Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Плахов, А. М. Степин, О рассеянии в многочастичных и бильярдных динамических системах, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 7, 73–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:17:38

УДК 514.85

А. Ю. Плахов, А. М. Степин

О рассеянии в многочастичных и бильярдных динамических системах

Предмет изучения – рассеяние в бильярдных динамических системах, а также в многочастичных системах (с потенциальным взаимодействием) на прямой. Известны примеры, когда отображение рассеяния таких систем оказывается треугольным, т.е. соответствующая матрица Якоби имеет блочно-треугольную форму. В статье доказано, что рассеяние бильярда в выпуклом многогранном конусе треугольно в том и только том случае, если этот конус является замыканием камеры группы Кокстера. Перечислены все наборы масс, для которых многочастичные системы с бильярдным взаимодействием обладают треугольным рассеянием. Далее, для многочастичных систем с отталкивающим взаимодействием доказано, что набор масс частиц принадлежит упомянутому списку в случае треугольного рассеяния. Охарактеризованы выпуклые плоские области, бильярды в которых имеют треугольное отображение рассеяния.

Библиография: 21 название.

Введение

В работе изучается рассеяние в многочастичных системах с потенциальным взаимодействием на прямой, а также рассеяние в динамических системах бильярдного типа с выпуклым конфигурационным пространством.

Движение $(x(t), y(t))$ натуральной гамильтоновой (или бильярдной) системы имеет *асимптотический импульс вперед* y^+ (соответственно *назад* y^-), если $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = y^\pm$. В случае лагранжевых систем соответствующие величины $v^\pm$ называются *асимптотическими скоростями*. Если потенциальное слагаемое в функции Лагранжа достаточно быстро убывает на бесконечности, то возможно дальнейшее уточнение асимптотического поведения движений. Например, в том случае, когда конфигурационное пространство есть область в евклидовом пространстве, асимптотическое поведение координаты может иметь вид $x(t) = v^\pm t + x^\pm + o(1)$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Отображение $\sigma: (x^-, v^-) \mapsto (x^+, v^+)$ называется *отображением рассеяния* системы; оно связано с оператором (и матрицей) рассеяния соответствующего квантового аналога этой системы. Известны примеры, когда отображение рассеяния оказывается треугольным, т.е. имеет блочно-треугольную матрицу Якоби (см. [1]–[4]). Свойство треугольности рассеяния непосредственно связано с существованием у системы полного набора полиномиальных по импульсам первых интегралов.

Работа поддержана при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01104) и фонда INTAS (грант № 00418i96).

Отображение рассеяния $\sigma: (x^-, p^-) \mapsto (x^+, p^+)$ является каноническим относительно 2-формы $\sum dp_i \wedge dx_i$. В случае треугольного рассеяния это обстоятельство позволяет полностью вычислить σ . Для многочастичных систем на прямой ответ получается такой: отображение σ представимо в виде композиции двухчастичных отображений рассеяния. Прямым и обратным задачам рассеяния для классических многочастичных систем посвящены работы [5]–[8].

В упомянутых выше статьях рассматриваются лишь системы взаимодействующих частиц равных масс. Основная цель настоящей работы – определить наборы масс, для которых соответствующие многочастичные системы на прямой могут иметь треугольное рассеяние. В связи с этой задачей естественно возникает и аналогичный вопрос относительно бильярдных систем.

Итак, рассматриваются гамильтоновы системы с конфигурационным пространством $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 < \dots < x_d\}$ и функцией Гамильтона вида

$$H(p, x) = \sum_{i=1}^d \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^{d-1} u_i(x_{i+1} - x_i) + W(x), \quad (*)$$

в частности системы с попарным взаимодействием; предполагается, что

$$\begin{aligned} u_i &\in C^2(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^\infty |u'_i(\xi)| d\xi < \infty, \\ \lim_{\xi \rightarrow 0+} u_i(\xi) &= +\infty, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0+} \frac{u'_i(\xi)}{u_i(\xi)} = -\infty, \quad i = 1, \dots, d-1, \\ W &\in C^2\left(\overline{Q} \setminus \bigcup_{i=1}^{d-2} \{x : x_i = x_{i+2}\}\right). \end{aligned}$$

Эти условия обеспечивают существование асимптотических импульсов у движений системы (*), а также выполнение следующего условия. Для любого вектора $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, $v_1 < \dots < v_d$, найдется такое число $t_0 \in \mathbb{R}^+$, что каждый вектор tv , $t > t_0$, принадлежит множеству M^+ асимптотических импульсов вперед тех движений, у которых существует асимптотический импульс назад. Аналогичным свойством обладает и множество M^- , получающееся из M^+ обращением времени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассеяние для гамильтоновых систем вида (*) назовем *простым*, если

- 1) для любого вектора $v = (v_1, \dots, v_d)$, $v_1 > \dots > v_d$, достаточно большой длины (зависящей от направления v) найдется движение, имеющее асимптотические импульсы $p^\pm$, причем $p^- = v$;
- 2) на M^- существует функция f такая, что $p^+ = f(p^-)$.

Это обобщение понятия треугольного рассеяния продиктовано желанием включить в рассмотрение системы с дальнедействующими потенциалами взаимодействия (см. [9], [10]). Вычисление наборов масс, для которых многочастичные системы с гамильтонианом (*) имеют простое рассеяние, проводится с помощью исследования асимптотики движений на поверхностях постоянной энергии E . При $E \rightarrow \infty$

отражение от гладкой потенциальной стенки, примыкающей к задаваемой уравнением $x_i = x_{i+1}$ гиперплоскости, переходит в бильярдное отражение в координатах $\xi_i = \sqrt{m_i} x_i$, а между моментами отражений движения выпрямляются.

Таким образом, проекции движений системы (*) на конфигурационное пространство сходятся при $E \rightarrow \infty$ к бильярдным траекториям в конусе

$$\tilde{Q} = \left\{ \xi : \frac{\xi_1}{\sqrt{m_1}} \leq \dots \leq \frac{\xi_d}{\sqrt{m_d}} \right\}.$$

Системе с функцией Гамильтона (*) сопоставим бильярдную систему в $\tilde{Q}$. Оказывается, что свойство простоты рассеяния в многочастичной системе наследуется предельной бильярдной системой. Для бильярда в области $V \subset \mathbb{R}^d$ простое рассеяние определяется аналогично предыдущему со следующим изменением в п. 1): для любого $v \in \mathbb{R}^d$ такого, что полупрямая tv , $t < 0$, пересекает V по лучу, существует движение с асимптотическими скоростями $v^\pm$, причем $v^- = v$. Отметим, что предложение о наследовании свойства простоты есть частный случай общего утверждения о предельном поведении отображения рассеяния, когда постоянная энергии стремится к бесконечности.

Бильярдные системы в выпуклых многогранных конусах, имеющие простое рассеяние, характеризует предложение (ср. с теоремой 1 ниже).

Бильярд в выпуклом коническом многограннике V обладает простым рассеянием в том и только том случае, если V изометричен замыканию камеры относительно конечной группы Кокстера.

Вычисление, использующее это необходимое и достаточное условие, приводит к следующему утверждению (см. § 1).

Если система из n ($n > 5$) точечных масс на прямой, свободно движущихся между моментами столкновений и упруго отражающихся при парных столкновениях, имеет треугольное рассеяние, то набор масс $m_1, \dots, m_n$ принадлежит (с точностью до обращения нумерации $i \mapsto n + 1 - i$) одному из двух типов:

$$m_i = \frac{c}{(i-1+k)(i+k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k > 0, \quad c > 0 \quad \text{или} \quad m_1 = \dots = m_n;$$

$$m_i = \frac{c}{(i-1+k)(i+k)}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad m_n = \frac{c}{n-1+k}, \quad k > 0, \quad c > 0.$$

Теорема 1 и утверждение о наследовании простоты рассеяния предельной (при $E \rightarrow \infty$) бильярдной системой приводят в § 2 к перечислению наборов масс, для которых система (*) может иметь простое рассеяние (теорема 2).

В § 3 рассматриваются бильярды в некомпактных выпуклых областях. Сопутствующий конус K такой области Q — это объединение лучей с вершиной в точке $x \in Q$, принадлежащих Q . Если бильярд в Q обладает простым рассеянием и K имеет внутренние точки, то K есть замыкание камеры относительно некоторой группы Кокстера. Если бильярд в выпуклом замкнутом множестве $V \subset \mathbb{R}^2$, содержащем некоторый угол, имеет простое рассеяние, то V — многоугольник, причем

линейные части отражений относительно его сторон порождают группу Кокстера $W \simeq I_2(n)$, а некоторый параллельный сдвиг многоугольника V содержится в камере группы W (теорема 3).

Приведенные выше результаты анонсированы в [11], [12].

Предварительный вариант настоящей статьи написан во время пребывания одного из авторов (А. С.) с визитом в институте Шрёдингера.

§1. Простое рассеяние и группы Кокстера

Рассмотрим систему из n точечных частиц на прямой, свободно движущихся между моментами парных столкновений и упруго отражающихся при таких столкновениях. Движения с k -кратными, $k > 2$, столкновениями определены, вообще говоря, лишь до первого (отсчитываемого от $-\infty$) момента времени, когда происходит непарное столкновение. Для почти всех точек фазового пространства этой системы движения с начальными условиями в этих точках определены во все моменты времени. Обозначим координаты частиц (в нумерации слева направо) через $x_1, \dots, x_n$, а их массы — через $m_1, \dots, m_n$ соответственно.

В координатах $\xi_i = \sqrt{m_i} x_i$, $i = 1, \dots, n$, движения рассматриваемой системы частиц с суммарной энергией $E = 1$ отвечают движения соответствующих фазовых точек (ξ, v) , $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, происходящие (между моментами столкновений) в прямом произведении многогранного конуса $\left\{ \xi : \frac{\xi_1}{\sqrt{m_1}} \leq \dots \leq \frac{\xi_n}{\sqrt{m_n}} \right\}$ и $(n-1)$ -мерной сферы единичного радиуса. При этом парное столкновение частиц с номерами i и $i+1$ переходит, как показывает непосредственная проверка, в бильярдное отражение (т.е. подчиняющееся закону: угол падения равен углу отражения) траектории “конфигурационной” точки ξ от гиперплоскости $\left\{ \xi : \frac{\xi_i}{\sqrt{m_i}} = \frac{\xi_{i+1}}{\sqrt{m_{i+1}}} \right\}$.

Будем говорить, что движение $(\xi(t), v(t))$ натуральной системы имеет *асимптотическую скорость вперед* v^+ (соответственно *назад* v^-), если $v(t) \rightarrow v^\pm$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Величины v^+ и v^- , рассматриваемые как функции на подмножествах M^+ и M^- фазового пространства Ω , где они определены, суть первые интегралы системы.

По определению динамическая система упруго сталкивающихся частиц на прямой имеет *простое рассеяние*, если из совпадения асимптотических скоростей назад для пары движений и существования их асимптотических скоростей вперед следует совпадение последних.

Для бильярдной системы в некомпактной области $D \subset \mathbb{R}^n$ простое рассеяние определяется аналогично: если для $v \in \mathbb{R}^n$ пересечение $D \cap \{tv : t < 0\}$ содержит луч, то найдется движение, для которого $v^- = v$ и существует v^+ , причем v^+ есть функция лишь от v^- , т.е. не зависит от выбора движения, имеющего асимптотическую скорость назад равную v^- .

Отметим, что простота рассеяния в системе из n упруго сталкивающихся частиц на прямой эквивалентна простоте рассеяния для бильярда в соответствующем многогранном конусе в $\mathbb{R}^n$.

В связи с этим представляет интерес найти необходимые и достаточные условия на геометрию выпуклого многогранного конуса V в вещественном евклидовом

пространстве X , обеспечивающие простоту рассеяния бильярдной системы в этом конусе. Пусть $V = \{x \in X : (x | e_i) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$, где $(\cdot | \cdot)$ – скалярное произведение в X и $e_i, i = 1, \dots, m$, – единичные векторы. Без ограничения общности можно предположить, что набор векторов $\{e_i\}_{i=1}^m$, определяющий конус V , порождает X и минимален, т.е. для любого $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\{x : (x | e_i) \geq 0, i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m\} \neq V.$$

ТЕОРЕМА 1. *Рассеяние бильярдной системы в выпуклом многогранном конусе V конечномерного евклидова пространства оказывается простым в том и только том случае, если конус V изометричен замыканию камеры относительно конечной группы Кокстера, порожденной ортогональными отражениями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала обратное утверждение. Предположим, что область $\overset{\circ}{V} = \{x \in X : (x | e_i) > 0, i = 1, \dots, m\}$ является камерой относительно группы Кокстера W , порожденной ортогональными отражениями в X . Это означает, что многогранник $\overset{\circ}{V}$ есть камера относительно наименьшей W -инвариантной системы гиперплоскостей, содержащей грани $\overset{\circ}{V}$. Перенумеруем произвольным способом грани камеры $\overset{\circ}{V}$ и обозначим через s_i ортогональное отражение относительно грани с номером i . Группа W порождена комплектом отражений $\{s_i\}$.

