Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Губа, М. В. Сапир, О подгруппах группы Р. Томпсона F и других групп диаграмм, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 8, 3–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:44:53

УДК 519.4

В. С. Губа, М. В. Сапир

О подгруппах группы Р. Томпсона F и других групп диаграмм

В данной работе мы продолжаем исследование интересного класса групп – так называемых групп диаграмм. Упрощенно говоря, диаграмма – это размеченный плоский граф, ограниченный парой путей (верхним и нижним). Перемножение диаграмм осуществляется естественным образом: верхний путь одной диаграммы отождествляется с нижним путем другой диаграммы, после чего удаляются пары “сократимых” граней. Каждая группа диаграмм определяется некоторым алфавитом X , содержащим все возможные метки ребер, набором соотношений $\mathcal{R} = \{u_i = v_i : i = 1, 2, \dots\}$, задающим все возможные метки граней, и словом w над X – меткой верхнего и нижнего путей диаграмм. Диаграммы можно рассматривать как двумерные слова, а группы диаграмм – как двумерный аналог свободных групп. В нашей предыдущей статье мы показали, что класс групп диаграмм содержит много интересных групп, включая знаменитую группу Р. Томпсона F (она соответствует простейшему набору соотношений $\{x = x^2\}$), замкнут относительно прямых и свободных произведений и ряда других конструкций. В этой статье мы изучаем в основном подгруппы групп диаграмм. Мы показываем, что не всякая подгруппа группы диаграмм сама является группой диаграмм (ответ на вопрос из предыдущей статьи). Мы доказываем, что всякая нильпотентная подгруппа группы диаграмм абелева, всякая абелева подгруппа свободна, но уже группа F содержит разрешимые подгруппы любых степеней разрешимости. Мы изучаем также искривление подгрупп в группах диаграмм, включая группу F . Оказывается, что централизаторы элементов и абелевы подгруппы в группах диаграмм всегда вкладываются без искривления, но группа F содержит искривленные разрешимые подгруппы.

Библиография: 33 названия.

Введение

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию так называемых *групп диаграмм*. Это направление, в равной степени относящееся к комбинаторной теории как групп, так и полугрупп, появилось относительно недавно. Идея введения групповой структуры на множестве полугрупповых диаграмм впервые возникла у Дж. Микина и М. Сапира. Под их руководством В. Килибарда получила первые результаты в этом направлении, содержащиеся в ее диссертации [1]. Их изложению посвящена также ее статья [2]. Дальнейшие результаты о группах диаграмм получены авторами настоящей работы в [3]. Ниже мы дадим обзор наиболее важных из них. Мы просим читателя обращаться за подробностями к [3].

В [3] мы показали, что группы диаграмм отражают некоторые важные свойства полугрупповых копредставлений. В частности, три определения асферичности копредставлений, данные С. Прайдом [4], эквивалентны и означают тривиальность

всех групп диаграмм над данным копредставлением. Можно сказать в этом смысле, что группы диаграмм служат мерой неасферичности полугрупповых копредставлений.

С другой стороны, оказалось, что группы диаграмм образуют интересный сам по себе класс групп, даже если не учитывать их связь с копредставлениями. Эти группы имеют хорошие алгоритмические свойства: проблема слов в любой группе диаграмм разрешима за время $O(n^{2+\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$ (при этом не имеет значения, разрешима ли проблема слов для соответствующего полугруппового копредставления). Также в группах диаграмм разрешима проблема сопряженности при дополнительном предположении о разрешимости проблемы слов для копредставления, задающего группу диаграмм. Далее, если группа представима диаграммами (т.е. является подгруппой некоторой группы диаграмм), то для изучения данной группы можно использовать геометрию планарных графов. Диаграммы могут быть интерпретированы как “двумерные слова”, и мы развиваем в [3; раздел 15] исчисление, называемое комбинаторикой на диаграммах по аналогии с хорошо известной комбинаторикой на словах (по поводу последней см. монографию М. Лотэра [5]). С помощью геометрии можно рассмотреть много примеров естественно возникающих гомоморфизмов из группы, представимой диаграммами, в группу кусочно линейных гомеоморфизмов вещественной прямой на себя. Таким образом возникает связь между группами, представимыми диаграммами и группами, представимыми кусочно линейными функциями; эту связь можно использовать в обоих направлениях.

Как в [3], так и в настоящей работе мы показываем, что класс групп диаграмм весьма широк. Он содержит свободные группы, свободные абелевы группы, группу Р. Томпсона F и ее обобщения, найденные К. Брауном [6]. Класс групп диаграмм замкнут относительно конечных прямых произведений, (любых) свободных произведений и относительно некоторых других конструкций. Отметим, что группа F возникает как группа диаграмм над простейшим из полугрупповых копредставлений: $\langle x \mid x^2 = x \rangle$. В [3] мы получили ряд не известных ранее результатов о группе Р. Томпсона F , существенно используя ее строение как группы диаграмм. Приведем указанные результаты.

1. Проблема сопряженности в F разрешима.
2. Централизатор любого элемента группы F изоморфен конечному прямому произведению групп, каждая из которых есть либо F , либо бесконечная циклическая группа $\mathbb{Z}$.

Дадим краткое описание содержания настоящей работы. Мы используем сквозную нумерацию для теорем, лемм, следствий, примеров (лемма 10, пример 11, теорема 12, следствие 13 и т.п.).

Параграф 1 содержит информацию вводного характера. В нем приводится краткий обзор основных понятий и известных ранее результатов о группах диаграмм.

В §2 мы вводим понятие диаграммного произведения групп. Оно определяется как фундаментальная группа подходящего 2-комплекса групп. Основной является теорема 4, согласно которой класс групп диаграмм замкнут относительно диаграммных произведений. Оказывается, что все ранее рассматриваемые операции над группами диаграмм являются частными случаями этой новой конструкции. В примерах 5–8, 10, 12 даются применения теоремы 4, включающие ранее извест-

ные конструкции, а также ряд новых. В частности, мы доказываем, что класс групп диаграмм замкнут относительно счетных прямых произведений (теорема 9), прямых сплетений с группой $\mathbb{Z}$ (теорема 11), а также некоторой специальной операции $\mathcal{O}(G, H)$ (теорема 13), роль которой будет видна далее.

В §3 мы показываем, что нильпотентные подгруппы в группах диаграмм абелевы (следствие 15), причем абелевы подгруппы в группах диаграмм являются свободными абелевыми (теорема 16). Эти результаты являются новыми уже для группы F . Завершается параграф теоремой 17, описывающей строение конечных наборов попарно коммутирующих диаграмм.

Параграф 4 посвящен разрешимым подгруппам групп диаграмм. В группе Р. Томпсона F имеются подгруппы, изоморфные прямому сплетению $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ двух бесконечных циклических групп, а также подгруппы произвольной степени разрешимости, что впервые было установлено Брином. Оказывается, для любой группы кусочно линейных функций (в частности, для F) имеет место альтернатива: либо содержать $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ в качестве подгруппы, либо быть абелевой (теорема 21). В частности, отсюда можно вывести, что неабелева группа с одним определяющим соотношением не может быть подгруппой в группе кусочно линейных функций (следствие 23). Это является усилением хорошо известного факта, что в группе кусочно линейных функций нет свободных неабелевых подгрупп.

В этом же параграфе дается критерий того, что группа диаграмм содержит $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ в качестве подгруппы (теорема 24). Мы рассматриваем также вопрос о том, при каких условиях группа диаграмм над некоторым копредставлением $\mathcal{P}$ содержит группу F . Достаточным условием является наличие идемпотента в полугруппе, заданной при помощи $\mathcal{P}$ (теорема 25). Представляет интерес вопрос, будет ли это условие также необходимым.

Параграф 5 посвящен отрицательному решению гипотезы о подгруппах. Последняя состояла в том, что любая подгруппа группы диаграмм сама является группой диаграмм. Поначалу казалось, что эту гипотезу не так уж сложно опровергнуть – возможным контрпримером представлялся коммутант F' группы F . Однако оказалось, что группа F' , будучи простой, тем не менее является группой диаграмм – соответствующий факт доказан нами в теореме 26. Тем самым заодно решен ряд открытых вопросов из [3]. Мы спрашивали, может ли группа диаграмм совпадать со своим коммутантом, будучи нетривиальной, а также всякая ли группа диаграмм допускает LOG-задание, т.е. может быть задана соотношениями вида $a^b = c$, где a, b, c – порождающие. Следствие 27 положительно решает первый вопрос и отрицательно – второй.

Основным результатом параграфа является теорема 28, где мы показываем, что группа $\langle x, y \mid xy^2x = yx^2y \rangle$ с одним определяющим соотношением не является группой диаграмм, но при этом изоморфно вложена в некоторую группу диаграмм. В доказательстве используется конструкция $\mathcal{O}(G, H)$ из §2 и техника HNN-расширений в группах.

Несмотря на опровержение гипотезы о подгруппах в общем случае, представляет интерес подтверждение этой гипотезы для некоторых конкретных случаев, и мы ставим по этому поводу ряд открытых вопросов.

В конце §5 мы изучаем серию групп

$$G_n = \langle x_1, \dots, x_n \mid [x_1, x_2] = [x_2, x_3] = \dots = [x_{n-1}, x_n] = [x_n, x_1] = 1 \rangle.$$

При $n \leq 4$ они являются группами диаграмм; мы доказываем, что при нечетных $n \geq 5$ это уже не так (теорема 30). Неизвестно до сих пор, представимы ли диаграммами группы этой серии при $n \geq 5$; если это так, то получаются новые примеры, опровергающие гипотезу о подгруппах.

Заключительный §6 изучает искривление подгрупп в группах диаграмм. В недавней статье [7] Дж. Бурильо показал, что для любого натурального n в группе F имеются подгруппы, изоморфные $F \times \mathbb{Z}^n$, вложенные в F без искривления. Аналогичный факт имеет место для подгруппы $F \times F$ в F . Мы доказываем (теорема 34), что в F вкладываются без искривления все централизаторы элементов, что усиливает цитированные результаты. Далее, Бурильо установил, что любая циклическая группа вложена в F без искривления. Мы показываем, что не только циклические, но и любые конечно порожденные абелевы группы вкладываются без искривления в *любую* группу диаграмм (теорема 33). Наконец, нами найдены подгруппы в группе F , которые вкладываются с искривлением. Теорема 38 утверждает, что для любого натурального $d \geq 2$ существует конечно порожденная подгруппа K_d в группе F такая, что ее функция искривления превосходит n^d .

Авторы благодарят М. Брина и С. Прайда за полезные обсуждения полученных результатов.

§1. Основные результаты о группах диаграмм

Для удобства читателя дадим краткое описание основных понятий. Для алфавита Σ через Σ^+ будем обозначать свободную полугруппу над Σ , а через Σ^* — свободный моноид. Его единицу, т.е. пустое слово, обозначаем через 1. Элементы свободного моноида называем *словами*. Для обозначения графического равенства слов используется обычный знак равенства.

Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$ — задание (копредставление) полугруппы, где Σ — алфавит, $\mathcal{R}$ — множество упорядоченных пар непустых слов над Σ . Полугруппа S , заданная при помощи $\mathcal{P}$, есть факторполугруппа $\Sigma^+ / \sim$, где $\sim$ есть наименьшая конгруэнция на Σ^+ , содержащая $\mathcal{R}$. Элементы множества Σ будем называть *порождающими*, пары $(u, v) \in \mathcal{R}$, записываемые также в виде $u = v$, — *определяющими соотношениями*. Левые и правые части определяющих соотношений назовем *определяющими словами*. Далее, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что если соотношение $u = v$ принадлежит $\mathcal{R}$, то $v = u$ не принадлежит $\mathcal{R}$ (это соглашение не ограничивает общности). В частности, в $\mathcal{R}$ нет соотношений вида $u = u$.

С данным копредставлением $\mathcal{P}$ мы связываем следующий граф $\Gamma(\mathcal{P})$. Вершинами графа являются все слова из Σ^+ . Элементы множества $\Sigma^* \times \mathcal{R}^{\pm 1} \times \Sigma^*$ суть ребра графа. Их мы будем записывать в виде троек $(x, u \rightarrow v, y)$, где $x, y \in \Sigma^*$ и либо $(u, v) \in \mathcal{R}$, либо $(v, u) \in \mathcal{R}$. Если $e = (x, u \rightarrow v, y)$, то мы определяем *обратное ребро* формулой $e^{-1} = (x, v \rightarrow u, y)$, а также *начальную вершину* $\iota(e) = xu$ и *конечную вершину* $\tau(e) = xvu$ ребра e . Таким образом, вершины графа — это непустые слова, а ребра — элементарные преобразования слов (т.е. замены некоторого вхождения определяющего слова на дополнительное). Граф $\Gamma(\mathcal{P})$ описывает все выводы над $\mathcal{P}$: два непустых слова w_1, w_2 равны над $\mathcal{P}$ (т.е. находятся в отношении $\sim$) тогда и только тогда, когда в графе имеется путь из вершины w_1 в вершину w_2 , называемый также *выводом* слова w_2 из слова w_1 .

С каждым выводом над $\mathcal{P}$ можно естественным образом связать геометрический объект — *полугрупповую диаграмму* над $\mathcal{P}$. Полугрупповые диаграммы были впервые введены Е. В. Кашиным [8] и затем переоткрыты Дж. Реммерсом [9] и некоторыми другими авторами (см. [10], [11]). Мы не приводим здесь точного определения, ограничиваясь следующим примером.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{P} = \langle a, b, c \mid abc = ba, bca = cb, cab = ac \rangle$. Рассмотрим следующий вывод над $\mathcal{P}$:

$$(1, ac \rightarrow cab, cb^2ca)(c, abc \rightarrow ba, b^2ca)(cbab, bca \rightarrow cb, 1)(cb, abc \rightarrow ba, b).$$

Ему соответствует диаграмма Δ над $\mathcal{P}$, представленная на рис. 1.

Рис. 1

Введем также сопутствующую терминологию. Каждая диаграмма над $\mathcal{P}$ имеет *вершины* и *ребра* (не путать с вершинами и ребрами графа $\Gamma(\mathcal{P})$), а также *клетки*. В примере 1 диаграмма Δ имеет 13 вершин, 16 ребер и 4 клетки. Количество клеток равно числу шагов вывода, которому сопоставлена диаграмма. Каждое ребро диаграммы имеет *метку* — букву алфавита Σ (все ребра мы ориентируем слева направо, а метку ребра e обозначаем через $\varphi(e)$). Для любого *пути* p в диаграмме также вводится понятие его метки $\varphi(p)$, причем, как правило, рассматриваются лишь *позитивные* пути, т.е. пути, в которых никакое ребро не проходится в отрицательном направлении. У диаграммы Δ мы выделяем *начальную вершину* $\iota(\Delta)$, *конечную вершину* $\tau(\Delta)$, *верхний путь* $\text{top}(\Delta)$ и *нижний путь* $\text{bot}(\Delta)$. Эти понятия проиллюстрированы на рис. 2.

Заметим, что пути $\text{top}(\Delta)$ и $\text{bot}(\Delta)$ могут иметь общие ребра. Для каждой клетки π диаграммы Δ над $\mathcal{P}$ мы также естественным образом вводим обозначения $\iota(\pi)$, $\tau(\pi)$, $\text{top}(\pi)$, $\text{bot}(\pi)$ и соответствующие им понятия. Если слова u и v соответственно являются метками верхнего и нижнего пути клетки π , то либо $u = v$, либо $v = u$ принадлежит $\mathcal{R}$, т.е. является определяющим соотношением. Будем говорить при этом, что π есть (u, v) -клетка.

Для любого непустого слова w имеется *тривиальная диаграмма* $\varepsilon(w)$, не имеющая клеток, для которой верхний и нижний пути совпадают. Отметим, что мы

Рис. 2

не различаем диаграммы, изотопные друг другу. Запись $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ означает изотопность диаграмм Δ_1 и Δ_2 . Ясно, что для любого $w \in \Sigma^+$ диаграмма $\varepsilon(w)$ определена однозначно.

Если метка верхнего пути диаграммы Δ равна слову w_1 , а метка нижнего пути – слову w_2 , то мы говорим, что Δ есть (w_1, w_2) -диаграмма. Пусть w_1, w_2, w_3 – произвольные вершины графа $\Gamma(\mathcal{P})$, и пусть p_i ($i = 1, 2$) – пути в графе $\Gamma(\mathcal{P})$ из w_i в w_{i+1} (выводы). Через Δ_i обозначим диаграмму, соответствующую выводу p_i ($i = 1, 2$). Легко понять, что произведению путей p_1 и p_2 в графе (композиции выводов) соответствует диаграмма Δ , получаемая из Δ_1 и Δ_2 при помощи склейки между собой путей нижнего пути диаграммы Δ_1 и верхнего пути диаграммы Δ_2 . Полученную диаграмму Δ будем называть *композицией* диаграмм Δ_1 и Δ_2 , обозначая ее через $\Delta_1 \circ \Delta_2$. Тем самым $\circ$ является частичной операцией на множестве всех диаграмм над $\mathcal{P}$. Композицией (w_1, w_2) -диаграммы и (w_2, w_3) -диаграммы будет (w_1, w_3) -диаграмма. Для фиксированного слова $w \in \Sigma^+$ множество всех (w, w) -диаграмм над $\mathcal{P}$ образует полугруппу относительно операции $\circ$. Диаграммы такого вида будут в дальнейшем называться *сферическими* диаграммами (с базой w). Эта полугруппа обладает нейтральным элементом $\varepsilon(w)$. Помимо (частичной) операции $\circ$, можно определить еще одну (ассоциативную) операцию на множестве *всех* диаграмм над $\mathcal{P}$. Именно, *суммой* $\Delta_1 + \Delta_2$ диаграмм Δ_1 и Δ_2 назовем диаграмму, получаемую склейкой вершины $\tau(\Delta_1)$ и вершины $\iota(\Delta_2)$. Операции композиции и сложения диаграмм проиллюстрированы на рис. 3.

Рис. 3

Допустим, что некоторый путь в графе $\Gamma(\mathcal{P})$ содержит подпуть вида ee^{-1} ,

где $e = (x, u \rightarrow v, y)$ – некоторое ребро. В этом случае в диаграмме Δ , соответствующей данному пути, имеется (u, v) -клетка π_1 и (v, u) -клетка π_2 , причем $\text{bot}(\pi_1) = \text{top}(\pi_2)$. Пару клеток диаграммы Δ , удовлетворяющую этим условиям, назовем *диполем*. Пусть p' – путь, получаемый из p удалением подпути ee^{-1} , и пусть ему соответствует диаграмма Δ' . Легко видеть, что Δ' получается из Δ следующим образом: удаляется общая граница $\text{bot}(\pi_1) = \text{top}(\pi_2)$ клеток π_1 и π_2 , а пути $\text{top}(\pi_1)$ и $\text{bot}(\pi_2)$ (с одинаковыми метками) склеиваются. Переход от Δ к Δ' называется *удалением диполя*. Аналогично, переход от Δ' к Δ называется *вставкой диполя*. Две диаграммы называются *эквивалентными*, если от одной из них можно перейти к другой путем серии преобразований, каждое из которых – либо вставка диполя, либо удаление диполя. Запись $\Delta_1 \cong \Delta_2$ будет означать эквивалентность диаграмм Δ_1 и Δ_2 .

Если диаграмма не содержит диполей, то она называется *приведенной*. От любой диаграммы можно перейти к приведенной, если последовательно удалить все диполи. Результат не зависит от порядка выполнения преобразований. Этот факт был впервые установлен Килибардой [1]. Иными словами, любой класс эквивалентности диаграмм содержит в точности одну приведенную диаграмму. Легко убедиться в том, что если $\Delta_1 \cong \Delta_2$, $\Delta_3 \cong \Delta_4$, то $\Delta_1 \circ \Delta_3 \cong \Delta_2 \circ \Delta_4$ и $\Delta_1 + \Delta_3 \cong \Delta_2 + \Delta_4$.

Таким образом, на множестве $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ классов эквивалентности всех (w, w) -диаграмм можно корректно определить операцию произведения, полагая $[\Delta_1] \cdot [\Delta_2] = [\Delta_1 \circ \Delta_2]$, где квадратные скобки означают класс эквивалентности диаграммы. Заметим, что если (w_1, w_2) -диаграмма Δ соответствует некоторому пути в графе $\Gamma(\mathcal{P})$, то обратному пути соответствует (w_2, w_1) -диаграмма, являющаяся зеркальной копией Δ . Она обозначается через Δ^{-1} . Очевидно, что $\Delta \circ \Delta^{-1} \cong \varepsilon(w_1)$, $\Delta^{-1} \circ \Delta \cong \varepsilon(w_2)$. Далее для упрощения мы будем называть эквивалентные диаграммы *равными*, используя обычный знак равенства вместо $\cong$, опуская квадратные скобки и знак произведения. В этих обозначениях если $\Delta \in \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$, то $\Delta \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \Delta = \varepsilon(w)$. В результате $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ превращается в группу, называемую *группой диаграмм* над полугрупповым копредставлением $\mathcal{P}$ с базой w . Единичным элементом этой группы служит тривиальная диаграмма $\varepsilon(w)$. С учетом единственности приведенной диаграммы в каждом классе эквивалентности можно считать, что группа $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ состоит из всех приведенных (w, w) -диаграмм над $\mathcal{P}$, а произведение диаграмм получается таким образом: нужно взять композицию двух диаграмм, а затем ее привести, удалив все диполи. В дальнейшем термин *группа диаграмм* означает группу диаграмм над некоторым полугрупповым копредставлением с некоторой базой.

Мы будем использовать стандартные обозначения для сопряжения элементов в группах: $a^b = b^{-1}ab$, для коммутаторов: $[a, b] = a^{-1}a^b = a^{-1}b^{-1}ab$, а также для взаимного коммутанта подгрупп: $[A, B]$ есть подгруппа, порожденная всеми коммутаторами вида $[a, b]$, где $a \in A$, $b \in B$.

Приведем некоторые результаты о группах диаграмм, полученные ранее. Кроме того, напомним определения некоторых важных понятий, которые потребуются нам в дальнейшем.

