Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Шкарин, Об универсальных абелевых топологических группах, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 7, 127–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:12:53

УДК 512.54

С. А. Шкарин

Об универсальных абелевых топологических группах

Топологическая группа G называется универсальной в классе $\mathcal{K}$ топологических групп, если $G \in \mathcal{K}$ и для всякой группы $H \in \mathcal{K}$ существует подгруппа K группы G , изоморфная H как топологическая группа.

В настоящей работе построена группа, универсальная в классе сепарабельных метризуемых топологических абелевых групп.

Библиография: 6 названий.

Введение

Хорошо известная теорема Банаха–Мазура (см., например, [1]) состоит в том, что банахово пространство $C[0, 1]$ является универсальным в классе сепарабельных нормированных пространств, т.е. для всякого сепарабельного нормированного пространства X найдется линейное подпространство $C[0, 1]$, изоморфное X . Используя это обстоятельство, несложно показать, что пространство $C(\mathbb{R})$ (с компактно открытой топологией) является универсальным в классе сепарабельных метризуемых локально выпуклых пространств. Н. Дж. Калтон [2] построил топологическое векторное пространство, универсальное в классе сепарабельных метризуемых топологических векторных пространств. В настоящей работе мы будем рассматривать вопрос о существовании универсальных элементов в различных классах топологических групп.

Топологическая группа G называется *универсальной в классе $\mathcal{K}$* топологических групп, если $G \in \mathcal{K}$ и для всякой группы $H \in \mathcal{K}$ существует подгруппа K группы G такая, что топологические группы H и K изоморфны.

В. В. Успенский [3], [4] доказал, что группа автогомеоморфизмов гильбертова куба в топологии равномерной сходимости является универсальной в классе всех сепарабельных метризуемых топологических групп. Кроме того, он показал, что в группу изометрий универсального по Урысону метрического пространства вкладывается любая метризуемая сепарабельная топологическая группа. Тем не менее, оставался открытым вопрос о существовании группы, универсальной в классе сепарабельных метризуемых топологических абелевых групп. В настоящей работе строится такая группа (при этом используются некоторые фрагменты схем Н. Дж. Калтона и В. В. Успенского).

§1. Обозначения и терминология

Всюду в этой работе $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел, $\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел, $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ниже все группы предполагаются абелевыми и используется аддитивная форма записи групповой операции. Для элемента a абелевой группы (АГ) G символом $O(a)$ будем обозначать порядок элемента a . Напомним, что АГ G называется *периодической*, если все элементы G имеют конечный порядок. Абелеву группу G назовем *примитивной*, если она является абелевой прямой суммой некоторого (не обязательно конечного) семейства конечных циклических групп. Очевидно, что всякая примитивная АГ является периодической. Функция $p: G \rightarrow [0, +\infty)$ на АГ G называется *полунормой*, если

$$p(0) = 0, \quad (\text{N1})$$

$$p(-x) = p(x) \text{ для всех } x \in G, \quad (\text{N2})$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ для всех } x, y \in G \text{ (неравенство треугольника)}. \quad (\text{N3})$$

Полунорма p называется *нормой*, если выполнено условие

$$\ker p = \{0\}, \quad (\text{N4})$$

где $\ker p = \{x \in G : p(x) = 0\}$.

Напомним, что всякая норма p задает метризуемую групповую топологию на G ; соответствующая метрика $d_p(x, y) = p(x - y)$. *Метрической абелевой группой* (МАГ) будем называть АГ G , на которой фиксирована норма p . Будем всегда предполагать, что топологию на МАГ (G, p) задает метрика d_p . Если на абелевых группах G и H фиксированы полунормы p и q соответственно, то гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ называется *изометрическим* или *изометрией*, если $q(\varphi(x)) = p(x)$ для всех $x \in G$. Будем говорить, что МАГ (G, p) *вкладывается* в МАГ (H, q) , если существуют подгруппа $K \subseteq H$ и изометрический изоморфизм $\varphi: G \rightarrow K$. Символом $\text{Tor}(G)$ будем обозначать множество элементов конечного порядка в АГ G ($\text{Tor}(G)$ является подгруппой в G в силу коммутативности G). Если $A \subseteq G$, то символом $\langle A \rangle$ обозначается подгруппа группы G , порожденная множеством A . Для конечного множества $\{x_1, \dots, x_n\}$ вместо $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$ будем писать $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Если (G, p) — МАГ, то символом $S(G)$ обозначим множество тех $x \in G$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} (p(nx)/n) = 0$. Будем писать $G \in \mathfrak{S}$, если $G = S(G)$.

§ 2. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1. Пусть (G, p) — МАГ. Тогда для всякого $x \in G$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (p(nx)/n)$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} (p(nx)/n) = \inf \{p(nx)/n : n \in \mathbb{N}\}$. Кроме того, множество $S(G)$ является замкнутой подгруппой в G , содержащей $\text{Tor}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \inf \{p(nx)/n : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $p(mx)/m < A + \varepsilon$. Пусть $n > m$. Тогда $n = km + r$, где $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq m - 1$. Согласно неравенству треугольника для p имеем:

$$\frac{p(nx)}{n} \leq \frac{k p(mx) + r p(x)}{n} \leq \frac{p(mx)}{m} + \frac{p(x)}{k} < A + \varepsilon + \frac{p(x)}{k}.$$

Из этого соотношения немедленно получаем, что

$$A \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{p(nx)}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{p(nx)}{n} \leq A + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (p(nx)/n)$ существует и равен A .

Докажем теперь, что $S(G)$ — замкнутая подгруппа в G . То, что $S(G)$ является подгруппой G , проверяется элементарно. Пусть $x \in G \setminus S(G)$, $y \in S(G)$. Согласно уже доказанному существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (p(nx)/n) = c > 0$. Для доказательства замкнутости $S(G)$ достаточно проверить, что $p(x - y) \geq c$. Пусть $p(x - y) = b$. Тогда

$$cn \leq p(nx) \leq p(n(x - y)) + p(ny) \leq bn + o(n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Значит, $b \geq c$. Включение $\text{Tor}(G) \subseteq S(G)$ очевидно.

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ и $g: A \rightarrow \mathbb{R}$. Напомним, что функция g называется *строго выпуклой вверх*, если для всякой тройки точек $x, y, z \in A$ такой, что $x < y < z$, выполняется неравенство $g(y) > f(x, g(x), z, g(z), y)$, где

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2, z) = \frac{(y_2 - y_1)z + x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}, \quad (\Lambda)$$

т.е. точка $(y, g(y))$ лежит выше прямой, проведенной через $(x, g(x))$ и $(z, g(z))$.

ЛЕММА 2. Пусть $a_n \in (0, +\infty)$ для всякого $n \in \mathbb{N}$ и A_n — всюду плотное подмножество $(0, +\infty)$, причем $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$. Тогда существует строго возрастающая и строго выпуклая вверх функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(a_n) \in A_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_0 = 0$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что множество $X = \{a_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ плотно в $[0, +\infty)$. Положим $b_0 = 0$ и построим индуктивно $b_n \in (0, \infty)$ такие, что для всякого $k \in \mathbb{N}$:

$$b_k \in A_k; \quad (\alpha)$$

$$\begin{aligned} &\text{функция } a_m \mapsto b_m \text{ на множестве } \{a_0, \dots, a_k\} \\ &\text{строго возрастает и строго выпукла вверх.} \end{aligned} \quad (\beta)$$

В качестве b_1 возьмем произвольный элемент множества A_1 . Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и b_k , удовлетворяющие условиям (α) и (β) , уже построены при $0 \leq k \leq n - 1$. Построим b_n . Пусть π — такая перестановка множества $\{0, 1, \dots, n - 1\}$, что $a_{\pi(0)} < a_{\pi(1)} < \dots < a_{\pi(n-1)}$. Возможны два случая.

Случай 1. $a_n > a_{\pi(n-1)}$.

Положим $g = f(a_{\pi(n-2)}, b_{\pi(n-2)}, a_{\pi(n-1)}, b_{\pi(n-1)}, a_n)$, где отображение f определяется формулой (Λ) . Из условия (β) для $k = n - 1$ имеем, что $b_{\pi(n-1)} < g$. В силу плотности A_n в $(0, +\infty)$ найдется $b_n \in (b_{\pi(n-1)}, g) \cap A_n$. Непосредственно проверяется, что при таком выборе b_n условия (α) и (β) для $k = n$ выполняются.

Случай 2. $a_n < a_{\pi(n-1)}$.