Пусть $v^- \in X$ – вектор, для которого множество

$$\overset{\circ}{V} \cap \{tv^- : t < 0\}$$

содержит луч. Тогда найдется движение бильярдной частицы, имеющее асимптотическую скорость назад равную v^- и некоторую асимптотическую скорость вперед v^+ . Существование таких движений устанавливаем следующим образом. Через ребра (это ячейки коразмерности 2 в терминологии [13]) всевозможных камер группы W проведем гиперплоскости, параллельные вектору v^- . Выберем точку $x \in V$, не принадлежащую этим гиперплоскостям. При движении из точки x со скоростью $-v^-$ бильярдная частица остается в V и не совершает отражений. При движении (вперед) из точки со скоростью v^- бильярдная частица после конечной серии отражений от граней камеры V , скажем, с номерами $i_1, \dots, i_l$ движется свободно (ввиду выбора x) с некоторой скоростью $v^+ = gv^-$, где $g = s_{i_l} \dots s_{i_1} \in W$. Отсюда следует, что $v^+ \in V$.

Для любого вектора $v^- \in X$ найдется не более одного элемента группы W , переводящего v^- в вектор, принадлежащий камере $\overset{\circ}{V}$ (это следствие свободности действия группы W на множестве камер относительно W). Таким образом, асимптотическая скорость вперед v^+ не зависит от выбора движения, имеющего асимптотическую скорость назад равную v^- , т.е. рассеяние бильярдной системы в многограннике V – простое.

Доказательство прямого утверждения теоремы опирается на леммы 1.1 и 1.2, формулируемые в следующих терминах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Грани

$$\begin{aligned} &\{x \in X : (x | e_i) = 0, \forall k \neq i \ (x | e_k) > 0\}, \\ &\{x \in X : (x | e_j) = 0, \forall k \neq j \ (x | e_k) > 0\} \end{aligned}$$

многогранника V называются *соседними*, если множество

$$R_{ij} = \{x \in X : (x | e_i) = (x | e_j) = 0, \forall k \neq i, j \ (x | e_k) > 0\}$$

непусто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Величину угла между i -й и j -й гранями выпуклого многогранника V полагаем равной $\varphi \in [0, \pi)$, если $(e_i | e_j) = -\cos \varphi$.

ЛЕММА 1.1. Если рассеяние бильярдной системы в многограннике V простое, то любые две его соседние грани образуют угол величины π/k , $k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. В неформальном изложении ключевой элемент доказательства выглядит так. Пусть F_i, F_j – соседние грани конуса V и R_{ij} – соответствующее ребро. Найдутся два бильярдных движения $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, обладающих следующим свойством: начальные скорости $(\Pi \circ f_1)'(0)$ и $(\Pi \circ f_2)'(0)$ этих движений равны; здесь Π обозначает проекцию фазового пространства на конфигурационное. Движения вперед $f_1|_{\mathbb{R}_+}$ и $f_2|_{\mathbb{R}_+}$ входят в двугранный угол, образованный гранями F_i и F_j , и после конечной серии отражений от этих граней становятся свободными. При этом соответствующие полутраектории $(\Pi \circ f_l)|_{\mathbb{R}_+}$, $l = 1, 2$, проходят с разных сторон от ребра R_{ij} . Далее, движения назад $f_1(-t)$ и $f_2(-t)$, $t \in [0, \infty)$, становятся свободными после конечного числа отражений от одних и тех же граней конуса V ; последнее означает, что точки, в которых происходит k -е отражение движения $f_1(-t)$ и k -е отражение движения $f_2(-t)$, принадлежат одной грани, зависящей, конечно, от номера k . В итоге получаем, что асимптотические скорости назад для движений f_1 и f_2 совпадают. С другой стороны, вычисление рассеяния для бильярда в двугранном угле величины не равной π/k , $k \in \mathbb{N}$, приводит к нетривиальной зависимости асимптотических скоростей вперед от начального положения бильярдной частицы. Утверждение леммы 1.1 отсюда следует.

2. Для построения движений f_1 и f_2 , обладающих указанными выше свойствами, покажем, что множество M единичных векторов $x = x_1 - x_2$, где

- а) $x_1 \in R_{ij}$, $\min_{k \neq i, j} (x_1 | e_k) > \|x_2\|$,
- б) $x_2 \in L\{e_i, e_j\}$, $(x | e_i) < 0$, $(x | e_j) < 0$,

непусто и содержится в V .

С этой целью выберем вектор $y \in R_{ij}$ и положим $x_1 = \alpha y$, причем скаляр α подчиним неравенствам

$$\frac{1}{\sqrt{\|y\|^2 + (y | e_k)}} < \alpha < \frac{1}{\|y\|}$$

для всех $k \neq i, j$. Непосредственно проверяется, что при таком выборе x_1 для каждого единичного вектора $x = x_1 - x_2$, где x_2 обладает свойством б), выполняется также условие а), а следовательно, и неравенства $(x | e_k) > 0$, $k = 1, \dots, m$. Отметим, что множество M открыто на единичной сфере в X .

3. Зафиксируем вектор $x_0 \in R_{ij}$ и покажем, что для почти всех $v \in M$ существуют движения (вперед) $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$ бильярдной системы в V , удовлетворяющие начальным условиям $(\Pi \circ g)(0) = x_0$, $(\Pi \circ g)'(0) = v_1 - v_2$, где v_1, v_2 и $v = v_1 - v_2$ обладают свойствами а) и б) из п. 2.

Воспользуемся конструкцией выпрямления (развертки) бильярдных траекторий (ср. [14; § 6]), заключающейся в следующем. Для каждого луча $\{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}^+\}$, $\|v\| = 1$, с начальным отрезком, принадлежащим конусу V , существует последовательность конусов $\{V_i\}_{i=0}^\infty$, объединение которых содержит этот луч, причем $V_0 = V$ и V_{i+1} (ортогонально) симметричен конусу V_i относительно их общей грани. Такая последовательность единственна в том и только том случае, когда заданный луч не пересекает никакое из ребер конусов V_i , $i > 0$.

Отрезки, высекаемые конусами V_i на луче $\{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}^+\}$, могут иметь сколь угодно малую длину при надлежащем выборе вектора v . Вместе с тем найдутся такие числа $N \in \mathbb{N}$ и $L > 0$, что суммарная длина пересечений луча с любыми N последовательными конусами V_i , $i = k + 1, \dots, k + N$, больше L , независимо от выбора v и k .

Отсюда следует, что для любого $R > 0$ конечно множество всевозможных конусов V_i , получающихся из $V_0 = V$ указанной выше цепочкой ортогональных отражений и пересекающихся с начальными отрезками лучей $\{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}^+\}$, имеющими длину R . Таким образом, множество конусов V_i , “нанизанных” на всевозможные выпрямленные бильярдные полутраектории $\{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}^+\}$, счетно. Через каждое из ребер этих конусов и точку x_0 проведем гиперплоскость и пересечем ее со сферой $S_{x_0} = \{x : \|x - x_0\| = 1\}$. Объединение O этих пересечений есть множество нулевой лебеговой меры на сфере S_{x_0} . Если вектор v не принадлежит O и имеет вид $v_1 + v_2$, где v_1 и v_2 удовлетворяют условиям а) и б) п. 2, то существует бильярдное движение вперед $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$ с начальными условиями $(\Pi \circ g)(0) = x_0$, $(\Pi \circ g)'(0) = -v$, причем соответствующие отражения от границы конуса V происходят только в регулярных точках границы ∂V .

4. Покажем, что при выборе начальных положений на гранях F_i и F_j вблизи x_0 для движений с начальной скоростью $-v$, выбранной так, как это сделано в п. 3, последовательность граней конуса V , относительно которых происходят отражения, — одна и та же. Действительно, согласно теореме Синая [15] множество моментов отражения регулярного движения от границы ∂V многогранника V конечно, причем количество отражений ограничено числом, зависящим лишь от геометрии конуса V . Это утверждение сохраняется и для регулярных движений вперед (в частности тех, которые стартуют с ребер).

По свойству непрерывной зависимости движений от начальных данных найдутся такие точки $x_0^{(i)} \in F_i$ и $x_0^{(j)} \in F_j$ вблизи x_0 , что движения g_i , $(\Pi \circ g_i)(0) = x_0^{(i)}$, $(\Pi \circ g_i)'(0) = -v$, и g_j , $(\Pi \circ g_j)(0) = x_0^{(j)}$, $(\Pi \circ g_j)'(0) = -v$, имеют одну и ту же конечную последовательность граней конуса V , относительно которых происходят отражения.

5. Рассмотрим теперь две бильярдные полутраектории, отражающиеся от граней F_i и F_j соответственно в точках $x_0^{(i)}$ и $x_0^{(j)}$ и непосредственно перед моментом отражения имеющие скорость $v = v_1 + v_2$, где v_1 и v_2 выбраны так, как в п. 2. Эти траектории совершают конечную последовательность поочередных отражений от граней F_i и F_j , после чего не имеют отражений вовсе.

В самом деле, разложим рассматриваемые движения в сумму двух движений, одно из которых происходит в плоскости $L\{e_i, e_j\}$, а другое – в ортогональном дополнении к этой плоскости. При этом вектор скорости в момент отражения от грани F_i (или F_j) преобразуется так, что его проекция на подпространство $L\{e_i, e_j\}^\perp$ не меняется, а проекция скорости на $L\{e_i, e_j\}$ подчиняется закону отражения для бильярда в угле $\{\xi \in L\{e_i, e_j\} \mid (\xi \mid e_i) \geq 0, (\xi \mid e_j) \geq 0\}$. Поэтому число отражений от граней F_i и F_j конечно.

Далее, поскольку $x_0^{(i)}, x_0^{(j)} \in V$, то $(x_0^{(i)} \mid e_k) \geq 0$ и $(x_0^{(j)} \mid e_k) \geq 0$ для всех k . Таким образом, для проверки того, что рассматриваемые полутраектории не отражаются от граней F_k , $k \neq i, j$, достаточно заметить следующее обстоятельство: во все моменты времени $t > 0$ соответствующие векторы скорости имеют положительные проекции на каждый вектор e_k , $k \neq i, j$. Так как эти векторы скорости имеют вид $v_1 + \tilde{v}_2$, где $\|\tilde{v}_2\| = \|v_2\|$, то требуемое утверждение следует из условия а) п. 2.

6. В качестве искомым (см. п. 1) движений $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ возьмем движения, определяемые начальными условиями $(\Pi \circ f_1)(0) = x_0^{(i)}$, $(\Pi \circ f_2)(0) = x_0^{(j)}$, $(\Pi \circ f_1)'(-0) = v = (\Pi \circ f_2)'(-0)$, где вектор v выбран согласно пп. 2 и 3. Существование этих движений установлено выше (см. пп. 4 и 5).

ЛЕММА 1.2. Пусть величины углов между соседними гранями многогранника V не превосходят $\pi/2$. Тогда

- а) каждая грань этого многогранника является соседней по отношению к любой другой его грани,
- б) векторы e_i , $i = 1, \dots, m$, линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что каждая грань $F_i = \{x \in X : (x \mid e_i) = 0, \forall j \neq i (x \mid e_j) > 0\}$ многогранника V есть непустое множество. В самом деле, согласно предположению о минимальности системы векторов $\{e_i\}_{i=1}^m$, определяющей V , выполнено включение $\{x \in X : (x \mid e_j) > 0 \forall j \neq i\} \supsetneq V$. Следовательно, существует такая точка $x_1 \in \{x \in X : (x \mid e_j) > 0 \forall j \neq i\}$, что $(x_1 \mid e_i) \leq 0$ и $(x \mid e_j) > 0$ для всех $j \neq i$. Соединим отрезком точку x_1 и произвольную точку из V . На этом отрезке найдется точка $x_0 \in F_i$. Заметим кроме того, что

$$F_i = \{x \in X : (x \mid e_i) = 0, (x \mid e_j) > 0 \text{ для всех } j \text{ с } R_{ij} \neq \emptyset\}.$$

Отсюда вытекают следующие утверждения.