Первоначально класс известных групп диаграмм состоял из групп, получаемых из бесконечной циклической группы при помощи (конечных) прямых и свободных

произведений. При этом не было известно, какова группа диаграмм $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ для простейшего задания одноэлементной полугруппы $\mathcal{P} = \langle x | xx = x \rangle$ с базой x . Позже выяснилось, что эта группа изоморфна знаменитой группе Р. Томпсона F , имеющей задание

$$\langle x_0, x_1, \dots \mid x_j^{x_i} = x_{j+1} \ (j > i) \rangle.$$

По этому поводу см. [3; пример 6.4].

Группа F обладает целым рядом интересных свойств и привлекает внимание математиков, работающих в самых различных областях. Обнаруженная Ричардом Томпсоном в 1965 году, она не раз затем переоткрывалась другими авторами. Эта группа была изобретена как группа некоторых преобразований термов в λ -исчислении (математическая логика), а затем возникла в таких областях, как теория функций, гомологическая алгебра, теория гомотопий, а также собственно в теории групп.

Подробности о группе F можно найти в обзоре [12]. Поскольку группа F является одной из наиболее важных среди известных в настоящее время групп диаграмм, а также ввиду того, что ряд новых результатов об F получен в данной статье, мы напомним кратко некоторые из известных ее свойств.

1. Группа F изоморфна группе всех сохраняющих ориентацию кусочно линейных непрерывных отображений отрезка $[0, 1]$ на себя таких, что разрывы производной могут иметь место лишь в конечном числе двоично-рациональных точек (т.е. точек вида $m/2^n$, $m, n \in \mathbb{Z}$), а сами производные принимают значения вида 2^k , $k \in \mathbb{Z}$. Групповой операцией служит суперпозиция функций. (В дальнейшем мы условимся писать символ функции справа от ее аргумента.)
2. Группа F изоморфна также группе всех функций с указанными выше свойствами, если отрезок $[0, 1]$ заменить на отрезок $[0, \infty)$ и дополнительно потребовать, чтобы производная была равна 1 на $+\infty$.
3. Группа F не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.
4. Группа F не содержит свободных подгрупп ранга > 1 . Более того, любая подгруппа в F либо абелева, либо содержит прямую степень группы $\mathbb{Z}$.
5. Группа F конечно определена и имеет задание при помощи двух порождающих и двух определяющих соотношений. В F разрешимы проблема равенства слов и проблема сопряженности. Функция Дэна группы F имеет полиномиальную сверху оценку [13].

Говоря о группе F как группе диаграмм, нам хотелось бы явно указать связь между представлением элементов из F диаграммами и нормальной формой этих элементов. Напомним, что всякий элемент из F представим единственным образом в виде

$$x_{i_1}^{s_1} \dots x_{i_m}^{s_m} x_{j_n}^{-t_n} \dots x_{j_1}^{-t_1}, \quad (1)$$

где $i_1 \leq \dots \leq i_m \neq j_n \geq \dots \geq j_1$; $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n \geq 0$, причем из того, что в (1) входят x_i и x_i^{-1} для некоторого $i \geq 0$, следует, что либо x_{i+1} , либо x_{i+1}^{-1} также входит в (1). Запись элемента группы F в виде (1) называется его *нормальной формой*. (Заметим, что авторами в [14] построена еще одна нормальная форма для элементов из F , обладающая свойством локальной тестируемости.)

Покажем теперь, как приведенной (x, x) -диаграмме над $\langle x \mid xx = x \rangle$ сопоставить нормальную форму элемента, задаваемого этой диаграммой. Подробности нетрудно извлечь из [3; пример 6.4], поэтому мы ограничимся следующей иллюстрацией.

ПРИМЕР 2. Любая приведенная диаграмма Δ над $\langle x \mid xx = x \rangle$ разрезается самым длинным позитивным путем из ее начальной вершины в конечную на так называемые *положительную* и *отрицательную* части, обозначаемые Δ^+ и Δ^- соответственно; имеем $\Delta = \Delta^+ \circ \Delta^-$. При этом Δ^+ содержит лишь применения соотношений вида $x = x^2$, а Δ^- — соотношений вида $x^2 = x$. Отсюда легко видеть, что число клеток в Δ^+ и Δ^- одинаково. Пусть оно равно k . Занумеруем все клетки в Δ^+ числами от 1 до k , взяв на каждом шаге “самую правую” клетку, т.е. клетку, правее всех остальных примыкающую к нижнему краю диаграммы, состоящей из уже занумерованных клеток. При этом первой является клетка, примыкающая к верхнему пути. Рассмотрим i -ю клетку ($1 \leq i \leq k$). Она соответствует ребру комплекса Сквайера, имеющему вид $(x^{\ell_i}, x \rightarrow x^2, x^{r_i})$, где ℓ_i (r_i) есть длина пути из начальной вершины диаграммы в начальную вершину i -й клетки (из конечной вершины i -й клетки в конечную вершину диаграммы), проходящего по нижнему краю поддиаграммы, состоящей из первых i клеток. Если $\ell_i = 0$, то соответствующее ребро принадлежит максимальному поддереву комплекса, и мы сопоставляем i -й клетке единицу. Если $\ell_i \neq 0$, то i -й клетке мы сопоставляем элемент x_{r_i} . Перемножая элементы, сопоставленные клеткам от первой до k -й, мы находим “положительную” часть нормальной формы. Например, у диаграммы, изображенной на рис. 4, положительная часть нормальной формы равна $x_0 x_2^2 x_4 x_5$ (клеткам с номерами 1 и 3 соответствует единица).

Рис. 4

Чтобы найти “отрицательную” часть нормальной формы, рассмотрим диаграмму $(\Delta^-)^{-1}$ и занумеруем ее клетки аналогично, сопоставляя им элементы так же, как и выше. В рассматриваемом примере последней диаграмме соответствует слово $x_1 x_3^2 x_4$ (клеткам с номерами 1, 2, 4 соответствует единица). Поэтому “отрицательная” часть нормальной формы равна $(x_1 x_3^2 x_4)^{-1}$ и осталось перемножить найденные части, что приводит к нормальной форме элемента, заданно-

го диаграммой, изображенной выше. В нашем случае имеем нормальную форму $x_0 x_5^2 x_4 x_5 x_4^{-1} x_3^{-2} x_1^{-1}$.

Диаграммы, изображенные на рис. 5, задают порождающие элементы x_0, x_1 группы F . Исходя из этого, можно получить диаграмму, задающую любой элемент из F .

Рис. 5

Можно задать ряд естественных вопросов общего характера, касающихся групп диаграмм. Какие группы являются группами диаграмм? Какие группы представимы диаграммами (т.е. являются подгруппами групп диаграмм)? Совпадают ли эти два класса? Как вычислить группу диаграмм над заданным (скажем, конечным) копредставлением $\mathcal{P}$ с заданной базой?

Аппарат для вычисления групп диаграмм в настоящее время достаточно хорошо разработан. Одним из отправных пунктов является теорема Килибарды о фундаментальной группе комплекса Сквайера. Чтобы сформулировать далее этот важный результат, зададим структуру 2-комплекса на графе $\Gamma(\mathcal{P})$ произвольного полугруппового копредставления $\mathcal{P}$.

Важно заметить, что хотя каждому пути в графе $\Gamma(\mathcal{P})$ однозначно соответствует диаграмма, обратное, вообще говоря, не имеет места. Рассмотрим следующий типичный случай.

Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$, где $\mathcal{R}$ содержит два (не обязательно различных) соотношения $\ell_i = r_i$ ($i = 1, 2$), и пусть u, v, z — произвольные слова из Σ^* . Рассмотрим следующие пути в $\Gamma(\mathcal{P})$:

$$(u, \ell_1 \rightarrow r_1, z\ell_2 v)(ur_1 z, \ell_2 \rightarrow r_2, v), \quad (2)$$

$$(u\ell_1 z, \ell_2 \rightarrow r_2, v)(u, \ell_1 \rightarrow r_1, zr_2 v). \quad (3)$$

Легко видеть, что $(u\ell_1 z\ell_2 v, ur_1 zr_2 v)$ -диаграммы, соответствующие этим путям, совпадают. Каждому из этих двух путей соответствует диаграмма, изображенная на рис. 6.

Рис. 6

В соответствии с рассмотренной ситуацией естественно ввести отношение гомотопии на множестве путей в графе $\Gamma(\mathcal{P})$. Пути (2) и (3) следует объявить гомотопными. С этой целью на $\Gamma(\mathcal{P})$ вводится структура 2-комплекса. Для любой пятерки $(u, \ell_1 = r_1, z, \ell_2 = r_2, v)$, где $u, v, z \in \Sigma^*$, $(\ell_1 = r_1), (\ell_2 = r_2) \in \mathcal{R}$, присоединим 2-клетку, определяющий путь которой имеет вид $p_1 p_2^{-1}$, где p_1, p_2 — пути (2) и (3) соответственно. Полученный 2-комплекс называется *комплексом Сквайера* полугруппового копредставления $\mathcal{P}$ и обозначается $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Он был фактически введен Сквайером в работе [15]. Этот же комплекс был независимо построен Килибардой [1], [2] и Прайдом [16]. Важная роль этого комплекса подчеркивается тем обстоятельством, что равные диаграммы над $\mathcal{P}$ соответствуют гомотопным путям в $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Помимо этого существенное значение для дальнейшего имеет следующая теорема Килибарды [1], [2]: *группа диаграмм $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(\mathcal{K}, w)$ комплекса Сквайера $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{P})$.*

§ 2. Диаграммное произведение групп

В [3] рассматривался ряд теоретико-групповых операций, относительно которых замкнут класс групп диаграмм. Такими операциями являются конечные прямые произведения (результат Килибарды [1]), любые свободные произведения, а также специальная операция $\bullet$, использованная для построения примера конечно порожденной, но не конечно определенной группы диаграмм. В данном разделе мы введем одну весьма общую операцию на группах и покажем, что класс групп диаграмм замкнут относительно нее. Все вышеперечисленные конструкции будут частными случаями применения новой операции, которую мы будем называть *диаграммным произведением групп*. Далее мы рассмотрим конкретные реализации данной конструкции, которые будут существенно использованы в дальнейшем.

Напомним определение графа. *Графом* (в смысле Серра [17]) называется упорядоченный набор $\Gamma = \langle V, E, {}^{-1}, \iota, \tau \rangle$ где V, E — непересекающиеся множества, ${}^{-1}$ есть инволюция на E , ι, τ — отображения из E в V . При этом выполнены следующие аксиомы.

1. $e^{-1} \neq e$ для каждого $e \in E$.
2. $\iota(e^{-1}) = \tau(e)$, $\tau(e^{-1}) = \iota(e)$.

Элементы множеств V и E называются *вершинами* и *ребрами* графа соответственно. Если $e \in E$, то $\iota(e)$ называется *начальной вершиной* ребра e и $\tau(e)$ называется *конечной вершиной* ребра e .

Путь на графе Γ есть либо вершина, либо непустая последовательность ребер $e_1, e_2, \dots, e_n$ такая, что $\tau(e_i) = \iota(e_{i+1})$ для каждого $i = 1, \dots, n-1$. При этом путь принято записывать в виде $p = e_1 e_2 \dots e_n$. Если путь p состоит из вершины v , то обозначаем его $p = 1_v$. Если $p = e_1 e_2 \dots e_n$ — путь, то *обратным путем* p^{-1} называется путь $e_n^{-1} e_{n-1}^{-1} \dots e_1^{-1}$. Путь, состоящий из одной вершины, называется *пустым путем*. Он совпадает со своим обратным. Путь p называется *замкнутым*, если $\iota(p) = \tau(p)$.

Ориентацией на графе Γ называется такое подмножество E^+ множества всех ребер E , что для любого ребра $e \in E$ ровно одно из ребер e, e^{-1} принадлежит E^+ . Ребра из E^+ называются *положительными*, а ребра из $E^- = E \setminus E^+$ называются *отрицательными*. Путь на ориентированном графе называется *позитивным*,

если он состоит только из положительных ребер. Пустой путь считается позитивным. Для любого пути p определены его *начальная вершина* $\iota(p)$ и *конечная вершина* $\tau(p)$: если $p = 1_v$, то $\iota(p) = \tau(p) = v$; если $p = e_1 \dots e_n$, то $\iota(p) = \iota(e_1)$, $\tau(p) = \tau(e_n)$. Для любых двух путей p, q с условием $\tau(p) = \iota(q)$ естественным образом определяется *произведение* $p \cdot q$ путей p и q : при $p = e_1 \dots e_n, q = f_1 \dots f_m$ полагаем $p \cdot q = e_1 \dots e_n f_1 \dots f_m$; если p (или q) пустой, то $p \cdot q = q$ ($p \cdot q = p$).

Ориентированным графом называется граф Γ с выбранной на нем ориентацией E^+ . Ясно, что любой граф можно сделать ориентированным, зафиксировав некоторую ориентацию на нем.

Важную роль далее будет играть понятие графа групп. Пусть дан ориентированный граф Γ , где E^+ — множество положительных ребер. Говорят, что на Γ задана структура *графа групп*, если каждому ребру $e \in E^+$ сопоставлена некоторая группа G_e , каждой вершине $v \in V$ сопоставлена некоторая группа G_v , и при этом заданы вложения $\iota_e: G_e \rightarrow G_{\iota(e)}, \tau_e: G_e \rightarrow G_{\tau(e)}$ для каждого $e \in E^+$.

В нашей ситуации вместе со структурой графа групп на Γ будет задана структура 2-комплекса. Это означает, что имеются некоторое множество F , называемое *множеством 2-клеток*, не пересекающееся ни с V , ни с E , и отображение, которое каждому элементу из F сопоставляет некоторый замкнутый путь в графе Γ . Этот путь называется *определяющим путем* данной 2-клетки. Для данного 2-комплекса стандартным образом определяется отношение гомотопии на множестве путей, а также понятие фундаментальной группы 2-комплекса $\mathcal{K}$ с базовой вершиной w , которая обозначается $\pi_1(\mathcal{K}, w)$.

Мы будем далее рассматривать 2-комплексы, на 1-остове которых задана структура графа групп. Такие структуры далее для краткости будут называться *2-комплексами групп*. Хотя понятие 2-комплекса групп широко используется в литературе несколько в более общем виде (см. [18]), мы в настоящей статье будем использовать его в вышеупомянутом смысле. Вообще говоря, обычно под 2-комплексом групп понимается структура, которая помимо вершинных групп вида G_v ($v \in V$) и реберных групп G_e ($e \in E$) содержит также группы вида G_f ($f \in F$), сопоставляемые 2-клеткам. Наша ситуация есть частный случай, при котором все группы, сопоставляемые 2-клеткам, тривиальны.

Итак, пусть задан 2-комплекс групп $\mathcal{G}$. Важнейшим понятием для нас будет понятие фундаментальной группы данного 2-комплекса групп. Ее можно определить по-разному. Мы определим ее как фундаментальную группу некоторого обычного 2-комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ с некоторой базовой вершиной. Перейдем к описанию комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{G})$.

К 2-комплексу $\mathcal{K}$ мы присоединим новые ребра и новые 2-клетки. Для любой вершины $v \in V$ и для любого элемента $g \in G_v$ добавим ребро, обозначаемое g_v , начальной и конечной вершиной которого является v . Добавленные 2-клетки относятся к двум типам. 2-клетки первого типа имеют определяющие пути $g_v h_v (gh)^{-1}_v$ для любой вершины $v \in V$ и любых элементов $g, h \in G_v$. 2-клетки второго типа имеют определяющие пути $e^{-1} g_{\iota(e)} e h_{\tau(e)}^{-1}$, где $g = \iota_e(x), h = \tau_e(x), x \in G_e, e \in E^+$ (2-клетки второго типа соответствуют всем парам вида (e, x) , где $e \in E^+, x \in G_e$). Напомним, что ι_e, τ_e суть вложения группы G_e в группы $G_{\iota(e)}, G_{\tau(e)}$ соответственно. Получаемый из $\mathcal{K}$ добавлением новых ребер и новых 2-клеток 2-комплекс обозначим через $\mathcal{K}(\mathcal{G})$. Для любой вершины $v \in V$ фундаментальная

группа $\pi_1(\mathcal{K}(\mathcal{G}), v)$ будет называться *фундаментальной группой 2-комплекса групп $\mathcal{G}$ с базовой вершиной v* . Ее будем обозначать через $\pi_1(\mathcal{G}, v)$.

Стандартный способ вычисления фундаментальной группы 2-комплекса (см. [19]) можно применить и для вычисления фундаментальной группы 2-комплекса групп. Пусть на 1-остове 2-комплекса $\mathcal{K}$ задана структура графа групп $\mathcal{G}$. Рассмотрим связную компоненту $\mathcal{K}_w$ комплекса $\mathcal{K}$, содержащую вершину w , и выберем в этой компоненте некоторое максимальное поддерево $\mathcal{T}_w$. Оно же будет максимальным поддеревом связной компоненты нового 2-комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{G})$, содержащей вершину w . Возьмем в качестве порождающих множество положительных ребер E_w^+ данной связной компоненты вместе с элементами вида g_v , $v \in V_w$, $g \in G_v$, где V_w есть множество вершин данной компоненты связности. В качестве определяющих соотношений берутся все соотношения вида $e = 1$, где e принадлежит дереву $\mathcal{T}$, а также соотношения вида $r = 1$, где r — определяющий путь произвольной 2-клетки 2-комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{G})$. Группа, задаваемая описанным способом при помощи порождающих и определяющих соотношений, изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(\mathcal{G}, w)$ рассматриваемого 2-комплекса групп.

Дадим еще одно эквивалентное описание. Ясно, что фундаментальную группу $\pi_1(\mathcal{K}, w)$ с базовой вершиной w самого 2-комплекса $\mathcal{K}$ можно вычислить тем же способом, выбирая $\mathcal{T}_w$ в качестве максимального поддерева связной компоненты вершины w . При этом каждому ребру e этой компоненты однозначно соответствует элемент из $\pi_1(\mathcal{K}, w)$, являющийся классом эквивалентности пути $p_{\iota(e)} e p_{\tau(e)}^{-1}$, где через p_v мы обозначаем путь из w в v , проходящий по ребрам поддерева $\mathcal{T}_w$. Тогда

$$\pi_1(\mathcal{G}, w) \cong *_v G_v * \pi_1(\mathcal{K}, w) / \mathcal{N}, \quad (4)$$

где свободное произведение групп G_v берется по всем вершинам v связной компоненты комплекса $\mathcal{K}$, содержащей w , а $\mathcal{N}$ — нормальная подгруппа, являющаяся нормальным замыканием определяющих соотношений вида

$$g_{\iota(e)}^e = h_{\tau(e)} \text{ для всех } e \in E_w^+, x \in G_e, \text{ где } g = \iota_e(x), h = \tau_e(x). \quad (5)$$

Данное описание будет широко использоваться в дальнейшем.

Дадим одно из основных определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть X — алфавит, H_x ($x \in X$) — произвольное семейство групп, $\mathcal{Q} = \langle X \mid \mathcal{S} \rangle$ — полугрупповое копредставление, $w \in X^+$. Рассмотрим комплекс Сквайера $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{Q})$ и зададим на его 1-остове структуру графа групп следующим образом. Множество E^+ положительных ребер 1-остова комплекса $\mathcal{K}$ будет состоять из всех ребер вида $e = (u, s \rightarrow t, v)$, где $u, v \in X^*$, $(s = t) \in \mathcal{S}$. Для любого слова $z = x_1 x_2 \dots x_n$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, положим

$$H_u = H_{x_1} \times H_{x_2} \times \dots \times H_{x_n};$$

если u пусто, то положим $H_u = 1$. Для любой вершины $u \in \mathcal{K}$ положим $G_u = H_u$; для любого ребра $e = (u, s \rightarrow t, v) \in E^+$, где $u, v \in X^*$, $(s = t) \in \mathcal{S}$, положим $G_e = H_u \times H_v$. При этом задаются вложения $\iota_e: G_e \rightarrow G_{\iota(e)}$ как естественное вложение $H_u \times H_v \rightarrow H_{usv} = H_u \times H_s \times H_t$ и $\tau_e: G_e \rightarrow G_{\tau(e)}$ как

естественное вложение $H_u \times H_v \rightarrow H_{utv} = H_u \times H_t \times H_t$. Тем самым получен 2-комплекс групп $\mathcal{K}_H$. Фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{K}_H, w)$ данного 2-комплекса групп с базовой вершиной w называется *диаграммным произведением* семейства групп $H_X = \{H_x : x \in X\}$ относительно копредставления $\mathcal{Q} = \langle X \mid \mathcal{S} \rangle$ с базой w . Оно будет обозначаться $\mathcal{D}(H_X; \mathcal{S}, w)$.

Нетрудно видеть, что в случае, когда группы H_x для всех $x \in X$ тривиальны, то диаграммное произведение $\mathcal{D}(H_X; \mathcal{S}, w)$ совпадает с обычной группой диаграмм $\mathcal{D}(\mathcal{Q}, w)$.

Основной результат, касающийся данной конструкции, состоит в том, что диаграммное произведение произвольного семейства групп диаграмм относительно данного полугруппового копредставления само будет группой диаграмм. Сформулируем этот результат в общем виде, давая описание того копредставления, для которого соответствующее диаграммное произведение будет группой диаграмм.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{Q} = \langle X \mid \mathcal{S} \rangle$ – полугрупповое копредставление, $w \in X^+$. Каждому $x \in X$ сопоставлена некоторая группа диаграмм $G_x = \mathcal{D}(\mathcal{P}_x, w_x)$, где $\mathcal{P}_x = \langle \Sigma_x \mid \mathcal{R}_x \rangle$ – полугрупповые копредставления, $w_x \in \Sigma_x^+$ ($x \in X$). Пусть $A = \{a_x : x \in X\}$ – некоторый алфавит. Предположим, что алфавиты X, A, Σ_x ($x \in X$) попарно не пересекаются. Обозначим

$$\Sigma = \bigcup_{x \in X} \Sigma_x, \quad \mathcal{R} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}_x, \quad \mathcal{W} = \bigcup_{x \in X} \{x = a_x w_x a_x\}$$

и рассмотрим копредставление

$$\mathcal{P} = \langle X \cup \Sigma \cup A \mid \mathcal{S} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{W} \rangle.$$

Утверждается, что группа диаграмм $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ изоморфна диаграммному произведению $\mathcal{D}(G_X; \mathcal{S}, w)$ семейства групп $G_X = \{G_x : x \in X\}$ относительно копредставления $\mathcal{Q} = \langle X \mid \mathcal{S} \rangle$ с базой w .