В этом случае существует единственное $k \in \{0, \dots, n - 2\}$ такое, что $a_{\pi(k)} < a_n < a_{\pi(k+1)}$. Пусть $c = f(a_{\pi(k)}, b_{\pi(k)}, a_{\pi(k+1)}, b_{\pi(k+1)}, a_n)$. Положим

$$d = \begin{cases} \min\{f(a_{\pi(k-1)}, b_{\pi(k-1)}, a_{\pi(k)}, b_{\pi(k)}, a_n); \\ f(a_{\pi(k+1)}, b_{\pi(k+1)}, a_{\pi(k+2)}, b_{\pi(k+2)}, a_n)\}, & \text{если } 1 \leq k \leq n - 3; \\ \min\{f(a_{\pi(k-1)}, b_{\pi(k-1)}, a_{\pi(k)}, b_{\pi(k)}, a_n); b_{\pi(n-1)}\}, & \text{если } 1 \leq k = n - 2; \\ b_1, & \text{если } k = 0 = n - 2. \end{cases}$$

Из условия (β) для $k = n - 1$ имеем, что $c < d$. Непосредственно проверяется, что если $b_n \in (c, d) \cap A_n$ (мы снова пользуемся плотностью A_n в $(0, +\infty)$), то условия (α) и (β) для $k = n$ выполняются.

Построение последовательности b_n завершено. Таким образом, построена функция $\psi: X \rightarrow [0, +\infty)$, $\psi(a_n) = b_n$, которая строго возрастает и строго выпукла вверх. Из выпуклости вверх функции ψ и включений $0 \in X \subset [0, +\infty)$, $\psi(X) \subset [0, +\infty)$ следует равномерная непрерывность ψ . Значит, в силу плотности X в $[0, +\infty)$ существует и единственная непрерывная функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такая, что $\varphi|_X = \psi$. Автоматически φ строго возрастает и строго выпукла вверх. В силу (α) имеем, что $\varphi(a_n) \in A_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 3. Пусть $(G, p) \in \mathfrak{S}$, τ – бесконечный кардинал и $|G| \leq \tau$. Тогда существует МАГ $(H = H(G), q)$ такая, что $|H| \leq \tau$ и

- 1) $H = G \oplus K$ и $q|_G = p$ (здесь G и $G \oplus \{0\}$ отождествляются);
- 2) существует $A \subset K$ такое, что $K = \bigoplus_{a \in A} \langle a \rangle$, $O(a) \in \mathbb{N}^*$ при всех $a \in A$ и $G \subset \overline{A}$, где $\overline{A}$ – замыкание A в (H, q) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = G \oplus K$, где $K = \bigoplus_{a \in G \times \mathbb{N}^*} \langle h_{g,n} \rangle$, $O(h_{g,n}) = n$. Отображение $\varphi: H \rightarrow [0, +\infty]$ зададим формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} p(x), & \text{если } x \in G; \\ \max \left\{ \frac{1}{n}, \frac{p(ng)}{n} \right\}, & \text{если } x = g - h_{g,n} \text{ или } x = h_{g,n} - g, g \in G, n \in \mathbb{N}^*; \\ +\infty & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(G и $\langle h_{g,n} \rangle$ считаются естественным образом вложенными в H). Положим

$$q(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) : n \in \mathbb{N}, x_j \in H, x = \sum_{j=1}^n x_j \right\}.$$

Неравенство $|H| \leq \tau$ очевидно. Покажем, что q – норма на H и $q|_G = p$.

Конечность $q(x)$ для всякого $x \in G$ и справедливость условий (N1)–(N3) для q проверяются элементарно. Докажем равенство $q|_G = p$ и соотношение (N4) для q . Пусть $g \in G$. Неравенство $q(g) \leq p(g)$ очевидно. Пусть $g = \sum_{j=1}^n x_j$, $x_j \in H$. Для доказательства равенства $q|_G = p$ достаточно проверить неравенство $\sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \geq p(g)$. Если $\varphi(x_j) = +\infty$ хотя бы для одного j , то это неравенство тривиально. Если $\varphi(x_j) < +\infty$ при всех j , то $x_j = g_j - y_j$ для каждого j , где $g_j \in G$, а $y_j \in \{0, h_{g_j, n_j}, -h_{-g_j, n_j}\}$. Так как $\sum_{j=1}^n x_j \in G$, то $\sum_{j=1}^n y_j = 0$ и $\sum_{j=1}^n g_j = g$. Не ограничивая общности рассуждений, можно предполагать, что $x_i + x_j \neq 0$ при различных i и j . Переставим слагаемые в сумме $g = \sum_{j=1}^n x_j$ следующим образом:¹

$$g = \sum_{\{j: y_j=0\}} x_j + \sum_{(g,m) \in G \times \mathbb{N}^*} \left(\sum_{\{j: y_j=h_{g,m}\}} x_j + \sum_{\{j: y_j=-h_{g,m}\}} x_j \right).$$

¹Сумма элементов пустого множества считается равной нулю.

Пусть $(g, m) \in G \times \mathbb{N}^*$. Тогда по крайней мере одно из двух множеств $A_{g,m} = \{j : y_j = h_{g,m}\}$ и $B_{g,m} = \{j : y_j = -h_{g,m}\}$ пусто, а мощность другого кратна m (иначе либо $\sum_{j=1}^n y_j \neq 0$, либо найдутся различные i и j , при которых $x_i + x_j = 0$). Значит, $|A_{g,m}| = k_{g,m}m$, $|B_{g,m}| = k'_{g,m}m$, где $k_{g,m}, k'_{g,m} \in \mathbb{Z}_+$. Стало быть, по неравенству треугольника для p по определению φ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) &\geq \sum_{\{j:y_j=0\}} p(g_j) + \sum_{(g,m) \in G \times \mathbb{N}^*} (k_{g,m} + k'_{g,m})m \frac{p(mg)}{m} \\ &\geq p \left(\sum_{\{j:y_j=0\}} g_j + \sum_{(g,m) \in G \times \mathbb{N}^*} m(k_{g,m} - k'_{g,m})g \right) = p \left(\sum_{j=1}^n g_j \right) = p(g). \end{aligned}$$

Проверим теперь (N4) для q . Пусть $x \in H$, $q(x) = 0$. Если $x \notin G$, то найдется пара $(g, m) \in G \times \mathbb{N}^*$ такая, что естественная проекция x на $\langle h_{g,m} \rangle$ отлична от нуля. В этом случае для всякого представления x в виде $\sum_{j=1}^n x_j$, $x_j \in H$, найдется j такое, что естественная проекция x_j на $\langle h_{g,m} \rangle$ отлична от нуля, а значит, $\varphi(x_j) \geq 1/m$. Стало быть, $q(x) \geq 1/m \neq 0$. Следовательно, $x \in G$. Тогда $p(x) = q(x) = 0$. Согласно свойству (N4) для p имеем $x = 0$. Таким образом, справедливость соотношения (N4) для q доказана. Итак, (H, q) является МАГ. Для доказательства леммы осталось проверить включение $G \subset \overline{A}$, где $A = \{h_{g,n} : g \in G, n \in \mathbb{N}^*\}$. Пусть $g \in G$. Так как $G \in \mathfrak{S}$, то $g \in S(G)$ и, значит,

$$q(g - h_{g,n}) \leq \varphi(g - h_{g,n}) = \max \left\{ \frac{p(ng)}{n}, \frac{1}{n} \right\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тем самым последовательность $h_{g,n}$ элементов A сходится в (H, q) к g . Стало быть, $G \subset \overline{A}$.

ЛЕММА 4. Пусть τ – бесконечный кардинал, (G, p) – примитивная МАГ и $|G| \leq \tau$. Тогда существует примитивная МАГ $(H = H(G), q)$ такая, что $|H| \leq \tau$, $H = G \oplus K$, $q|_G = p$, $K = \bigoplus_{a \in A} \langle a \rangle$, $O(a) \in \mathbb{N}^*$ при всех $a \in A$ и A плотно в (H, q) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как G примитивна, то найдется $A_0 \subset G$ такое, что $G = \bigoplus_{a \in A_0} \langle a \rangle$. Положим $(H_0, p_0) = (G, p)$ и построим индуктивно последовательности МАГ (H_n, p_n) , подгрупп $K_n \subset H_n$ и подмножеств $A_n \subset H_n$, обладающих для каждого $n \in \mathbb{N}$ следующими свойствами:

- 1) $H_n = H_{n-1} \oplus K_n$, $p_n|_{H_{n-1}} = p_{n-1}$, $K_n = \bigoplus_{a \in A_n} \langle a \rangle$ и $|A_n| \leq \tau$;
- 2) $O(a) \in \mathbb{N}^*$ для всех $a \in A_n$;
- 3) $H_{n-1} \subset \overline{A_n}$ (замыкание берется в (H_n, p_n)).

Основанием индукции служит $H_0 = G$. Пусть H_{n-1} , удовлетворяющая перечисленным условиям, уже построена. Из этих условий видно, что H_{n-1} примитивна, а значит, является периодической. Тогда $H_{n-1} \in \mathfrak{S}$ по лемме 1. Стало быть, для H_{n-1} выполняются условия леммы 3. Ясно, что в качестве H_n , K_n и A_n можно взять H , K и A , существование которых доказано в лемме 3.