- (i) Если углы между соседними гранями не тупые, то ортогональная проекция любой точки $x_0 \in V$ на гиперплоскость $\{x : (x \mid e_i) = 0\}$ принадлежит V для каждого $i = 1, \dots, m$.
- (ii) Если угол между F_i и F_j тупой, то ортогональная проекция любой точки $x_0 \in F_j$ на гиперплоскость $\{x : (x \mid e_i) = 0\}$ не принадлежит V .

Действительно, если грани F_i и F_j соседние, то для рассматриваемой проекции $x_1 = x_0 - (x_0 \mid e_i)e_i$ имеем $(x_1 \mid e_j) = (x_0 \mid e_j) - (x_0 \mid e_i)(e_i \mid e_j) \geq 0$ и, следовательно, $x_1 \in \overline{F_i} \subset V$. Если же $(e_i \mid e_j) > 0$ и $x_0 \in F_j$, то $(x_1 \mid e_j) = (x_0 \mid e_j) - (x_0 \mid e_i)(e_i \mid e_j) < 0$ и, стало быть, $x_1 \notin V$.

Таким образом, если величины углов между соседними гранями многогранника V не превосходят $\pi/2$, то и углы между всеми его гранями по величине не превосходят $\pi/2$.

Для доказательства утверждения а) леммы запишем ортогональную проекцию x_1 произвольной точки $x_0 \in \overset{\circ}{V}$ на подпространство $\{x \in X : (x | e_i) = (x | e_j) = 0\}$ в виде $x_1 = x_0 + \alpha e_i + \beta e_j$, где

$$\begin{pmatrix} 1 & (e_i | e_j) \\ (e_i | e_j) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_0 | e_i) \\ (x_0 | e_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая неравенства $-1 \leq (e_i | e_j) \leq 0$, $(x_0 | e_i) > 0$ и $(x_0 | e_j) > 0$, видим, что $\alpha < 0$ и $\beta < 0$. Отсюда следует неравенство

$$(x_1 | e_k) = (x_0 | e_k) + \alpha(e_i | e_k) + \beta(e_j | e_k) > 0$$

для всех $k \neq i, j$. Таким образом, $x_1 \in R_{ij}$ и, стало быть, F_i и F_j — соседние грани.

Утверждение б) леммы докажем от противного. Предположим, что найдется нетривиальная нулевая линейная комбинация векторов $e_i : \sum_{i=0}^m c_i e_i = 0$. Запишем ее в виде

$$\sum_i' c_i^{(1)} e_i = \sum_j'' (-c_j^{(2)}) e_j,$$

где $c_i^{(1)} > 0$ и $c_j^{(2)} < 0$. Полагая $f = \sum_i' c_i^{(1)} e_i$, имеем

$$\|f\|^2 = \sum_i' \sum_j'' c_i^{(1)} (-c_j^{(2)}) (e_i | e_j) \leq 0$$

и, стало быть, $f = 0$. Поскольку одна из сумм $\sum_i'$, $\sum_j''$ непустая (пусть это будет $\sum_i'$), то для любого $x \in \overset{\circ}{V}$ получаем

$$0 = \left(x \mid \sum_i' c_i e_i \right) = \sum_i' c_i (x | e_i) > 0.$$

Это противоречие доказывает линейную независимость векторов e_i , $i = 1, \dots, m$.

Теперь проведем доказательство необходимости в утверждении теоремы 1. Без ограничения общности можно предположить, что векторы $e_1, \dots, e_m$ образуют базис в X ; стало быть, $m = n := \dim X$. Из лемм 1.1 и 1.2 следует равенство $(e_i | e_j) = -\cos(\pi/m_{ij})$, где $M = (m_{ij})$ — матрица Кокстера. Так называется симметричная матрица, если ее элементы суть натуральные числа или $+\infty$, причем диагональные элементы и только они равны единице.

Существует (см. [13]) абстрактная группа W' с образующими элементами s_i , $i = 1, \dots, n$, и определяющими соотношениями $(s_i s_j)^{m_{ij}} = e$, $m_{ij} \neq +\infty$. Поскольку билинейная форма B_M в $\mathbb{R}^n$ с матрицей $(-\cos(\pi/m_{ij}))$ невырождена (согласно лемме 1.2), группа W' имеет (см. [13]) геометрическое представление $\sigma: W' \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n)$, образом которого является группа, порожденная отражениями

относительно гиперплоскостей $\{x \in \mathbb{R}^n : B_M(x, f_i) = 0\}$, где $\{f_i\}_{i=1}^n$ – канонический базис в $\mathbb{R}^n$.

Далее, матрица с элементами $-\cos(\pi/m_{ij}) = (e_i | e_j)$ положительно определена как невырожденная матрица Грама системы $\{e_i\}_{i=1}^n$ в X . Поэтому соответствие $f_i \leftrightarrow e_i, i = 1, \dots, n$, задает изоморфизм евклидовых пространств $(\mathbb{R}^n, B_M)$ и X (так как матрицы Грама систем $\{f_i\}_1^n$ и $\{e_i\}_1^n$ совпадают).

При этом отождествлении группа W , порожденная отражениями относительно граней конуса V , переходит в геометрическое представление $\sigma(W')$ группы Кокстера W' , а множество внутренних точек конуса V переходит в множество C_0 тех векторов $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $B_M(x, f_i) > 0$ при всех $i = 1, \dots, n$.

Поскольку C_0 есть камера относительно $\sigma(W')$ (см. [13; гл. V, § 4, п. 8, предложение 9]), то V совпадает с замыканием камеры относительно $\sigma(W') \simeq W$. Теорема 1 доказана.

Применим теперь полученное необходимое и достаточное условие простоты рассеяния для бильярда в многогранном конусе к перечислению имеющих простое рассеяние систем n точечных масс $m_1, \dots, m_n, n \geq 3$, свободно движущихся на прямой между моментами столкновений и упруго отражающихся при парных столкновениях. (В связи с ограничением $n \geq 3$ на число частиц заметим, что рассеяние системы двух частиц на прямой всегда простое.) Как отмечалось выше, многочастичные системы на прямой сводятся к бильярду в многогранном конусе $\tilde{V}$, ограниченном гиперплоскостями

$$\Gamma_i = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{\xi_i}{\sqrt{m_i}} = \frac{\xi_{i+1}}{\sqrt{m_{i+1}}} \right\}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

причем свойство простоты рассеяния сохраняется при таком переходе.

При вычислении всевозможных наборов масс $\{m_i\}$ в системах с простым рассеянием воспользуемся классификацией неприводимых конечных групп, порожденных отражениями. Однако группа Кокстера, отвечающая по теореме 1 многограннику $\tilde{V}$, – приводимая. Для преодоления этого обстоятельства нужно учесть инвариантность рассматриваемой многочастичной системы относительно сдвигов $x_i \mapsto x_i + c$. В результате редукции такой симметрии (отделение движения центра масс) получаем бильярд в многогранном конусе

$$V = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{\xi_1}{\sqrt{m_1}} \leq \dots \leq \frac{\xi_n}{\sqrt{m_n}}, \sum \sqrt{m_i} \xi_i = 0 \right\}.$$

Рассмотрим векторы

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{m_i^{-1} + m_{i+1}^{-1}}} \left(0, \dots, 0, -\frac{1}{\sqrt{m_i}}, \frac{1}{\sqrt{m_{i+1}}}, 0, \dots, 0 \right),$$

$$i = 1, \dots, n-1;$$

e_i – это вектор единичной нормали к Γ_i , лежащий по ту же сторону от Γ_i , что и $\tilde{V}$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$(e_i | e_j) = 0, \quad \text{если } |i - j| \geq 2, \quad (1.1)$$

$$(e_i | e_{i+1}) = - \left(1 + \frac{m_{i+1}}{m_i} \right)^{-1/2} \cdot \left(1 + \frac{m_{i+1}}{m_{i+2}} \right)^{-1/2}. \quad (1.2)$$

Конус V является замыканием камеры относительно некоторой (необходимо неприводимой) группы Кокстера в том и только том случае, когда

$$(e_i | e_{i+1}) = -\cos \frac{\pi}{k_i}, \quad k_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, n-2. \quad (1.3)$$

Из (1.1) следует, что соответствующий граф Кокстера не имеет точек ветвления, т.е. каждая вершина этого графа соединена самое большее с двумя вершинами. При этом возможны лишь следующие случаи:

тип A_{n-1} ($n \geq 3$)	$k_i = 3, \quad i = 1, \dots, n-2;$
тип B_{n-1} ($n \geq 3$)	$k_1 = 4, \quad k_i = 3, \quad i = 2, \dots, n-2 \text{ или}$ $k_i = 3, \quad i = 1, \dots, n-3, \quad k_{n-2} = 4;$
тип F_4 ($n = 5$)	$k_1 = k_3 = 3, \quad k_2 = 4;$
тип G_2 ($n = 3$)	$k_1 = 6;$
тип H_{n-1} ($n = 4 \text{ или } 5$)	$k_1 = 5, \quad k_i = 3, \quad i = 2, \dots, n-2 \text{ или}$ $k_i = 3, \quad i = 1, \dots, n-3, \quad k_{n-2} = 5;$
тип $I_2(p)$ ($p = 5 \text{ или } p \geq 7, n = 3$)	$k_1 = p.$

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда тип G_2 включают в серию $I_2(p)$, $p \geq 5$ (см., например, [16]).

Вычисление масс m_i с использованием приведенного выше списка и формул (1.2), (1.3) приводит к следующей классификации наборов масс, для которых бильярдные системы n частиц на прямой, $n \geq 3$, обладают простым рассеянием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если система n точечных частиц на прямой, свободно движущихся между моментами столкновений и упруго отражающихся при парных столкновениях, имеет простое (или, что то же самое в этом случае, треугольное) рассеяние, то набор неравных масс $m_1, \dots, m_n$, $n \geq 3$, с точностью до обращения нумерации $i \mapsto n+1-i$ принадлежит следующему списку (в скобках указан тип соответствующей группы Кокстера):

$$(A_{n-1}) \quad m_i = \frac{c}{(i-1+k)(i+k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k > 0, \quad c > 0; \quad (1.4)$$

$$(B_{n-1}) \quad m_i = \frac{c}{(i-1+k)(i+k)}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ m_n = \frac{c}{n-1+k}, \quad k > 0, \quad c > 0; \quad (1.5)$$

$$(F_4) \quad m_1 = \frac{c}{k-1}, \quad m_2 = \frac{c}{k+1}, \quad m_3 = \frac{c}{(k+1)(2k^{-1}+1)}, \\ m_4 = \frac{c}{2k^{-1}+1}, \quad m_5 = \frac{c}{2k^{-1}-1}, \quad 1 < k < 2, \quad c > 0; \quad (1.6)$$

$$(H_3) \quad m_1 = \frac{c}{(k-3)(k-2)}, \quad m_2 = \frac{c}{(k-2)(k-1)}, \quad m_3 = \frac{c}{(k-1)k}, \\ m_4 = \frac{c}{k + (2 - \sqrt{5})k^2}, \quad 3 < k < 2 + \sqrt{5}, \quad c > 0; \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
(H_4) \quad m_1 &= \frac{c}{(k-4)(k-3)}, \quad m_2 = \frac{c}{(k-3)(k-2)}, \\
m_3 &= \frac{c}{(k-2)(k-1)}, \quad m_4 = \frac{c}{(k-1)k}, \\
m_5 &= \frac{c}{k + (2 - \sqrt{5})k^2}, \quad 4 < k < 2 + \sqrt{5}, \quad c > 0;
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$(I_2(p)) \quad \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right) = \frac{1}{\cos^2(\pi/p)}, \quad p \geq 5 - \text{целое}. \tag{1.9}$$

Система частиц с одинаковыми массами $m_1 = \dots = m_n = m$ получается как предельная для серии A_{n-1} при $k \rightarrow \infty$ и $ck^{-2} \rightarrow m$. При таком же предельном переходе в серии B_{n-1} получаем систему, состоящую из $n-1$ частиц одинаковой массы m и одной частицы бесконечно большой массы, что эквивалентно системе частиц, движущихся на полупрямой и упруго отражающихся от границы.

