$ – последовательности функций из $C^1(\overline{Q})$, сходящиеся в $C(\overline{Q})$ к a_i соответственно ($i = 1, 2, \dots, n - 1$).

Обозначим через $u_m(x)$ ограниченное решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned} & - \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + x_n u_{x_n x_n} \right) \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^m u_{x_i} - a_n u_{x_n} + a u = f_m(x) \end{aligned} \quad (62)$$

с $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \overline{\Gamma}_0$, $a(x) \geq \lambda_0$.

Такое решение $u_m(x)$ существует и единственно [18], [19] и, очевидно, является обобщенным решением из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (62). При этом

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_{1\delta}} |u_m - \varphi_m|^p ds = 0 \quad (63)$$

и функция $u_m(x)$ удовлетворяет условию (А).

Записав равенство (6) для функции $u_m(x)$, мы получим с учетом (63) и условия (А), что существует такая постоянная C_{23} , что для всех $\delta, \beta \in (0, \delta_0]$

$$\beta \int_{Q_\delta \cap \{x_n > \beta\}} (a_n^m - 1) |u_m|^p (\rho_1 - \delta) \frac{dx}{x_n^2} \leq C_{23}. \quad (64)$$

Таким образом, для функции $u_m(x)$ справедлива оценка (58) и в силу (60), (61) с учетом сходимости в $C(\overline{Q})$ последовательностей $a_i^m(x)$ к функциям a_i соответственно ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) из равенства (6) также следует, что постоянная C_{20} в неравенстве (58) не зависит от m . Следовательно, последовательность $\{u_m(x)\}$

сходится к некоторой функции $u(x)$ в банаховом пространстве $\overline{B}$ с нормой

$$\begin{aligned}
\|u\|_B^p &= \int_Q (|\nabla' u|^2 + x_n u_{x_n}^2) |u|^{p-2} \rho_1(x) dx \\
&\quad + \int_Q |u|^p \rho_1(x) dx + \sup_{\delta, \beta \in (0, \delta_0]} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta)|^p \rho_1(x', \beta) dx' \\
&\quad + \sup_{\delta, \beta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \beta\}} |u(x_\delta(x))|^p ds, \\
&\quad \int_Q [|\nabla'(u - u_m)|^2 + x_n (u_{x_n} - u_{mx_n})^2] |u - u_m|^{p-2} \rho_1(x) dx \\
&\quad + \int_Q |u - u_m|^p \rho_1(x) dx + \sup_{\delta, \beta \in (0, \delta_0]} \int_{\Gamma_{0\delta}} |u(x', \beta) - u_m(x', \beta)|^p \rho_1(x', \beta) dx' \\
&\quad + \sup_{\delta, \beta} \int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \beta\}} |u(x_\delta(x) - u_m(x_\delta(x)))|^p ds \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{65}$$

Из (65) немедленно следует (доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения теоремы 2), что функция $u(x)$ является обобщенным решением из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3), удовлетворяющим условию (A).

А так как

$$\int_{\Gamma_{1\delta}} |u - u_m|^p ds \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

то функция $u(x)$ принимает граничное условие (55) в смысле равенства (56). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Для того чтобы функция $u(x) \in W_{p, \text{loc}}^1(Q)$, являющаяся обобщенным решением уравнения (3) с $a_n(x', 0) > 1$, $x' \in \overline{\Gamma}_0$, имела предел в смысле L_p на Γ_1 и предел в смысле L_p с весом r_1 на Γ_0 , необходимо и достаточно, чтобы функция $u(x)$ принадлежала классу $\overline{H}_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ — обобщенное решение из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ уравнения (3) с $f \in L_p^\Theta(Q)$, $0 \leq \Theta < 2p - 1$, принадлежащее классу $\overline{H}_p$. Пусть λ_0 — число, определенное в теореме 6, а $\chi > 1$ — некоторое число (его мы определим ниже). Обозначим через $u_1(x)$ решение из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ задачи

$$\begin{aligned}
L_{\lambda_0} u &\equiv - \sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} - x_n u_{x_n x_n} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_{x_i} - (a_n + x_n b) u_{x_n} + \chi \lambda_0 u = f, \\
u|_{\Gamma_1} &= 0,
\end{aligned}$$

удовлетворяющее условию (A). Такое решение существует в силу теоремы 6 и принадлежит классу $\overline{H}_p$. Тогда разность $u_2 = u - u_1$ принадлежит классу $\overline{H}_p$ и является обобщенным решением из $W_{p, \text{loc}}^1(Q)$ уравнения

$$L_{\lambda_0} u_2 = -(a - \chi \lambda_0) u \equiv f_1. \tag{66}$$

Таким образом, достаточно доказать утверждение теоремы 7 для уравнения (66).

Отметим, что, как и во всех предыдущих случаях, доказательство достаточно привести для случая $p = 2$.