Положим теперь $H = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$ (H является группой как объединение возрастающей последовательности групп), $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $K = \bigoplus_{a \in A} \langle a \rangle$. Очевидно, что $H = G \oplus K$, H примитивна и $|H| \leq \tau$. Пусть $q: H \rightarrow [0, +\infty)$ такова, что $q(x) = p_n(x)$ при $x \in H_n$. В силу соотношения $p_n|_{H_{n-1}} = p_{n-1}$ норма q корректно определена и $q|_G = p$. Нам осталось проверить, что A плотно в (H, q) . Но $H_n \subset \overline{A_{n+1}} \subset \overline{A}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $H = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n \subset \overline{A}$.

ЛЕММА 5. Пусть $\varepsilon > 0$, H — конечная АГ, $H = G \oplus \langle a \rangle$ и p — норма на G , причем

- 1) $p(x+y) < p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in G \setminus \{0\}$;
- 2) если $x, y \in G$ и $p(x) = p(y)$, то $x \in \{y, -y\}$.

Тогда на группе H существует норма q такая, что

- (a) $q|_G = p$ и $q(a) < \varepsilon$;
- (b) $q(x+y) < q(x) + q(y)$ для всех $x, y \in H \setminus \{0\}$;
- (c) если $x, y \in H$ и $q(x) = q(y)$, то $x \in \{y, -y\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию r на H зададим формулой

$$r(g+ka) = \sqrt{(p(g))^2 + \frac{\varepsilon^2 |k|}{2}},$$

где $g \in G$, $k \in \mathbb{Z}$ и $|k| \leq O(a)/2$.

Непосредственно проверяется, что r — норма на H , причем $r(x+y) < r(x) + r(y)$ при всех $x, y \in H \setminus \{0\}$, $r|_G = p$ и $r(a) < \varepsilon$.

Положим

$$L = \{f \in \mathbb{R}^H : f(g) = p(g) \text{ при всех } g \in G \text{ и } f(x) = f(-x) \text{ при всех } x \in H\}.$$

Очевидно, что L — аффинное подпространство конечномерного евклидова пространства $\mathbb{R}^H$. Пусть

$$U = \{f \in L : f(x+y) < f(x) + f(y) \text{ при всех } x, y \in H \setminus \{0\}, \\ f(x) > 0 \text{ при всех } x \in H \setminus \{0\} \text{ и } f(a) < \varepsilon\}.$$

Ясно, что U открыто в L . Множество U непусто, так как $r \in U$. Для всякой пары $x, y \in H$ такой, что $x \neq y$ и $x \neq -y$, положим $L_{x,y} = \{f \in L : f(x) = f(y)\}$. Из условий, наложенных на p , и определения L имеем, что каждое $L_{x,y}$ является собственным аффинным подпространством L . Значит, открытое множество $V = U \setminus \bigcup L_{x,y}$ непусто. В качестве искомой нормы q годится любой элемент V .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $G = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle a_n \rangle$ — счетная примитивная АГ. Тогда на G существует норма p такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} p(a_n) = 0$ и для всех $x, y \in G$ таких, что $p(x) = p(y)$, выполняется включение $x \in \{y, -y\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_0 = \{0\}$, $p_0(0) = 0$ и $G_n = \bigoplus_{k=1}^n \langle a_k \rangle$. По лемме 5 можно индуктивно построить последовательность $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такую, что

- (C1) p_n — норма на G_n для всякого $n \in \mathbb{Z}_+$ и $p_n|_{G_{n-1}} = p_{n-1}$;
- (C2) если $x, y \in G_n$ и $p(x) = p(y)$, то $x \in \{y, -y\}$;
- (C3) $p_n(x+y) < p_n(x) + p_n(y)$ при всех $x, y \in G_n \setminus \{0\}$;
- (C4) $p_n(a_n) < 1/n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$.

Функцию p на G определим соотношением $p(x) = p_n(x)$ при $x \in G_n$. Из условия (C1) вытекает корректность этого определения и то, что p – норма. В силу (C4) $p(a_n) < 1/n$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} p(a_n) = 0$. Пусть $x, y \in G$ и $p(x) = p(y)$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $x, y \in G_n$. Тогда $p_n(x) = p_n(y)$ и по свойству (C2) $x \in \{y, -y\}$.

ЛЕММА 6. Пусть (G, p) – счетная МАГ, $A \subset G$, $G = \bigoplus_{a \in A} \langle a \rangle$, $O(a) \in \mathbb{N}^*$ при всех $a \in A$ и A плотно в G . Тогда существует счетная примитивная МАГ (H, q) и плотная подгруппа $K \subseteq H$ такие, что (G, p) вкладывается в (H, q) и $q(K) \subset \mathbb{Q}$.²

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, A счетно. Значит, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $a_n \neq a_m$, $m \neq n$. По следствию 1 существует норма r_0 на G такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_0(a_n) = 0$ и

$$\text{если } r_0(x) = r_0(y), \text{ то } x \in \{y, -y\} \text{ для всех } x, y \in G. \quad (\text{T})$$

По лемме 2 существует строго возрастающая, строго выпуклая вверх функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(r_0(x)) \in -p(x) + \mathbb{Q}$ для всякого $x \in G$ (эти условия не противоречат друг другу в силу (T)). Пусть $H = G \times G$ и функция $q: H \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой

$$q(x, y) = p(x) + \varphi(r_0(y)).$$

Используя неотрицательность и выпуклость вверх функции φ , несложно проверить, что q является нормой на H . Ясно, что (G, p) вкладывается в МАГ (H, q) (соответствующее вложение – $x \mapsto (x, 0)$) и что H примитивна. Пусть $K = \{(x, x) : x \in G\} \subset H$. Очевидно, K – подгруппа в H . Осталось показать плотность K в (H, q) и включение $q(K) \subseteq \mathbb{Q}$. Если $(x, x) \in K$, то

$$q(x, x) = p(x) + \varphi(r_0(x)) \in p(x) + (-p(x) + \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}.$$

Следовательно, $q(K) \subseteq \mathbb{Q}$. Так как $(G \times \{0\}) \oplus K = H$, то для доказательства плотности K в H достаточно проверить, что $G \times \{0\} \subset \overline{K}$. В силу плотности A в G для всякого $x \in G$ найдется строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что $p(a_{n_k} - x) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Стало быть,

$$\begin{aligned} q((a_{n_k}, a_{n_k}) - (x, 0)) &= q(a_{n_k} - x, a_{n_k}) = p(a_{n_k} - x) + \varphi(r_0(a_{n_k})) \\ &= p(a_{n_k} - x) + \varphi(r_0(a_{n_k})) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Следовательно, $(x, 0) \in \overline{K}$.

ЛЕММА 7. Пусть (G, p) – сепарабельная МАГ и $G \in \mathfrak{S}$. Тогда существует счетная примитивная МАГ (K, q) такая, что $q(K) \subseteq \mathbb{Q}$ и (G, p) вкладывается в пополнение³ $(\overline{K}, q)$ МАГ (K, q) .

² Лемма 6 останется верной, если $\mathbb{Q}$ заменить на произвольное плотное в $\mathbb{R}$ множество.

³ Для абелевых топологических групп полнота по Вейлю эквивалентна полноте по Райкову (см. [6]), и всякая абелева топологическая группа пополняема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующее отношение на классе всех МАГ. Будем писать $(H_1, p_1) \preccurlyeq (H_2, p_2)$, если МАГ (H_1, p_1) вкладывается в пополнение МАГ (H_2, p_2) . Легко проверить, что отношение $\preccurlyeq$ рефлексивно и транзитивно.⁴ Заметим также, что если K_i – плотные подгруппы в (H_i, p_i) ($i \in \{1, 2\}$), то утверждения $(H_1, p_1) \preccurlyeq (H_2, p_2)$ и $(K_1, p_1) \preccurlyeq (K_2, p_2)$ эквивалентны. Из этих свойств и леммы 3 для $\tau = \aleph_0$ видно, что для всякой сепарабельной МАГ $(G, p) \in \mathfrak{S}$ найдется счетная примитивная МАГ (G_1, p_1) такая, что $(G, p) \preccurlyeq (G_1, p_1)$. По лемме 4 для $\tau = \aleph_0$ найдутся счетная примитивная МАГ (G_2, p_2) и множество $A \subset G_2$ такие, что $G_2 = \bigoplus_{a \in A} \langle a \rangle$, (G_1, p_1) вкладывается в (G_2, p_2) (в частности $(G_1, p_1) \preccurlyeq (G_2, p_2)$) и A плотно в (G_2, p_2) . По лемме 6 найдется счетная примитивная МАГ (G_3, p_3) такая, что $(G_2, p_2) \preccurlyeq (G_3, p_3)$ и $p_3(G_3) \subseteq \mathbb{Q}$. Осталось воспользоваться транзитивностью отношения $\preccurlyeq$.

Опишем одну общую алгебраическую конструкцию, докажем некоторые ее свойства и заодно введем соответствующие обозначения.