Отметим еще один предельный случай. Для серии $I_2(p)$ при $p \rightarrow \infty$ и фиксированных m_1 и m_3 масса m_2 промежуточной частицы стремится к нулю и рассматриваемая система аппроксимирует систему двух частиц с потенциалом взаимодействия $\text{const} \cdot x^{-2}$ в следующем смысле. Пусть $X_j(t)$, $j = 1, 3$, — движение системы двух частиц на прямой с потенциальным взаимодействием $a^2(X_3 - X_1)^{-2}$, $x_i(t; p, b)$ — движение рассматриваемой системы трех частиц с бильярдными столкновениями, отвечающее начальным условиям

$$\begin{aligned}
x_j(0; p, b) &= X_j(0), \quad \dot{x}_j(0; p, b) = \dot{X}_j(0), \quad j = 1, 3, \\
x_2(0; p, b) &= b, \quad \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2(0; p, b) = a^2 (X_3(0) - X_1(0))^{-2}.
\end{aligned}$$

Оказывается, что для любого $T > 0$ последовательности $x_j(t; p, b) - X_j(t)$ и $\dot{x}_j(t; p, b) - \dot{X}_j(t)$, $j = 1, 3$, при $p \rightarrow \infty$ стремятся к нулю равномерно по $b \in (X_1(0), X_3(0))$ и $t \in [-T, T]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как мы видели, системы частиц с попарными бильярдными столкновениями приводят к неприводимым группам, порожденным отражениями. Приводимым группам Кокстера соответствуют динамические системы частиц, принадлежащих различным типам, причем частицы одного типа упруго отражаются при парных столкновениях, а частицы различных типов не взаимодействуют, т.е. свободно проникают одна через другую.

§ 2. Необходимое условие простоты рассеяния для гладких многочастичных систем

Предположим, что в области Q с кусочно гладкой границей заданы риманова метрика и функция U со свойством: $U(x) \rightarrow +\infty$, если $x \rightarrow \partial Q$. Бильярд в $\overline{Q}$ называется *бильярдным пределом* системы с функцией Гамильтона $H = T + U$, где кинетическая энергия T определяется римановой метрикой. Например, в случае, когда

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + U(x),$$

U задана в $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 < \dots < x_n\}$ и $U(x) \rightarrow +\infty$ при $x_{i+1} - x_i \rightarrow +0$, бильярдным пределом является система n частиц на прямой с упругими парными столкновениями и свободным движением между моментами столкновений.

При некотором ограничении на рост функции U можно доказать, что проекция конечного отрезка высокоэнергетического движения системы с функцией Гамильтона $H = T + U$ на конфигурационное пространство сходится (при $E \rightarrow \infty$) к отрезку бильярдной траектории в $\overline{Q}$. О другом способе построения предельных систем с соударениями, при котором к бесконечности устремляются коэффициенты упругости и вязкости поля упругих и диссипативных сил, см. в [17].

В этом параграфе приведено условие на потенциал U , обеспечивающее наследование предельной бильярдной системой свойства простоты рассеяния. Точнее, для заданного бильярдного движения указан класс функций U , определенных в окрестности конфигурационной проекции этого движения, имеющих барьерные отталкивающие особенности (см. условие (А) ниже) в точках отражающих зеркал и обладающих следующим свойством. Конфигурационную проекцию исходного бильярдного движения можно сколь угодно точно аппроксимировать такой же проекцией высокоэнергетического движения системы с функцией Гамильтона вида $\frac{1}{2}\|p\|^2 + U(x)$; при этом импульсные составляющие бильярдного движения и аппроксимирующих движений почти подобны. Отметим, что достаточное условие аппроксимируемости гарантирует также существование асимптотических импульсов $p^\pm$; по поводу различных условий существования $p^\pm$ см. также [8], [18].

Пусть задана бильярдная траектория $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ с единичной скоростью $v = \dot{l}$, конечным набором отражений от гиперплоскостей $\{x \in \mathbb{R}^d : (x - l_i | n_i) = 0\}$, $i = 1, \dots, k$, согласно правилу $v(t_i + 0) = v(t_i - 0) - 2(v(t_i - 0) | n_i)n_i$, где t_i — момент i -го отражения, $l_i = l(t_i)$ и $\|n_i\| = 1$. Для определенности полагаем, что $(v(t_i - 0) | n_i) < 0$, $t_0 = -\infty$, $t_{k+1} = +\infty$.

Рассмотрим функцию Гамильтона

$$H(p, x) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + U(x) \quad (2.1)$$

с потенциальной функцией U класса C^2 , определенной в окрестности множества $\bigcup_{i=0}^k \{l(t) : t_i < t < t_{i+1}\}$, в полукрестностях $\{x : (x - l_i | n_i) > 0, \|x - l_i\| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, точек l_i , $i = 1, \dots, k$, и удовлетворяющей следующим условиям.

(А) Для каждого $i = 1, \dots, k$ функция U представима в виде

$$U(x) = u((x - l_i | n_i)) + W(x),$$

где $u \in C^2(0, +\infty)$ и

$$\lim_{\xi \rightarrow 0+} u(\xi) = +\infty, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0+} \frac{u'(\xi)}{u(\xi)} = -\infty,$$

функция W — дифференцируемая класса C^2 с ограниченным градиентом.

(Б) Функция U определена на конусах

$$\frac{(v^- | x - l_1)}{\|x - l_1\|} < -1 + \varepsilon, \quad \frac{(v^+ | x - l_k)}{\|x - l_k\|} > 1 - \varepsilon,$$

где $v^- = v(t_1 - 1)$, $v^+ = v(t_k + 1)$; $\|\nabla U(x)\| < \varphi(\|x\|)$ для некоторой суммируемой функции φ .

Обозначим через R_i преобразование отражения $v \mapsto v - 2(v \mid n_i)n_i$ и определим вектор-функцию $\mathcal{G}$ равенством

$$\mathcal{G}(t) = \begin{cases} -R_k \cdots R_i \nabla U(l(t)), & t_{i-1} < t < t_i, \\ -\nabla U(l(t)), & t > t_k. \end{cases}$$

Эта функция имеет особенности в точках $t_1, \dots, t_k$; непосредственная проверка показывает, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t) dt$ существует в смысле главного значения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если выполнены условия (А) и (Б), то для достаточно больших $p \in \mathbb{R}^+$ существуют движения $(x^{(p)}(t), \dot{x}^{(p)}(t))$ системы с функцией Гамильтона (2.1), удовлетворяющие асимптотическим соотношениям*

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(p)}(-\infty) &= pv^-, \\ \dot{x}^{(p)}(+\infty) &= pv^+ + \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t) dt + o\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь введены обозначения

$$\dot{x}^{(p)}(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{x}^{(p)}(t).$$

В доказательстве этого предложения используется следующая лемма.

Зафиксируем $i \in \overline{1, k}$, выберем числа $T \in (t_{i-1}, t_i)$ и $T' \in (t_i, t_{i+1})$ и отметим, что функция W имеет ограниченный градиент (см. условие (А)) и в окрестности множества $\{l(t) : t \in [T, t_i] \cup (t_i, T']\}$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $(x^{(p)}(t), \dot{x}^{(p)}(t))$, $p > 0$, – семейство решений системы с функцией Гамильтона (2.1), удовлетворяющее условиям*

$$\begin{aligned} x^{(p)}\left(\frac{T}{p}\right) &= l(T) + o(1), \\ \dot{x}^{(p)}\left(\frac{T}{p}\right) &= pv(T) + o(p), \quad p \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Тогда для достаточно больших значений p решение $(x^{(p)}(t), \dot{x}^{(p)}(t))$ продолжается на отрезок $T/p \leq t \leq T'/p$ и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} 1) \quad x^{(p)}\left(\frac{T'}{p}\right) &= l(T') + o(1), \\ 2) \quad \dot{x}^{(p)}\left(\frac{T'}{p}\right) &= pv(T') + o(p), \quad p \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Более того, верна следующая формула

$$3) \quad \dot{x}^{(p)}\left(\frac{T'}{p}\right) = R_i \dot{x}^{(p)}\left(\frac{T}{p}\right) + \frac{1}{p} \left[\frac{\delta U - (v(T) \mid J)}{(v(T) \mid n_i)} n_i - R_i J \right] + o\left(\frac{1}{p}\right),$$

где $\delta U = U(l(T')) - U(l(T))$ и $J = \int_T^{T'} \nabla W(l(t)) dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы опускаем здесь верхний индекс в обозначении $x^{(p)}(t)$.

Фиксируем ортогональную систему координат в $\mathbb{R}^d$, для которой началом является точка l_i , а первым координатным ортом – вектор n_i .

Выберем $\theta = \theta^{(p)}$ так, что $\theta^{(p)} \rightarrow 0$ и $U(\theta^{(p)}) = o(p^2)$ при $p \rightarrow +\infty$. Обозначим через $\tau_1 = \tau_1(p)$ наибольшую нижнюю границу тех $t > T/p$, для которых $x_1(t) < \theta^{(p)}$; такие моменты t существуют для достаточно больших p . Непосредственная проверка показывает, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (T/p, \tau_1)} \|\dot{x}(t) - p v(T)\| &= o(p), \\ \sup_{t \in (T/p, \tau_1)} \|x(t) - l(pt)\| &= o(1), \quad p \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда и из определения τ_1 следуют асимптотические (при $p \rightarrow +\infty$) формулы:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{t_i}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right), \quad x_1(\tau_1) = \theta^{(p)}, \quad x(\tau_1) = l_i + o(1), \\ \dot{x}_1(\tau_1) &= p v_1(T) + o(p). \end{aligned}$$

Обозначим через τ_0 наименьшее из тех значений $t > \tau_1$, для которых $\dot{x}_1(t) = 0$. Из свойства (А) и неравенства $\dot{x}_1(\tau_1) < 0$ следует, что для всех достаточно больших p такое число τ_0 существует.

Следующее соотношение проверяется непосредственным дифференцированием по t :

$$t - \tau_1 = \int_{x_1(t)}^{\theta} \frac{d\xi}{\sqrt{y - 2\tilde{u}(\xi)}}, \quad \tau_1 < t \leq \tau_0;$$

здесь $y = \dot{x}_1^2(\tau_1)$ и функция $\tilde{u}(\xi)$ определена на интервале $x_1(\tau_0) < \xi < \theta$ равенством

$$\tilde{u}(x_1(t)) = u(x_1(t)) - u(\theta) + \int_{\tau_1}^t \frac{\partial W}{\partial x_1}(x(s)) \dot{x}_1(s) ds, \quad \tau_1 < t \leq \tau_0.$$

Корректность последнего определения вытекает из свойства монотонности $x_1(t)$ на интервале (τ_1, τ_0) .

Отметим, что функция $\tilde{u}$ зависит от параметра p и имеют место следующие асимптотики при $p \rightarrow +\infty$:

$$\inf_{\xi} \tilde{u}(\xi) \rightarrow +\infty, \quad \sup_{\xi} \frac{\tilde{u}'(\xi)}{\tilde{u}(\xi)} \rightarrow -\infty. \quad (2.4)$$

Таким образом, для достаточно больших p существует функция $\xi = V(s)$, обратная к функции $s(\xi) = 2\tilde{u}(\xi)$.

Теперь значение τ_0 вычисляется по формуле

$$\tau_0 - \tau_1 = \int_{2\tilde{u}(\theta)}^y \frac{-dV(s)}{\sqrt{y - s}}.$$

Полагая $s = e^\sigma$, эту формулу можно записать в виде

$$\tau_0 - \tau_1 = \frac{1}{\sqrt{y}}(\theta - V(y)) + \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{\nu_1}^{\nu} k(\sigma - \nu) dv(\sigma), \quad (2.5)$$

где $\nu = \ln y$, $\nu_1 = \ln(2\tilde{u}(\theta))$, $v(\sigma) = V(e^\sigma)$ и $k(\sigma) = 1 - (1 - e^\sigma)^{-1/2}$. Из асимптотики $\sup_{\nu_1 < \sigma < \nu} v'(\sigma) = o(1)$ по параметру p , которая следует из (2.4), и суммируемости функции k на полуоси $(-\infty, 0)$ вытекает, что интеграл в правой части формулы (2.5) стремится к нулю при $p \rightarrow +\infty$. Учитывая оценки $\sqrt{y} = p \cdot |v_1(T)| + o(p)$, $\theta = o(1)$ и $V(y) = o(1)$, из (2.5) получаем асимптотику

$$\tau_0 - \tau_1 = o\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty. \quad (2.6)$$

Обозначим через τ_2 наименьшее из тех $t > \tau_0$, для которых $x_1(t) = \theta$; существование таких моментов t для достаточно больших p следует из условия (А). Вычисления, аналогичные проведенным выше (при оценке $\tau_0 - \tau_1$), показывают, что

$$\tau_2 - \tau_0 = o\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty. \quad (2.7)$$

Далее, вычисляя изменение тангенциальной компоненты $\dot{x} - (\dot{x} | n_i)n_i$ скорости $\dot{x}$ на интервале (τ_1, τ_2) , используя закон сохранения энергии и учитывая, что $v(T')$ получается из $v(T)$ применением отражения R_i , имеем

$$\dot{x}(\tau_2) = p v(T') + o(p), \quad (2.8)$$

$$x(\tau_2) = l_i + o(1). \quad (2.9)$$

Наконец, для движения $(x(t), \dot{x}(t))$ системы с функцией Гамильтона (2.1) на интервале $\tau_2 < t < T'/p$ с помощью асимптотических соотношений (2.8) и (2.9) получаем оценки

$$\begin{aligned} \sup_{\tau_2 < t < T'/p} \|\dot{x}(t) - p v(T')\| &= o(p), \\ \sup_{\tau_2 < t < T'/p} \|x(t) - l(pt)\| &= o(1), \quad p \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, утверждения 1) и 2) леммы доказаны.