В частности, диаграммное произведение семейства групп диаграмм относительно данного полугруппового копредставления само является группой диаграмм.

Рассмотрим геометрическое описание данной конструкции. В вышеприведенных обозначениях каждая группа G_x может быть реализована как группа диаграмм над копредставлением $\widehat{\mathcal{P}}_x$, которое получается из $\mathcal{P}_x$ добавлением букв x, a_x к алфавиту Σ_x и нового соотношения $x = a_x w_x a_x$ к множеству $\mathcal{R}_x$. При этом $G_x \cong \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{P}}_x, x)$. Возьмем какую-либо (w, w) -диаграмму над $\mathcal{Q}$ и рассмотрим какое-либо из ее ребер. Пусть оно имеет метку $x \in X$. Это ребро можно раздвоить, вставляя между двумя получившимися экземплярами данного ребра некоторую (x, x) -диаграмму над $\widehat{\mathcal{P}}_x$. Так можно поступить со всеми ребрами исходной диаграммы. Если мы вставляем тривиальную (x, x) -диаграмму, то это фактически означает, что мы вновь склеиваем раздвоенные экземпляры. После таких преобразований мы получим некоторую (w, w) -диаграмму над $\mathcal{P}$. Можно показать, что полученные таким образом диаграммы представляют все элементы группы $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$. С этой точки зрения диаграммы, представляющие элементы $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$, получаются из (w, w) -диаграмм над $\mathcal{Q}$ при помощи вставок (x, x) -диаграмм, задающих элементы из G_x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Построим комплекс Сквайера для копредставления $\mathcal{P}$. По теореме Килибарды фундаментальная группа этого комплекса с базовой вершиной w изоморфна группе диаграмм $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$. Нашей целью является преобразование построенного комплекса Сквайера в некоторый новый 2-комплекс с той же фундаментальной группой, относительно которой нам надлежит убедиться в том, что она изоморфна фундаментальной группе подходящего 2-комплекса групп. Последняя как раз и будет изоморфна диаграммному произведению рассматриваемых групп.

Пусть $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$ – связная компонента комплекса Сквайера копредставления $\mathcal{P}$, содержащая вершину w . Вершина v из данной компоненты есть произвольное слово, равное слову w над копредставлением $\mathcal{P}$. Это слово единственным образом представляется в виде произведения $v = v_1 \dots v_\mu$ ($\mu = \mu(v)$) подслов $v_1, \dots, v_\mu$, каждое из которых либо есть буква из X , либо есть слово вида $a_x u a_x$, где u – слово над Σ_x , равное слову w_x по модулю копредставления $\mathcal{P}_x$. Слова $v_1, \dots, v_\mu$ будем называть *слогами* слова v . Каждому слогу v_i ($1 \leq i \leq \mu$) сопоставим букву алфавита X , которую будем обозначать через $\pi(v_i)$. Если $v_i \in X$, то положим $\pi(v_i) = v_i$, а если v_i имеет вид $a_x u a_x$, где u равно w_x по модулю $\mathcal{P}_x$, то полагаем $\pi(v_i) = x$. Продолжим функцию π , полагая по определению $\pi(v) = \pi(v_1) \dots \pi(v_\mu)$ для любого слова v , равного w по модулю $\mathcal{P}$. Функцию π далее будем называть *проекцией*.

На комплексе Сквайера копредставления $\mathcal{P}$ действует двусторонним образом свободный моноид $M = (X \cup \Sigma \cup A)^*$ по следующему правилу: для любых $m_1, m_2 \in M$ и для любой вершины v данного комплекса через $m_1 * v * m_2$ обозначим вершину $m_1 v m_2$, а для любого ребра $e = (u, p \rightarrow q, v)$ данного комплекса через $m_1 * e * m_2$ обозначим ребро $(m_1 u, p \rightarrow q, v m_2)$. Образы некоторого подграфа в $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ при описанном двустороннем действии будем называть *сдвигами* этого подграфа.

Положим $\hat{\mathcal{R}}_x = \mathcal{R}_x \cup \{x = a_x w_x a_x\}$ и введем копредставления $\hat{\mathcal{P}}_x = \langle \Sigma_x, x, a_x \mid \hat{\mathcal{R}}_x \rangle$ для всех $x \in X$. Ясно, что $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{P}}_x, x) \cong G_x$. Пусть v – вершина комплекса $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$ и $v = v_1 \dots v_\mu$ – разбиение v на слоги. Очевидно, что для любого $1 \leq i \leq \mu$ буква $\pi(v_i) = x$ равна слову v_i по модулю $\hat{\mathcal{P}}_x$, а также v равно $\pi(v)$ по модулю $\mathcal{P}$. Заметим, что комплексы Сквайера для копредставлений $\hat{\mathcal{P}}_x$ и их сдвиги можно считать подкомплексами комплекса Сквайера для $\mathcal{P}$.

Для каждого $x \in X$ выберем максимальное поддерево $\mathcal{I}_x$ в связной компоненте $\mathcal{K}(\hat{\mathcal{P}}_x, x)$ комплекса Сквайера копредставления $\hat{\mathcal{P}}_x$, содержащей вершину x . Выберем также максимальное поддерево $\mathcal{I}_Q$ в связной компоненте $\mathcal{K}(\mathcal{Q}, w)$ комплекса Сквайера копредставления $\mathcal{Q}$, содержащей вершину w . Пусть v – произвольная вершина комплекса $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$ и $v = v_1 \dots v_\mu$ – разбиение v на слоги. Обозначим $x_i = \pi(v_i)$ ($1 \leq i \leq \mu$) и рассмотрим следующие подграфы в $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$:

$$1 * \mathcal{I}_{x_1} * x_2 \dots x_\mu, v_1 * \mathcal{I}_{x_2} * x_3 \dots x_\mu, \dots, v_1 \dots v_{\mu-1} * \mathcal{I}_{x_\mu} * 1. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим подграф $\mathcal{I}$ в $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$, являющийся объединением подграфов (6) по всем вершинам v , равным w по модулю $\mathcal{P}$ вместе с подграфом $\mathcal{I}_Q$. Докажем, что $\mathcal{I}$ есть максимальное поддерево в $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$.

Установим, что $\mathcal{I}$ – связный подграф, содержащий все вершины $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$, т.е. для любой вершины v нашей компоненты укажем некоторый путь в $\mathcal{I}$ из w в v .

Пусть $v = v_1 \dots v_\mu$ – разбиение на слоги. Через p обозначим путь в подграфе $\mathcal{T}_Q$ из w в $\pi(v) = x_1 \dots x_\mu$, где $x_i = \pi(v_i)$ для всех i от 1 до μ . Для каждого такого i также обозначим через p_i путь из x_i в v_i в графе $\mathcal{T}_{x_i}$. Для каждого i от 1 до μ введем путь $\tilde{p}_i = v_1 \dots v_{i-1} * p_i * x_{i+1} \dots x_\mu$. Этот путь, очевидно, соединяет вершины $v_1 \dots v_{i-1} x_i \dots x_\mu$ и $v_1 \dots v_i x_{i+1} \dots x_\mu$ в графе $\mathcal{T}$. При этом произведение $p\tilde{p}_1 \dots \tilde{p}_\mu$ будет путем в $\mathcal{T}$ из w в $v_1 \dots v_\mu = v$.

Теперь докажем, что в $\mathcal{T}$ нет нетривиальных циклов. Рассуждаем от противного. Предположим, что нетривиальный цикл имеется. Если он не состоит целиком из ребер подграфов вида (6), то в нем есть ребро из $\mathcal{T}_Q$. Так как в $\mathcal{T}_Q$ нет нетривиальных циклов, наш цикл должен содержать ребра вида (6). Поэтому в нашем цикле имеется нетривиальный циклический подпуть ρ , начало и конец которого – некоторые вершины из $\mathcal{K}_w(\mathcal{Q})$, и состоящий только из ребер, принадлежащих подграфам вида (6). Простое, но важное замечание состоит в том, что начало и конец любого ребра, принадлежащего произвольному сдвигу подкомплекса $\mathcal{K}(\hat{\mathcal{P}}_x)$ при любом $x \in X$, имеют одинаковые проекции. В самом деле, применение соотношений вида $x = a_x w_x a_x$ не меняет проекции, а применение соотношений из $\mathcal{R}_x$ происходит в пределах одного из слогов вида $a_x u a_x$, где u – слово над Σ_x , что также не меняет проекции (в последнем случае хорошо видна роль вспомогательного алфавита A). Таким образом, проекции всех вершин циклического подпути ρ совпадают, т.е. ρ является нетривиальным циклом в $\mathcal{T}$, состоящим только из ребер подграфов вида (6). Итак, в любом случае имеется нетривиальный цикл ρ с указанным свойством. Без ограничения общности можно считать, что ρ не содержит циклических вхождений идущих подряд взаимно обратных ребер.

Пусть $v = v_1 \dots v_\mu$ – разбиение на слоги вершины v , являющейся началом и концом пути ρ . Каждое ребро пути ρ относится ровно к одному из слогов, как мы видели выше. Пусть j – номер последнего из слогов, к которому относится хотя бы одно из ребер данного пути. Положим $x_i = \pi(v_i)$ ($1 \leq i \leq \mu$). Из вида подграфов (6) следует, что $v_i = x_i \in X$ при всех $j < i \leq \mu$. Так как j -й слог участвует в применении к нему соотношений из $\hat{\mathcal{R}}_j$, путь ρ или некоторый его циклический сдвиг имеет непустой максимальный подпуть ρ' , состоящий только из ребер, относящихся к j -му слогу. Пусть v' и v'' – начало и конец пути ρ' соответственно. Мы утверждаем, что $v' = v''$. Допустим, что это не так. Ясно, что v' и v'' отличаются только j -м слогом, и можно утверждать, что j -й слог не равен x_j либо у v' , либо у v'' . Считаем, что j -й слог не равен x_j у вершины v'' . По предположению в ρ' меньше ребер, чем в ρ (иначе $v' = v''$ автоматически). Поэтому имеется ребро e такое, что $\rho'e$ – подпуть некоторого циклического сдвига пути ρ . Ввиду максимальной подпути ρ' ребро e не относится к j -му слогу. Оно заведомо не относится к слогу с номером, превосходящим j , ввиду максимальной выбора j . Не может оно относиться и к слогу с номером, меньшим j , так как оно принадлежит подграфу вида (6), а j -й слог начала ребра e не принадлежит X . Получено противоречие. Итак, ρ' есть нетривиальный цикл, принадлежащий сдвигу дерева $\mathcal{T}_{x_j}$. Но это невозможно, так как сдвиг дерева сам является деревом. Это противоречие доказывает, что в $\mathcal{T}$ нет нетривиальных циклов. С учетом сказанного выше $\mathcal{T}$ есть максимальное поддереву в $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$.

Теперь нам нужно вычислить фундаментальную группу $G = \pi_1(\mathcal{K}_w(\mathcal{P}))$, используя дерево $\mathcal{T}$. Все ребра комплекса $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$ мы теперь считаем элементами

группы G , причем ребра из $\mathcal{T}$ равны единице в G . Пути в этом комплексе, рассматриваемые как произведения ребер, также представляют элементы группы G . Чтобы понять, как устроены остальные соотношения в G , мы должны описать 2-клетки комплекса $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$. Для начала отметим одно важное свойство. Напомним, что M есть свободный моноид над алфавитом копредставления $\mathcal{P}$, действующий слева и справа на комплексе $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Пусть s, t, u, v – элементы из M , каждый из которых является произведением слогов, причем s равно t над $\mathcal{P}$ и usv равно w над $\mathcal{P}$. Возьмем произвольный путь p в $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, соединяющий вершины s и t . Ясно, что пути $u * p * v$ и $\pi(u) * p * \pi(v)$ лежат в $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$. Мы утверждаем, что справедливо равенство

$$u * p * v = \pi(u) * p * \pi(v) \quad (7)$$

в группе G , которое мы и будем доказывать. В его справедливости можно убедиться, рассматривая соответствующие 2-клетки и выписывая равенства единице контуров этих 2-клеток в группе G . Однако нам представляется, что проверка равенства (7) может быть осуществлена проще, с учетом теоремы Килибарды. Именно, для того чтобы убедиться в справедливости равенства (7), достаточно воспользоваться изоморфизмом группы G и группы диаграмм над $\mathcal{P}$ с базой $\pi(usv)$. Таким образом, мы найдем диаграммы над $\mathcal{P}$, представляющие элементы группы G из левой и правой части равенства (7), а затем убедимся, что они равны.

Пусть $x = x_1 \dots x_m$ – произвольное слово из M , представленное в виде произведения слогов. Для каждого i от 1 до m через q_i обозначим путь из $\pi(x_i)$ в x_i по дереву $\mathcal{T}_{\pi(x_i)}$. Тогда

$$p_x = (1 * q_1 * \pi(x_2 \dots x_m))(x_1 * q_2 * \pi(x_3 \dots x_m)) \dots (x_1 \dots x_{m-1} * q_m * 1)$$

есть путь из $\pi(x)$ в x , и пусть Δ_x – соответствующая ему диаграмма. Мы рассмотрим такие пути и диаграммы для всех $x \in \{s, t, u, v\}$. Пусть также q – путь из $\pi(usv)$ в $\pi(utv)$ по дереву $\mathcal{T}_Q$, а Δ, Ψ – диаграммы, сопоставляемые путям p, q соответственно. Чтобы найти сферическую диаграмму с базой $\pi(usv)$, сопоставляемую пути $u * p * v$ при изоморфизме группы диаграмм и группы G , нужно перемножить три диаграммы: диаграмму Δ_1 , соответствующую пути по дереву $\mathcal{T}$ из $\pi(usv)$ в usv , диаграмму $\Delta_2 = \varepsilon(u) + \Delta + \varepsilon(v)$ (которая соответствует пути $u * p * v$) и диаграмму Δ_3 , соответствующую пути по дереву $\mathcal{T}$ из utv в $\pi(usv)$. Итак, рассмотрим путь $(1 * p_u * \pi(sv))(u * p_s \pi(v))(us * p_v * 1)$. Из описания подграфов (6) следует, что этот путь лежит в $\mathcal{T}$. Ему соответствует диаграмма

$$\Delta_1 = (\Delta_u + \varepsilon(\pi(sv)))(\varepsilon(u) + \Delta_s + \varepsilon(\pi(v)))(\varepsilon(us) + \Delta_v).$$

Далее, путь $(ut * p_v^{-1} * 1)(u * p_t^{-1} * \pi(v))(1 * p_u^{-1} * \pi(tv))$ лежит в $\mathcal{T}$. Домножая его справа на путь q^{-1} , получим путь в $\mathcal{T}$ из utv в $\pi(usv)$, которому соответствует диаграмма

$$\Delta_3 = (\varepsilon(ut) + \Delta_v^{-1})(\varepsilon(u) + \Delta_t^{-1} + \varepsilon(\pi(v)))(\Delta_u^{-1} + \varepsilon(\pi(tv)))\Psi^{-1}.$$

Рис. 7

Перемножим диаграммы Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 . Легко проверить, что в полученном произведении поддиаграмма Δ_u сократится с поддиаграммой Δ_u^{-1} , а Δ_v — с Δ_v^{-1} (см. рис. 7).

После сокращения Δ_u с Δ_u^{-1} и Δ_v с Δ_v^{-1} получится диаграмма, являющаяся произведением

$$(\varepsilon(\pi(u)) + \Delta_s + \varepsilon(\pi(v))) (\varepsilon(\pi(u)) + \Delta + \varepsilon(\pi(v))) (\varepsilon(\pi(u)) + \Delta_t^{-1} + \varepsilon(\pi(v))) \Psi^{-1}. \quad (8)$$

Проводя рассуждения предыдущего абзаца для пути $\pi(u) * p * \pi(v)$, легко убедиться, что при изоморфизме группы G и группы диаграмм с базой $\pi(usv)$ над $\mathcal{P}$ он переходит именно в диаграмму (8). Этим доказано равенство (7).

Рассмотрим произвольное ребро $(u, s \rightarrow t, v)$ комплекса $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$. Пусть сначала $(s = t) \in \mathcal{S}$. Тогда слова u, v являются произведениями слогов, и имеет место равенство $(u, s \rightarrow t, v) = (\pi(u), s \rightarrow t, \pi(v))$ в G . Правую часть данного равенства можно рассматривать как элемент группы $\pi_1(\mathcal{K}_w(\mathcal{Q}))$, выбирая $\mathcal{T}_Q$ в качестве максимального поддерева в $\mathcal{K}_w(\mathcal{Q})$. Пусть теперь $(s = t) \notin \mathcal{S}$. В этом случае существуют элемент $x \in X$ и слова u_1, v_1, u_2, v_2 такие, что $u = u_1 u_2$, $v = v_2 v_1$, где u_1 (v_1) — максимальное начало (максимальный конец) слова u (v), являющееся произведением слогов; при этом $u_2 s v_2$ равно x над $\mathcal{P}$. Тогда в силу (7) имеет место равенство $e = (u_1 u_2, s \rightarrow t, v_2 v_1) = \pi(u_1) * (u_2, s \rightarrow t, v_2) * \pi(v_1)$. Для каждого $x \in X$ рассмотрим фундаментальную группу $\pi_1(\mathcal{K}(\hat{\mathcal{P}}_x), x) \cong G_x$, которая вычисляется с помощью выделения максимального поддерева $\mathcal{T}_x$ в компоненте комплекса Сквайера для $\mathcal{P}_x$, содержащей x . Ребра этой компоненты будут, таким образом, элементами группы, изоморфной G_x , а потому ребро e будет принадлежать изоморфной копии этой группы, которая порождена ребрами, получаемыми при помощи сдвигов. Именно, для любых $U, V \in X^*$, $x \in X$ рассмотрим группу, обозначаемую $U * G_x * V$, которая порождена ребрами вида $U * f * V$, где f пробегает ребра, порождающие группу $\pi_1(\mathcal{K}(\hat{\mathcal{P}}_x), x) \cong G_x$. В этом смысле ребро e

принадлежит группе $\pi(u_1) * G_x * \pi(v_1)$. Рассуждения данного абзаца можно подытожить так: группа G порождена подгруппой $\pi_1(\mathcal{K}(\mathcal{Q}), w) \cong \mathcal{D}(\mathcal{Q}, w)$ и группами вида $u * G_x * v$, где $u, v \in X^*$, $x \in X$, причем uxv равно w над $\mathcal{P}$.

Теперь проанализируем все 2-клетки в $\mathcal{K}_w$ и посмотрим, к каким соотношениям между описанными выше порождающими группы G они приводят. В соответствии с описанием 2-клеток комплекса Сквайера, данным в §1, пусть 2-клетка задается пятеркой $(u, \ell_1 \rightarrow r_1, z, \ell_2 \rightarrow r_2, v)$, где $(\ell_1, r_1), (\ell_2, r_2)$ принадлежат $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{W}$. Заметим, что слово $u\ell_1 z\ell_2 v$ равно w по модулю $\mathcal{P}$. Рассмотрим несколько случаев в зависимости от того, какие определяющие соотношения задействованы. Соотношение между ребрами, получающееся из данной 2-клетки, имеет вид

$$(u, \ell_1 \rightarrow r_1, z\ell_2 v)(ur_1 z, \ell_2 \rightarrow r_2, v) = (u\ell_1 z, \ell_2 \rightarrow r_2, v)(u, \ell_1 \rightarrow r_1, zr_2 v). \quad (9)$$

а) Пусть $(\ell_1, r_1), (\ell_2, r_2)$ оба принадлежат $\mathcal{S}$. Тогда каждое из слов u, v, z есть произведение слогов. Пользуясь равенством (7), можно в (9) заменить слова u, v, z на их проекции (мы учитываем, что каждое из слов ℓ_j, r_j ($j = 1, 2$) совпадает со своей проекцией). Таким образом, можно считать, что в (9) слова u, v, z принадлежат X^* . Тогда (9) является определяющим соотношением группы $\pi_1(\mathcal{K}(\mathcal{Q}), w) \cong \mathcal{D}(\mathcal{Q}, w)$, вычисляемой при помощи максимального поддерева $\mathcal{T}_Q$.

б) Пусть ни одно из соотношений $(\ell_1, r_1), (\ell_2, r_2)$ не принадлежит $\mathcal{S}$, и допустим, что эти соотношения применяются по отношению к разным слогам слова $u\ell_1 z\ell_2 v$. Это означает, что существуют буквы $x, y \in X$ и разложения вида $u = u_1 u_2$, $z = z' z_0 z''$, $v = v_2 v_1$, где u_1 — максимальное начало слова u , являющееся произведением слогов, v_1 — максимальный конец слова v , являющийся произведением слогов, а z_0 — максимальное подслово слова z , являющееся произведением слогов (легко понять, что оно находится единственным образом). При этом x равно $u_2 \ell_1 z'$, а y равно $z'' \ell_2 v_2$ (равенства по модулю $\hat{\mathcal{P}}_x$ и $\hat{\mathcal{P}}_y$ соответственно). Подставим разложения слов u, v, z в равенство (9) с учетом того, что $\pi(u_2 \ell_1 z') = \pi(u_2 r_1 z') = x$, $\pi(z'' \ell_2 v_2) = \pi(z'' r_2 v_2) = y$. Мы получим, что элементы $\pi(u_1) * (u_2, \ell_1 \rightarrow r_1, z') * \pi(z_0) y \pi(v_1)$ и $\pi(u_1) x \pi(z_0) * (z'', \ell_2 \rightarrow r_2, v_2) * \pi(v_1)$ коммутируют. Первый из этих элементов принадлежит группе $\pi(u_1) * G_x * \pi(z_0) y \pi(v_1)$, а второй — группе $\pi(u_1) x \pi(z_0) * G_y * \pi(v_1)$. Пусть U, V, Z — любые слова над X , а $x, y \in X$ — произвольные буквы такие, что слово $UxZyV$ равно w по модулю $\mathcal{P}$. Мы можем сделать вывод, что любой элемент из $U * G_x * ZyV$ коммутирует с любым элементом группы $UxZ * G_y * V$, так как для любых ребер e и f , принадлежащих множествам порождающих групп G_x и G_y соответственно, можно так подобрать 2-клетку описанного выше вида, что задаваемое с ее помощью определяющее соотношение будет соотношением коммутативности элементов $U * e * ZyV$ и $UxZ * f * V$. Таким образом, мы приходим к соотношениям вида $[U * G_x * ZyV, UxZ * G_y * V] = 1$, где $UxZyV$ равно w по модулю $\mathcal{P}$, $U, V, Z \in X^*$, $x, y \in X$.