Пусть G – АГ, A – множество, $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ – некоторый набор подгрупп G (отображение $\alpha \mapsto G_\alpha$ не обязательно инъективно) такой, что

для любой пары точек $x, y \in G$ найдется $\alpha \in A$ такое, что $x, y \in G_\alpha$; (K1)

для всякого $g \in G$ найдется пара $\alpha, \beta \in A$ такая, что $\alpha \neq \beta$ и $g \in G_\alpha \cap G_\beta$. (K2)

Для всякого $\alpha \in A$ пусть H_α – АГ, содержащая G_α в качестве подгруппы, $\mathcal{H} = \{H_\alpha : \alpha \in A\}$ и

$$X = X(\mathcal{H}) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_\alpha.$$

Пусть $Y = Y(G, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ – подгруппа в X , порожденная множеством $\{z(\beta, \gamma, g) : \beta, \gamma \in A, g \in G_\beta \cap G_\gamma\}$, где

$$z(\beta, \gamma, g)_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \notin \{\beta, \gamma\}; \\ g & \text{при } \alpha = \beta; \\ -g & \text{при } \alpha = \gamma. \end{cases}$$

Положим

$$Z = Z(G, \mathcal{G}, \mathcal{H}) = X/Y. \quad (Z)$$

Через j_α ($\alpha \in A$) обозначим естественное вложение H_α в X , $\varkappa_\alpha : H_\alpha \rightarrow Z$ определим формулами $\varkappa_\alpha(x) = j_\alpha(x) + Y$. Положим $K_\alpha = \varkappa_\alpha(H_\alpha)$. Ясно, что $Z = \langle \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для всякого $\alpha \in A$ отображение $\varkappa_\alpha$ является инъективным гомоморфизмом, причем $\varkappa_\alpha|_{G_\alpha \cap G_\beta} = \varkappa_\beta|_{G_\alpha \cap G_\beta}$ при всех $\alpha, \beta \in A$.

⁴Отношение $\preccurlyeq$ не является антисимметричным и поэтому не является частичным порядком. Более того, можно привести пример двух МАГ (H_1, p_1) и (H_2, p_2) таких, что $(H_1, p_1) \preccurlyeq (H_2, p_2)$, $(H_2, p_2) \preccurlyeq (H_1, p_1)$ и пополнения этих МАГ даже не являются алгебраическими изоморфными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $\varkappa_\alpha$ – гомоморфизм, очевидно. Пусть $x \in H_\alpha$ и $\varkappa_\alpha(x) = 0$. Это значит, что $j_\alpha(x) \in Y$. По определению подгруппы Y имеем, что $\sum_{\beta \in A} (j_\alpha(x))_\beta = 0$ (все $(j_\alpha(x))_\beta$ в этом случае являются элементами G и сумма берется в G). С другой стороны, из определения j_α следует, что

$$(j_\alpha(x))_\beta = \begin{cases} x & \text{при } \alpha = \beta; \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Значит, $x = \sum_{\beta \in A} (j_\alpha(x))_\beta = 0$. Стало быть, гомоморфизм $\varkappa_\alpha$ инъективен. Пусть теперь $\alpha, \beta \in A$ и $g \in G_\alpha \cap G_\beta$. Тогда $j_\alpha(g) - j_\beta(g) = z(\alpha, \beta, g) \in Y$. Значит, $\varkappa_\alpha(g) = \varkappa_\beta(g)$.

По утверждению 1 и свойствам (K1), (K2) корректно определен инъективный гомоморфизм $\varkappa: G \rightarrow Z$ такой, что $\varkappa|_{G_\alpha} = \varkappa_\alpha|_{G_\alpha}$ при всех $\alpha \in A$. Далее мы будем отождествлять точки $g \in G$ и $\varkappa(g) \in Z$. Тем самым G является подгруппой Z .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. При всех $\alpha \in A$ $K_\alpha \cap \langle \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta \rangle = G_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in K_\alpha \cap \langle \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta \rangle$. Тогда $x = \varkappa_\alpha(h_\alpha) = \sum_{\beta \in B} \varkappa_\beta(h_\beta)$, где $h_\alpha \in H_\alpha$, $h_\beta \in H_\beta$, $B \subseteq A \setminus \{\alpha\}$ – конечное множество. Из последнего равенства следует, что $u \in X$, определяемое формулой

$$u_\gamma = \begin{cases} h_\alpha & \text{при } \gamma = \alpha; \\ -h_\gamma & \text{при } \gamma \in B; \\ 0 & \text{при } \gamma \in A \setminus (B \cup \{\alpha\}), \end{cases}$$

является элементом Y . Это, в частности, значит, что $u_\gamma \in G_\gamma$ для всякого $\gamma \in A$. Следовательно, $h_\alpha \in G_\alpha$. По нашей договоренности $\varkappa_\alpha$ на G_α действует тождественно. Тем самым, $x = \varkappa_\alpha(h_\alpha) \in G_\alpha$. Стало быть, $K_\alpha \cap \langle \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta \rangle \subseteq G_\alpha$. С другой стороны, согласно условию (K2) $G = \langle \bigcup_{\beta \neq \alpha} G_\beta \rangle \subseteq \langle \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta \rangle$. Следовательно, $G_\alpha \subseteq K_\alpha \cap G \subseteq K_\alpha \cap \langle \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta \rangle$.

Носителем элемента $x \in Z$ назовем множество всех $\alpha \in A$, для которых образ x при каноническом отображении $\varphi_\alpha: Z \rightarrow Z / \langle \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta \rangle$ отличен от нуля. Носитель x будем обозначать $\text{supp } x$. Ясно, что $\text{supp } x$ – конечное подмножество A .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. I. Пусть $x \in Z$. Тогда утверждения $x \in G$ и $\text{supp } x = \emptyset$ эквивалентны.

II. Для представления $x \in Z$ в виде $x = g + \sum_{k=1}^n x_k$, где $g \in G$, $x_k \in K_{\alpha_k} \setminus G_{\alpha_k}$, следующие условия эквивалентны:

- 1) число n минимальное среди тех, для которых такое представление возможно;
- 2) $\alpha_j \neq \alpha_k$ при $j \neq k$;
- 3) $n = |\text{supp } x|$;
- 4) $n = |\text{supp } x|$ и $\{\alpha_k : 1 \leq k \leq n\} = \text{supp } x$.

III. Для любых двух представлений x в виде

$$x = g^1 + \sum_{\alpha \in \text{supp } x} x_\alpha^1 = g^2 + \sum_{\alpha \in \text{supp } x} x_\alpha^2,$$

где $g^i \in G$, $x_\alpha^i \in K_\alpha \setminus G_\alpha$, выполняются соотношения $x_\alpha^1 - x_\alpha^2 \in G_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 2 вытекает, что $\varphi_\alpha(y) \neq 0$, если $y \in K_\alpha \setminus G_\alpha$. Из (K2) следует, что $G \subseteq \langle \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta \rangle$. Следовательно, $\varphi_\alpha(g) = 0$ для всех $g \in G$. Кроме того, очевидно, что $\varphi_\alpha(y) = 0$, если $y \in K_\beta$ и $\beta \neq \alpha$.

I. Пусть $x \in G$. Так как $\varphi_\alpha(g) = 0$ при всех $\alpha \in A$, то $\text{supp } x = \emptyset$. Пусть $x \in Z$ и $\text{supp } x = \emptyset$. Так как $Z = \langle \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha \rangle$, то найдется конечное множество $B \subseteq A$ такое, что $x = \sum_{\alpha \in B} x_\alpha$, $x_\alpha \in K_\alpha$. Если $x_\alpha \in K_\alpha \setminus G_\alpha$ для некоторого $\alpha \in B$, то по перечисленным выше свойствам φ_α имеем $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_\alpha) \neq 0$. Значит, $\alpha \in \text{supp } x$, что невозможно. Тем самым $x_\alpha \in G_\alpha \subseteq G$ при всех α . Следовательно, $x \in G$.

II. По перечисленным в начале доказательства свойствам φ_α имеем, что $\varphi_\alpha(x_k) = 0$ при $\alpha \neq \alpha_k$ и $\varphi_{\alpha_k}(x_k) \neq 0$. Кроме того, $\varphi_\alpha(g) = 0$ при всех α . Следовательно,

$$\text{supp } x \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}. \quad (1)$$

Для всякого $\alpha \in \text{supp } x$ выберем $x_\alpha \in \varphi_\alpha(x)$. Тогда носитель элемента $g = x - \sum_{\alpha \in \text{supp } x} x_\alpha \in Z$ пуст. По I имеем, что $g \in G$. Следовательно, $x = g + \sum_{\alpha \in \text{supp } x} x_\alpha$, причем $g \in G$, $x_\alpha \in K_\alpha \setminus G_\alpha$. Существование этого представления вместе с (1) влечет эквивалентность 1), 3) и 4). Импликация 4) $\Rightarrow$ 2) очевидна. Если же выполняется 2), то $\varphi_{\alpha_k}(x) = \varphi_{\alpha_k}(x_k) \neq 0$ для всякого k . Значит, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \text{supp } x$. Из этого включения и (1) вытекает 4).