Следующая формула выводится из уравнений движения:

$$\dot{x}\left(\frac{T'}{p}\right) - \dot{x}\left(\frac{T}{p}\right) = -\frac{1}{p}(J + J_1 + J_2); \quad (2.11)$$

здесь

$$\begin{aligned} J &= \int_T^{T'} \nabla W(l(t)) dt, \\ J_1 &= \int_T^{T'} \left[\nabla W\left(x\left(\frac{t}{p}\right)\right) - \nabla W(l(t)) \right] dt, \\ J_2 &= \int_T^{T'} u'\left(\left(x\left(\frac{t}{p}\right) - l_i | n_i\right)\right) dt \cdot n_i. \end{aligned}$$

Согласно оценкам (2.3), (2.10), (2.6) и (2.7) вектор-функция $x(t/p) - l(t)$ стремится к нулю при $p \rightarrow +\infty$ равномерно на отрезках $[T, p\tau_1]$ и $[p\tau_2, T']$. Следовательно, $J_1 = o(1)$, $p \rightarrow +\infty$.

Для вычисления $\dot{x}(T'/p)$ с точностью до $o(1/p)$ воспользуемся законом сохранения энергии. Из (2.11) имеем

$$\dot{x}\left(\frac{T'}{p}\right) = \dot{x}\left(\frac{T}{p}\right) - \frac{1}{p}J + \alpha n_i + o\left(\frac{1}{p}\right), \quad (2.12)$$

где два последних слагаемых ортогональны. Подстановка этого соотношения в закон сохранения энергии

$$\dot{x}\left(\frac{T'}{p}\right)^2 + 2U(l(T')) = \dot{x}\left(\frac{T}{p}\right)^2 + 2U(l(T)) + o(1)$$

приводит к уравнению относительно α , решая которое с учетом того, что скалярные произведения $(\dot{x}(T/p) | n_i)$ и $(\dot{x}(T'/p) | n_i)$ имеют разные знаки, получаем

$$\alpha = -2\left(\dot{x}\left(\frac{T}{p}\right) | n_i\right) + \frac{1}{p} \frac{\delta U}{(v(T) | n_i)} - \frac{1}{p} \frac{(v(T) | J)}{(v(T) | n_i)} + \frac{2}{p}(J | n_i) + o\left(\frac{1}{p}\right). \quad (2.13)$$

Из (2.12) и (2.13) следует утверждение 3) леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.1. Зафиксируем момент времени $T_1 < t_1$ и рассмотрим функцию

$$\psi^{(p,t)}(\gamma) = \dot{x}^{(p)}\left(\frac{t}{p}, \gamma\right) - pv^-,$$

где $(x^{(p)}(\tau, \gamma), \dot{x}^{(p)}(\tau, \gamma))$ — движение системы с функцией Гамильтона (2.1) и начальными условиями $x^{(p)}(T_1/p, \gamma) = l(T_1)$, $\dot{x}^{(p)}(T_1/p, \gamma) = pv^- + \gamma$.

Из свойства (Б) потенциала U следует, что для всех γ , $\|\gamma\| = 1$, и достаточно больших p функции $\psi^{(p,t)}(\gamma)$ определены для всех значений параметра $t < T_1$ и при $t \rightarrow -\infty$ равномерно сходятся в шаре $\{\gamma \in \mathbb{R}^d : \|\gamma\| \leq 1\}$ к предельной функции $\psi^{(p)}(\gamma)$, удовлетворяющей асимптотическому соотношению

$$\psi^{(p)}(\gamma) = \gamma + \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{T_1} \nabla U(l(t)) dt + o\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty. \quad (2.14)$$

Липшицевское свойство градиента ∇U (на компактах в области определения функции U) влечет непрерывность фазового потока с функцией Гамильтона (2.1) и как следствие непрерывность функций $\psi^{(p,t)}(\gamma)$ и $\psi^{(p)}(\gamma)$.

Рассмотрим непрерывное отображение $\gamma \mapsto \gamma - \psi^{(p)}(\gamma)$ шара $\{\gamma \in \mathbb{R}^d : \|\gamma\| \leq 1\}$ в $\mathbb{R}^d$. Из (2.14) видно, что при достаточно больших p это отображение переводит в себя единичный шар с центром в нуле. Следовательно, в этом шаре найдется неподвижная точка $\gamma = \gamma(p)$ отображения $\gamma \mapsto \gamma - \psi^{(p)}(\gamma)$.

Выберем движение $(x^{(p)}(\tau), \dot{x}^{(p)}(\tau))$, $\tau \in \mathbb{R}$, рассматриваемой гамильтоновой системы, полагая $x^{(p)}(\tau) = x^{(p)}(\tau, \gamma(p))$. Покажем, что это семейство движений — искомое.

Зафиксируем моменты времени T_i , $i = 2, \dots, k+1$, так, что $t_1 < T_2 < t_2 < \dots < T_k < t_k < T_{k+1}$, и докажем индукцией по i следующие соотношения:

$$x^{(p)}\left(\frac{T_i}{p}\right) = l(T_i) + o(1), \quad (2.15)$$

$$\mathcal{R}_i \dot{x}^{(p)}\left(\frac{T_i}{p}\right) = pv^+ + \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{T_i} \mathcal{G}(t) dt + o\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

Здесь

$$\mathcal{R}_i = \begin{cases} R_k \cdots R_i, & 1 \leq i \leq k, \\ I, & i = k+1, \end{cases}$$

I обозначает тождественное отображение.

При $i = 1$ асимптотики (2.15) и (2.16) следуют из (2.14), выбора $\gamma(p)$ и равенства $v^+ = \mathcal{R}_1 v^-$. Пусть (2.15) и (2.16) выполнены для некоторого $i \leq k$. Согласно утверждению 1) леммы 2.1 соотношение (2.15) верно для $i+1$.

Далее, величину $J = p^{-1} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \mathcal{G}(t) dt$ представим в виде $J = J_1 + J_2$, где

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{v.p.} \left[-\frac{1}{p} \int_{T_i}^{t_i} \mathcal{R}_i n_i \cdot u'((l(t) - l_i | n_i)) dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p} \int_{t_i}^{T_{i+1}} \mathcal{R}_{i+1} n_i u'((l(t) - l_i | n_i)) dt \right] \\ &= \frac{1}{p} \mathcal{R}_{i+1} \frac{\delta u}{(v(T_i) | n_i)} n_i \end{aligned} \quad (2.17)$$

и $\delta u = u((l(T_{i+1}) - l_i | n_i)) - u((l(T_i) - l_i | n_i))$. При таком выборе J_1 слагаемое J_2 задается формулой

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{1}{p} \int_{T_i}^{t_i} \mathcal{R}_i \nabla W(l(t)) dt - \frac{1}{p} \int_{t_i}^{T_{i+1}} \mathcal{R}_{i+1} \nabla W(l(t)) dt \\ &= \frac{1}{p} \mathcal{R}_{i+1} [-\tilde{J} + 2(J' | n_i) n_i], \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\tilde{J} = \int_{T_i}^{T_{i+1}} \nabla W(l(t)) dt$, $J' = \int_{T_i}^{t_i} \nabla W(l(t)) dt$.

Для приращения $\delta W = W(l(T_{i+1})) - W(l(T_i))$, используя соотношение

$$\delta W = \int_{T_i}^{t_i} (\nabla W(l(t)) | v(T_i)) dt + \int_{t_i}^{T_{i+1}} (\nabla W(l(t)) | v(T_{i+1})) dt$$

и формулу $v(T_{i+1}) = v(T_i) - 2(v(T_i) | n_i) n_i$, имеем представление

$$\delta W = (\tilde{J} | v(T_i)) - 2(v(T_i) | n_i)(\tilde{J} - J' | n_i). \quad (2.19)$$

Наконец, суммируя выражения (2.17) и (2.18) для J_1 и J_2 соответственно и учитывая соотношение (2.19) и равенство $\delta u + \delta W = \delta U$, получаем следующую формулу для интеграла J :

$$J = \mathcal{R}_{i+1} \frac{1}{p} \left[\frac{\delta U - (v(T_i) \mid \tilde{J})}{(v(T_i) \mid n_i)} n_i - R_i \tilde{J} \right].$$

Отсюда, имея в виду утверждение 3) леммы 2.1, приходим к заключению, что

$$\mathcal{R}_{i+1} \dot{x}^{(p)}(T_{i+1}/p) = \mathcal{R}_i \dot{x}^{(p)}(T_i/p) + J + o\left(\frac{1}{p}\right);$$

это доказывает формулу (2.16) для $i + 1$.

Оценка приращения скорости $\dot{x}^{(p)}$ на интервале $(T_{k+1}/p, \infty)$ дает

$$\dot{x}^{(p)}(+\infty) - \dot{x}^{(p)}\left(\frac{T_{k+1}}{p}\right) = -\frac{1}{p} \int_{T_{k+1}}^{\infty} \nabla U(l(t)) dt + o\left(\frac{1}{p}\right). \quad (2.20)$$

Сопоставляя равенства (2.20) и (2.16) при $i = k + 1$, получаем формулу (2.2). Предложение доказано.

Это аппроксимационное утверждение позволяет из свойства простоты рассеяния многочастичных систем на прямой, являющихся (в определенном смысле) возмущениями бильярдных, вывести простоту (и даже треугольность) рассеяния в предельной бильярдной системе.

Рассмотрим динамическую систему d частиц на прямой с конфигурационным пространством $Q = \{x : x_1 < x_2 < \dots < x_d\} \subset \mathbb{R}^d$ и функцией Гамильтона вида

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{p_i^2}{m_i} + \sum_{i=1}^{d-1} u_i(x_{i+1} - x_i) + W(x), \quad (2.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_i &\in C^2(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^\infty |u'_i(\xi)| d\xi < \infty, \\ \lim_{\xi \rightarrow 0+} u_i(\xi) &= +\infty, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0+} \frac{u'_i(\xi)}{u_i(\xi)} = -\infty, \\ W &\in C^2\left(\overline{Q} \setminus \bigcup_{i=1}^{d-2} \{x : x_i = x_{i+2}\}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Наряду с этой системой рассмотрим бильярдную систему частиц на прямой, имеющих массы $m_1, \dots, m_d$ (в нумерации слева направо) и движущихся свободно между моментами столкновений, парные из которых предполагаются упругими. Аналогично предыдущему (см. предложение 2.1) устанавливается, что конфигурационными проекциями движений системы с функцией Гамильтона (2.21), (2.22), принадлежащих изоэнергетическому многообразию $H = E$, можно сколь угодно точно (при $E \rightarrow \infty$) аппроксимировать бильярдную траекторию в Q , причем импульсные составляющие бильярдного и аппроксимирующих его движений почти подобны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Если система с функцией Гамильтона (2.21), (2.22) имеет простое рассеяние, то соответствующая ей бильярдная система также имеет простое рассеяние.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к применению асимптотики (2.2). Согласно предположению найдется такая функция $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, что для любого вектора $v^- \in \mathbb{R}^d$ и достаточно больших $p \in \mathbb{R}^+$ существует семейство движений $(x^{(p)}(t), \dot{x}^{(p)}(t))$, определяемых условием $\dot{x}^{(p)}(-\infty) = pv^-$, для которых выполнено (2.2), причем $\dot{x}^{(p)}(+\infty) = f(\dot{x}^{(p)}(-\infty))$. Следовательно, $v^+ = \frac{1}{p}f(pv^-) + o(1)$. Устремляя p к бесконечности, отсюда видим, что $v^+ = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p}f(pv^-)$ зависит лишь от v^- .