в) Пусть вновь ни одно из соотношений $(\ell_1, r_1), (\ell_2, r_2)$ не принадлежит $\mathcal{S}$, но теперь допустим, что соотношения $(\ell_1 = r_1)$ и $(\ell_2 = r_2)$ применяются к одному и тому же слогу слова $u\ell_1 z\ell_2 v$. Это означает, что существуют буква $x \in X$ и разложения вида $u = u_1 u_2$, $v = v_2 v_1$, где u_1 — максимальное начало слова u , являющееся произведением слогов, v_1 — максимальный конец слова v , являющийся произведением слогов. При этом x равно $u_2 \ell_1 z\ell_2 v_2$ по модулю $\hat{\mathcal{P}}_x$. Рассмотрим 2-клетку комплекса Сквайера для копредставления $\hat{\mathcal{P}}_x$, задаваемую пятеркой

$(u_2, \ell_1 \rightarrow r_1, z, \ell_2 \rightarrow r_2, v_2)$. Все клетки такого вида приводят к определяющим соотношениям группы, изоморфной G_x . Действуя на данную 2-клетку элементом $\pi(u_1)$ слева и элементом $\pi(v_1)$ справа, мы получаем 2-клетку комплекса $\mathcal{K}_w(\mathcal{P})$, на контуре которой написано соотношение, эквивалентное (9), если учесть равенство (7). Таким образом, мы получаем соотношения всех групп вида $U * G_x * V$, где UxV равно w по модулю $\mathcal{P}$, $U, V \in X^*$, $x \in X$.

г) Пусть одно из соотношений (ℓ_1, r_1) , (ℓ_2, r_2) принадлежит $\mathcal{S}$, а другое не принадлежит. Пусть $(\ell_1, r_1) \in \mathcal{S}$. Тогда имеем разложения вида $z = z_0 z''$, $v = v_2 v_1$, где z_0, v_1 — произведения слогов, выбранные максимальными по отношению к этому свойству, как и выше. При этом $z'' \ell_2 v_2$ равно x по модулю $\widehat{\mathcal{P}}_x$ для некоторой буквы $x \in X$. Пусть $f = (z'', \ell_2 \rightarrow r_2, v_2)$. Подставляя разложения слов v , z в (9), с учетом равенств $\pi(z'' \ell_2 v_2) = \pi(z'' r_2 v_2) = x$ и применяя (7), мы приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} & (\pi(u), \ell_1 \rightarrow r_1, \pi(z_0) x \pi(v_1)) \cdot (\pi(u) r_1 \pi(z_0) * f * \pi(v_1)) \\ &= (\pi(u) \ell_1 \pi(z_0) * f * \pi(v_1)) \cdot (\pi(u), \ell_1 \rightarrow r_1, \pi(z_0) x \pi(v_1)). \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $x \in X$ и для любых слов U, Z, V над X таких, что $(\ell_1, r_1) \in \mathcal{S}$ и $U \ell_1 Z x V$ равно w по модулю $\mathcal{P}$, получаем соотношения

$$U r_1 Z * f * V = (U \ell_1 Z * f * V)^e, \quad (10)$$

где $e = (U, \ell_1 \rightarrow r_1, Z x V)$, а f пробегает множество порождающих группы $\pi_1(\widehat{\mathcal{P}}_x, x) \cong G_x$.

Аналогично если $(\ell_2, r_2) \in \mathcal{S}$, то приходим к соотношениям

$$U * f * Z r_2 V = (U * f * Z \ell_2 V)^e, \quad (11)$$

где U, Z, V — слова над X , $x \in X$, $e = (U x Z, \ell_2 \rightarrow r_2, V)$ и f пробегает множество порождающих группы $\pi_1(\widehat{\mathcal{P}}_x, x) \cong G_x$.

Чтобы вычислить диаграммное произведение, зададим подходящую структуру графа групп на 1-остове комплекса Сквайера $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$. Наше диаграммное произведение есть фундаментальная группа соответствующего 2-комплекса групп. Мы применим описанную выше процедуру вычисления фундаментальной группы 2-комплекса групп и будем сравнивать получающееся при этом задание с заданием группы G . Пусть U, V — слова над X , $x \in X$. Через $H(U \cdot x \cdot V)$ обозначим группу $U * G_x * V$, изоморфную G_x . Далее, для любого слова $u = u_1 \dots u_m$, где $u_i \in X$ ($1 \leq i \leq m$), через H_u обозначим прямое произведение групп вида

$$H(u_1 \dots u_{i-1} \cdot u_i \cdot u_{i+1} \dots u_m)$$

по всем i от 1 до m . Такие группы сопоставлены вершинам комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Возьмем теперь ребро $e = (u, s \rightarrow t, v)$, где $u, v \in X^*$, $(s = t) \in \mathcal{S}$. Ему сопоставляется группа $H_e = H_u \times H_v$. Вложения ι_e, τ_e естественным образом вкладывают $H_e = H_u \times H_v$ в группы $H_{usv} \cong H_u \times H_s \times H_v$ и $H_{utv} \cong H_u \times H_t \times H_v$ соответственно (при этом множитель H_u отображается на H_u , а H_v — на H_v). Ясно, что вместо задания реберных групп вида G_e можно указать для каждого ребра e

изоморфизм некоторой подгруппы в $H_{\iota(e)}$ на некоторую подгруппу в $H_{\tau(e)}$. В нашем случае этот изоморфизм выглядит весьма просто: он отображает подгруппу $H_u \times \{1\} \times H_v$ в H_{usv} на подгруппу $H_u \times \{1\} \times H_v$ в H_{utv} . В этом случае будем говорить об изоморфизме, индуцированном ребром e .

Группы вида $H(U \cdot x \cdot V)$ зададим как группы, порожденные ребрами $U * f * V$, где f пробегает множество ребер связной компоненты комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{P}_x)$, содержащей вершину x . При этом ребра удовлетворяют соотношениям $U * f * V = 1$, если f принадлежит дереву $\mathcal{T}_x$, а также соотношениям $U * r * V = 1$, где r — определяющий путь 2-клетки рассматриваемого комплекса. Такие соотношения для группы G получены нами в п. в). Задавая прямые произведения групп вида $H(U \cdot x \cdot V)$, мы добавляем соотношения коммутативности: любой элемент группы $H(U \cdot x \cdot ZyV)$ коммутирует с любым элементом группы $H(UxZ \cdot y \cdot V)$. Для группы G такие соотношения получены в п. б).

Пусть имеется ребро $e = (u, s \rightarrow t, v)$, принадлежащее комплексу $\mathcal{K}_w$. Пусть $x, y \in X$, $u = u_1xu_2$, $v = v_1yv_2$. При изоморфизме, индуцированном ребром e , сомножитель $H(usv_1 \cdot y \cdot v_2)$ переходит в сомножитель $H(utv_1 \cdot y \cdot v_2)$, а сомножитель $H(u_1 \cdot x \cdot u_2yv)$ — в $H(u_1 \cdot x \cdot u_2tv)$, поэтому при сопряжении ребром e в соответствии с (5) возникают соотношения

$$(usv_1 * f * v_2)^e = (utv_1 * f * v_2), \quad (12)$$

$$(u_1 * f * u_2sv)^e = (u_1 * f * u_2tv), \quad (13)$$

где f пробегает множество ребер, порождающих соответствующую группу в каждом из случаев. Эти соотношения совпадают с соотношениями (10) и (11) группы G из п. г). Наконец, мы задаем группу $\pi_1(\mathcal{K}(\mathcal{Q}), w)$ как группу, порожденную ребрами комплекса $\mathcal{K}_w(\mathcal{Q})$: приравнявая к единице ребра, принадлежащие дереву $\mathcal{T}_Q$, и добавляя соотношения, равные определяющим путям 2-клеток этого комплекса. Такие соотношения для группы G описаны в п. а). Таким образом, факторгруппа свободного произведения группы $\pi_1(\mathcal{K}(\mathcal{Q}), w)$ и групп вида H_u для всех вершин u из $\mathcal{K}_w(\mathcal{Q})$ по нормальному замыканию соотношений (12) и (13) задается теми же порождающими и соотношениями, что и G . Это значит, что диаграммное произведение $\mathcal{D}(G_X; \mathcal{S}, w)$ семейства групп $G_X = \{G_x : x \in X\}$ относительно копредставления $\mathcal{Q} = \langle X \mid \mathcal{S} \rangle$ с базой w изоморфно группе $G = \pi_1(\mathcal{K}(\mathcal{P}), w)$, т.е. группе диаграмм $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение теоремы 4. Первые три из них касаются уже известных конструкций. Мы приводим эти примеры для демонстрации того, что все возникавшие ранее теоретико-групповые операции над группами диаграмм (см. [3; раздел 8]) укладываются в нашу схему. Далее мы покажем, что класс групп диаграмм замкнут относительно новых операций: счетных прямых степеней, прямых сплетений с группой $\mathbb{Z}$, а также относительно некоторой специальной конструкции, которая нам понадобится в § 5.

ПРИМЕР 5. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечный алфавит. Рассмотрим копредставление $\mathcal{Q} = \langle X \mid \emptyset \rangle$ с пустым множеством соотношений; положим $w = x_1 \dots x_n$. Каждой букве x_i сопоставим произвольную группу G_i ($1 \leq i \leq n$). Очевидно, что связная компонента комплекса Сквайера копредставления $\mathcal{Q}$, содержащая

w , состоит из одной вершины w . В соответствующем графе групп имеем группу $G_w = G_1 \times \cdots \times G_n$. Она, очевидно, будет фундаментальной группой 2-комплекса групп из определения диаграммного произведения. Таким образом, диаграммное произведение $\mathcal{D}(G_X; \mathcal{S}, w)$ семейства групп $G_X = \{G_i : 1 \leq i \leq n\}$ относительно копредставления $\mathcal{Q}$ с базой w есть прямое произведение $G_1 \times \cdots \times G_n$.

ПРИМЕР 6. Пусть I – некоторое непустое множество, и пусть G_i ($i \in I$) – произвольное семейство групп. Рассмотрим алфавит $X = \{x\} \cup \{x_i : i \in I\}$ и положим $\mathcal{Q} = \langle X \mid \mathcal{S} \rangle$, где $\mathcal{S}$ состоит из соотношений вида $x = x_i$ для всех $i \in I$. Пусть G_X – семейство групп, сопоставляющее тривиальную группу букве x и группу G_i букве x_i ($i \in I$). Связная компонента комплекса Сквайера $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$, содержащая x , является деревом, в котором вершина x соединена ребрами со всеми вершинами вида x_i ($i \in I$). Зададим на 1-остове рассматриваемой связной компоненты структуру графа групп в соответствии с определением 3. Легко видеть, что все реберные группы тривиальны. Отсюда, используя описание (4), легко видеть, что фундаментальная группа полученного 2-комплекса групп будет свободным произведением групп G_i ($i \in I$). Итак, диаграммное произведение $\mathcal{D}(G_X; \mathcal{S}, x)$ семейства групп $G_X = \{G_i : i \in I\}$ относительно копредставления $\mathcal{Q}$ с базой x есть свободное произведение $* G_i$ по всем $i \in I$.

ПРИМЕР 7. Пусть G, H – произвольные группы. Рассмотрим копредставление $\mathcal{Q} = \langle X \mid \mathcal{S} \rangle$, где $X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{S} = \{x = xy, z = yz\}$. Положим $G_x = G$, $G_y = 1$, $G_z = H$ и рассмотрим диаграммное произведение $\mathcal{D}(G_X; \mathcal{S}, xz)$ семейства групп $G_X = \{G_x, G_y, G_z\}$ относительно копредставления $\mathcal{Q}$ с базой xz . Мы получим, что оно изоморфно группе $G \bullet H$, где $\bullet$ есть операция, введенная в [3]. В этом можно убедиться, сравнивая теорему 4 с леммой 8.5 из [3]. Группа $G \bullet H$ может быть описана следующим образом. Рассмотрим счетное число копий групп G_i , изоморфных G , и счетное число копий групп H_i , изоморфных H ($i \in \mathbb{Z}$). На группе

$$(* G_i) \times (* H_i) \quad (14)$$

(свободные произведения взяты по всем $i \in \mathbb{Z}$) действует автоморфизмами бесконечная циклическая группа $\langle z \rangle$, переводя G_i в G_{i+1} , а H_i в H_{i+1} для всех целых i . Группа $G \bullet H$ есть полупрямое произведение группы (14) на группу $\langle z \rangle$.

ПРИМЕР 8. Пусть G – произвольная группа. Рассмотрим копредставление $\mathcal{Q} = \langle X \mid \mathcal{S} \rangle$, где $X = \{x, y\}$, $\mathcal{S} = \{x = xy\}$. Положим $G_x = 1$, $G_y = G$ и рассмотрим диаграммное произведение $\mathcal{D}(G_X; \mathcal{S}, x)$ семейства групп $G_X = \{G_x, G_y\}$ относительно копредставления $\mathcal{Q}$ с базой x . Покажем, что оно изоморфно счетной прямой степени группы G .

Связная компонента $\mathcal{K}_x$ комплекса Сквайера копредставления $\mathcal{Q}$, содержащая x , представлена на рис. 8.

Рис. 8

Вершинами здесь служат все слова вида xy^i ($i \geq 0$), положительные ребра имеют вид $e_i = (1, x \rightarrow xy, y^i)$ ($i \geq 0$) и максимальное поддерево $\mathcal{T}$ включает все эти ребра. Данный комплекс не имеет 2-клеток. Очевидно, что его фундаментальная группа тривиальна. Используя соглашение о том, что (при фиксированном дереве) ребра рассматриваются как элементы фундаментальной группы, имеем равенства $e_i = 1$ для всех $i \geq 0$.

Рассмотрим структуру графа групп на 1-остове комплекса $\mathcal{K}_x$ в соответствии с определением диаграммного произведения. Мы получим, что вершине $v = xy^n$ ($n \geq 0$) сопоставлена группа $H_v = G_{n1} \times \cdots \times G_{nn}$, где G_{ni} ($1 \leq i \leq n$) — группа, изоморфная G . Рассмотрим теперь произвольное положительное ребро $e = e_n = (1, x \rightarrow xy, y^n)$ ($n \geq 0$). Группа G_e изоморфна G^n , n -ой прямой степени группы G . Вложение ι_e изоморфно отображает G^n на $G_{n1} \times \cdots \times G_{nn}$, а вложение τ_e изоморфно отображает G^n на последние n сомножителей прямого произведения $G_{n+1,1} \times G_{n+1,2} \times \cdots \times G_{n+1,n+1}$. Соотношения из описания (5) с учетом равенства $e = 1$ позволяют отождествить соответственные элементы групп G_{n1} и $G_{n+1,2}$, $\dots$, G_{nn} и $G_{n+1,n+1}$. Таким образом, можно ввести обозначения $G_0 = G_{11} = G_{22} = \cdots$, $G_1 = G_{21} = G_{32} = \cdots$, $\dots$, $G_n = G_{n+1,1} = G_{n+2,2} = \cdots$. Каждая из этих групп изоморфна G , и вместе они порождают счетную прямую степень группы G , которая и будет рассматриваемым диаграммным произведением.

С учетом теоремы 4 мы пришли к следующему результату.

ТЕОРЕМА 9. *Класс групп диаграмм замкнут относительно счетных прямых степеней.*

ПРИМЕР 10. Пусть G — произвольная группа. Рассмотрим копредставление $\mathcal{Q} = \langle X | \mathcal{S} \rangle$, где $X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{S} = \{x = xy, z = yz\}$. Положим $G_x = 1$, $G_y = G$, $G_z = 1$ и рассмотрим диаграммное произведение $\mathcal{D}(G_X; \mathcal{S}, xz)$ семейства групп $G_X = \{G_x, G_y, G_z\}$ относительно копредставления $\mathcal{Q}$ с базой xz . Покажем, что оно изоморфно прямому сплетению $G \text{ wr } \mathbb{Z}$.

Связная компонента $\mathcal{K}_{xz}$ комплекса Сквайера копредставления $\mathcal{Q}$, содержащая xz , представлена на рис. 9.

Рис. 9

Вершинами здесь служат все слова вида $xy^i z$ ($i \geq 0$), положительные ребра имеют вид $e_i = (1, x \rightarrow xy, y^i z)$, $f_i = (xy^i z \rightarrow yz, 1)$ ($i \geq 0$), а максимальное поддерево $\mathcal{T}$ образовано ребрами вида e_i . Все 2-клетки описываются так: пусть $i \geq 0$; рассмотрим вершину $xy^i z$. Ребра e_i, f_i , исходящие из нее, отвечают независимым преобразованиям слов, и данная пара ребер определяет два гомотопных пути $e_i f_{i+1}$ и $f_i e_{i+1}$, которые и задают 2-клетку.

Ввиду соглашения о том, что ребра рассматриваются как элементы фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{K}, xz)$, имеем $e_i = 1$ ($i \geq 0$). Равенства $e_i f_{i+1} = f_i e_{i+1}$,

выполненные в этой группе, дают $f_i = f_{i+1}$ для всех $i \geq 0$. Положим $f = f_0 = f_1 = f_2 = \dots$.

Рассмотрим структуру графа групп на 1-остове комплекса $\mathcal{K}_{xz}$ в соответствии с определением диаграммного произведения. Мы получим, что вершине $v = xy^n z$ ($n \geq 0$) сопоставлена группа $H_v = G_{n1} \times \dots \times G_{nn}$, где G_{ni} ($1 \leq i \leq n$) – группа, изоморфная G . Рассмотрим соотношения вида (5), соответствующие положительным ребрам. Пусть $e = e_n = (1, x \rightarrow xy, y^n)$, $n \geq 0$. Как и в предыдущем примере, с учетом равенства $e = 1$ получаем отождествление соответственных элементов групп G_{ni} и $G_{n+1,i+1}$ ($1 \leq i \leq n$) и вводим обозначения $G_0 = G_{11} = G_{22} = \dots$, $G_1 = G_{21} = G_{32} = \dots$, $\dots$, $G_n = G_{n+1,1} = G_{n+2,2} = \dots$, $\dots$. Как и выше, эти группы порождают счетную прямую степень группы G . Теперь положим $e = f_n = (xy^n, z \rightarrow yz, 1)$ ($n \geq 0$), и рассмотрим соотношения вида (5), соответствующие данным ребрам. Группа G_e по-прежнему есть n -я степень группы G . Вложение ι_e изоморфно отображает G^n на $G_{n1} \times \dots \times G_{nn}$, а вложение τ_e в данном случае изоморфно отображает G^n на первые n сомножителей прямого произведения $G_{n+1,1} \times G_{n+1,2} \times \dots \times G_{n+1,n+1}$. Поэтому соотношения для данного ребра, равного f , показывают, что сопряжение при помощи f переводит G_{ni} в $G_{n+1,i}$ ($1 \leq i \leq n$). С учетом введенных нами обозначений получаем, что сопряжение при помощи f переводит группу G_k в группу G_{k+1} для всех $k \geq 0$. Рассматриваемое диаграммное произведение порождается группами $G_0, G_1, \dots$ и элементом f . Отсюда можно сделать вывод, что мы имеем прямое сплетение $G \text{ wr } \mathbb{Z}$.

С учетом теоремы 4 нами получен еще один результат.

ТЕОРЕМА 11. *Класс групп диаграмм замкнут относительно прямых сплетений с бесконечной циклической группой $\mathbb{Z}$, т.е. если G – группа диаграмм, то и $G \text{ wr } \mathbb{Z}$ – группа диаграмм.*

Заметим, что если мы возьмем группу F , заданную как группа диаграмм над $\langle u \mid uu = u \rangle$ с базой u , и рассмотрим копредставление $\langle x, u, z \mid xu = x, uz = z, uu = u \rangle$, то группа диаграмм над ним с базой xz будет изоморфна не $F \text{ wr } \mathbb{Z}$, а F , что можно проверить непосредственно. Для того чтобы получить $F \text{ wr } \mathbb{Z}$, нужно сначала реализовать F как группу диаграмм в соответствии с теоремой 4: в качестве таковой нужно взять группу диаграмм с базой y над $\langle u, a, y \mid y = aua, uu = u \rangle$. Тогда группа диаграмм с базой xz над $\mathcal{P} = \langle x, y, z, a, u \mid xy = x, yz = z, y = aua, uu = u \rangle$ будет изоморфна $F \text{ wr } \mathbb{Z}$. Читатель без труда может выписать соответствующие копредставления для других случаев, в частности, для групп вида $(\dots((\mathbb{Z} \text{ wr } \mathbb{Z}) \text{ wr } \mathbb{Z}) \dots) \text{ wr } \mathbb{Z}$.