III. Пусть $\alpha \in \text{supp } x$. Так как $g^1 - g^2 + \sum_{\beta \in \text{supp } x} (x_\beta^1 - x_\beta^2) = 0$, то в силу отмеченных в начале доказательства свойств φ_α справедливо равенство $\varphi_\alpha(x_\alpha^1 - x_\alpha^2) = 0$. Следовательно, $x_\alpha^1 - x_\alpha^2 \in K_\alpha \cap \langle \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta \rangle$. По утверждению 2 имеем $x_\alpha^1 - x_\alpha^2 \in G_\alpha$.

Представление $x \in Z$ в виде, описанном в п. II утверждения 3, удовлетворяющее одному из эквивалентных условий 1)–4), назовем *каноническим*.

Пусть теперь для каждого $\alpha \in A$ на H_α задана полунорма p_α , причем для всех $\alpha, \beta \in A$

$$p_\alpha|_{G_\alpha \cap G_\beta} = p_\beta|_{G_\alpha \cap G_\beta}.$$

Из этих условий и (K2) немедленно вытекает, что корректно определена функция $q: G \rightarrow [0, +\infty)$ такая, что $q(x) = p_\alpha(x)$ при $x \in G_\alpha$. Обозначим $\mathcal{P} = \{p_\alpha : \alpha \in A\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. I. Функция $q: G \rightarrow [0, +\infty)$ является полунормой.

II. Пусть функция $p = p(G, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{P}): Z \rightarrow [0, +\infty)$ задается формулой

$$p(x) = \inf \left\{ q(g) + \sum_{j=1}^n p_{\alpha_j}(\kappa_{\alpha_j}^{-1}(x_j)) : n \in \mathbb{N}, x = g + \sum_{j=1}^n x_j, x_j \in K_{\alpha_j} \setminus G_{\alpha_j} \right\}. \quad (P)$$

Тогда p является полунормой и

$$\begin{aligned} p(\kappa_\alpha(x)) &= p_\alpha(x) \text{ при всех } \alpha \in A, x \in H_\alpha, \\ p(x) &= q(x) \text{ при всех } x \in G. \end{aligned} \quad (2)$$

Если все p_α – нормы, то q является нормой. Если, кроме того, G_α замкнуто в $\text{МАГ}(H_\alpha, p_\alpha)$ для всякого $\alpha \in A$, то p – норма.

III. Если для всякого $\alpha \in A$ подгруппа G_α конечна и $p_\alpha(H_\alpha) \subseteq \mathbb{Q}$, то $p(Z) \subseteq \mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in G$. Согласно (K1) найдется $\alpha \in A$ такое, что $x, y \in G_\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} q(x+y) &= p_\alpha(x+y) \leq p_\alpha(x) + p_\alpha(y) = q(x) + q(y), \\ q(-x) &= p_\alpha(-x) = p_\alpha(x) = q(x). \end{aligned}$$

Следовательно, q является полунормой. Если все p_α – нормы, то

$$q(x) = 0 \iff p_\alpha(x) = 0 \iff x = 0.$$

Значит, q является нормой. То, что p – полунорма, проверяется элементарно. Второе утверждение из (2) вытекает из первого. Докажем первое утверждение из (2). Для этого покажем, что для всякого представления

$$x = g_1 + \sum_{j=1}^m y_j, \quad g_1 \in G, \quad y_j \in K_{\beta_j} \setminus G_{\beta_j}, \quad (3)$$

найдется каноническое представление

$$x = g + \sum_{k=1}^n x_k, \quad g \in G, \quad x_k \in K_{\alpha_k} \setminus G_{\alpha_k}, \quad (4)$$

удовлетворяющее неравенству

$$q(g_1) + \sum_{j=1}^m p_{\beta_j}(\kappa_{\beta_j}^{-1}(y_j)) \geq q(g) + \sum_{k=1}^n p_{\alpha_k}(\kappa_{\alpha_k}^{-1}(x_k)). \quad (5)$$

Докажем это утверждение индукцией по m . При $m = 0$ оно очевидно. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и для представлений элементов Z суммами типа (3), но с количеством y_j меньшим чем m , это утверждение доказано. Если $m = n$, то представление $x = g_1 + \sum_{j=1}^m y_j$, $y_j \in K_{\beta_j} \setminus G_{\beta_j}$, само является каноническим по утверждению 3 и вполне годится в качестве канонического представления (4). Если $m > n$, то по утверждению 3 найдутся $1 \leq i < j \leq m$ такие, что $\beta_i = \beta_j$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $i = m-1$, $j = m$. Если $y_{m-1} + y_m \in G_{\beta_m}$, то положим $l = m-2$, $z_k = y_k$ при $1 \leq k \leq l$, $g_2 = g_1 + y_{m-1} + y_m$. Если $y_{m-1} + y_m \notin G_{\beta_m}$, то положим $l = m-1$, $z_k = y_k$ при $1 \leq k \leq l-1$, $z_l = y_{m-1} + y_m$, $g_2 = g_1$. Так как $x = g_2 + \sum_{j=1}^l z_j$, $g_2 \in G$, $z_j \in K_{\beta_j} \setminus G_{\beta_j}$ и $l < m$, то по предположению индукции существует каноническое представление (4), для которого

$$q(g_2) + \sum_{j=1}^l p_{\beta_j}(\kappa_{\beta_j}^{-1}(z_j)) \geq q(g) + \sum_{k=1}^n p_{\alpha_k}(\kappa_{\alpha_k}^{-1}(x_k)).$$

Последнее неравенство вместе с неравенством треугольника для p_{β_m} влечет (5).

Первая часть (2) представляет собой частный случай только что доказанного утверждения при $n \leq 1$. Пусть теперь p_α – норма и G_α замкнуто в МАГ (H_α, p_α) для всякого $\alpha \in A$. Покажем, что p является нормой. Пусть $x \in Z$ и $p(x) = 0$. Если

$x \notin G$, то $n = |\text{supp}(x)| \geq 1$ по утверждению 3. Согласно только что доказанному свойству для любого $\varepsilon > 0$ найдется каноническое представление (4), для которого

$$q(g) + \sum_{k=1}^n p_{\alpha_k}(\kappa_{\alpha_k}^{-1}(x_k)) \leq p(x) + \varepsilon. \quad (6)$$

Пусть $a = \inf \{p_{\alpha_1}(\kappa_{\alpha_1}^{-1}(x_1) - g_3) : g_3 \in G_{\alpha_1}\}$. По утверждению 3 a зависит только от x и не зависит от выбора канонического представления. В силу замкнутости G_{α_1} в $(H_{\alpha_1}, p_{\alpha_1})$ число a положительно. По (6) и определению a имеем, что $a \leq p(x) + \varepsilon$. Так как ε произвольно, то $p(x) \geq a > 0$, что противоречит равенству $p(x) = 0$. Стало быть, $x \in G$. Но тогда $q(x) = p(x) = 0$. Следовательно, $x = 0$, поскольку q является нормой.

Осталось доказать п. III. Как было показано выше, нижнюю грань в формуле (P) можно брать по каноническим представлениям x . Другими словами,

$$p(x) = \inf \left\{ q(g) + \sum_{\alpha \in \text{supp } x} p_{\alpha}(\kappa_{\alpha}^{-1}(x_{\alpha})) : x = g + \sum_{\alpha \in \text{supp } x} x_{\alpha}, x_{\alpha} \in K_{\alpha} \setminus G_{\alpha} \right\}.$$

По п. III утверждения 3 в силу конечности G_{α} количество таких представлений конечно. Стало быть, нижняя грань в последней формуле достигается. Тем самым $p(Z) \subseteq \mathbb{Q}$, так как $p_{\alpha}(H_{\alpha}) \subset \mathbb{Q}$ для всех α .

Нам понадобятся два специальных случая приведенной конструкции.

I. Пусть R – конечная АГ. Введем на классе $\tilde{\mathcal{L}}(R)$ всех конечных АГ, содержащих R в качестве подгруппы, естественное отношение эквивалентности: $H_1 \sim H_2$, если существует изоморфизм H_1 и H_2 , оставляющий на месте элементы R . Символом $\mathcal{L}(R)$ обозначим такое множество, что $\mathcal{L}(R) \subset \tilde{\mathcal{L}}(R)$ и $\mathcal{L}(R)$ пересекается с каждым классом $\sim$ -эквивалентности по одному элементу. Очевидно, $\mathcal{L}(R)$ – счетное множество. Если H – конечная АГ, R – подгруппа H , p – норма на R и $p(R) \subset \mathbb{Q}$, то символом $\mathcal{P}(R, H, p)$ обозначим множество всех норм q на H таких, что $q(H) \subset \mathbb{Q}$ и $q|_R = p$. Легко видеть, что множество $\mathcal{P}(R, H, p)$ счетно. Пусть теперь (G, p) – не более чем счетная периодическая МАГ, причем $p(G) \subset \mathbb{Q}$,

$$A = \{(R, H, q) : R \text{ – конечная подгруппа } G, H \in \mathcal{L}(R), q \in \mathcal{P}(R, H, p|_R)\}.$$

Ясно, что множество A счетно. Для $\alpha = (R, H, q) \in A$ положим $G_{\alpha} = R$, $H_{\alpha} = H$, $p_{\alpha} = q$, $\mathcal{G} = \{G_{\alpha} : \alpha \in A\}$, $\mathcal{H} = \{H_{\alpha} : \alpha \in A\}$, $\mathcal{P} = \{p_{\alpha} : \alpha \in A\}$. Пусть (см. (Z) и (P))

$$\tilde{G} = Z(G, \mathcal{G}, \mathcal{H}), \quad \tilde{p} = p(G, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{P}). \quad (M1)$$

Из приведенных выше утверждений вытекает, что $(\tilde{G}, \tilde{p})$ – счетная периодическая МАГ, $G \subset \tilde{G}$, $\tilde{p}|_G = p$, $\tilde{p}(\tilde{G}) \subset \mathbb{Q}$ и для всякого $\alpha = (R, H, q) \in A$ отображение $\kappa_{\alpha} : (H, q) \rightarrow (\tilde{G}, \tilde{p})$ является изометрией. Таким образом, выполняется следующее свойство.