Следствием этого предложения и предложения 1.1 из §1 является необходимое условие на массы взаимодействующих частиц, образующих системы с простым рассеянием.

ТЕОРЕМА 2. *Если система с функцией Гамильтона (2.21) и трансляционно инвариантным потенциальным слагаемым, удовлетворяющим условию (2.22), имеет простое рассеяние, то либо набор чисел $m_1, \dots, m_d$ принадлежит списку (1.4)–(1.9), либо $m_1 = \dots = m_d$.*

Отметим, что (связанная с вещественными простыми группами Ли) конструкция гамильтоновых систем, интегрируемых в классе полиномиальных по импульсам первых интегралов (см. [19]), позволяет предъявить примеры имеющих простое (и даже треугольное) рассеяние систем, отвечающих наборам масс бесконечных серий A и B .

§3. О рассеянии бильярдов в выпуклых областях

1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклая некомпактная область и $x \in Q$. Объединение лучей с вершиной в точке x , принадлежащих области Q , будем называть *сопутствующим конусом* (для Q). Ясно, что любые два таких конуса с вершинами в точках x_1 и $x_2 \in Q$ можно совместить параллельным переносом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Если бильярд в выпуклой многогранной области Q обладает простым рассеянием, а сопутствующий конус K для Q имеет внутренние точки, то K есть замыкание камеры относительно некоторой группы Кокстера.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что для любого регулярного движения $(r(t), \dot{r}(t))$ в $\overline{K} \times S^{d-1}$ можно построить регулярное движение в $\overline{Q} \times S^{d-1}$ с такими же начальной (т.е. асимптотической назад) и конечной (т.е. асимптотической вперед) скоростями, что и у движения $(r(t), \dot{r}(t))$. Для проверки этого утверждения расположим область Q и какой-либо сопутствующий конус K с центром в нуле так, чтобы $Q \subset K$ и $K = \bigcup_{\varepsilon > 0} \varepsilon Q$, иначе говоря, чтобы K и Q совпадали вне круга, имеющего достаточно большой радиус (возможность этого следует из непустоты внутренности конуса K). Далее, выберем столь малое число $\varepsilon > 0$, что движение $(\tilde{r}(t), \dot{\tilde{r}}(t))$ в $\varepsilon \overline{Q} \times S^{d-1}$, тождественно совпадающее с $(r(t), \dot{r}(t))$, обладает следующим свойством. У движений $(\tilde{r}(t), \dot{\tilde{r}}(t))$ и $(r(t), \dot{r}(t))$ совпадают последовательности отражений от граней многогранников εQ и K соответственно (здесь предполагается, что нумерации граней согласованы, т.е. общие грани имеют одинаковые

номера). Движение $(\frac{1}{\varepsilon}\tilde{r}(\varepsilon t), \dot{\tilde{r}}(\varepsilon t))$ в $\overline{Q} \times S^{d-1}$ имеет такую же последовательность отражений от граней области Q , что и движение $(\tilde{r}(t), \dot{\tilde{r}}(t))$ от граней многогранника εQ . Следовательно, конечные скорости движений $(r(t), \dot{r}(t))$ и $(\frac{1}{\varepsilon}\tilde{r}(\varepsilon t), \dot{\tilde{r}}(\varepsilon t))$ совпадают.

Рассмотрим теперь два регулярных движения в $\overline{K} \times S^{d-1}$ с одной и той же начальной скоростью v^- и конечными скоростями v_1^+ и v_2^+ . Согласно предыдущему построим регулярные движения в $\overline{Q} \times S^{d-1}$, имеющие начальную скорость v^- и конечные скорости v_1^+ и v_2^+ . Из простоты рассеяния бильярда в Q следует, что $v_1^+ = v_2^+$. Следовательно, рассеяние бильярда в многогранном угле K простое и согласно теореме 1 угол K есть замыкание камеры относительно конечной группы Кокстера, порожденной ортогональными отражениями.

2. Этот и два следующих пункта посвящены уточнению предложения 3.1 для плоских бильярдов.

Рассмотрим выпуклое замкнутое множество $V \subset \mathbb{R}^2$. Предполагается, что сопутствующий угол $K = \{v \in \mathbb{R}^2 : V \cap \mathbb{R}^+ v \text{ содержит луч}\} \cup \{0\}$ имеет непустую внутренность $\overset{\circ}{K}$. Это условие эквивалентно тому, что V содержит некоторый угол ненулевого раствора. Если $v \in \overset{\circ}{K}$, то и любая полупрямая $x + \mathbb{R}^+ v$ пересекает V по лучу.

Назовем точку $x \in \partial V$ *регулярной*, если через нее можно провести единственную прямую, не пересекающуюся с $\overset{\circ}{V}$. В регулярной граничной точке x определены единичный вектор n_x внутренней нормали к границе и бильярдное отражение от границы. Бильярдное движение считается заданным до момента первого попадания в нерегулярную точку границы.

Выберем ортогональную систему координат x_1, x_2 таким образом, чтобы вектор $(0, -1)$ принадлежал $\overset{\circ}{K}$. Для любого x_1 пересечение вертикальной прямой $\{(x_1, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ с V есть луч $\{(x_1, x_2) : x_2 \leq f(x_1)\}$ и тем самым $V = \{x = (x_1, x_2) : x_2 \leq f(x_1)\}$. Отображение $s \rightarrow x(s) = (s, f(s))$ задает взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{R}$ и ∂V . Определенная таким образом функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и дифференцируема вне (не более чем) счетного множества. Производная f' монотонно не возрастает (см. [20; § 10]). Нерегулярные точки суть те, в которых f не дифференцируема. Пределы $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} f'(s)$ конечны; действительно, допустив противное, получим, что для сколь угодно большого числа M пересечение с V одного из лучей $\{(t, -Mt) : t \geq 0\}, \{(-t, -Mt) : t \geq 0\}$ ограничено, а это противоречит условию $(0, -1) \in \overset{\circ}{K}$.

Введем обозначения $n_l = \lim_{s \rightarrow -\infty} n_{x(s)}$, $n_r = \lim_{s \rightarrow +\infty} n_{x(s)}$; здесь пределы берутся по множеству тех s , для которых существует f' . Если $x(s)$ — регулярная точка, то

$$n_{x(s)} = (f'(s)^2 + 1)^{-1/2} \cdot (f'(s), -1), \quad (3.1)$$

и поэтому имеем

$$\begin{aligned} n_l &= (f'^2(-\infty) + 1)^{-1/2} (f'(-\infty), -1), \\ n_r &= (f'^2(+\infty) + 1)^{-1/2} (f'(+\infty), -1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из формул (3.1) и (3.2) следует, что вектор $n_{x(s)}$ может быть представлен в виде

$$n_{x(s)} = \alpha(s)n_l + \beta(s)n_r, \quad \alpha(s) \geq 0, \quad \beta(s) \geq 0. \quad (3.3)$$

Далее, непосредственно проверяется, что

$$K = \{v = (v_1, v_2) : v_1 \geq 0, v_2 \leq f'(+\infty) \cdot v_1\} \cup \{v : v_1 \leq 0, v_2 \leq f'(-\infty) \cdot v_1\}.$$

Эта формула эквивалентна следующей:

$$\overset{\circ}{K} = \{v : (v \mid n_l) > 0, (v \mid n_r) > 0\}. \quad (3.4)$$

Граница угла K есть объединение лучей $\Gamma_l = \{v : v_1 \leq 0, v_2 = f'(-\infty)v_1\}$ и $\Gamma_r = \{v : v_1 \geq 0, v_2 = f'(+\infty)v_1\}$, причем n_l и n_r суть внутренние нормали к этим лучам.

Введем на множестве $M = \mathbb{R} \times S^1$ меру μ согласно формуле

$$d\mu(s, v) = |(n_{x(s)} \mid v)| d\nu(s) d\omega(v),$$

где ω — лебегова мера на S^1 и $d\nu(s) = \sqrt{1 + f'^2(s)} ds$ (мера ν есть образ при отображении $x^{-1} : x(s) \mapsto s$ естественной, т.е. индуцированной длиной дуги, лебеговой меры на ∂V). Обозначим через M_1 множество точек $(s, v) \in M$ таких, что луч, выпущенный из $x(s)$ в направлении v , трансверсально пересечет ∂V в регулярной точке $x(s_1)$, $s_1 \neq s$. Определим отображение $T : M_1 \rightarrow M$ формулой $T((s, v)) = (s_1, v_1)$, где вектор v_1 получается из v отражением от границы в точке $x(s_1)$. Отображение последования T сохраняет меру μ (см., например, [21]).

ЛЕММА 3.1. *Существует вектор $v_- \in -\overset{\circ}{K}$ такой, что для почти всех s бильярдное движение со скоростью v_- перед первым отражением в точке $x(s)$ не попадет в нерегулярную точку границы за конечное число отражений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$\widehat{\mathcal{N}} = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^k \mathcal{N}_0,$$

где $\mathcal{N}_0 = \{(s, v) \in M : x(s) \text{ — нерегулярна}\}$. Если $(s, v) \notin \widehat{\mathcal{N}}$, то бильярдное движение, имеющее скорость $-v$ перед отражением в точке $x(s)$, не попадет в нерегулярную точку за конечное число последующих отражений. Поскольку $\mu(\mathcal{N}_0) = 0$ и отображение T сохраняет меру, то $\mu(\widehat{\mathcal{N}}) = 0$. С другой стороны, имеем

$$\mu(\widehat{\mathcal{N}}) = \int_{S^1} d\omega(v) \int_{\mathcal{N}_v} |(n_{x(s)} \mid v)| d\nu(s),$$

где $\mathcal{N}_v = \{s : (s, v) \in \widehat{\mathcal{N}}\}$; следовательно, для почти всех v

$$\int_{\mathcal{N}_v} |(n_{x(s)} \mid v)| d\nu(s) = 0. \quad (3.5)$$

В частности, равенство (3.5) справедливо для некоторого $v_0 \in \overset{\circ}{K}$. Подынтегральная функция в (3.5) не обращается в нуль (это следует из формул (3.3) и (3.4)); следовательно, множество $\mathcal{N}_{v_0} \subset \mathbb{R}$ имеет нулевую лебегову меру. Положив $v_- = -v_0$, получим утверждение леммы.

Проекцию $(s, v) \mapsto s$ обозначим через Π . Предположим, что отображение T определено на некотором множестве $\{(s, v(s)) : s \in A\}$, где $v : A \rightarrow S^1$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $v(s) = v + a(s)n_l + b(s)n_r$, где $\|v\| = 1$, $a(s), b(s) > 0$.

(i) Если

$$(v | n_l) > 0, \quad (v | n_r) < 0, \quad (v(s) | n_l) > 0, \quad (v(s) | n_r) < 0 \quad (3.6)$$

и множество A неограничено снизу, то

$$\lim_{A \ni s \rightarrow -\infty} \Pi \circ T(s, v(s)) = +\infty.$$

(ii) Если

$$(v | n_l) < 0, \quad (v | n_r) > 0, \quad (v(s) | n_l) < 0, \quad (v(s) | n_r) > 0$$

и множество A неограничено сверху, то

$$\lim_{A \ni s \rightarrow +\infty} \Pi \circ T(s, v(s)) = -\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (ii) сводится к предыдущему с помощью “противоположной” ориентации границы: $s \mapsto x(-s)$. Для доказательства (i) выпустим из точки $x(s)$ луч в направлении v и предположим, что он пересечет ∂V в точке, отличной от $x(s)$. Пусть $x(s_1)$ – первая точка такого пересечения, положим $g_v(s) = s_1$.

Из (3.6) и (3.2) следует, что вектор v может быть представлен в виде

$$v = (1 + \varphi^2)^{-1/2}(1, \varphi), \quad (3.7)$$

где $f'(+\infty) < \varphi < f'(-\infty)$. Покажем, что функция g_v определена на множестве $(-\infty, s_l)$, где $s_l = \sup\{s : f'(s) > \varphi\}$. Зафиксируем $s < s_l$ и положим

$$F(\tau) = \frac{f(\tau) - f(s)}{\tau - s} - \varphi, \quad \tau \geq s_r,$$

где $s_r = \inf\{s : f'(s) < \varphi\}$. Функция F непрерывна; непосредственно проверяется, что $F(s_r) > 0$ и $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} F(\tau) = f'(+\infty) - \varphi < 0$. Следовательно, $F(\tau) = 0$ для некоторого $\tau > s_r$. Таким образом, $x(\tau)$ принадлежит лучу $\{x(s) + tv : t > 0\}$.