Сделаем еще одно замечание. В [3] был построен пример конечно порожденной, но не конечно определенной группы диаграмм (теорема 10.5). В качестве таковой была взята группа $\mathbb{Z} \bullet \mathbb{Z}$, имеющая задание с тремя порождающими

$$\mathbb{Z} \bullet \mathbb{Z} = \langle a, b, t \mid [a^{t^n}, b] = 1 \ (n \geq 0) \rangle.$$

Теперь мы можем указать также группу $\mathbb{Z} \text{ wr } \mathbb{Z}$ в качестве конечно порожденной, но не конечно определенной группы диаграмм (отсутствие конечного задания для $\mathbb{Z} \text{ wr } \mathbb{Z}$ легко доказать либо при помощи HNN-расширений, либо с помощью представления групп подстановками). Мы имеем следующее ее задание с двумя порождающими

$$\mathbb{Z} \text{ wr } \mathbb{Z} = \langle a, b \mid [a^{b^n}, a] = 1 \ (n \geq 1) \rangle.$$

В следующем примере мы будем иметь дело с более сложным построением. На первый взгляд оно может показаться несколько искусственным, но мы эффективно используем его далее, в §5. Рассмотрим следующую теоретико-групповую конструкцию. Пусть имеются группы G и H . Мы сопоставим им новую группу, обозначаемую $\mathcal{O}(G, H)$. Рассмотрим счетное семейство групп G_i , изоморфных G , а также счетное семейство групп H_i , изоморфных H ($i \in \mathbb{Z}$). Для любого $i \in \mathbb{Z}$ через g_i (h_i) будем обозначать соответствующий элементу $g \in G$ ($h \in H$) при изоморфизме элемент группы G_i (H_i). Обозначим через G^∞ (H^∞) прямое произведение групп G_i (H_i) по всем $i \in \mathbb{Z}$. Положим

$$\mathcal{O}(G, H) = G^\infty * H^\infty * \langle c \rangle / \mathcal{N}, \quad (15)$$

где $\mathcal{N}$ есть нормальное замыкание множества соотношений двух видов:

$$g_i^t = g_{i+1}, \quad h_i^t = h_{i+1} \text{ для любых } i \in \mathbb{Z}, \quad g \in G, \quad h \in H; \quad (16)$$

$$[g_i, h_j] = 1 \text{ для любых } i, j \in \mathbb{Z}, \quad g \in G, \quad h \in H \text{ таких, что } i \leq j. \quad (17)$$

ПРИМЕР 12. Пусть G, H — произвольные группы. Рассмотрим копредставление $\mathcal{Q} = \langle X \mid \mathcal{S} \rangle$, где $X = \{x, y, \bar{y}, z, p, q, r\}$, $\mathcal{S} = \{x = xyp, z = r\bar{y}z, pyq = q\bar{y}r\}$. Положим $G_y = G$, $G_{\bar{y}} = H$, $G_x = G_z = G_p = G_q = G_r = 1$ и рассмотрим диаграммное произведение $\mathcal{D}(G_X; \mathcal{S}, w)$ семейства групп $G_X = \{G_x, G_y, G_{\bar{y}}, G_z, G_p, G_q, G_r\}$ относительно копредставления $\mathcal{Q}$ с базой $w = xyq\bar{y}z$. Покажем, что оно изоморфно группе $\mathcal{O}(G, H)$.

Связная компонента $\mathcal{K}_w$ комплекса Сквайера копредставления $\mathcal{Q}$, содержащая w , представлена на рис. 10.

Рис. 10

Вершинами являются слова $w_{ij} = x(ypr)^i yq\bar{y}(r\bar{y})^j z$ ($i, j \geq 0$). Положительные ребра имеют вид $e_{ij} = (1, x \rightarrow xyp, (yp)^i yq\bar{y}(r\bar{y})^j z)$, $f_{ij} = (x(ypr)^i yq\bar{y}(r\bar{y})^j, z \rightarrow r\bar{y}z, 1)$ и $g_{ij} = (x(ypr)^i y, pyq \rightarrow q\bar{y}r, \bar{y}(r\bar{y})^j z)$ ($i, j \geq 0$). Максимальному поддереву $\mathcal{T}$ принадлежат ребра e_{ij} для всех $i, j \geq 0$, а также ребра f_{0j} при $j \geq 0$. Таким образом, соглашение о том, что при выборе дерева $\mathcal{T}$ ребра можно рассматривать как элементы фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{K}, w)$, приводит к равенствам $e_{ij} = 1$ ($i, j \geq 0$), $f_{0j} = 1$ ($j \geq 0$).

Опишем все 2-клетки комплекса $\mathcal{K}_w$. Напомним, что в $\mathcal{Q}$ имеются определяющие соотношения трех типов: $x = xyp$, $pyq = q\bar{y}r$, $z = r\bar{y}z$. Если имеются два независимых элементарных преобразования слова вида w_{ij} , то легко видеть, что они относятся к применению различных определяющих соотношений ввиду того, что каждая из букв x, q, z входит в слово вида w_{ij} ровно один раз. Следовательно, мы имеем три ситуации.

1. Применяются соотношения $x = xyp$ и $z = r\bar{y}z$ (см. рис. 11).

Рис. 11

Изображенная на рис. 11 диаграмма соответствует двум путям в комплексе Сквайера: $e_{ij}f_{i+1,j}$ и $f_{ij}e_{i,j+1}$, что приводит к соотношению $e_{ij}f_{i+1,j} = f_{ij}e_{i,j+1}$. Упрощая, имеем $f_{i+1,j} = f_{ij}$ для всех $i, j \geq 0$. Очевидно, что f_{ij} тем самым не зависит от i , что с учетом $f_{0j} = 1$ дает $f_{ij} = 1$ для всех $i, j \geq 0$.

2. Применяются соотношения $x = xyp$ и $pyq = q\bar{y}r$ (см. рис. 12).

Рис. 12

В этом случае мы имеем равенство $e_{i+1,j}g_{i+1,j} = g_{i,j}e_{i,j+1}$, т.е. $g_{i+1,j} = g_{ij}$ для всех $i, j \geq 0$. Это означает, что g_{ij} не зависит от i .

3. Применяются соотношения $pyq = q\bar{y}r$ и $z = r\bar{y}z$ (см. рис. 13).

Рис. 13

Здесь мы приходим к равенству $g_{i,j}f_{i,j+1} = f_{i+1,j}g_{i,j+1}$, откуда $g_{ij} = g_{i,j+1}$ при всех $i, j \geq 0$. Следовательно, g_{ij} не зависит ни от i , ни от j . Для удобства положим $c = g_{ij}$ для всех $i, j \geq 0$.

Рассмотрим произвольную вершину $v = w_{ij} = x(yp)^i y q \bar{y} (r\bar{y})^j z$ для некоторых $i, j \geq 0$. В графе групп, соответствующем рассматриваемому диаграммному произведению, вершине w_{ij} соответствует группа, являющаяся прямым произведением $(i+1)$ -й степени группы G и $(j+1)$ -й степени группы H (по числу вхождений букв y и $\bar{y}$ в слово v). Поэтому можно представить группу $G_{w_{ij}}$ в виде

$$K_{ij} = L_{iji} \times \cdots \times L_{ij0} \times H_{ij0} \times \cdots \times H_{ijj},$$

где сомножители прямого произведения вида L_{ijk} изоморфны G , а сомножители вида H_{ijk} изоморфны H . Соотношения вида (5), соответствующие положительному ребру $e = (u, s \rightarrow t, v)$, будем анализировать, рассматривая три случая в зависимости от того, какое из трех определяющих соотношений $(s = t) \in \mathcal{S}$ задействовано.

1. $s = x, t = xyp$. При этом $e = (1, x \rightarrow xyp, v)$, где $v = (yp)^i yq\bar{y}(r\bar{y})^j z$ для некоторых $i, j \geq 0$. Группа G_e изоморфна $G^{i+1} \times H^{j+1}$. При вложении ι_e она изоморфно отображается на K_{ij} . Заметим, что $K_{i+1,j}$ есть прямое произведение $L_{i+1,j,i+1}$ и группы, на которую изоморфно отображается группа K_{ij} при τ_e . С учетом того, что $e = e_{ij} = 1$, соотношение (5) отождествляет некоторые подгруппы. Запишем эти отождествления в виде равенств, имея в виду соответственное отождествление элементов этих групп, переходящих друг в друга при изоморфизмах. Имеем: $L_{ijk} = L_{i+1,j,k}$ при $0 \leq k \leq i$ и $H_{ijk} = H_{i+1,j,k}$ при $0 \leq k \leq j$.

2. $s = z, t = r\bar{y}z$. Теперь $e = (u, z \rightarrow r\bar{y}z, 1)$, где $u = x(yp)^i yq\bar{y}(r\bar{y})^j$ для некоторых $i, j \geq 0$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю и учитывая $e = f_{ij} = 1$, мы приходим к выводу, что соотношение (5) приводит к следующим отождествлениям подгрупп: $L_{ijk} = L_{i,j+1,k}$ при $0 \leq k \leq i$ и $H_{ijk} = H_{i,j+1,k}$ при $0 \leq k \leq j$.

Анализ полученных в первых двух случаях соотношений показывает, что группы L_{ijk}, H_{ijk} зависят только от k . Иными словами, можно ввести группы L_k, H_k ($k \geq 0$) таким образом, что в исследуемом нами диаграммном произведении имеют место равенства $L_{ijk} = L_k$ при всех $i \geq k, j \geq 0$, а также $H_{ijk} = H_k$ при всех $i \geq 0, j \geq k$.

3. $s = pyq, t = q\bar{y}r$. В данном случае $e = (u, pyq \rightarrow q\bar{y}r, v)$, где $u = x(yp)^i y, v = \bar{y}(r\bar{y})^j$ для некоторых $i, j \geq 0$. В фундаментальной группе $\pi_1(\mathcal{X}, w)$ имеет место равенство $e = g_{ij} = c$, как было показано ранее. Группа G_e изоморфна $G^{i+1} \times H^{j+1}$,

$$G_{\iota(e)} = L_{i+1} \times \cdots \times L_0 \times H_0 \times \cdots \times H_j,$$

и при ι_e сомножитель G^{i+1} отображается на прямое произведение $L_{i+1} \times \cdots \times L_1$, а сомножитель H^{j+1} — на произведение $H_0 \times \cdots \times H_j$. Аналогично

$$G_{\tau(e)} = L_i \times \cdots \times L_0 \times H_0 \times \cdots \times H_{j+1},$$

и при τ_e сомножитель G^{i+1} отображается на прямое произведение $L_i \times \cdots \times L_0$, а сомножитель H^{j+1} — на произведение $H_1 \times \cdots \times H_{j+1}$. Следовательно, сопряжение элементом c отображает $L_{i+1}, \dots, L_1$ на $L_i, \dots, L_0$ соответственно; а $H_0, \dots, H_j$ перейдут при этом сопряжении соответственно в $H_1, \dots, H_{j+1}$. Кратко мы можем записать: $L_{i+1}^c = L_i, H_j^c = H_{j+1}$ для любых $i, j \geq 0$.

Таким образом, справедливы равенства $L_i = L_0^{-i}, H_j = H_0^j$ при любых целых неотрицательных i, j . Распространим эти равенства на случай отрицательных i, j , взяв их для этого случая в качестве определений. Заметим, что элементы различных подгрупп вида L_i при $i \geq 0$ попарно коммутируют, а потому аналогичный факт справедлив и для всех целых i . То же касается подгрупп H_j для всех $j \in \mathbb{Z}$. Введем обозначения $G_i = L_{-i}$ ($i \in \mathbb{Z}$). Очевидно, имеют место равенства $G_i^c = G_{i+1}, H_i^c = H_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Это означает, что выполнены соотношения (16). У нас также имеются условия о том, что любой элемент из $L_0, L_1, \dots$

коммутирует с любым элементом из $H_0, H_1, \dots$. В частности, $[L_0, H_{j-i}] = 1$ при любых $j \geq i$. Учитывая, что $G_0 = L_0$ и сопрягая элементом c^i , мы получаем $[G_i, H_j] = 1$ при $i \leq j$, т.е. выполнены соотношения (17). Легко видеть, что эти соотношения равносильны тому, что $[L_i, H_j] = 1$ при любых $i, j \geq 0$: из неравенства $-i \leq j$ соотношения (16) позволяют сделать вывод, что $[G_{-i}, H_j] = 1$, а G_{-i} есть L_i .

Мы показали, что вычисляемое нами диаграммное произведение есть в точности группа, задаваемая соотношениями (16) и (17), т.е. оно изоморфно $\mathcal{O}(G, H)$.

С учетом теоремы 4 имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 13. *Если G, H – группы диаграмм, то $\mathcal{O}(G, H)$ – также группа диаграмм.*

Предыдущий пример подробно показывает, как по данным группам диаграмм G, H вычислить копредставление и базу, для которых $\mathcal{O}(G, H)$ будет группой диаграмм.

§3. Нильпотентные и абелевы подгруппы групп диаграмм

Из предыдущего параграфа мы знаем, что разрешимые подгруппы любой степени могут быть группами диаграмм. В противоположность этому в данном параграфе будет показано, что любая нильпотентная подгруппа любой группы диаграмм является абелевой. Также будет установлено, что все абелевы подгруппы в группах диаграмм являются свободными абелевыми. Это усиливает результат о том, что абелева группа диаграмм будет свободной абелевой. В заключение мы опишем строение конечных множеств попарно коммутирующих диаграмм, обобщая утверждение о строении пары коммутирующих диаграмм.

В доказательствах будет использован ряд понятий, касающихся комбинаторики на диаграммах из [3; раздел 15]. Для удобства читателя мы напомним некоторые определения.

Сферическая диаграмма называется *абсолютно приведенной*, если любая натуральная степень этой диаграммы приведена, т.е. не содержит диполей. Сферическая диаграмма называется *нормальной*, если ее нельзя разложить в сумму двух несферических диаграмм. Нами было доказано [3; лемма 15.14], что для любой сферической диаграммы Δ существует абсолютно приведенная нормальная сферическая диаграмма $\hat{\Delta}$ (вообще говоря, имеющая другую базу, нежели Δ) и некоторая (не обязательно сферическая) диаграмма Ψ такая, что $\Delta = \Psi^{-1} \hat{\Delta} \Psi$.

ТЕОРЕМА 14. *Пусть H – произвольная подгруппа некоторой группы диаграмм $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$. Тогда центр и коммутант группы H имеют тривиальное пересечение, т.е. $Z(H) \cap H' = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ – группа диаграмм, и пусть H – подгруппа в G . Предположим, что $Z(H) \cap H' \neq 1$. Рассмотрим неединичный элемент $g \in Z(H) \cap H'$, и пусть Δ – представляющая его диаграмма. Применяя [3; лемма 15.10с], найдем абсолютно приведенную диаграмму Δ_0 , сопряженную Δ . Пусть при этом $\Delta_0 = \Psi^{-1} \Delta \Psi$, где Ψ есть (w, w_0) -диаграмма. Сопряжение при помощи Ψ является изоморфизмом, переводящим группу G в группу $G_0 = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w_0)$. При

этом подгруппа H переходит в подгруппу H_0 , причем $g_0 \in Z(H_0) \cap H'_0$, и элемент g_0 представлен абсолютно приведенной (w_0, w_0) -диаграммой Δ_0 .

Разложим диаграмму Δ_0 в сумму компонент: $\Delta_0 = A_1 + \dots + A_m$, где A_i – сферическая (w_i, w_i) -диаграмма ($1 \leq i \leq m$). Как и в [3; теорема 15.35], мы делаем вывод, что централизатор элемента g_0 есть прямая сумма централизаторов элементов, представленных диаграммами $A_1, \dots, A_m$. Более точно, если Γ – сферическая (w_i, w_i) -диаграмма, коммутирующая с Δ_0 в группе G_0 , то $\Gamma = B_1 + \dots + B_m$, где B_i – коммутирующая с A_i (w_i, w_i) -диаграмма. По условию любая диаграмма, представляющая элемент из H_0 , коммутирует с Δ_0 , так как g_0 лежит в центре подгруппы H_0 .

Так как Δ_0 представляет неединичный элемент, существует такое i от 1 до m , что диаграмма A_i нетривиальна, а потому является простой абсолютно приведенной диаграммой. Ее централизатор цикличен (см. доказательство теоремы 15.35 в [3]). Возьмем теперь две диаграммы Γ, Ξ , представляющие элементы из H_0 . В силу рассуждений предыдущего абзаца имеют место разложения вида $\Gamma = B_1 + \dots + B_m$, $\Xi = C_1 + \dots + C_m$, где B_i, C_i суть (w_i, w_i) -диаграммы, коммутирующие с A_i . Цикличность централизатора A_i влечет перестановочность элементов B_i и C_i , т.е. $[B_i, C_i] = \varepsilon(w_i)$. Следовательно, $[\Gamma, \Xi] = [B_1, C_1] + \dots + [B_m, C_m] = \Delta' + \varepsilon(w_i) + \Delta''$, где Δ', Δ'' – сферические диаграммы с базами $w_1 \dots w_{i-1}, w_{i+1} \dots w_m$. Ясно, что произведение диаграмм вида $\Delta' + \varepsilon(w_i) + \Delta''$ является диаграммой такого же вида. Поэтому любой элемент из коммутанта группы H_0 имеет вид $\Delta' + \varepsilon(w_i) + \Delta''$. Это противоречит тому, что $\Delta_0 = A_1 + \dots + A_m$, где $A_i \neq \varepsilon(w_i)$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 15. *Любая нильпотентная подгруппа группы диаграмм абелева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ – группа диаграмм, и пусть K – ее нильпотентная подгруппа. Если K неабелева, то в K имеется (неабелева) нильпотентная степени 2 подгруппа H . Это значит, что коммутант группы H лежит в ее центре, т.е. $H' \subseteq Z(H)$. Теорема 14 утверждает, что центр и коммутант группы H имеют тривиальное пересечение, откуда $H' = 1$, т.е. H абелева. Получено противоречие.

Теперь опишем все абелевы подгруппы групп диаграмм. Оказывается, все они являются свободными абелевыми. Насколько нам известно, этот факт является новым даже для абелевых подгрупп группы F . Заметим также, что если бы нашлась абелева подгруппа в группе диаграмм, не являющаяся свободной абелевой, то это сразу опровергало бы гипотезу о подгруппах, поскольку из [3] известно, что факторгруппа по коммутанту любой группы диаграмм – свободная абелева группа.

ТЕОРЕМА 16. *Любая абелева подгруппа произвольной группы диаграмм является свободной абелевой группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ – полугрупповое копредставление, $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ – группа диаграмм, $H \leq G$ – абелева подгруппа в G . Если $H = 1$, то теорема очевидна. Пусть $H \neq 1$. Рассмотрим элемент $h \in H, h \neq 1$. С помощью подходящего сопряжения, переходя к изоморфной группе диаграмм, мы можем

предположить с учетом [3; лемма 15.14], что h представим абсолютно приведенной нормальной диаграммой Δ , разложенной в сумму компонент: $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_m$, где Δ_i — сферическая диаграмма с базой u_i ($1 \leq i \leq m$). Так как H абелева, она содержится в централизаторе элемента h . Поэтому любой элемент g из H разлагается в сумму (u_i, u_i) -диаграмм. Обозначим через $\psi_i(g)$ слагаемое этого разложения с номером i . Легко видеть, что ψ_i есть гомоморфизм группы H в группу диаграмм над $\mathcal{P}$ с базой u_i .

Пусть $1 \leq k \leq m$ — такое число, для которого Δ_k нетривиальна. Централизатор Δ_k циклический [3; теорема 15.35]. Рассмотрим гомоморфизм ψ_k . Во-первых, $\psi_k(h) = \Delta_k \neq \varepsilon(u_i)$. Во-вторых, образ ψ_k содержится в централизаторе Δ_k , т.е. в циклической группе. Мы тем самым доказали, что для любого $h \in H$, $h \neq 1$, существует гомоморфизм $\psi: H \rightarrow \mathbb{Z}$ такой, что $\psi(h) \neq 1$. Это значит, что H аппроксимируется циклическими группами, т.е. вкладывается в декартову степень бесконечной циклической группы. Несложное рассуждение с использованием аксиомы выбора показывает, что декартова степень группы $\mathbb{Z}$ есть свободная абелева группа. Следовательно, H также является свободной абелевой.

В заключение данного параграфа дадим несложное, но полезное обобщение теоремы 15.34 из [3]. Оно нам понадобится в § 6.

ТЕОРЕМА 17. Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ — полугрупповое копредставление, и пусть $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ для некоторого $w \in \Sigma^+$. Предположим, что $A_1, \dots, A_m$ — сферические диаграммы с базой w , попарно коммутирующие в G . Тогда существуют слово $v = v_1 \dots v_n$, сферические (v_j, v_j) -диаграммы Δ_j ($1 \leq j \leq n$), целые числа d_{ij} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) и некоторая (w, v) -диаграмма Γ такие, что

$$\Gamma^{-1} A_i \Gamma = \Delta_1^{d_{i1}} + \dots + \Delta_n^{d_{in}}$$

одновременно для всех $1 \leq i \leq m$. При этом можно дополнительно потребовать, чтобы каждая из диаграмм $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ была либо тривиальной, либо простой абсолютно приведенной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что дополнительное требование вытекает из предыдущего. Если уже найдены разложения диаграмм в сумму из условия теоремы, то достаточно воспользоваться леммой 15.14 из [3], находя такие диаграммы Ψ_j , что диаграммы $\Psi_j \Delta_j \Psi_j^{-1}$ станут абсолютно приведенными нормальными. Каждая такая диаграмма разлагается в сумму компонент, являющихся либо тривиальными, либо простыми абсолютно приведенными. После этого достаточно применить дополнительное сопряжение при помощи диаграммы $\Psi_1 + \dots + \Psi_n$ и каждое из n слагаемых новой суммы заменить на сумму компонент.

Докажем оставшееся утверждение индукцией по m . При $m = 1$, $m = 2$ оно доказано в [3; лемма 15.10с и теорема 15.34]. Поэтому предположим, что $m > 2$, а утверждение будем считать доказанным для значений, меньших m . Рассмотрим диаграмму A_m . Применяя лемму 15.10с, найдем такую (w, u) -диаграмму Ψ , для которой диаграмма $A'_m = \Psi^{-1} A_m \Psi$ будет абсолютно приведенной и нормальной. Она может быть разложена в сумму компонент: $A'_m = B_1 + \dots + B_k$, где B_j является (u_j, u_j) -диаграммой для некоторого u_j ($1 \leq j \leq k$); при этом $u = u_1 \dots u_k$. Каждая из диаграмм B_j ($1 \leq j \leq k$) либо тривиальна, либо проста, и все они абсолютно приведены и нормальны. Положим $A'_i = \Psi^{-1} A_i \Psi$ для всех $1 \leq i \leq m-1$;

ясно, что все диаграммы $A'_1, \dots, A'_m$ попарно коммутируют. Поскольку все диаграммы $A'_1, \dots, A'_{m-1}$ также коммутируют с A'_m , каждую из них можно разложить в сумму (u_j, u_j) -диаграмм ($1 \leq j \leq n$) в силу [3; теорема 15.35]. Имеем: $A'_i = C_{i1} + \dots + C_{in}$, где $1 \leq i \leq m-1$, каждая из диаграмм C_{ij} есть (u_j, u_j) -диаграмма, причем C_{ij} коммутирует с B_j ($1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n$).