(S1) Для всякой конечной МАГ (H, r) , удовлетворяющей условию $r(H) \subset \mathbb{Q}$, всякой подгруппы $R \subseteq H$ и любого изометрического гомоморфизма $\varphi : (R, r) \rightarrow (G, p)$ найдется изометрический гомоморфизм $\psi : (H, r) \rightarrow (\tilde{G}, \tilde{p})$ такой, что $\psi|_R = \varphi$.

II. Пусть τ – бесконечный кардинал, R – АГ и $|R| \leq \tau$. На классе $\tilde{\mathcal{L}}_\tau(R)$ всех АГ мощности не более τ , содержащих R в качестве подгруппы, рассмотрим то же отношение эквивалентности, что в предыдущем абзаце. Символом $\mathcal{L}_\tau(R)$ обозначим такое множество, что $\mathcal{L}_\tau(R) \subset \tilde{\mathcal{L}}_\tau(R)$ и $\mathcal{L}_\tau(R)$ пересекается с каждым классом $\sim$ -эквивалентности по одному элементу. Нетрудно проверить, что $|\mathcal{L}_\tau(R)| = 2^\tau$. Если H – АГ и $|H| \leq \tau$, R – подгруппа H , p – полунорма на R , то символом $\mathcal{P}_\tau(R, H, p)$ обозначим множество всех полунорм q на H таких, что $q|_R = p$. Легко видеть, что $|\mathcal{P}_\tau(R, H, p)| \leq 2^\tau$.

Пусть теперь G – АГ, p – полунорма на G и

$$A_\tau = \{(R, H, q) : R \text{ – подгруппа } G, |R| \leq \tau, H \in \mathcal{L}_\tau(R), q \in \mathcal{P}_\tau(R, H, p|_R)\}.$$

Ясно, что $|A_\tau| \leq (|G| + 1)^\tau$. Для $\alpha = (R, H, q) \in A_\tau$ положим $G_\alpha = R$, $H_\alpha = H$, $p_\alpha = q$, $\mathcal{G}_\tau = \{G_\alpha : \alpha \in A_\tau\}$, $\mathcal{H}_\tau = \{H_\alpha : \alpha \in A_\tau\}$ и $\mathcal{P}_\tau = \{p_\alpha : \alpha \in A_\tau\}$. Пусть (см. (Z) и (P))

$$\tilde{G}_\tau = Z(G, \mathcal{G}_\tau, \mathcal{H}_\tau), \quad \tilde{p}_\tau = p(G, \mathcal{G}_\tau, \mathcal{H}_\tau, \mathcal{P}_\tau). \quad (\text{M2})$$

Из приведенных выше утверждений вытекает, что $\tilde{G}_\tau$ – АГ, $\tilde{p}_\tau$ – полунорма на $\tilde{G}_\tau$, $|\tilde{G}_\tau| \leq (|G| + 1)^\tau$, $G \subset \tilde{G}_\tau$, $\tilde{p}_\tau|_G = p$ и для всякого $\alpha = (R, H, q) \in A_\tau$ отображение $\varkappa_\alpha$ из (H, q) в $(\tilde{G}_\tau, \tilde{p}_\tau)$ является изометрией. Таким образом, выполняется следующее свойство.

- (S2) Для всякой АГ H мощности не более τ , для всякой полунормы q на H , всякой подгруппы $R \subseteq H$ и любого изометрического гомоморфизма $\varphi: (R, r) \rightarrow (G, p)$ найдется изометрический гомоморфизм $\psi: (H, r) \rightarrow (\tilde{G}_\tau, \tilde{p}_\tau)$ такой, что $\psi|_R = \varphi$.

§ 3. Основные результаты

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует, причем единственная с точностью до изометрического изоморфизма, счетная периодическая МАГ (G, p) , удовлетворяющая условиям:*

- (U1) $p(G) \subseteq \mathbb{Q}$;
- (U2) для всякой конечной МАГ (H, q) такой, что $q(H) \subset \mathbb{Q}$, для всякой подгруппы $R \subseteq H$ и для всякого изометрического гомоморфизма $\varphi: R \rightarrow G$ существует изометрический гомоморфизм $\psi: H \rightarrow G$, для которого $\psi|_R = \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Существование.* Пусть $G_0 = \{0\}$ – тривиальная группа, p_0 – (единственная) норма на G_0 . Последовательность МАГ (G_n, p_n) ($n \geq 0$) определим индуктивно: $(G_{n+1}, p_{n+1}) = (\tilde{G}_n, \tilde{p}_n)$, где операция $(G, p) \mapsto (\tilde{G}, \tilde{p})$ описана выше (см. (M1)). Тогда из уже доказанных свойств этой операции (свойство (C)) следует из (S1)) вытекает, что при всех $n \in \mathbb{N}$

- (A) G_n – счетная периодическая АГ и $p_n(G_n) \subseteq \mathbb{Q}$;
- (B) G_{n-1} является подгруппой G_n и $p_n|_{G_{n-1}} = p_{n-1}$;
- (C) для всякой конечной МАГ (H, q) , удовлетворяющей условию $q(H) \subset \mathbb{Q}$, для всякой подгруппы $R \subseteq H$ и для всякого изометрического гомоморфизма $\varphi: R \rightarrow G_{n-1}$ существует изометрический гомоморфизм $\psi: H \rightarrow G_n$ такой, что $\psi|_R = \varphi$.

Пусть теперь $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, $p: G \rightarrow \mathbb{Q}$ задается равенствами $p(x) = p_n(x)$ при $x \in G_n$. Ясно, что (G, p) – счетная периодическая МАГ, удовлетворяющая условию (U1). Осталось проверить справедливость условия (U2). Пусть (H, q) – конечная МАГ, $q(H) \subset \mathbb{Q}$, R – подгруппа H и $\varphi: R \rightarrow G$ – изометрический гомоморфизм. Ввиду конечности R найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\varphi(R) \subset G_{n-1}$. В силу приведенного выше условия (C) существует изометрический гомоморфизм $\psi: H \rightarrow G_n \subset G$ такой, что $\psi|_R = \varphi$. Таким образом, МАГ (G, p) удовлетворяет всем требуемым условиям.

Единственность. Пусть (G^1, p_1) и (G^2, p_2) – две счетные периодические МАГ, удовлетворяющие условиям (U1) и (U2). Нам надо показать, что они изометрически изоморфны. Пусть $G^1 = \{g_n^1 : n \in \mathbb{N}\}$, $G^2 = \{g_n^2 : n \in \mathbb{N}\}$, $G_0^i = \{0\}$ – тривиальные подгруппы G^i ($i \in \{1, 2\}$) и $\varphi_0: G_0^1 \rightarrow G_0^2$ – единственное отображение (оно, естественно, является изометрическим гомоморфизмом). Опишем индуктивный процесс построения подгрупп G_k^i групп G^i ($i \in \{1, 2\}$) и изометрических изоморфизмов $\varphi_k: G_k^1 \rightarrow G_k^2$. Пусть G_{n-1}^1 , G_{n-1}^2 и φ_{n-1} уже построены. Построим G_n^1 , G_n^2 и φ_n . Если n нечетно, положим $G_n^1 = \langle G_{n-1}^1 \cup \{g_{(n+1)/2}^1\} \rangle$. По условиям (U1) для G^1 и (U2) для G^2 существует изометрический гомоморфизм $\varphi_n: G_n^1 \rightarrow G^2$ такой, что $\varphi_n|_{G_{n-1}^1} = \varphi_{n-1}$. Обозначим $G_n^2 = \varphi_n(G_n^1)$. Ясно, что $G_{n-1}^2 \subseteq G_n^2$. Если n четно, то положим $G_n^2 = \langle G_{n-1}^2 \cup \{g_{n/2}^2\} \rangle$. По условиям (U1) для G^2 и (U2) для G^1 существует изометрический гомоморфизм $\psi_n: G_n^2 \rightarrow G^1$ такой, что $\psi_n|_{G_{n-1}^2} = \varphi_{n-1}^{-1}$. Обозначим $G_n^1 = \psi_n(G_n^2)$. Ясно, что $G_{n-1}^1 \subseteq G_n^1$. Пусть $\varphi_n: G_n^1 \rightarrow G_n^2$ – обратное отображение к $\psi_n: G_n^2 \rightarrow G_n^1$. Построение завершено. Из построения видно, что для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$G_{n-1}^1 \subseteq G_n^1, \quad G_{n-1}^2 \subseteq G_n^2, \quad \varphi_n|_{G_{n-1}^1} = \varphi_{n-1}; \quad (7)$$

$$\langle g_1^1, \dots, g_{[n/2]}^1 \rangle \subseteq G_n^1, \quad \langle g_1^2, \dots, g_{[n/2]}^2 \rangle \subseteq G_n^2, \quad (8)$$

где $[x]$ – целая часть числа x .