Покажем теперь, что функция g_v монотонно убывает на $(-\infty, s_l)$. Пусть $s_1 < s_2 < s_l$ таковы, что $\tau_1 = g_v(s_1) < \tau_2 = g_v(s_2)$; имеем

$$f(\tau_1) - f(s_1) = \varphi \cdot (\tau_1 - s_1), \quad (3.8)$$

$$f(\tau_2) - f(s_2) = \varphi \cdot (\tau_2 - s_2). \quad (3.9)$$

Учитывая, что $f(s_2) > f(s_1) + \varphi \cdot (s_2 - s_1)$ и $f(\tau_2) < f(\tau_1) + \varphi \cdot (\tau_2 - \tau_1)$, из (3.9) получаем неравенство $f(\tau_1) - f(s_1) > \varphi \cdot (\tau_1 - s_1)$, противоречащее (3.8).

Оказывается, что

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} g_v(s) = +\infty. \quad (3.10)$$

Действительно, допустив конечность этого предела и перейдя к пределу при $s \rightarrow -\infty$ в равенстве $f(g_v(s)) - f(s) = \varphi \cdot (g_v(s) - s)$, получим в противоречии с (3.7), что $f'(-\infty) = \varphi$.

Вектор $v(s)$, так же как и v , может быть записан в виде $v(s) = (1 + \psi^2)^{-1/2}(1, \psi)$, где $f'(+\infty) < \psi < f'(-\infty)$. Используя условия леммы и координатное представление (3.2), получаем, что вторая координата разности $v(s) - v$ отрицательна; отсюда $\psi < \varphi$.

Для проверки неравенства

$$\Pi \circ T(s, v(s)) > g_v(s) \quad (3.11)$$

введем обозначения $g_v(s) = \tau$, $\Pi \circ T(s, v(s)) = \tau'$. Аналогично (3.8) и (3.9) имеем

$$f(\tau) - f(s) = \varphi \cdot (\tau - s), \quad (3.12)$$

$$f(\tau') - f(s) = \psi \cdot (\tau' - s). \quad (3.13)$$

Допустив, что $\tau' < \tau$, получим

$$f(\tau) - f(\tau') \leq \varphi \cdot (\tau - \tau'). \quad (14)$$

Из (3.12)–(3.14) вытекает неравенство $0 \leq \varphi \cdot (s - \tau') + \psi \cdot (\tau' - s)$, противоречащее условию $\psi < \varphi$. Из (3.10) и (3.11) следует утверждение (i) леммы.

3. Обозначение: $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{v_-}$; напомним, что $\mathcal{N}_v$ и v_- введены в доказательстве леммы 3.1.

ЛЕММА 3.3. *Предположим, что $n_x \neq n_l$ для любой регулярной точки $x \in \partial V$. Тогда для каждого достаточно малого $s \notin \mathcal{N}$ отображение $l(t, s) = (v_-, x(s) + tv_-)$, определенное при $t < 0$, продолжается до полного бильярдного движения, причем для асимптотического импульса (вперед) $v_+(s)$ этого движения существует предел $v_+ = \lim_{\mathcal{N} \ni s \rightarrow -\infty} v_+(s)$ и $v_+(s) \neq v_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим движение бильярда в замыкании $\overline{K}$ сопутствующего угла K , совпадающее с $l(t, s)$ при достаточно малых t . Если $s \ll -1$, то первое отражение произойдет от стороны Γ_l . Стандартное рассуждение, использующее конструкцию развертки бильярдной траектории, приводит к заключению, что произойдет конечное число k отражений, не зависящее от s , причем нечетные (четные) по порядку отражения произойдут от Γ_l (соответственно от Γ_r). Обозначим через v_i , $i = 1, \dots, k$, скорость непосредственно после i -го отражения и положим $v_0 = v_-$. Ясно, что $(v_- | n_{l,r}) < 0$ и $(v_k | n_{l,r}) > 0$, а для $i = 1, \dots, k-1$ выполнены неравенства $(-1)^i(v_i | n_l) < 0$, $(-1)^i(v_i | n_r) > 0$.

Введем обозначения: $s_1(s) = s$, $v_0(s) = v_-$, $v_1(s) = v_- - 2(v_1 | n_{x(s)})n_{x(s)}$, $(s_i(s), v_i(s)) = T^{i-1}(s_1(s), v_1(s))$. Таким образом, $x(s_i(s))$ и $v_i(s)$ суть точка i -го отражения и соответственно скорость сразу после i -го отражения для движения $l(t, s)$.

Докажем по индукции, что $s_i(s)$ и $v_i(s)$ при $1 \leq i \leq k$ определены и удовлетворяют предельным соотношениям

$$(-1)^i \lim_{\mathcal{N} \ni s \rightarrow -\infty} s_i(s) = +\infty, \quad \lim_{\mathcal{N} \ni s \rightarrow -\infty} v_i(s) = v_i, \quad (3.15)$$

причем функции $a_i(s)$ и $b_i(s)$, определяемые формулой

$$v_i(s) - v_i = a_i(s)n_l + b_i(s)n_r, \quad (3.16)$$

при достаточно малых s обладают свойствами:

$$\begin{aligned} a_{i-1}(s) > 0, \quad b_{i-1}(s) > 0, \quad 2 \leq i \leq k, \\ a_0(s) \equiv 0, \quad b_0(s) \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$a_k(s) > 0 \text{ при четном } k, \quad b_k(s) > 0 \text{ при нечетном } k. \quad (3.18)$$

Отсюда следует утверждение леммы. В самом деле, согласно (3.15) и (3.18) $v_k(s) \rightarrow v_k$ при $s \rightarrow -\infty$ и $v_k(s) \neq v_k$. Кроме того, имеем неравенства $(v_k(s) | n_l) > 0$, $(v_k(s) | n_r) > 0$ и, стало быть, согласно (3.4) $v_k(s) \in \overset{\circ}{K}$. Таким образом, после k -го отражения больше отражений не будет.

Очевидно, при $i = 1$ соотношения (3.15)–(3.17) справедливы. Допустим, что они выполнены при некотором i , $1 \leq i \leq k-1$, и докажем их для $i+1$. Рассмотрим сначала случай нечетного i . Имеем

$$\begin{aligned} v_i(s) &= v_{i-1}(s) - 2(v_{i-1}(s) | n_{x(s_i(s))})n_{x(s_i(s))} \\ &= v_{i-1} - 2(v_{i-1} | n_l)n_l + (a_{i-1}(s)n_l + b_{i-1}(s)n_r) \\ &\quad - 2(a_{i-1}(s)n_l + b_{i-1}(s)n_r | n_l)n_l \\ &\quad + 2[(v_{i-1}(s) | n_l)n_l - (v_{i-1}(s) | n_{x(s_i(s))})n_{x(s_i(s))}]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Учитывая, что $v_{i-1} - 2(v_{i-1} | n_l)n_l = v_i$, $a_{i-1}(s) \rightarrow 0$, $b_{i-1}(s) \rightarrow 0$, $n_{x(s_i(s))} \rightarrow n_l$ при $s \rightarrow -\infty$, получаем из (3.19) второе предельное соотношение в (3.15): $v_i(s) \rightarrow v_i$. Используя представление (3.3) для вектора n_x и (3.16), находим из (3.19), что

$$b_i(s) = b_{i-1}(s) - 2(v_{i-1}(s) | n_{x(s_i(s))}) \cdot \beta(s_i(s)). \quad (3.20)$$

Из условия $n_x \neq n_l$ следует, что $\beta_i(s) > 0$ для любого s . Кроме того, $(v_{i-1}(s) | n_{x(s_i(s))}) \rightarrow (v_{i-1} | n_l) < 0$ и согласно индуктивному предположению $b_{i-1}(s) \geq 0$. Следовательно, в силу (3.20) $b_i(s) > 0$ для всех $s \ll -1$.

Теперь нам понадобится следующее утверждение: если векторы единичной длины v^1 и v^2 удовлетворяют неравенствам $(v^i | n_l) > 0$, $(v^i | n_r) < 0$, $i = 1, 2$, и $v^2 - v^1 = an_l + bn_r \neq 0$, то a и b одинакового знака. Это следует из того, что $v^2 - v^1$ ортогонален вектору $v = v^1 + v^2$ и, следовательно, пропорционален $(v | n_l)n_r - (v | n_r)n_l$. Применяя это утверждение к векторам v_i , $v_i(s)$ и учитывая, что $b_i(s) > 0$, получаем второе неравенство в (3.17).

По лемме 3.2 с учетом индуктивного предположения $s_i(s) \rightarrow -\infty$ ($s \rightarrow -\infty$) и доказанных неравенств $a_i(s) > 0$, $b_i(s) > 0$ имеем

$$\lim_{\mathcal{N} \ni s \rightarrow -\infty} s_{i+1}(s) = \lim_{\mathcal{N} \ni s \rightarrow -\infty} \Pi \circ T(s_i(s), v_i(s)) = +\infty.$$

В случае четного i получаем следующую формулу, аналогичную (3.20):

$$a_i(s) = a_{i-1}(s) - 2(v_{i-1}(s) \mid n_{x(s_i(s))}) \cdot \alpha(s_i(s)). \quad (3.21)$$

Учитывая, что $\alpha(s) \geq 0$, $(v_{i-1}(s) \mid n_{x(s_i(s))}) \rightarrow (v_{i-1} \mid n_r) < 0$ при $s \rightarrow -\infty$ и $a_{i-1}(s) > 0$, выводим из (3.21) неравенство $a_i(s) > 0$; поскольку коэффициенты $a_i(s)$, $b_i(s)$ в (3.16) одного знака, то и $b_i(s) > 0$.

Так же как и в случае нечетного i , имеем: $s_{i+1}(s) \rightarrow -\infty$ при $\mathcal{N} \not\ni s \rightarrow -\infty$. Таким образом, соотношения (3.15)–(3.17) при $1 \leq i \leq k$ установлены. Наконец, повторяя рассуждения, приведенные выше, для $i = k$, получаем соотношение (3.20) и из него неравенство $b_k(s) > 0$ – в случае нечетного k , соотношение (3.21) и, следовательно, неравенство $a_k(s) > 0$ – в случае четного k . Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 3.4. *Если бильярд в V имеет простое рассеяние, то $n_{x(s)} = n_l$ при $s < s_0$ и $n_{x(s)} = n_r$ при $s > s_1$ для некоторых $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, причем $(n_l \mid n_r) = -\cos \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.3 (в предположении простоты рассеяния) вытекает, что $n_{x(s_0)} = n_l$ для некоторого $s_0 \notin \mathcal{N}$. С использованием (3.1) получаем равенство $f'(s_0) = f'(-\infty)$ и, значит, $f'(s) \equiv \text{const}$ на $(-\infty, s_0]$. Таким образом, левая ветвь $\{x(s) : s < s_0\}$ границы ∂V оказывается лучом. Рассматривая противоположную параметризацию границы $s \mapsto x(-s)$, получаем, что и некоторая правая ветвь $\{x(s) : s > s_1\}$ границы также является лучом. Эти лучи не могут быть параллельны, поскольку согласно условию V содержит некоторый угол. Если граничные лучи принадлежат одной прямой, то V совпадает с полуплоскостью и, следовательно, утверждение леммы справедливо. В противном случае эти лучи принадлежат пересекающимся прямым. Можем принять, что точка пересечения этих прямых совпадает с началом координат. Продолжим рассматриваемые лучи до начала координат и предположим, что угол, образованный полученными лучами, не является делителем π . В таком случае имеются две бильярдные траектории $l_1(t)$ и $l_2(t)$ в этом угле, которые обладают одинаковыми начальными и различными конечными скоростями. Ясно, что $M \cdot l_1(t)$ и $M \cdot l_2(t)$ для любого $M > 0$ также являются бильярдными траекториями в этом угле. Выберем M настолько большим, что точки отражения траекторий $M \cdot l_1$ и $M \cdot l_2$ принадлежат ∂V ; тогда в силу выпуклости V обе эти траектории принадлежат V . Таким образом, предъявлены два движения бильярда в V , имеющие одинаковые начальные и различные конечные скорости. Это показывает, что величина угла между лучами границы ∂V равна π/n для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

4. ТЕОРЕМА 3. *Если выпуклое замкнутое множество $V \subset \mathbb{R}^2$ содержит угол и бильярд в V имеет простое рассеяние, то для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$ $V = \bigcap_{i=1}^m \{x : (x \mid e_i) > a_i\}$, причем векторы e_1 и e_2 образуют угол $\pi - \pi/n$, а все остальные векторы e_i образуют с e_1 углы кратные π/n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.4 ∂V содержит лучи $x((-\infty, s_0))$ и $x((s_1, +\infty))$, образующие угол π/n , $n \in \mathbb{N}$; пусть прямые, содержащие эти лучи, пересекаются в начале координат. Назовем регулярную точку $x \in \partial V$ неправильной, если угол между n_x и n_l не кратен π/n , и правильной в противном случае. Предположим, что множество A всех неправильных векторов непусто.