Пусть $u(x)$ – решение из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения (66), принадлежащее классу $\overline{H}_2$. Легко видеть (см., например, леммы 4 и 5), что существуют такие функции $\varphi(x) \in L_2(\Gamma_1)$ и $\psi(x) \in L_2(\Gamma_0, r_1)$, что

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \beta\}} (u(x_\delta(x)) - \varphi(x)) g(x) ds = 0 \quad (67)$$

для любой функции $g(x) \in L_2(\Gamma_1)$ и

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta} (u(x', \beta) - \psi(x')) v(x') \rho_1(x', \beta) dx' = 0 \quad (68)$$

для любой функции $v(x') \in L_2(\Gamma_0, r_1)$.

Обозначим через u_3 решение из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, обладающее свойством (А), задачи

$$L_{\chi\lambda_0} u = f_1, \quad u|_{\Gamma_1} = \varphi.$$

Тогда функция $u_4(x) = u - u_3$ будет решением из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ уравнения

$$L_{\chi\lambda_0} u_4 = 0, \quad (66_0)$$

принадлежащим классу $\overline{H}_2$, удовлетворяющим условиям

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \int_{\Gamma_1 \cap \{x_n > \beta\}} u_4(x_\delta(x)) g(x) ds = 0$$

для любой функции $g(x) \in L_2(\Gamma_1)$ и

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \int_{\Gamma_{0\delta}} (u_4(x', \beta) - \psi_1(x')) v(x') \rho_1(x', \beta) dx' = 0,$$

где $\psi_1(x') = \psi(x') - \psi_\varphi(x')$ (см. замечание 5).

Рассмотрим функцию $u_5 = u_4 \xi(x_n)$, где функция $\xi(x_n)$ определена в теореме 3 по формуле (*). Функция $u_5(x) \equiv 0$, если $x_n > 2\delta_0$ и

$$\begin{aligned} & - \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} u_{5x_i})_{x_j} + x_n u_{5x_n x_n} \right) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_{5x_i} + \chi \lambda_0 u_0 \\ & = 2x_n u_{4x_n} \zeta_{x_n} + u_4 (x_n \zeta_{x_n x_n} + a_n \zeta_{x_n}). \end{aligned}$$

Легко видеть, что функция $u_5(x)$ удовлетворяет равенству (это утверждение доказывается аналогично соответствующему утверждению теоремы 3):

$$\begin{aligned}
& \int_{\overline{Q}} \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{5x_i} u_{5x_j} + x_n u_{5x_n}^2 \right) \rho_1(x) dx \\
& + \int_{\overline{Q}} \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_{5x_i} u_5 \rho_1(x) dx + \int_{\overline{Q}} u_5^2 \chi \lambda_0 \rho_1 dx \\
& - \frac{1}{2} \int_{\overline{Q}} \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} \rho_{1x_i})_{x_j} + (a_n \rho_1)_{x_n} \right] u_5^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (a_n(x', 0) - 1) \psi^2 \rho_1 dx' \\
& = \int_{\overline{Q}} [2x_n u_{4x_n} \xi_{x_n} + u_4(x_n \xi_{x_n x_n} + a_n \xi_{x_n})] u_5 \rho_1(x) dx, \tag{69}
\end{aligned}$$

где $\overline{Q} = \Gamma_0 \times (0, h_1)$. Отметим при этом, что в силу свойств функции $\xi(x_n)$

$$\begin{aligned}
& \int_{\overline{Q}} [2x_n u_{4x_n} \xi_{x_n} + u_4(x_n \xi_{x_n x_n} + a_n \xi_{x_n})] u_5 \rho_1(x) dx \\
& = \int_{\Gamma_0 \times [\delta, 2\delta_0]} [2x_n u_{4x_n} \xi_{x_n} + u_4(x_n \xi_{x_n x_n} + a_n \xi_{x_n})] u_5 \rho_1(x) dx. \tag{70}
\end{aligned}$$

Из (69) с учетом (70) на основании свойств функций $\xi(x_n)$ и $\rho_1(x)$ имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\delta_0} \int_{\Gamma_0} (|\nabla' u_4|^2 + x_n u_{4x_n}^2) \rho_1 dx \\
& + \int_{\overline{Q}} \lambda_0 (\chi - 1) u_4^2 \rho_1 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (a_n(x', 0) - 1) \psi_1^2 \rho_1 dx' \\
& \leq B_1 \left[\int_{\delta_0}^{2\delta_0} \int_{\Gamma_0} x_n u_{4x_n}^2 \rho_1(x) dx + \int_{\delta_0}^{2\delta_0} \int_{\Gamma_0} u_{4x_n}^2 \rho_1(x) dx \right], \tag{71}
\end{aligned}$$