Отображение $\varphi: G^1 \rightarrow G^2$ определим формулами $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ при $x \in G_n^1$. Из условий (7) и (8) следует корректность определения φ . Так как $\varphi_n: G_n^1 \rightarrow G_n^2$ являются изометрическими изоморфизмами, то φ – тоже изометрический изоморфизм в силу тех же соотношений (7) и (8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть (G, p) – счетная периодическая МАГ, удовлетворяющая условиям (U1) и (U2) из предыдущего предложения, а (H, q) – какая-нибудь счетная периодическая МАГ, причем $q(H) \subseteq \mathbb{Q}$. Тогда (H, q) вкладывается в (G, p) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$, $H_0 = \{0\}$ и $H_n = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\varphi_0: H_0 \rightarrow G$ определяется формулой $\varphi_0(0) = 0$. Построим индуктивно последовательность изометрических гомоморфизмов $\varphi_n: H_n \rightarrow G$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и изометрический гомоморфизм $\varphi_{n-1}: H_{n-1} \rightarrow G$ уже построен. Тогда согласно условию (U2) для (G, p) и включению $q(H) \subseteq \mathbb{Q}$ имеем, что существует изометрический гомоморфизм $\varphi_n: H_n \rightarrow G$ такой, что

$$\varphi_n|_{H_{n-1}} = \varphi_{n-1}. \quad (9)$$

Построение последовательности φ_n завершено. Для $h \in H$ теперь положим $\varphi(h) = \varphi_n(h)$ при $h \in H_n$. По (9) отображение $\varphi: H \rightarrow G$ корректно определено и является изометрическим гомоморфизмом. Следовательно, (H, q) вкладывается в (G, p) .

ТЕОРЕМА 1. *Существует сепарабельная МАГ $(G, p) \in \mathfrak{S}$ такая, что всякая сепарабельная МАГ $(H, q) \in \mathfrak{S}$ вкладывается в (G, p) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X, p) – счетная периодическая МАГ, удовлетворяющая условиям (U1) и (U2) (такая МАГ существует по предложению 1). Пусть (H, q) – сепарабельная МАГ и $(H, q) \in \mathfrak{S}$. Согласно лемме 7 и предложению 2 (H, q) вкладывается в пополнение $(\overline{X}, p)$ МАГ (X, p) . В силу леммы 1 $X \subseteq S(\overline{X})$ и $S(\overline{X})$ замкнуто в $\overline{X}$. Значит, $\overline{X} = S(\overline{X})$, т.е. $(\overline{X}, p) \in \mathfrak{S}$. Сепарабельность $(\overline{X}, p)$ вытекает из счетности X . Следовательно, $(\overline{X}, p)$ – искомая группа.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Существует сепарабельная МАГ (G, p) такая, что $p(G) \subseteq [0, 1]$ и всякая сепарабельная МАГ (H, q) , для которой $q(H) \subseteq [0, 1]$, вкладывается в (G, p) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (G, p) – МАГ из теоремы 1. Положим $\tilde{p} = \min\{p, 1\}$. Нетрудно проверить, что $(G, \tilde{p})$ – сепарабельная МАГ (топологии, задаваемые нормами p и $\tilde{p}$, совпадают). Пусть (H, q) – сепарабельная МАГ, для которой $q(H) \subseteq [0, 1]$. Из последнего включения следует, что $(H, q) \in \mathfrak{S}$. По теореме 1 (H, q) вкладывается в (G, p) , т.е. существует изометрический гомоморфизм $\varphi: (H, q) \rightarrow (G, p)$. Значит, $q(x) = p(\varphi(x)) \leq 1$ для всех $x \in H$. По определению $\tilde{p}$ имеем $p(\varphi(x)) = \tilde{p}(\varphi(x))$ для всех $x \in H$. Из последних двух соотношений вытекает, что φ является изометрическим гомоморфизмом (H, q) в $(G, \tilde{p})$. Таким образом, $(G, \tilde{p})$ – искомая МАГ.

ТЕОРЕМА 2. *Существует группа, универсальная в классе сепарабельных метризуемых топологических АГ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку топологию любой метризуемой топологической АГ можно задать нормой, ограниченной единицей (см. [5], [6]), то утверждение теоремы 2 вытекает из следствия 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть τ – кардинал, $\tau > \aleph_0$ и для всякого кардинала $\lambda < \tau$ выполняется неравенство $2^\lambda \leq \tau$. Тогда существует МАГ (G, p) мощности τ такая, что всякая МАГ (H, q) мощности не более τ вкладывается в (G, p) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ – конфинальность кардинала τ и $\{\tau_\alpha : \alpha < \mu\}^5$ – такой набор кардиналов, что $\tau_\beta \leq \tau_\alpha < \tau$ при всех $\beta < \alpha < \mu$ и $\sup\{\tau_\alpha : \alpha < \mu\} = \tau$. Пусть $G_0 = \{0\}$ – тривиальная группа, p_0 – (единственная) норма на G_0 . Трансфинитные последовательности АГ $\{G_\alpha : \alpha < \mu\}$ и полунорм p_α на G_α определим индуктивно: если ординал α имеет непосредственного предшественника, то $(G_\alpha, p_\alpha) = ((\tilde{G}_{\alpha-1})_{\tau_\alpha}, (\tilde{p}_{\alpha-1})_{\tau_\alpha})$, где операция $(G, p) \mapsto (\tilde{G}_\lambda, \tilde{p}_\lambda)$ описана выше (см. (M2)); если α – предельный ординал, то $G_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta$ и $p_\alpha(x) = p_\beta(x)$

⁵Здесь α пробегает множество всех ординалов меньших μ .

при $x \in G_\beta$, $\beta < \alpha$. Тогда из уже известных свойств операции $(G, p) \mapsto (\tilde{G}_\lambda, \tilde{p}_\lambda)$ вытекает, что $|G_{\alpha+1}| \leq (|G_\alpha| + 1)^{\tau_{\alpha+1}}$ для всякого α . Докажем сперва, что

(D) $|G_\alpha| \leq \tau$ при всех $\alpha < \mu$.

Предположим, что (D) неверно. Тогда существуют $\beta = \min\{\gamma : \gamma < \mu \text{ и } |G_\gamma| \geq \tau\}$ и $\alpha = \min\{\gamma : \gamma < \mu \text{ и } |G_\gamma| > \tau\}$. Ординалы β и α не могут быть предельными. В самом деле, если β – предельный ординал, то множество G_β мощности не меньше τ совпадает с $\bigcup_{\gamma < \beta} G_\gamma$ – объединением менее μ множеств мощности меньше τ . Это невозможно, так как μ – конфинальность τ . Если α – предельный ординал, то множество G_α мощности больше τ совпадает с $\bigcup_{\gamma < \alpha} G_\gamma$ – объединением менее τ множеств мощности не больше τ , что невозможно. Стало быть, $|G_\beta| \leq (|G_{\beta-1}| + 1)^{\tau_\beta} \leq 2^{(|G_{\beta-1}| + 1)\tau_\beta} = 2^\lambda$, где $\lambda = (|G_{\beta-1}| + 1)\tau_\beta$. Поскольку $\lambda < \tau$, по условию имеем, что $2^\lambda \leq \tau$. Значит, $\tau \leq |G_\beta| \leq 2^\lambda \leq \tau$. Следовательно, $\tau = 2^\lambda$. Значит, $|G_\alpha| \leq (|G_{\alpha-1}| + 1)^{\tau_\alpha} \leq \tau^{\tau_\alpha} = 2^{\lambda\tau_\alpha}$. По условию $2^{\lambda\tau_\alpha} \leq \tau$, так как $\lambda\tau_\alpha < \tau$. Следовательно, $\tau < |G_\alpha| \leq \tau$. Это противоречие доказывает (D). Очевидно, что

(E) G_β является подгруппой G_α и $p_\alpha|_{G_\beta} = p_\beta$ при $\beta < \alpha < \mu$.