Положим $a = \inf \{r : A \subset B_r\}$, где B_r — круг радиуса r с центром в начале координат, и выберем $x_0 \in \overline{A}$ так, что $\|x_0\| = a$. Точка x_0 является предельной для A , причем существует предел $n_0 = \lim_{A \ni x \rightarrow x_0} n_x$.

Выпустим из x_0 луч в направлении n_0 ; он либо не пересечет ∂V , либо пересечет ∂V в точке, не принадлежащей B_a . В самом деле, заметим, что для любой регулярной точки x луч $\{tx : t > 1\}$ принадлежит $\overset{\circ}{V}$ и, стало быть, содержится в полуплоскости $\{y : (y - x | n_x) > 0\}$; следовательно, справедливо неравенство

$$(x | n_x) \geq 0. \quad (3.22)$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $A \ni x \rightarrow x_0$, получаем, что $\|x_0 + tn_0\| > a$ при $t > 0$. Далее, можно выбрать достаточно близкую к x_0 точку $x_1 \in A$ и достаточно малое $\varepsilon > 0$ так, чтобы для любого единичного вектора n , удовлетворяющего условию $\|n - n_{x_1}\| < \varepsilon$, луч $\{x_1 + tn : t > 0\}$ также либо не пересечет ∂V , либо пересечет ∂V в точке, не принадлежащей B_a .

Заметим, что $\partial V \setminus B_a$ является объединением прямолинейных интервалов (сторон); граничные точки этих интервалов назовем вершинами. Отразим n раз область V относительно сторон, взятых в произвольной последовательности. Отметим все образы вершин, получающиеся при всевозможных последовательностях отражений такого вида, и рассмотрим множество O всех единичных векторов v , удовлетворяющих неравенству $\|v + n_{x_1}\| < \varepsilon$ и таких, что лучи $\{x_1 - tv : t > 0\}$ и $\{x_1 + t \cdot \sigma v : t > 0\}$ не проходят через отмеченные точки; здесь σ обозначает отражение $v \mapsto v - 2(v | n_{x_1})n_{x_1}$. Ясно, что множество O бесконечно.

Отметим, что для любой бильярдной траектории $l(t)$ в V функция $\frac{d}{dt} \|l(t)\|^2$ монотонно возрастает. В самом деле, возрастание на интервалах свободного движения проверяется непосредственно дифференцированием, а в моменты отражений скачки этой функции неотрицательны. Последнее следует из закона бильярдного отражения и неравенства (3.22).

ЛЕММА 3.5. *Бильярдная траектория $l(t)$, $t > 0$, в V испытает не более n соударений с границей в точках множества $\partial V \setminus B_a$.*

Из определения множества O , леммы 3.5 и отмеченного выше монотонного возрастания функции $\frac{d}{dt} \|l(t)\|^2$ следует, что для любого $v \in O$ движение $(l(t), \dot{l}(t))$, заданное начальными условиями $l(0) = x_1$, $\dot{l}(-0) = v$, определено на всей прямой и имеет не более $2n + 1$ отражений, причем все точки отражения в моменты $t \neq 0$ принадлежат $\partial V \setminus B_a$.

Асимптотические скорости $\dot{l}(-\infty)$ и $\dot{l}(+\infty)$ получаются из v и σv соответственно посредством последовательности отражений в правильных точках и, стало быть, $\dot{l}(-\infty) = s_- v$, $\dot{l}(+\infty) = s_+ \sigma v$, где s_- и s_+ суть элементы группы W , порожденной отражениями относительно лучей $x((-\infty, s_0))$ и $x((s_1, +\infty))$. С другой стороны, существует бильярдное движение с асимптотической скоростью назад $\dot{l}(-\infty)$, испытывающее отражение лишь от этих лучей. Следовательно, его асимптотическая скорость вперед равна $s \dot{l}(-\infty)$ для некоторого $s \in W$. В силу предположения

о простоте рассеяния имеем $sl(-\infty) = l(+\infty)$; отсюда $s_+^{-1}ss_-v = \sigma v$ для бесконечного множества векторов $v \in O$. Таким образом, $\sigma = s_+^{-1}ss_-$, т.е. $\sigma \in W$, что противоречит предположению о неправильности точки x_1 . Тем самым доказано, что $A = \emptyset$.

Положим $e_1 = n_l, e_2 = n_r$ и обозначим через $e_3, e_4, \dots, e_m, m \leq n$, все различающиеся между собой векторы n_x для регулярных точек $x \in \partial V$. Поскольку все такие точки правильные, все векторы $e_i, i > 1$, образуют с e_1 углы кратные π/n . Обозначив через $a_i, i = 1, \dots, m$, максимальное из чисел b таких, что $\{x : (x | e_i) \geq b\} \supset V$, получаем утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5. Группа W содержит ровно n отражений. Дополнение к прямым, относительно которых происходят эти отражения, распадается на $2n$ открытых углов. Два из этих углов совпадают с $\overset{\circ}{K}$ и $-\overset{\circ}{K}$, а остальные объединены в $n-1$ пар, симметричных относительно прямой $\mathbb{R} \cdot (n_l + n_r)$.

Предположим, что имеется серия из m последовательных отражений в точках $\partial V \setminus B_a$. Обозначим через $v_i, i = 1, \dots, m$, скорость после i -го отражения и через v_0 — начальную скорость. Вектор v_i получается из v_{i-1} действием некоторого элемента из W ; следовательно, все v_i принадлежат множеству Wv_0 , состоящему из $2n$ элементов, если v_0 содержится в одном из узлов, или состоящему из n элементов, если v_0 принадлежит границе некоторого угла. Для любого $u \in \overset{\circ}{K}$ справедливы неравенства

$$(v_{i-1} | u) < (v_i | u). \quad (3.23)$$

Они следуют из закона отражения и неравенств $(v_{i-1} | n_i) < 0, (n_i | u) > 0$, где n_i обозначает вектор нормали в точке i -го отражения.

Из (3.23) видно, что все векторы набора $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ различны; кроме того, любая пара симметричных углов содержит не более одного вектора из этого набора. Последнее вытекает из того факта, что для любых двух векторов v' и v'' , принадлежащих двум углам, образующим пару, можно выбрать $u \in \overset{\circ}{K}$ так, чтобы $(v' | u) = (v'' | u)$. Следовательно, набор $\{v_0, \dots, v_m\}$ не может содержать больше чем $n+1$ элемент, т.е. $m \leq n$. Если $m < n$, то общее число соударений с границей, включая m отражений и возможное попадание в особую точку, не превосходит n . Если же $m = n$, то $v_n \in \overset{\circ}{K}$; это следует из (3.23) и того, что для $u = n_l + n_r$ максимум $(v_i | u), i = 0, \dots, m$, достигается на том из векторов v_i , который принадлежит $\overset{\circ}{K}$. Таким образом, после n -го отражения соударений с границей больше не происходит. Лемма доказана.

5. Требование к множеству V в теореме 3, состоящее в том, что V содержит некоторый угол, существенно. Соответствующим примером может служить область, ограниченная параболой. Из теоремы 3 следует, что среди областей с гладкой границей, содержащих угол, лишь полуплоскость имеет простое (треугольное) рассеяние.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклая область с гладкой границей, содержащая некоторый конус с непустой внутренностью. Бильярд в Q имеет простое рассеяние в том и только том случае, если Q — полупространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем внутреннюю точку n_0 сопутствующего конуса для Q и проведем касательную к ∂Q гиперплоскость Π , перпендикулярную к n_0 . Обозначим через π ортогональную проекцию границы области Q на гиперплоскость Π . Ясно, что отображение $\pi: \partial Q \rightarrow \Pi$ — гомеоморфизм. Нормаль $n(x)$ к границе ∂Q в точке $\pi^{-1}(x)$ есть непрерывная функция своего аргумента $x \in \Pi$. Рассмотрим подмножество $D \subset \Pi$ тех точек x , для которых $n(x) = n_0$.

Утверждение: из условия простоты рассеяния для бильярда в Q следует, что множество D открыто.

Проверим это. Если $x \in D$, то существует окрестность $O \ni x$ такая, что для любой точки $x_1 \in O$ вектор $-n_0 + 2(n(x_1) \mid n_0)n(x_1)$ принадлежит сопутствующему конусу. Рассмотрим две бильярдные траектории в Q , одна из которых, имея начальную скорость $-n_0$, отражается от границы ∂Q в точке $\pi^{-1}x$, а другая, с той же начальной скоростью, — в точке $\pi^{-1}x_1$. Движения, соответствующие этим траекториям, после отражения имеют скорости n_0 и $-n_0 + 2(n(x_1) \mid n_0)n(x_1)$ соответственно. Из условия равенства конечных скоростей у движений с одинаковыми начальными скоростями получаем, что $n(x_1) = n_0$ и, следовательно, $O \subset D$. Сопоставляя это с замкнутостью множества $D \neq \emptyset$, а также учитывая связность Π , имеем $D = \Pi$, т.е. Q — полупространство.

Список литературы

1. *Marchioro C.* Solution of a three-body scattering problem in one dimension // J. Math. Phys. 1970. V. 11. P. 2193–2196.
2. *Caloggero F., Marchioro C.* Exact solution of a one-dimensional three-body scattering problem with two-body and/or three-body inverse square potential // J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 1425–1430.
3. *Moser J.* Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformation // Adv. Math. 1975. V. 16. №2. P. 197–220.
4. *Moser J.* Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential // Lecture Notes in Phys. 1975. V. 38. P. 467–497.
5. *Кулиш П. П.* Факторизация классической и квантовой S -матриц и законы сохранения // ТМФ. 1976. Т. 26. №2. С. 198–205.
6. *Moser J.* The scattering problem for some particle systems on the line // Lecture Notes in Math. 1977. V. 597. P. 441–463.
7. *Имченко Н. Г., Синаи Я. Г.* On the description of classical reflectionless potentials // Rep. Math. Phys. 1980. V. 20. №1.
8. *Плахов А. Ю.* Об отображении рассеяния классических гамильтоновых систем // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1985.
9. *Herbst I. W.* Classical scattering with long range forces // Comm. Math. Phys. 1974. V. 35. №3. P. 193–214.
10. *Alsholm P.* Wave operators for long range scattering // J. Math. Anal. Appl. 1977. V. 59. №3. P. 550–572.
11. *Степин А. М.* Бильярдные и гамильтоновы системы с рассеянием // УМН. 1989. Т. 44. №4. С. 212.
12. *Плахов А. Ю., Степин А. М.* Рассеяние и группы Кокстера // УМН. 1998. Т. 53. №2. С. 159–160.
13. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса; группы, порожденные отражениями; системы корней. М.: Мир, 1972.
14. *Воробец Я. Б., Гальперин Г. А., Степин А. М.* Периодические бильярдные траектории: механизмы рождения // УМН. 1992. Т. 47. №3. С. 9–74.

15. *Синай Я. Г.* Бильярдные траектории в многогранном угле // УМН. 1978. Т. 33. № 1. С. 229–230.
16. *Кокстер Г. С. М., Мозер У. О. Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.
17. *Козлов В. В., Трегелв Д. В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
18. *Гальперин Г. А.* О системах локально взаимодействующих и отталкивающихся частиц, движущихся в пространстве // Труды ММО. 1981. Т. 43. С. 142–196.
19. *Ольшанецкий М. А., Переломов А. М., Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А.* Интегрируемые системы. II // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1987. С. 86–226.
20. *Лейтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
21. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

Институт физико-технических проблем РАН;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
29.10.1998