Предположим, что r ($1 \leq r \leq k$) – такое число, для которого компонента B_r не тривиальна. Ввиду того, что B_r – простая абсолютно приведенная диаграмма, она имеет циклический централизатор (см. доказательство теоремы 15.35 из [3]). В частности, существует такая сферическая диаграмма Δ_r с базой u_r , что каждая из диаграмм $C_{1r}, \dots, C_{m-1,r}$, B_r есть степень Δ_r . Положим $C_{ir} = \Delta_r^{d_{ir}}$ ($1 \leq i \leq m-1$), $B_r = \Delta_r^{d_{mr}}$. Поступим так с каждым r ($1 \leq r \leq k$), для которого компонента B_r не является тривиальной.

Теперь пусть $1 \leq r \leq k$ таково, что компонента B_r тривиальна, т.е. $B_r = \varepsilon(u_r)$. Применим предположение индукции к диаграммам $C_{1r}, \dots, C_{m-1,r}$. Тогда мы найдем некоторое слово $v_r = v_{1r} \dots v_{n_r,r}$, сферические (v_j, v_j) -диаграммы Δ_{jr} ($1 \leq j \leq n_r$), целые числа d_{ijr} ($1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n_r$) и некоторую (u_r, v_r) -диаграмму Γ_r такие, что

$$\Gamma_r^{-1} C_{ir} \Gamma_r = \Delta_{1r}^{d_{i1r}} + \dots + \Delta_{n_r,r}^{d_{i,n_r,r}} \quad (18)$$

для всех $1 \leq i \leq m-1$. При этом $\Gamma_r^{-1} B_r \Gamma_r = \varepsilon(v_r) = \varepsilon(v_{1r}) + \dots + \varepsilon(v_{n_r,r})$ и можно положить $d_{m1r} = \dots = d_{m,n_r,r} = 0$. Тогда равенство (18) будет справедливо также и для $i = m$, если положить $C_{mr} = B_r$.

Для тех r , при которых B_r не тривиальна, положим $v_r = u_r$; в качестве Γ_r возьмем тривиальную диаграмму. Также нужно положить $n_r = 1$, $\Delta_{1r} = \Delta_r$, $d_{i1r} = d_{ir}$; тогда равенства (18) будут справедливы при всех $1 \leq r \leq k, 1 \leq i \leq m$. Полагая $\Gamma = \Psi(\Gamma_1 + \dots + \Gamma_k)$, мы увидим, что

$$\Gamma^{-1} A_i \Gamma = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^{n_r} \Delta_{jr}^{d_{ijr}}$$

при $1 \leq i \leq m$, т.е. получены необходимые разложения диаграмм в сумму.

Теорема доказана.

В [3] нами установлено, что проблема сопряженности разрешима в любой группе диаграмм $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$, где $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ – полугрупповое копредставление с разрешимой проблемой равенства. В частности, отсюда следует разрешимость проблемы сопряженности в группе F . Можно поставить более общую проблему – проблеме сопряженности для последовательностей.

ПРОБЛЕМА 1. Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ – конечное полугрупповое копредставление с разрешимой проблемой равенства, $w \in \Sigma^+$, $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$. Существует ли алгоритм, который по данным двум последовательностям элементов $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ группы G (заданных как диаграммы) выясняет, существует ли такой элемент $z \in G$, для которого $x_i^z = y_i$ для всех i от 1 до n ? В частности, разрешима ли данная проблема в группе F ?

Заметим, что имеется некоторая аналогия между группами диаграмм и группами матриц (об этом было сказано в [3]). Соответствующий вопрос для матричных групп был решен положительно в [20] и независимо в [21].

§ 4. Разрешимые подгруппы групп диаграмм

Рассмотрим вопрос о разрешимых подгруппах в группах диаграмм. Сначала приведем пример, демонстрирующий наличие неабелевых разрешимых подгрупп в группе F . Пусть $\mathcal{P} = \langle x \mid xx = x \rangle$. Все группы вида $\mathcal{D}(\mathcal{P}, x^k)$, где $k = 1, 2, \dots$, изоморфны F . Рассмотрим произвольную нетривиальную (x, x) -диаграмму Δ . Тогда две диаграммы $\Delta_1 = \varepsilon(x^2) + \Delta + \varepsilon(x)$ и $\Delta_2 = \varepsilon(x) + \Delta + \varepsilon(x^2)$, во-первых, сопряжены, так как разлагаются в сумму соответственно сопряженных компонент, а во-вторых, коммутируют, в чем легко убедиться непосредственно. Сопрягающим элементом будет диаграмма $\Gamma = (x^2 \rightarrow x) + \varepsilon(x) + (x \rightarrow x^2)$. Обозначая через a, b элементы группы $\mathcal{D}(\mathcal{P}, x^4)$, заданные диаграммами Δ_1 и Γ соответственно, можно убедиться в том, что a и b порождают группу $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ – прямое сплетение двух бесконечных циклических групп. В следующей теореме рассматриваемая конструкция предстает в несколько более общей ситуации.

ТЕОРЕМА 18. Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$ – произвольное полугрупповое представление. Допустим, что существуют непустые слова x, y, z над Σ такие, что $xy = x$, $yz = z$ по модулю $\mathcal{P}$, причем группа диаграмм $\mathcal{D}(\mathcal{P}, y)$ неединична. Тогда группа $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, xyz)$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$. Именно, пусть Δ – любая нетривиальная (y, y) -диаграмма, Γ_1 – произвольная (xy, x) -диаграмма и Γ_2 – произвольная (z, yz) -диаграмма. Тогда элементы a и b , заданные диаграммами $\varepsilon(x) + \Delta + \varepsilon(z)$ и $\Gamma_1 + \Gamma_2$ соответственно, порождают в G подгруппу $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что элементы $xz, xyz, xy^2z, \dots$ равны по модулю $\mathcal{P}$, поэтому группы диаграмм над $\mathcal{P}$ с этими базами будут изоморфны друг другу. Чтобы получить диаграммы из примера, рассмотренного выше, нужно положить $x = y = z$, а затем перейти от группы с базой $xyz = x^3$ к группе с базой $xy^2z = x^4$ посредством сопряжения элементом $(x \rightarrow x^2) + \varepsilon(x^2)$.

Для того чтобы доказать, что элементы a, b некоторой группы G порождают $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$, достаточно убедиться в том, что элементы $a_i = a^{b^i}$ ($i \in \mathbb{Z}$) образуют базис свободной абелевой группы. Но для этого достаточно проверить, что при любом натуральном n элементы $a_0, a_1, \dots, a_n$ будут базисом порожденной ими свободной абелевой группы. Мы укажем явно элементы a_i ($0 \leq i \leq n$) соответствующей группы диаграмм $\mathcal{D}(\mathcal{P}, xyz)$. Для удобства перейдем к группе диаграмм над $\mathcal{P}$ с базой $xy^{n+1}z$ посредством изоморфизма, заданного сопряжением диаграммы с базой xyz диаграммой

$$\Psi = (\Gamma_1^{-1} + \varepsilon(yz))(\Gamma_1^{-1} + \varepsilon(y^2z)) \cdots (\Gamma_1^{-1} + \varepsilon(y^n z)).$$

Непосредственно проверяется, что $c_i = \Psi^{-1} a_i \Psi = \varepsilon(xy^{n-i}) + \Delta + \varepsilon(y^i z)$ при всех $0 \leq i \leq n$. Ясно, что элементы $c_0, c_1, \dots, c_n$ попарно коммутируют. Ввиду очевидной формулы

$$c_0^{d_0} c_1^{d_1} \cdots c_n^{d_n} = \varepsilon(x) + \Delta^{d_0} + \Delta^{d_1} + \cdots + \Delta^{d_n} + \varepsilon(z)$$

понятно, что элементы $c_0, c_1, \dots, c_n$ образуют базис свободной абелевой подгруппы в $\mathcal{D}(\mathcal{P}, xy^{n+1}z)$, а потому элементы $a_0, a_1, \dots, a_n$ также образуют базис свободной абелевой подгруппы в $\mathcal{D}(\mathcal{P}, xyz)$, что и требовалось доказать.

К группе $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ мы еще вернемся, а сейчас докажем простой факт, из которого будет вытекать наличие в F разрешимых подгрупп любой степени.

ЛЕММА 19. *Прямое сплетение $F \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ является подгруппой в F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся известными свойствами группы F , отмеченными в §1. Мы указали два представления группы F кусочно линейными функциями. Возьмем представление функциями на $[0, \infty)$. Для любого натурального k рассмотрим функции, тождественные вне отрезка $[k, k+1]$. Обозначим через Φ_k множество таких функций. Очевидно, что они образуют группу, изоморфную группе всех кусочно линейных функций (с указанными в §1 свойствами) на отрезке $[0, 1]$, т.е. группе F . Легко также видеть, что элементы из разных подгрупп Φ_k коммутируют между собой. Следовательно, Φ_k ($k \geq 1$) порождают прямую степень группы F . Сопряжение при помощи элемента x_0 , заданного в виде функции формулами $tx_0 = 2t$ при $t \in [0, 1]$, $tx_0 = t+1$ при $t \geq 1$, переводит Φ_k в Φ_{k+1} . Понятно, что t вместе с Φ_k порождает прямое сплетение $F \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ в F .

Нетрудно указать порождающие подгруппы $F \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ в F в виде диаграмм, а также в виде нормальных форм. Так, подгруппа в F , порожденная элементами $x_0, x_1x_2x_1^{-2}, x_1^2x_2x_1^{-3}$ будет изоморфна $F \operatorname{wr} \mathbb{Z}$; читатель без труда также сможет нарисовать соответствующие этим элементам диаграммы.

Определим по индукции последовательность групп $H_1 = \mathbb{Z}$, $H_{n+1} = H_n \operatorname{wr} \mathbb{Z}$. Таким образом, группы $H_n = (\dots (\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}) \operatorname{wr} \dots) \operatorname{wr} \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ встречается n раз, являются группами диаграмм в силу теоремы 11 и имеют степень разрешимости n . С учетом леммы 19 и элементарных свойств сплетений имеем следующий результат, доказываемый индукцией по n . Это утверждение впервые было получено Брином (устное сообщение), см. также [22].

СЛЕДСТВИЕ 20. *Для любого n группа $H_n = (\dots (\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}) \operatorname{wr} \dots) \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ является подгруппой степени разрешимости n в группе F .*

Говоря о сплетениях, нам хотелось бы отметить еще один факт, касающийся подгрупп в группе F . В [23] было показано, что любая подгруппа в F либо метабелева, либо содержит счетную прямую степень группы $\mathbb{Z}$. (На самом деле слово “метабелева” можно заменить на “абелева”, см. [12].) Рассуждения в [12], [23] проводятся с использованием представления группы F кусочно линейными функциями; фактически результат доказывается для некоторой группы кусочно линейных функций, содержащей F . На самом деле из доказательств этих результатов можно извлечь более сильный факт. Рассмотрим все кусочно линейные непрерывные отображения отрезка $I = [0, 1]$ на себя, сохраняющие ориентацию и имеющие лишь конечное число точек, в которых функция не имеет производной. Такие функции образуют группу относительно композиции. Обозначим эту группу через $PL_0(I)$. Она содержит F в качестве подгруппы. Имеем следующую альтернативу для подгрупп группы $PL_0(I)$.

ТЕОРЕМА 21. *Всякая подгруппа группы $PL_0(I)$ либо абелева, либо содержит $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ в качестве подгруппы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для полноты изложения воспроизведем рассуждения из [12], [23], указывая необходимые добавления. Для $f \in PL_0(I)$ через $\operatorname{supp} f$ обозначим множество всех $t \in I$, для которых $tf \neq t$. Пусть G – неабелева подгруппа в $PL_0(I)$. Рассмотрим функции $f, g \in G$ такие, что $fg \neq gf$. Пусть $J = \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$. Очевидно, J есть объединение конечного числа непересекающихся интервалов $J_k = (a_k, b_k)$, $1 \leq k \leq m$. По условию $[f, g] \neq 1$ в группе $PL_0(I)$. Поэтому имеются интервалы среди $J_1, \dots, J_m$, на которых функция $[f, g]$ не тождественна. Обозначим число таких интервалов через $\nu(f, g)$. Без ограничения общности будем далее считать, что некоммутирующие элементы $f, g \in G$ выбраны так, что число $\nu(f, g)$ является минимальным. Через H обозначим подгруппу в $PL_0(I)$, порожденную f и g . По условию концы интервалов $J_1, \dots, J_m$ неподвижны как относительно f , так и относительно g , и каждый из этих интервалов H -инвариантен.

Простая аргументация показывает, что для любых $x, y \in J_k$ ($1 \leq k \leq m$), где $x < y$, существует функция $w \in H$ такая, что $xw > y$. Возьмем точную верхнюю грань z множества точек $\{xh : h \in H\}$. Ясно, что $a_i < z \leq b_i$. Если $z \neq b_i$, то либо $zf \neq z$, либо $zg \neq z$ по определению множества J . Не ограничивая общности, положим $zf \neq z$. Это неравенство выполняется также в некоторой малой окрестности точки z . Следовательно, либо zf , либо zf^{-1} больше, чем z – противоречие. Поэтому $z = b_i$, откуда следует, что под действием некоторого элемента из H можно сделать образ точки x сколь угодно близким к b_i . Фактически это и требовалось доказать.

Выберем интервал (a_i, b_i) ($1 \leq i \leq m$), на котором $[f, g]$ не тождественна. Легко видеть, что функция $[f, g]$ тождественна в некоторой окрестности каждой из точек a_i, b_i . Поэтому $\operatorname{supp}[f, g]$ непуст и содержится в $[c_0, d_0]$, где $a_i < c_0 < d_0 < b_i$. Согласно сказанному выше существует функция $w \in H$ такая, что $d_0 < c_0 w < b_i$. Обозначим $[f, g]$ через h_0 . Для любого $n \geq 1$ положим $c_n = c_0 w^n$, $d_n = d_0 w^n$, $h_n = h_0^{w^n}$. Очевидно, что $c_0 < d_0 < c_1 < d_1 < \dots$, причем $\operatorname{supp} h_n \cap J_i \subseteq [c_n, d_n]$. Отсюда следует, что при любых $i, j \geq 0$ коммутатор $[h_i, h_j]$ тождественен на J_i . Предположим, что $[h_i, h_j] \neq 1$ для некоторых i, j . Поскольку все интервалы $J_1, \dots, J_m$ являются H -инвариантными, ясно, что на любом из интервалов J_k ($1 \leq k \leq m$), на котором h_0 была тождественна, все функции $h_1, h_2, \dots$ также будут тождественны. Следовательно, мы можем заменить f, g на h_i, h_j , имея при этом $\nu(h_i, h_j) < \nu(f, g)$, что противоречит выбору f, g . Это противоречие доказывает, что $[h_i, h_j] = 1$ для любых $i, j \geq 0$.

В доказательствах, данных в [12], [23], отсюда делался вывод, что элементы $h_0, h_1, h_2, \dots$ образуют базис свободной абелевой группы. Нам остается лишь добавить, что $h_n^w = h_{n+1}$ при всех $n \geq 0$, поэтому элементы h_0, w порождают $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z} \subseteq G$.

Теорема доказана.

С учетом теоремы 16 имеем следующую альтернативу для подгрупп группы F .

СЛЕДСТВИЕ 22. *Всякая подгруппа в группе F либо является свободной абелевой, либо содержит прямое сплетение $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$.*

Заметим, что в группе кусочно линейных функций не всякая абелева подгруппа будет свободной абелевой.

Можно извлечь еще одно следствие из теоремы 21.

СЛЕДСТВИЕ 23. *Неабелева группа с одним определяющим соотношением не может быть подгруппой в группе $PL_0(I)$ (в частности, и в группе F).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [24; теорема 3] А.А. Чеботарь описал все подгруппы групп с одним определяющим соотношением, не содержащие свободных подгрупп ранга 2. Таковы: а) абелевы подгруппы, б) свободное произведение $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ циклической группы порядка 2 на себя и в) группы Баумслага–Солитера $B_{1k} = \langle a, b \mid b^{-1}ab = a^k \rangle$. Ясно, что группа $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ в этом списке не присутствует. Таким образом, неабелева группа с одним определяющим соотношением не может быть подгруппой в $PL_0(I)$ в силу теоремы 21.

Следствие доказано.

Рассмотрим теперь вопрос о том, в каких случаях группа диаграмм обязана содержать $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ в качестве подгруппы. Ответ дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 24. *Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$ – полугрупповое копредставление, и пусть $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ – группа диаграмм. Следующие три утверждения эквивалентны.*

- (1) *Группа $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ содержит $\mathbb{Z} \operatorname{wr} \mathbb{Z}$ в качестве подгруппы.*
- (2) *Группа G содержит элементы a, b такие, что $[a, b] \neq 1$, $[a, a^b] = 1$ (иными словами, в G имеются коммутирующие сопряженные элементы, не равные друг другу).*
- (3) *Найдутся такие слова x, y, z , что в полугруппе S , заданной при помощи $\mathcal{P}$, выполнены равенства $xy = x$, $yz = z$, $xz = w$, причем $\mathcal{D}(\mathcal{P}, y) \neq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим по схеме $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ очевидна и справедлива для любой группы G . Импликация $(3) \Rightarrow (1)$ доказана в теореме 18. Осталось доказать, что $(2) \Rightarrow (3)$.

Предположим, что в $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ имеются элементы a, b такие, что $[a, b] \neq 1$, $[a, a^b] = 1$. По теореме 17 можно перейти от базы w к некоторой базе v , равной w над $\mathcal{P}$, таким образом, что диаграммы, представляющие два данных коммутирующих элемента, станут абсолютно приведенными нормальными. Не меняя обозначений, предположим, что a представим диаграммой $A = A_1 + \dots + A_m$, разложенной в сумму компонент, а элемент a^b представим диаграммой C , которая, будучи сопряжена a , имеет разложение в сумму такого же количества компонент $C = C_1 + \dots + C_m$, причем сопрягающий элемент b можно в силу [3; лемма 15.15] представить диаграммой, разложенной в сумму вида $B_1 + \dots + B_m$, где $C_i = B_i^{-1} A_i B_i$. Пусть $v = v_1 \dots v_m = v'_1 \dots v'_m$, где A_i, C_i – сферические диаграммы с базами v_i, v'_i соответственно, а B_i есть (v_i, v'_i) -диаграмма ($1 \leq i \leq m$). При этом, очевидно, $v_i = v'_i$ над $\mathcal{P}$ для всех i .

Мы хотим доказать существование такого i от 1 до m , что диаграмма A_i (а потому и C_i) нетривиальна, а вхождения слов v_i, v'_i в слово v не имеют общих букв. Отсюда следует выполнение условия (3). Действительно, без ограничения общности положим $v = pv_i qv'_i r$. Тогда над $\mathcal{P}$ выполняются равенства $p = v_1 \dots v_{i-1} =$

$v'_1 \dots v'_{i-1} = pv_i q$, $r = v'_{i+1} \dots v'_m = v_{i+1} \dots v_m = qv'_i r = qv_i r$. Можно взять $x = p$, $y = v_i q$, $z = v_i r$, и тогда над $\mathcal{P}$ (т.е. в полугруппе S) будем иметь равенства $x = p = pv_i q = xy$, $z = v_i r = v_i qv_i r = yz$, $w = v = pv_i qv'_i r = pv_i qv_i r = pv_i r = xz$. Кроме того, группа диаграмм над $\mathcal{P}$ с базой $y = v_i q$ заведомо нетривиальна, так как существует нетривиальная сферическая диаграмма $A_i + \varepsilon(q)$ с данной базой.

Докажем существование такого i , что A_i нетривиальна, а вхождения слов v_i, v'_i в слово v не имеют общих букв. Рассмотрим произвольное $1 \leq i \leq m$, для которого A_i нетривиальна. Так как C коммутирует с A , диаграмма C может быть представлена в виде суммы $C' + D + C''$, где C', D, C'' — сферические диаграммы с базами $v_1 \dots v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \dots v_m$ соответственно, причем D коммутирует с A_i . Следовательно, D как диаграмма состоит из одной компоненты. То же верно относительно диаграммы C_i . Поэтому если вхождения слов v_i, v'_i имеют общие буквы, то диаграммы D и C_i обязаны совпадать. Тогда мы получаем, что A_i, C_i — степени одного и того же элемента Δ_i и при этом сопряжены. Из результатов [3; раздел 15] следует, что $A_i = C_i$. К тому же вхождения v_i и v'_i совпадают. Отсюда очевидным образом выводится, что $A = C$. Но это противоречит предположению о том, что $a \neq a^b$.

Теорема доказана.

Сделаем два замечания по поводу доказанной теоремы. Во-первых, в третьем условии вряд ли можно избавиться от факта неединичности группы диаграмм над $\mathcal{P}$ с базой y , так как даже более простой критерий — для случая, когда группа диаграмм содержит $\mathbb{Z}$ в качестве подгруппы, — эквивалентен тому, что группа неединична. Отметим также, что не известен алгоритм, позволяющий по данному (конечному) копредставлению полугруппы и заданной базе выяснить, будет ли соответствующая группа диаграмм неединичной. Во-вторых, следует отметить, что если элементы a, b группы диаграмм таковы, что $[a, b] \neq 1$, $[a, a^b] = 1$, то подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, не обязана содержаться в подгруппе, порожденной a, b . Пример, подтверждающий сказанное, построен ниже в §5.

Завершая данный параграф, дадим достаточное условие, при котором группа диаграмм содержит в качестве подгруппы группу F .

ТЕОРЕМА 25. Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ — полугрупповое копредставление, и пусть полугруппа S , представленная при помощи $\mathcal{P}$, содержит идемпотент. Тогда найдется слово w такое, что группа диаграмм $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ содержит группу F в качестве подгруппы. При этом можно взять в качестве базы слово w , задающее идемпотент в S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО базируется на том факте, что все собственные гомоморфные образы группы F абелевы [12]. Возьмем такое слово w , для которого $ww = w$ над $\mathcal{P}$. Рассмотрим приведенную (w^2, w) -диаграмму Δ . Построим гомоморфизм из F в $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ следующим образом. Воспользуемся тем, что F является группой диаграмм над $\mathcal{Q} = \langle x | x^2 = x \rangle$. В качестве базы удобно взять элемент x^5 . Любой диаграмме над $\mathcal{Q}$ сопоставим диаграмму над $\mathcal{P}$, заменяя метку x на w и заполняя клетки типа $x^2 = x$ на диаграммы Δ . Это правило задает гомоморфизм из F в $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$. С учетом сказанного выше достаточно проверить, что образ этого гомоморфизма неабелев. Для этого достаточно вычислить образ коммутатора $[x_0, x_1]$. В группе $\mathcal{D}(\mathcal{Q}, x^5)$ данный коммутатор представим диаграммой

$\varepsilon(x) + (x^2 = x) + (x = x^2) + \varepsilon(x)$. Очевидно, что после замены (x^2, x) -клеток на диаграммы Δ получится диаграмма без диполей. Поэтому она не равна единице и образ F при гомоморфизме неабелев.