где постоянная B_1 не зависит от λ_0 . Выберем $\delta_1^1 < \delta_0/2$ настолько малым числом, чтобы для всех $x_n \in (0, \delta_1^1)$ и всех $x' \in \overline{\Gamma}_0$ выполнялось неравенство $a_n(x', x_n) > 1$. Тогда из равенства (6) (заменив $a(x)$ на $\chi \lambda_0$) и лемм 1, 2 следует, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\overline{Q} \cap \{x_n > 2\delta_1^1\}} (|\nabla' u_4|^2 + x_n u_{4x_n}^2) \rho_1 dx + \int_{\overline{Q} \cap \{x_n > 2\delta_1^1\}} u_{4x_n}^2 \rho_1(x) dx \\
& \leq \varepsilon \int_{\overline{Q} \cap \{0 < x_n < 2\delta_0\}} (|\nabla' u_4|^2 + x_n u_{4x_n}^2) \rho_1(x) dx \\
& + C(\varepsilon) \int_{\delta_1^1}^{\delta_0} \frac{dx_n}{x_n^2} \int_{\Gamma_0} u^2 \rho_1(x') dx'. \tag{72}
\end{aligned}$$

Таким образом, из (71) с учетом (72) получим, что

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon B_1) \int_{\overline{Q} \cap \{0 < x_n < 2\delta_0\}} (|\nabla' u_4|^2 + x_n u_{4x_n}^2) \rho_1 dx \\ & + \int_{\overline{Q}} (\chi - 1) \lambda_0 u_4^2 \rho_1 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (a_n(x', 0) - 1) \psi_1^2 \rho_1(x') dx' \\ & \leq C(\varepsilon) \frac{B_1}{(\delta_1^1)^2} \int_{\overline{Q}} u_4^2 \rho_1(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon B_1) \int_{\overline{Q} \cap \{0 < x_n < 2\delta_0\}} (|\nabla' u_4|^2 + x_n u_{4x_n}^2) \rho_1(x) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (a_n(x', 0) - 1) \psi_1^2 \rho_1 dx \\ & + \left[\lambda_0(\chi - 1) - \frac{B_1 C(\varepsilon)}{(\delta_1^1)^2} \right] \int_{\overline{Q}} u_4^2 \rho_1(x) dx \leq 0. \end{aligned} \quad (73)$$

Выбрав ε так, чтобы $\varepsilon B_1 = 1/2$, а затем выбрав χ настолько большим, чтобы $\lambda_0(\chi - 1) - \frac{B_1 C(\varepsilon)}{(\delta_1^1)^2} > 0$, получим из (73), что $u_1 \equiv 0$ в $\overline{Q}$ и $\psi_1 \equiv 0$. Следовательно, $u \equiv u_3$ и тем самым выполняются равенства (56), (57) при $p = 2$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Михайлов В. П. О граничных значениях решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с гладкой границей // Матем. сб. 1976. Т. 101 (143). №2 (10). С. 163–188.
2. Гуцин А. К., Михайлов В. П. О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптических уравнений // Матем. сб. 1979. Т. 108 (150). №1. С. 3–21.
3. Riesz F. Über die Randwerte einer analytischen Funktion // Math. Z. 1923. V. 18. P. 87–95.
4. Littlewood J., Paley R. Theorems on Fourier series and power series. I // J. London Math. Soc. (2). 1931. V. 6. P. 230–233.
5. Littlewood J., Paley R. Theorems on Fourier series and power series. II // Proc. London Math. Soc. (3). 1936. V. 42. P. 52–89.
6. Littlewood J., Paley R. Theorems on Fourier series and power series. III // Proc. London Math. Soc. (3). 1937. V. 43. P. 105–126.
7. Петрушко И. М. О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей // Матем. сб. 1983. Т. 120 (162). №4. С. 569–588.
8. Гуцин А. К. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 137 (179). №1 (9). С. 19–64.
9. Михайлов Ю. А. О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений линейного эллиптического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. №2. С. 318–337.
10. Гуцин А. К., Михайлов В. П. О существовании граничных значений решений эллиптических уравнений // Матем. сб. 1991. Т. 182. №6. С. 787–810.
11. Гуцин А. К., Михайлов В. П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. №1. С. 121–160.
12. Гуцин А. К. Некоторые свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1998. Т. 189. №7. С. 53–90.

13. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки и техники. Матем. анализ. М.: ВИНТИ, 1971. С. 7–252.
14. Петрушко И. М. О граничных значениях решений вырождающихся на границе области эллиптических уравнений // Матем. сб. 1988. Т. 136 (178). № 2 (6). С. 241–259.
15. Петрушко И. М. О граничных значениях решений вырождающихся эллиптических уравнений типа Келдыша со слабым вырождением // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск, 1990. С. 166–182.
16. Петрушко И. М. О граничных и начальных условиях в L_p , $p > 1$, решений параболических уравнений // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4 (12). С. 489–521.
17. Кошелев П. И. Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем // УМН. 1958. Т. 13. № 4. С. 29–88.
18. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
19. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: НГУ, 1973.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
05.10.1998