Из (S2) следует, что

(F) для всякой АГ H мощности не более $\tau_{\alpha+1}$, всякой полунормы q на H , всякой подгруппы $R \subseteq H$ и всякого изометрического гомоморфизма $\varphi: R \rightarrow G_\alpha$ существует изометрический гомоморфизм $\psi: H \rightarrow G_{\alpha+1}$ такой, что $\psi|_R = \varphi$.

Пусть теперь $G' = \bigcup_{\alpha < \mu} G_\alpha$ и полунорма $p': G' \rightarrow \mathbb{R}$ задается равенствами $p'(x) = p_\alpha(x)$ при $x \in G_\alpha$. Положим $G = G' / \ker p'$ и $p(x + \ker p') = p'(x)$. Проверим, что МАГ (G, p) является искомой. Пусть (H, q) – МАГ и $|H| \leq \tau$. Тогда $H = \bigcup_{\alpha < \mu} A_\alpha$, где $A_\beta \subseteq A_\alpha$ при $\beta < \alpha < \mu$ и $|A_\alpha| \leq \tau_\alpha$ при всех $\alpha < \mu$. Пусть $H_0 = \{0\}$, $H_\alpha = \langle A_\alpha \rangle$ и $\varphi_0: H_0 \rightarrow G'$ определяется формулой $\varphi_0(0) = 0$. Построим индуктивно последовательность изометрических гомоморфизмов $\varphi_\alpha: H_\alpha \rightarrow G'$ таких, что $\varphi_\alpha|_{H_\beta} = \varphi_\beta$. Пусть $\alpha < \mu$ и изометрические гомоморфизмы $\varphi_\beta: H_\beta \rightarrow G'$, удовлетворяющие последнему условию, уже построены. Пусть $K_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta$ и отображение $\psi_\alpha: K_\alpha \rightarrow G'$ определяется формулами $\psi_\alpha(x) = \varphi_\beta(x)$ при $\beta < \alpha$. Ясно, что ψ_α – корректно определенный изометрический гомоморфизм. Выберем $\gamma < \mu$ так, чтобы $\psi_\alpha(K_\alpha) \subseteq G_\gamma$ и $\tau_\gamma \geq |K_\alpha|$. Тогда по (F) существует изометрический гомоморфизм $\varphi_\alpha: H_\alpha \rightarrow G_{\gamma+1} \subseteq G'$ такой, что $\varphi_\alpha|_{K_\alpha} = \psi_\alpha$. Построение последовательности φ_α завершено. Для $h \in H$ теперь положим $\varphi(h) = \varphi_\alpha(h) + \ker p'$ при $h \in H_\alpha$. Тогда отображение $\varphi: H \rightarrow G$ корректно определено и является изометрическим гомоморфизмом. Следовательно, (H, q) вкладывается в (G, p) . Осталось доказать, что $|G| = \tau$. Из (D) следует, что $|G| \leq |G'| \leq \tau$. Как мы уже показали, любая МАГ мощности τ вкладывается в (G, p) . Значит, $|G| \geq \tau$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть τ – кардинал, $\tau > \aleph_0$ и для всякого кардинала $\lambda < \tau$ выполняется неравенство $2^\lambda \leq \tau$. Тогда существует МАГ (G, p) веса τ такая, что всякая МАГ веса не более τ вкладывается в (G, p) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X, p) – МАГ мощности τ , существование которой утверждается в предложении 3. Пусть (H, q) – МАГ веса не более τ . Тогда в H есть всюду плотная подгруппа K мощности не более τ . Согласно предложению 3

(K, q) вкладывается в (X, p) . Значит, (H, q) вкладывается в пополнение $(\overline{X}, p)$ МАГ (X, p) . Так как $|X| = \tau$ и X метризуема, имеем, что вес МАГ $(\overline{X}, p)$ равен τ . Значит, $(\overline{X}, p)$ – искомая группа.

СЛЕДСТВИЕ 3. В предположении справедливости обобщенной континуум-гипотезы (GCH) для всякого кардинала $\tau > \aleph_0$ существует МАГ (G, p) веса τ такая, что всякая МАГ веса не более τ вкладывается в (G, p) .

ТЕОРЕМА 4. Пусть τ – бесконечный кардинал и для всякого кардинала $\lambda < \tau$ выполняется неравенство $2^\lambda \leq \tau$. Тогда существует группа, универсальная в классе метризуемых топологических АГ веса не более τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tau = \aleph_0$, то утверждение теоремы 4 следует из теоремы 2. Если $\tau > \aleph_0$, то утверждение теоремы 4 следует из теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. В предположении справедливости GCH для всякого бесконечного кардинала τ существует группа, универсальная в классе метризуемых топологических АГ веса не более τ .

ТЕОРЕМА 5. Пусть τ – бесконечный кардинал и для всякого кардинала $\lambda < \tau$ выполняется неравенство $2^\lambda \leq \tau$. Тогда существует группа, универсальная в классе топологических АГ веса не более τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tau = \aleph_0$, то утверждение теоремы 5 следует из теоремы 2. Пусть $\tau > \aleph_0$ и (G, p) – МАГ, существование которой утверждается в теореме 3. Пусть $X = G^\tau$ (с топологией произведения). Тогда X – топологическая АГ веса τ . Если H – топологическая АГ веса не более τ , то топология H задается семейством $\mathcal{P}$ полунорм мощности не более τ . Значит, $\mathcal{P} = \{q_\alpha : \alpha < \tau\}$. Для всякого $q \in \mathcal{P}$ рассмотрим МАГ $(H/\ker q, \tilde{q})$, где $\tilde{q}(h + \ker q) = q(h)$. Тогда топологическая АГ H естественным образом вкладывается в произведение $Y = \prod_{\alpha < \tau} (H/\ker q_\alpha)$, где $H/\ker q_\alpha$ наделена топологией, задаваемой нормой $\tilde{q}_\alpha$. А именно отображение $J: H \rightarrow Y$, $J(h) = (h + \ker q_\alpha)_{\alpha < \tau}$, является гомоморфизмом и гомеоморфизмом на образ. По теореме 3 для всякого $\alpha < \tau$ найдется изометрический гомоморфизм $j_\alpha: H/\ker q_\alpha \rightarrow G$. Следовательно, отображение $\Lambda: H \rightarrow X$, $\Lambda(h) = (j_\alpha(h + \ker q_\alpha))_{\alpha < \tau}$, является гомоморфизмом и гомеоморфизмом на образ. Значит, X – искомая топологическая АГ.

СЛЕДСТВИЕ 5. В предположении справедливости GCH для всякого бесконечного кардинала τ существует группа, универсальная в классе топологических АГ веса не более τ .

Нерешенные проблемы

Остаются открытыми следующие вопросы о существовании универсальных топологических групп.

ПРОБЛЕМА 1. Существует ли сепарабельная МАГ (G, p) такая, что в нее вкладывается любая сепарабельная МАГ? Другими словами: справедлив ли аналог теоремы 1 для класса всех сепарабельных МАГ (а не только элементов $\mathfrak{S}$)?

ПРОБЛЕМА 2. Существует ли универсальный объект в классе всех (не только абелевых) сепарабельных групп с нормой? Другими словами: верен ли метрический аналог приведенного во введении результата В. В. Успенского? Тот же вопрос открыт при дополнительном требовании ограниченности нормы единицей.

Следующий вопрос ставится в [4]. Он по-прежнему открыт.

ПРОБЛЕМА 3. Существует ли универсальный объект в классе топологических групп веса не больше τ для всякого бесконечного кардинала τ ?

ПРОБЛЕМА 4. Существует ли универсальный объект в классе метризуемых топологических групп веса не больше τ для всякого бесконечного кардинала τ ?

ПРОБЛЕМА 5. Существует ли универсальный объект в классе метризуемых топологических абелевых групп веса не больше τ для всякого бесконечного кардинала τ ?

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как показано выше, в предположении обобщенной континуум-гипотезы проблема 5 имеет положительное решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следующая проблема связана с тем, что приведенная в настоящей статье конструкция автоматически обеспечивает плотность в построенной группе элементов конечного порядка.

ПРОБЛЕМА 6. Существует ли универсальный объект в классе сепарабельных метризуемых топологических абелевых групп без кручения?

Автор благодарен Е. А. Резниченко и В. В. Успенскому за полезные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы

1. *Banach S.* Théorie des Opérations Lineaires. Warszawa: Subwncji Funduszu Narodowej, 1932.
2. *Kalton N. J.* Universal spaces and universal bases in metric linear spaces // *Studia Math.* 1977. V. 61. P. 161–191.
3. *Успенский В. В.* Универсальная топологическая группа со счетной базой // *Функц. анализ и его прилож.* 1986. Т. 20. №2. С. 86–87.
4. *Uspenskij V. V.* On the group of isometries of Urysohn universal metric space // *Comment. Math. Univ. Carolin.* 1990. Т. 31. №1. С. 181–182.
5. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Мир, 1975.
6. *Граев М. И.* Теория топологических групп. I. Нормы и метрика на группах, полные группы, свободные топологические группы // *УМН.* 1950. Т. 5. №2. С. 3–56.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
20.10.1998