Теорема доказана.

Нам не известно, является ли условие наличия идемпотента в S также необходимым. Поэтому мы ставим следующую проблему.

ПРОБЛЕМА 2. Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ – полугрупповое копредставление, и пусть $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ – группа диаграмм. Предположим, что G содержит группу F в качестве подгруппы. Верно ли, что полугруппа S , заданная при помощи $\mathcal{P}$, содержит идемпотент?

§ 5. Гипотеза о подгруппах

В данном параграфе мы приведем контрпример к гипотезе о подгруппах, т.е. построим подгруппу в некоторой группе диаграмм, которая сама не является группой диаграмм. Заметим, что первым кандидатом на опровержение гипотезы о подгруппах была группа F' – коммутант группы F . Однако оказалось, что F' является группой диаграмм, что позволило ответить на несколько открытых вопросов о группах диаграмм. Прежде чем доказать теорему, сделаем два замечания.

Первое из них касается строения полугрупповых диаграмм над копредставлениями специального вида. Пусть имеется полугрупповое копредставление вида $\langle X | \mathcal{R} \rangle$, где все соотношения из $\mathcal{R}$ имеют вид $u = V$, где $u \in X$, $V \in X^+$, причем левые части соотношений попарно различны, а правые части состоят более чем из одной буквы. Известно (см., например, [25]), что любая приведенная диаграмма Δ над данным копредставлением может быть единственным образом представлена в виде композиции: $\Delta = \Delta_1 \circ \Delta_2$, где Δ_1 содержит только применения соотношений вида $u = V$ из $\mathcal{R}$, а Δ_2 – только применения соотношений вида $V = u$, где $(u = V) \in \mathcal{R}$. (Этот факт нетрудно доказать, выбрав самый длинный путь из $\iota(\Delta)$ в $\tau(\Delta)$, имеющий положительную метку. Нетрудно убедиться в том, что “выше” выбранного пути все клетки соответствуют соотношениям $u = V$, а “ниже” – соотношениям $V = u$.) Мы будем называть Δ_1 (Δ_2) *положительной* (*отрицательной*) частью диаграммы Δ .

Заметим, что данному условию удовлетворяет копредставление $\langle x | x = x^2 \rangle$, а также копредставление, рассмотренное ниже в условии теоремы 26.

Второе замечание касается строения коммутанта группы диаграмм. Оно описано в [3; теорема 11.3]. Напомним это описание. Пусть дана (w, w) -диаграмма Δ над $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$. Обозначим через M моноид, заданный при помощи $\mathcal{P}$, и рассмотрим свободную абелеву группу $\mathcal{A}$ с базисом $M \times \mathcal{R} \times M$. Для каждой вершины μ диаграммы Δ рассмотрим произвольный положительный путь из $\iota(\Delta)$ в μ . Его метка определяет некоторый элемент $\ell(\mu) \in M$, который, как легко показать, не зависит от выбора пути. Аналогично определяется элемент $r(\mu) \in M$ как значение метки любого положительного пути из μ в $\tau(\Delta)$. Теперь каждой клетке π диаграммы Δ сопоставим элемент $\delta \cdot (\ell(\iota(\pi)), u = v, r(\tau(\pi)))$, где $\delta = 1$, если $u = \varphi(\text{top}(\pi))$, $v = \varphi(\text{bot}(\pi))$, $(u, v) \in \mathcal{R}$ и $\delta = -1$, если $v = \varphi(\text{top}(\pi))$, $u = \varphi(\text{bot}(\pi))$, $(u, v) \in \mathcal{R}$. Через $\rho(\Delta)$ обозначим сумму элементов, сопоставленных клеткам, по всем клеткам диаграммы Δ . Таким образом, ρ задает гомоморфизм группы $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$

в $\mathcal{A}$. Как доказано в [3], ядром ρ будет в точности G' – коммутант группы G .

ТЕОРЕМА 26. *Коммутант группы F является группой диаграмм. Имено, $F' \cong \mathcal{D}(\mathcal{Q}, a_0 b_0)$, где*

$$\mathcal{Q} = \langle x, a_i, b_i (i \geq 0) \mid x = xx, a_i = a_{i+1}x, b_i = xb_{i+1} (i \geq 0) \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим отображение из $H = \mathcal{D}(\mathcal{Q}, a_0 b_0)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{P}, x^2)$, где $\mathcal{P} = \langle x \mid x = x^2 \rangle$, сопоставляя каждой сферической диаграмме в базой $a_0 b_0$ над $\mathcal{Q}$ диаграмму, которая получается, если метки всех ребер заменить на x . Ясно, что получится сферическая диаграмма над $\mathcal{P}$ с базой x^2 . Очевидно, что этим задается гомоморфизм $\psi: H \rightarrow F$, так как $\mathcal{D}(\mathcal{P}, x^2) \cong F$. Наша цель – доказать, что ψ – инъективный гомоморфизм, образ которого равен F' .

Пусть Δ – приведенная нетривиальная $(a_0 b_0, a_0 b_0)$ -диаграмма над $\mathcal{Q}$. Ее образ относительно ψ не может содержать диполей. В противном случае прообразы в Δ клеток, образующих диполь, сами образовывали бы диполь, в чем легко убедиться непосредственно. Отсюда следует, что ψ инъективен.

Проверим, что $\psi(\Delta) \in F'$ для любой диаграммы Δ из H , причем Δ считаем приведенной. Моноид M , заданный при помощи $\langle x \mid x = xx \rangle$, состоит из двух элементов: 1 и x . Клетка π диаграммы $\Delta' = \psi(\Delta)$ обладает свойством $\ell(\iota(\pi)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\iota(\pi) = \iota(\Delta')$. Аналогично, $r(\tau(\pi)) = 1$ в том и только том случае, когда $\tau(\pi) = \tau(\Delta')$. Диаграмма Δ' приведена, как было показано выше. Она представляется в виде композиции $\Delta'_1 \circ \Delta'_2$ своей положительной и отрицательной части в терминологии первого замечания, сделанного перед формулировкой теоремы. Легко понять, что никакая клетка π диаграммы Δ' не обладает свойствами $\iota(\Delta) = \iota(\pi)$, $\tau(\Delta) = \tau(\pi)$ одновременно (напомним, что база Δ' равна x^2).

Рассмотрим диаграмму Δ и разложим ее в композицию положительной и отрицательной части: $\Delta = \Delta_1 \circ \Delta_2$ (это возможно, так как $\mathcal{Q}$ удовлетворяет условиям из первого замечания, сделанного перед формулировкой настоящей теоремы). Пусть a_n ($n \geq 0$) – метка ребра с началом $\iota(\Delta)$, лежащего на пути, разбивающем Δ на положительную и отрицательную части. Тогда из вида определяющих соотношений легко видеть, что метки всех ребер с началом $\iota(\Delta)$, прочитанные по направлению от верхнего пути диаграммы к нижнему, суть $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, a_1, a_0$. Из этого следует, что количество клеток π , у которых $\iota(\pi) = \iota(\Delta)$, одно и то же для Δ_1 и для Δ_2 . Отсюда немедленно заключаем, что оно одно и то же и для диаграммы Δ' , если сравнить число таких клеток в Δ'_1 и в Δ'_2 . Все такие клетки из Δ'_1 под действием ρ переходят в $(1, x = x^2, x)$, а клетки из Δ'_2 – в $-(1, x = x^2, x)$ (подчеркнем, что здесь речь идет о клетках, у которых начальная вершина совпадает с начальной вершиной диаграммы).

Аналогичное рассуждение проходит и для клеток, у которых конечная вершина совпадает с конечной вершиной диаграммы. Здесь список меток ребер с концом в $\tau(\Delta)$, прочитанных от верхнего пути к нижнему, имеет вид $b_0, b_1, \dots, b_m, \dots, b_1, b_0$ для некоторого $m \geq 0$, и далее применяется то же рассуждение с учетом того, что рассматриваемые клетки из Δ'_1 перейдут в $(x, x = x^2, 1)$, а клетки из Δ'_2 – в противоположные элементы группы $\mathcal{A}$. Теперь заметим, что в Δ'_1 то же число клеток, что и в Δ'_2 в силу того, что обе диаграммы сферические, а все соотношения

имеют один и тот же вид. Следовательно, количество клеток π в Δ'_1 , для которых $\iota(\pi) \neq \iota(\Delta')$ и $\tau(\pi) \neq \tau(\Delta')$, такое же, как и количество таких клеток в Δ'_2 . Однако первые переходят в $(x, x = x^2, x)$, а вторые в $-(x, x = x^2, x)$. Поэтому $\rho(\Delta') = 0$, что доказывает включение $\psi(\Delta) \in F'$.

Осталось показать, что любой элемент из F' лежит в образе ψ . С этой целью возьмем приведенную сферическую диаграмму Δ' с базой x^2 над $\langle x \mid x = x^2 \rangle$. Из того, что $\Delta' \in F'$, следует, что $\rho(\Delta') = 0$. Рассмотрим отдельно клетки трех типов, а именно, переходящие при ρ в а) $\pm(1, x = x^2, x)$, б) $\pm(x, x = x^2, 1)$, в) $\pm(x, x = x^2, x)$.

Каждая клетка относится ровно к одному из трех типов, откуда ясно, что сумма по всем клеткам каждого из типов равна нулю. Это значит, что при разложении $\Delta' = \Delta'_1 \circ \Delta'_2$ в композицию положительной и отрицательной части количество клеток каждого из типов, лежащих в Δ'_1 , будет такое же, как количество клеток этого же типа, лежащих в Δ'_2 . Пусть имеется по $n \geq 0$ клеток первого типа в каждой из двух частей. Переименуем метки ребер с началом $\iota(\Delta')$, заменяя их на $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, a_1, a_0$ соответственно от верхних ребер к нижним. Аналогично, пусть имеется по $m \geq 0$ клеток второго типа в каждой из частей; произведем переобозначения меток ребер, концы которых равны $\tau(\Delta')$, заменяя их по тому же принципу на $b_0, b_1, \dots, b_m, \dots, b_1, b_0$ соответственно. Полученную в результате диаграмму обозначим через Δ .

Заметим, что Δ будет сферической диаграммой над $\mathcal{Q}$ с базой $a_0 b_0$. Действительно, любая клетка, у которой начальная вершина совпадает с начальной вершиной Δ , соответствует соотношению вида $a_i = a_{i+1}x$ ($i \geq 0$) или обратного к нему. В самом деле, если взята клетка π из положительной части, то $\text{top}(\pi) = e$, $\text{bot}(\pi) = e_1 e_2$, где e, e_1, e_2 — ребра диаграммы. По условию метка e равна a_i для некоторого $i \geq 0$. Из способа переименования меток следует, что e_1 имеет метку a_{i+1} . Заметим, что начало ребра e_2 не есть $\iota(\Delta)$, поскольку e_1 не может быть петлей, а также конец ребра e_2 не есть $\tau(\Delta)$ ввиду того, что иначе ребро e соединяло бы начальную и конечную вершину диаграммы Δ , что невозможно. Поэтому метка e_2 есть x . Рассуждение для отрицательной части аналогично. Разумеется, любая клетка, у которой конечная вершина совпадает с конечной вершиной Δ , соответствует соотношению вида $b_i = x b_{i+1}$ ($i \geq 0$) или обратного к нему. Ясно, что ψ переводит Δ в Δ' , что и завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 27. *Группа диаграмм может быть простой. В частности, существуют нетривиальные группы диаграмм, совпадающие со своим коммутантом и поэтому не допускающие LOG-задания.*

Группа F' проста (см. [12]). Мы доказали в теореме 26, что она является группой диаграмм. В [3; раздел 17] спрашивалось, может ли нетривиальная группа диаграмм совпадать со своим коммутантом. Нами дан положительный ответ на этот вопрос, который особенно интересен, если сравнить его с [3; теорема 12.1], где доказывалось, что если все группы диаграмм над данным полугрупповым представлением совпадают со своим коммутантом, то все они тривиальны. Как мы видим, отдельные группы диаграмм совпадать со своим коммутантом все-таки могут. Попутно мы получили ответ на вопрос 17.1 из той же статьи: всякая ли группа диаграмм допускает LOG-задание? Напомним, что LOG-заданием мы называем

такое задание группы при помощи порождающих и определяющих соотношений, что все определяющие соотношения имеют вид $a = b^c$, где a, b и c – порождающие. Группы, допускающие такое задание, называются также LOG-группами (термин был предложен в [26], где эти группы задавались при помощи размеченных ориентированных графов). В литературе на русском языке часто встречается эквивалентный термин “С-группа”; интересную характеристику таких групп получил недавно Ю. В. Кузьмин [27], [28]. Нами было показано в уже цитированной работе, что любая группа диаграмм над полным копредставлением (см. [3]) допускает LOG-задание по примеру группы Р. Томпсона. Там же было показано, что любая группа диаграмм есть ретракт LOG-группы. Поскольку любая LOG-группа имеет $\mathbb{Z}$ своим гомоморфным образом, она не совпадает со своим коммутантом. Итак, мы доказали, что группа диаграмм может не иметь LOG-задания.

Для построения контрпримера к гипотезе о подгруппах мы существенно опираемся на результаты §2, в частности, нам нужна теорема 13 и пример 12.

ТЕОРЕМА 28. *Существуют подгруппы групп диаграмм, не являющиеся самими группами диаграмм. В частности, группа с одним определяющим соотношением*

$$\langle x, y \mid xy^2x = yx^2y \rangle$$

изоморфно представима диаграммами над некоторым полугрупповым копредставлением, но сама не является группой диаграмм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение $L = \langle x, y \mid xy^2x = yx^2y \rangle$ и докажем, что L не является группой диаграмм. Рассмотрим группу L_∞ , заданную в виде

$$L_\infty = \langle z_i \ (i \in \mathbb{Z}) \mid [z_i, z_{i+1}] = 1 \ (i \in \mathbb{Z}) \rangle.$$

Отображение ψ , переводящее z_i в z_{i+1} при всех $i \in \mathbb{Z}$, очевидным образом индуцирует автоморфизм группы L_∞ . Если рассмотреть HNN-расширение группы L_∞ с помощью проходной буквы t посредством автоморфизма ψ (это будет также полупрямое произведение L_∞ на $\mathbb{Z}$), то получится группа $\langle L_\infty, t \mid t^{-1}z_it = z_{i+1} \ (i \in \mathbb{Z}) \rangle$, которая в результате упрощений превращается в группу с одним соотношением $\langle t, z_0 \mid [z_0, z_0^t] = 1 \rangle$. Последняя с помощью преобразований Тие преобразуется в L ($x = z_0t, y = t^{-1}$). Таким образом, группа L_∞ является подгруппой в L .

Заметим, что вместо L_∞ можно было бы рассматривать группу

$$L_0 = \langle z_i \ (i = 0, 1, 2, \dots) \mid [z_i, z_{i+1}] = 1 \ (i = 0, 1, 2, \dots) \rangle.$$

Отображение ψ , где $\psi(z_i) = z_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), индуцирует мономорфизм группы L_0 в себя. Действительно, отображение θ такое, что $\theta(z_0) = 1, \theta(z_i) = z_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$), индуцирует эндоморфизм группы L_0 и при этом $\theta(\psi(z)) = z$ для любого $z \in L_0$. Если вновь рассмотреть HNN-расширение теперь уже группы L_0 с помощью проходной буквы t посредством мономорфизма ψ , то получится группа $\langle L_0, t \mid t^{-1}z_it = z_{i+1} \ (i = 0, 1, 2, \dots) \rangle$, которая в результате упрощений превращается в ту же самую группу L . Отметим очевидный факт, что L_0 неабелева (она имеет свободную группу ранга 2 своим гомоморфным образом, если наложить соотношения $z_1 = 1, z_i = 1$ при $i = 3, 4, \dots$). Поэтому L также неабелева, т.е. $xy \neq yx$.

При $a = yx$, $b = x$ в группе L выполнено равенство $[a, a^b] = 1$, причем $[a, b] \neq 1$. Если L есть группа диаграмм, то она тем самым удовлетворяет условию (2) теоремы 24. Тогда она удовлетворяет эквивалентному условию (1), т.е. содержит $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ в качестве подгруппы. Как уже было отмечено в доказательстве следствия 23, группа $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ не может быть подгруппой в группе с одним определяющим соотношением в силу результата работы [24]. Полученное противоречие доказывает, что L не является группой диаграмм.

Осталось доказать, что L изоморфно вкладывается в некоторую группу диаграмм. Применим теорему 13, из которой следует, что группа $K = \mathcal{O}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ является группой диаграмм. Из описания, приведенного в §2, следует, что K имеет задание с помощью порождающих g_i, h_i ($i \in \mathbb{Z}$), t и определяющих соотношений $[g_i, g_j] = [h_i, h_j] = 1$, $g_i^t = g_{i+1}$, $h_j^t = h_{j+1}$, где $i, j \in \mathbb{Z}$ и $[g_i, h_j] = 1$ при $i \leq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Поэтому достаточно доказать, что группа $L = \langle x, y \mid [xy, yx] = 1 \rangle$ является подгруппой в группе диаграмм $K = \mathcal{O}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Рассмотрим группу

$$K_0 = \langle g_i, h_i \ (i \geq 0) \mid [g_i, g_j] = [h_i, h_j] = 1 \ (i, j \geq 0), [g_i, h_j] = 1 \ (j \geq i \geq 0) \rangle.$$

Отображение $g_i \mapsto g_{i+1}$, $h_j \mapsto h_{j+1}$ ($i, j \geq 0$) продолжается до эндоморфизма ψ группы K_0 . Он является мономорфизмом, так как отображение $g_0, h_0 \mapsto 1$, $g_i \mapsto g_{i-1}$, $h_j \mapsto h_{j-1}$ ($i, j \geq 1$) также продолжается до эндоморфизма θ , причем $\theta(\psi(z)) = z$ для любого $z \in K_0$. Следовательно, можно рассмотреть HNN-расширение группы K_0 с помощью проходной буквы t посредством мономорфизма ψ . Получится группа $\langle K_0, t \mid \psi(z) = z^t \ (z \in K_0) \rangle$, которая задается тем же копредставлением, что и K , с той лишь разницей, что индексы при задании K принимают любые целые, а не только неотрицательные значения. Добавляя новые порождающие $g_i = g_0^{t^i}$, $h_j = h_0^{t^j}$ при отрицательных i, j , мы легко преобразуем полученное копредставление к тому виду, каким задается группа K . Нам останется доказать следующую лемму.

ЛЕММА 29. *Подгруппа в K , порожденная элементами $g_i h_{i+1}$ ($i \geq 0$) и t , изоморфна L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа K задана теперь в виде HNN-расширения группы K_0 , т.е. к ее заданию мы добавляем букву t и соотношения $g_i^t = g_{i+1}$, $h_j^t = h_{j+1}$ ($i, j \geq 0$). Определим множества соотношений $\mathcal{R}_k$ ($k \geq 0$) над алфавитом $\{z_0, h_0, z_1, h_1, \dots\}$. В качестве $\mathcal{R}_0$ возьмем множество соотношений группы L_0 , т.е. $\mathcal{R}_0 = \{[z_i, z_{i+1}] = 1 \ (i \geq 0)\}$. Далее, при $k \geq 1$ положим

$$\mathcal{R}_k = \{z_i^{h_k} = z_i \ (0 \leq i < k)\} \cup \{z_i^{h_k} = z_i^{z_{k-1}} \ (i \geq k)\} \cup \{h_j^{h_k} = h_j \ (1 \leq j < k)\}.$$

Ясно, что $L_0 = \langle z_i \ (i \geq 0) \mid \mathcal{R}_0 \rangle$; положим

$$L_k = \langle z_i \ (i \geq 0), h_j \ (1 \leq j \leq k) \mid \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1 \cup \dots \cup \mathcal{R}_k \rangle$$

при $k \geq 1$. Мы покажем, что при любом $k \geq 0$ группа L_{k+1} может быть получена из L_k при помощи подходящего HNN-расширения.

Пусть отображение ψ_k задано правилами: $\psi_k(z_i) = z_i$ при $0 \leq i \leq k$, $\psi_k(z_i) = z_i^{z_k}$ при $i > k$, $\psi_k(h_j) = h_j$ при $1 \leq j \leq k$. Продолжим его до гомоморфизма

соответствующей свободной группы в группу L_k . Проверим, что все соотношения группы L_k перейдут при этом в равенства, выполняющиеся в группе L_k .

Для начала проверим, что $\psi_k([z_i, z_{i+1}]) = 1$ для всех $i \geq 0$. Если $0 \leq i < k$, то $\psi_k([z_i, z_{i+1}]) = [z_i, z_{i+1}] = 1$ в L_k . Равенство $\psi_k(z_i) = z_i^{z_k}$ справедливо также и при $i = k$, откуда следует, что при $i \geq k$ также $\psi_k([z_i, z_{i+1}]) = [z_i^{z_k}, z_{i+1}^{z_k}] = [z_i, z_{i+1}]^{z_k} = 1$. Рассмотрим оставшиеся соотношения группы L_k . Они имеют один из трех видов: $z_i^{h_j} = z_i$ при $0 \leq i < j \leq k$; $z_i^{h_j} = z_i^{z_{j-1}^{z_k}}$ при $i \geq j$, $1 \leq j \leq k$; $[h_i, h_j] = 1$ при $1 \leq i < j \leq k$. Рассматривая три случая, подействуем на каждое из соотношений отображением ψ_k .

При $0 \leq i < j \leq k$ имеем: $\psi_k(z_i^{h_j}) = \psi_k(z_i)^{\psi_k(h_j)} = z_i^{h_j} = z_i = \psi_k(z_i)$.

Во втором случае будем различать два подслучая: $i \leq k$ и $i > k$. В первом из них, т.е. при $1 \leq j \leq i \leq k$, получаем $\psi_k(z_i^{h_j}) = \psi_k(z_i)^{\psi_k(h_j)} = z_i^{h_j} = z_i^{z_{j-1}^{z_k}} = \psi_k(z_i)^{\psi_k(z_{j-1})} = \psi_k(z_i^{z_{j-1}})$. Во втором подслучае, т.е. при $1 \leq j \leq k < i$, имеем: $\psi_k(z_i^{h_j}) = \psi_k(z_i)^{\psi_k(h_j)} = (z_i^{z_k})^{h_j} = (z_i^{h_j})^{z_k^{h_j}} = (z_i^{z_{j-1}})^{z_k^{z_{j-1}^{z_k}}} = (z_i^{z_k})^{z_{j-1}} = \psi_k(z_i)^{\psi_k(z_{j-1})} = \psi_k(z_i^{z_{j-1}})$ (равенство $z_k^{h_j} = z_k^{z_{j-1}^{z_k}}$ в группе L_k , которым мы воспользовались по ходу дела, представляет собой частный случай соотношения второго вида при $i = k$). В третьем случае имеем: $\psi_k([h_i, h_j]) = [\psi_k(h_i), \psi_k(h_j)] = [h_i, h_j] = 1$ при $1 \leq i < j \leq k$.

Таким образом, ψ_k индуцирует эндоморфизм группы L_k . Введем также отображение θ_k , заданное правилами: $\theta_k(z_i) = z_i$ при $0 \leq i \leq k$, $\theta_k(z_i) = z_i^{z_k^{-1}}$ при $i > k$, $\psi_k(h_j) = h_j$ при $1 \leq j \leq k$. Аналогично проверяется, что θ_k индуцирует эндоморфизм группы L_k . Очевидно, что $\theta_k(\psi_k(z)) = \psi_k(\theta_k(z))$ для любого $z \in L_k$. Это означает, что ψ_k и θ_k являются взаимно обратными автоморфизмами группы L_k .

Рассмотрим HNN-расширение группы L_k с помощью проходной буквы h_{k+1} посредством автоморфизма ψ_k группы L_k . Оно получается добавлением буквы h_{k+1} к множеству порождающих L_k и присоединению соотношений вида $\psi_k(z) = z^{h_{k+1}}$ к определяющим соотношениям группы L_k , где z пробегает все порождающие группы L_k . Эти новые соотношения составляют в точности множество $\mathcal{R}_{k+1}$, а потому данное HNN-расширение приводит как раз к группе L_{k+1} . Таким образом, мы заодно получаем естественное вложение L_k в L_{k+1} при $k \geq 0$.

Мы имеем последовательность вложенных подгрупп

$$L_0 < L_1 < \cdots < L_k < L_{k+1} < \cdots,$$

объединение которых есть группа

$$\widehat{L} = \langle z_i \ (i \geq 0), h_j \ (j \geq 1) \mid \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{R}_k \cup \cdots \rangle.$$

Рассмотрим ее подгруппу H , порожденную z_0 и всеми h_j ($j \geq 1$). Добавляя проходную букву h_0 , построим HNN-расширение группы $\widehat{L}$ посредством тождественного изоморфизма подгруппы H на себя, т.е. добавим новый порождающий h_0 и соотношения $[z_0, h_0] = 1$, $[h_j, h_0] = 1$ для всех $j \geq 1$. Опишем явно полученную группу $\overline{L}$. Она имеет порождающие z_i, h_i ($i \geq 0$) и задается следующими определяющими

соотношениями:

$$\begin{aligned} [z_i, z_{i+1}] &= 1 \quad (i \geq 0), \\ [h_i, h_j] &= 1 \quad (i, j \geq 0), \\ [z_i, h_j] &= 1 \quad (0 \leq i < j), \\ [z_i, z_{j-1}h_j^{-1}] &= 1 \quad (1 \leq j \leq i), \\ [z_0, h_0] &= 1 \end{aligned}$$

(мы взяли соотношения $\mathcal{R}_k$ для всех $k \geq 0$ и присоединили соотношения, добавленные на последнем шаге).

Введем новые порождающие $g_i = z_i h_{i+1}^{-1}$ ($i \geq 0$). При этом g_i, h_i порождают группу $\bar{L}$, и наша цель — описать соотношения группы $\bar{L}$ в этих порождающих. Заменяя в соотношениях группы $\bar{L}$ элементы z_i на $g_i h_{i+1}$, получим соответственно:

$$[g_i h_{i+1}, g_{i+1} h_{i+2}] = 1 \quad (i \geq 0), \quad (19)$$

$$[h_i, h_j] = 1 \quad (i, j \geq 0), \quad (20)$$

$$[g_i h_{i+1}, h_j] = 1 \quad (0 \leq i < j), \quad (21)$$

$$[g_i h_{i+1}, g_{j-1}] = 1 \quad (1 \leq j \leq i), \quad (22)$$

$$[g_0 h_1, h_0] = 1. \quad (23)$$

Поскольку элементы вида h_i ($i \geq 0$) попарно коммутируют, мы можем упростить (21), получая $[g_i, h_j] = 1$ при $0 \leq i < j$. Тогда в (22) при $1 \leq j \leq i$ элементы g_{j-1} и h_{i+1} коммутируют и (22) приводится к виду $[g_i, g_{j-1}] = 1$ для всех $1 \leq j \leq i$. Это означает, что все элементы вида g_i ($i \geq 0$) попарно коммутируют. Упростим (19). Заметим, что h_{i+2} коммутирует с остальными тремя элементами и его можно сразу исключить. Получившееся равенство $[g_i h_{i+1}, g_{i+1}] = 1$ эквивалентно $[h_{i+1}, g_{i+1}] = 1$, так как g_i с оставшимися элементами коммутирует. Таким образом, упрощая (23), мы получаем равенства $[g_i, h_i] = 1$ для всех $i \geq 0$.

Подведем итог. Группа $\bar{L}$ задается порождающими g_i, h_i ($i \geq 0$), где элементы вида g_i попарно коммутируют, элементы вида h_i также попарно коммутируют, и g_i коммутирует с h_j при $i \leq j$. Это значит, что группа $\bar{L}$ совпадает с группой K_0 . Группа L_0 , естественно вложенная в $\bar{L}$, порождается элементами z_i ($i \geq 0$). Поэтому подгруппа в $\bar{L}$, порожденная $g_i h_{i+1} = z_i$ ($i \geq 0$), изоморфна L_0 .

Группа K есть HNN-расширение группы K_0 посредством мономорфизма $\psi: K_0 \rightarrow K_0$ с помощью проходной буквы t . Пусть имеется подгруппа M_0 в K_0 такая, что $\psi(M_0) \subseteq M_0$. В этом случае нетрудно показать, что подгруппа, порожденная M_0 и t , сама будет HNN-расширением группы M посредством ограничения мономорфизма ψ на M_0 .

Действительно, возьмем такое HNN-расширение. Оно имеет вид $M = \langle M_0, t \mid z^t = \psi(z) (z \in M_0) \rangle$. Отображение $t \mapsto t, z \mapsto z$ для $z \in M_0$ индуцирует гомоморфизм ϕ из M в K . Поскольку $zt = t\psi(z)$, любой элемент группы M можно представить в виде $t^\alpha z t^{-\beta}$, где $z \in M_0, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \geq 0$. Следовательно, любой элемент m из M сопряжен элементу вида $t^\gamma z$ для некоторых $\gamma \in \mathbb{Z}, z \in M_0$. Если $m \neq 1$, то либо $\gamma \neq 0$, либо $z \neq 1$. Под действием ϕ элемент $t^\gamma z$ переходит в элемент группы K , записываемый в таком же виде. Из элементарных свойств

NN-расширений ясно, что он не равен 1 в K . Следовательно, ϕ есть вложение M в K , а его образ есть в точности подгруппа в K , порожденная M_0 и t .

Заметим, что подгруппа в K_0 , порожденная элементами $z_i = g_i h_{i+1}$ ($i \geq 0$), будет инвариантна относительно ψ , так как $\psi(z_i) = z_{i+1}$ для всех $i \geq 0$. Поэтому можно взять эту подгруппу (изоморфную L_0) в качестве M_0 и применить рассуждение предыдущего абзаца. Ее соответствующее HNN-расширение есть подгруппа в K , порожденная t и $g_i h_{i+1}$ ($i \geq 0$); с другой стороны, как отмечалось в самом начале доказательства теоремы, это HNN-расширение и есть L .

Лемма, а вместе с ней и теорема 28, доказаны.

Примеров, опровергающих гипотезу о подгруппах, известно пока не много. Естественной представляется попытка доказать эту гипотезу при некоторых ограничениях на подгруппу. В связи с теоремой 26 поставим несколько проблем.

ПРОБЛЕМА 3. *Верно ли, что любая подгруппа группы F является группой диаграмм?*

ПРОБЛЕМА 4. *Верно ли, что коммутант любой группы диаграмм является группой диаграмм?*

Нетрудно видеть, что коммутант группы F обладает следующим свойством. Если Δ — диаграмма, представляющая элемент из F' , и некоторая сопряженная к ней диаграмма $\Psi^{-1}\Delta\Psi$ может быть представлена в виде суммы $\Gamma_1 + \Gamma_2$ двух нетривиальных сферических диаграмм с базами v_1, v_2 соответственно, то диаграммы $\Delta_1 = \Psi(\Gamma_1 + \varepsilon(v_2))\Psi^{-1}$ и $\Delta_2 = \Psi(\varepsilon(v_1) + \Gamma_2)\Psi^{-1}$ также принадлежат F' . Легко видеть, что $\Delta = \Delta_1\Delta_2$, причем Δ_1 и Δ_2 коммутируют, не являясь при этом элементами одной циклической подгруппы. Рассмотрим произвольную подгруппу некоторой группы диаграмм, обладающую описанным свойством. Оно равносильно следующему: пусть H — подгруппа некоторой группы диаграмм G , и для любых h_1, h_2 из G таких, что $[h_1, h_2] = 1$, но при этом h_1 и h_2 не принадлежат одной циклической подгруппе, следует, что $h_1 \in H$ и $h_2 \in H$. Будем говорить в этом случае, что H замкнута в G .

ПРОБЛЕМА 5. *Пусть H — замкнутая подгруппа в некоторой группе диаграмм G . Верно ли, что H — группа диаграмм?*

Из положительного ответа на следующий вопрос следовало бы, что группы диаграмм, гиперболические по Громову, свободны.

ПРОБЛЕМА 6. *Пусть H — подгруппа в группе диаграмм G , причем для любого $h \in H$, $h \neq 1$, централизатор $C_G(h)$ элемента h в группе G циклический. Следует ли отсюда, что H свободна (хотя бы для частного случая $H = G$)?*

В заключение параграфа рассмотрим одну интересную серию групп. Положим

$$G_n = \langle x_1, \dots, x_n \mid [x_1, x_2] = [x_2, x_3] = \dots = [x_{n-1}, x_n] = [x_n, x_1] = 1 \rangle.$$

Легко видеть, что $G_1 = \mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $G_3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $G_4 = \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$, где $\mathcal{F}_2$ — свободная группа ранга 2. Все эти группы получаются из $\mathbb{Z}$ при помощи конечных прямых и свободных произведений и потому являются группами диаграмм. Однако уже группа G_5 не будет группой диаграмм.

ТЕОРЕМА 30. *Группы G_n при нечетных $n \geq 5$ не являются группами диаграмм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ – полугрупповое копредставление, и пусть $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ – группа диаграмм. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$, представленный диаграммой Δ . Разложим Δ в сумму сферических компонент. В [3] доказано, что это число компонент является инвариантом диаграммы относительно сопряжения (см. замечание после доказательства леммы 15.15). Из этой же леммы следует, что инвариантом диаграммы относительно сопряжения будет также число нетривиальных компонент. Поэтому можно ввести функцию compr , обозначая через $\text{compr}(g)$ число нетривиальных компонент диаграммы, представляющей элемент $g \in G$.

Введем частичное бинарное отношение $\prec$ на G . Пусть $g_1, g_2 \in G$ – элементы, удовлетворяющие условиям $\text{compr}(g_1) = \text{compr}(g_2) = 1$ (в частности, элементы g_1, g_2 неединичны). Положим $g_1 \prec g_2$, если диаграммы Δ_1, Δ_2 , представляющие элементы g_1, g_2 соответственно, удовлетворяют следующему условию: существуют слова $x, y, z \in \Sigma^*$, $u, v \in \Sigma^+$, некоторая $(w, xuyvz)$ -диаграмма Γ , простые абсолютно приведенные сферические диаграммы Ψ_1 и Ψ_2 с базами u, v соответственно такие, что $\Gamma^{-1}\Delta_1\Gamma = \varepsilon(x) + \Psi_1 + \varepsilon(yvz)$, $\Gamma^{-1}\Delta_2\Gamma = \varepsilon(xuy) + \Psi_2 + \varepsilon(z)$. Из этого определения очевидно, что если $g_1 \prec g_2$, то элементы g_1, g_2 коммутируют и порождают подгруппу в G , изоморфную $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. В частности, они не принадлежат одной циклической подгруппе. Поэтому отношение $\prec$ антирефлексивно, т.е. условие $g \prec g$ не выполнено ни при каком $g \in G$. Установим несколько свойств отношения $\prec$.

ЛЕММА 31. *Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ – полугрупповое копредставление, и пусть $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ – группа диаграмм. Отношение $\prec$ транзитивно, т.е. для любых $g_1, g_2, g_3 \in G$ таких, что $\text{compr}(g_1) = \text{compr}(g_2) = \text{compr}(g_3) = 1$, из условий $g_1 \prec g_2$ и $g_2 \prec g_3$ следует, что $g_1 \prec g_3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент g_i представлен в G диаграммой Δ_i ($i = 1, 2, 3$). Ввиду $g_1 \prec g_2$ существуют слова $x, y, z \in \Sigma^*$, $u, v \in \Sigma^+$, $(w, xuyvz)$ -диаграмма Γ , простые абсолютно приведенные сферические диаграммы Ψ_1 и Ψ_2 с базами u, v соответственно такие, что

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}\Delta_1\Gamma &= \varepsilon(x) + \Psi_1 + \varepsilon(yvz), \\ \Gamma^{-1}\Delta_2\Gamma &= \varepsilon(xuy) + \Psi_2 + \varepsilon(z).\end{aligned}$$

Ввиду $g_2 \prec g_3$ существуют слова $x', y', z' \in \Sigma^*$, $u', v' \in \Sigma^+$, $(w, x'u'y'v'z')$ -диаграмма Γ' , простые абсолютно приведенные сферические диаграммы Ψ'_2 и Ψ'_3 с базами u', v' соответственно такие, что

$$\begin{aligned}(\Gamma')^{-1}\Delta_2\Gamma' &= \varepsilon(x') + \Psi'_2 + \varepsilon(y'v'z'), \\ (\Gamma')^{-1}\Delta_3\Gamma' &= \varepsilon(x'u'y') + \Psi'_3 + \varepsilon(z').\end{aligned}$$

Из этих условий вытекает, что $\varepsilon(xuy) + \Psi_2 + \varepsilon(z) = \Theta^{-1}(\varepsilon(x') + \Psi'_2 + \varepsilon(y'v'z'))\Theta$, где $\Theta = (\Gamma')^{-1}\Gamma$. Диаграммы $\varepsilon(xuy) + \Psi_2 + \varepsilon(z)$ и $\varepsilon(x') + \Psi'_2 + \varepsilon(y'v'z')$ сопряжены при помощи Θ . Из [3; лемма 15.15] вытекает, что компоненты сопряженных

диаграмм соответственно сопряжены, в частности, слова x' и z непусты. Применяя эту лемму, мы заключаем, что $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$, где Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 суть соответственно (x', xuy) -, (u', v) - и $(y'v'z', z)$ -диаграммы.

Возьмем теперь диаграмму $\Xi = \Gamma(\varepsilon(xuyv) + \Theta_3^{-1})$. Ясно, что при этом

$$\begin{aligned}\Xi &= \Gamma'(\varepsilon(xuyv) + \Theta_3^{-1}) = \Gamma'(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)(\varepsilon(xuyv) + \Theta_3^{-1}) \\ &= \Gamma'(\Theta_1 + \Theta_2 + \varepsilon(y'v'z')).\end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\Xi^{-1}\Delta_1\Xi &= (\varepsilon(xuyv) + \Theta_3^{-1})^{-1}(\Gamma^{-1}\Delta_1\Gamma)(\varepsilon(xuyv) + \Theta_3^{-1}) \\ &= (\varepsilon(xuyv) + \Theta_3^{-1})^{-1}(\varepsilon(x) + \Psi_1 + \varepsilon(yvz))(\varepsilon(xuyv) + \Theta_3^{-1}) \\ &= \varepsilon(x) + \Psi_1 + \varepsilon(yv'y'z'),\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}\Xi^{-1}\Delta_3\Xi &= (\Theta_1 + \Theta_2 + \varepsilon(y'v'z'))^{-1}(\Gamma')^{-1}\Delta_3\Gamma'(\Theta_1 + \Theta_2 + \varepsilon(y'v'z')) \\ &= (\Theta_1^{-1} + \Theta_2^{-1} + \varepsilon(y'v'z'))(\varepsilon(x'u'y') + \Psi'_3 + \varepsilon(z'))(\Theta_1 + \Theta_2 + \varepsilon(y'v'z')) \\ &= \varepsilon(xuyvy') + \Psi'_3 + \varepsilon(z').\end{aligned}$$

Таким образом, сопрягая диаграммы Δ_1 и Δ_3 при помощи $(w, xuyvy'v'z')$ -диаграммы Ξ , мы представим их в виде, необходимом для заключения о том, что $g_1 \prec g_3$.

Лемма доказана.

Из леммы 31 следует, что отношение $\prec$ также антисимметрично, т.е. $g_1 \prec g_2$ исключает $g_2 \prec g_1$. Установим еще одно свойство отношения $\prec$.

ЛЕММА 32. Пусть $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ – полугрупповое копредставление, $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ – группа диаграмм. Утверждается, что для любых коммутирующих элементов $g_1, g_2 \in G$, не принадлежащих одной циклической подгруппе и таких, что $\text{compr}(g_1) = \text{compr}(g_2) = 1$, выполняется в точности одно из двух условий: $g_1 \prec g_2$ или $g_2 \prec g_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_i – диаграмма, представляющая элемент $g_i \in G$ ($i = 1, 2$). Поскольку $[g_1, g_2] = 1$, можно применить теорему 17 и найти слово $v = v_1 \dots v_n$, сферические (v_j, v_j) -диаграммы Δ_j ($1 \leq j \leq n$), целые числа d_{ij} ($1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n$) и некоторую (w, v) -диаграмму Γ такие, что $\Gamma^{-1}A_i\Gamma = \Delta_1^{d_{i1}} + \dots + \Delta_n^{d_{in}}$, причем диаграммы Δ_j ($1 \leq j \leq n$) либо тривиальные, либо простые абсолютно приведенные. Условие $\text{compr}(g_1) = 1$ означает, что имеется ровно один номер j от 1 до n , для которого диаграмма $\Delta_j^{d_{1j}}$ не является тривиальной. Аналогично, условие $\text{compr}(g_2) = 1$ означает, что имеется ровно один номер k от 1 до n , для которого диаграмма $\Delta_k^{d_{2k}}$ не является тривиальной. Если $j = k$, то диаграммы A_1, A_2 принадлежат одной циклической подгруппе в G , что невозможно. Если $j < k$, то по определению $g_1 \prec g_2$. Если $k < j$, то соответственно $g_2 \prec g_1$.

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 30. Пусть $n = 2k + 1$, $k \geq 2$, и предположим, что $G_n = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ – группа диаграмм над $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ с базой w . Вначале докажем, что $\text{compr}(x_i) = 1$ для всех порождающих x_i группы G_n . Для этого установим, что централизатор $C(x_i)$ элемента x_i ($1 \leq i \leq n$) в G_n есть подгруппа, порожденная элементами x_{i-1} , x_i и x_{i+1} , изоморфная прямому произведению $\mathcal{F}_2 \times \mathbb{Z}$ (нижние индексы рассматриваются по модулю n). Из соображений симметрии достаточно рассмотреть централизатор элемента x_n .

Предположим, что $C(x_n) \neq \text{gr}\langle x_1, x_{n-1}, x_n \rangle$. Рассмотрим групповое слово W от $x_1, \dots, x_n$ наименьшей длины такое, что $W \in C(x_n)$, $W \notin \text{gr}\langle x_1, x_{n-1}, x_n \rangle$. В частности, слово W непусто, и никакое его непустое начало, а также никакой его непустой конец не принадлежат $\text{gr}\langle x_1, x_{n-1}, x_n \rangle$. Группа G_n есть HNN-расширение с базой

$$\Gamma = \langle x_1, \dots, x_{n-1} \mid [x_1, x_2] = [x_2, x_3] = \dots = [x_{n-2}, x_{n-1}] = 1 \rangle,$$

проходной буквой x_n , построенное относительно тождественного автоморфизма подгруппы $\text{gr}\langle x_1, x_{n-1} \rangle$ в Γ . Рассмотрим элемент $x_n^{-1} W x_n W^{-1}$ этого HNN-расширения. Он равен единице в группе G_n , так как $W \in C(x_n)$. По лемме Бриттона (см. [29]) в слове $x_n^{-1} W x_n W^{-1}$ имеется подслово вида $U = x_n^{-\delta} V x_n^\delta$, где $\delta = \pm 1$, $V \in \text{gr}\langle x_1, x_{n-1} \rangle$ – слово, не содержащее $x_n^{\pm 1}$. Так как слово W выбрано кратчайшим, U не содержится в $W^{\pm 1}$ – иначе вхождение слова U можно заменить на вхождение равного ему в группе G_n слова V , уменьшая длину W . Ясно также, что V непусто, так как W не начинается и не кончается буквой $x_n^{\pm 1}$. Тем самым V не является ни началом, ни концом слова $W^{\pm 1}$, откуда ясно, что слово U не входит в $x_n^{-1} W x_n W^{-1}$. Пришли к противоречию.

Таким образом, $C(x_n) = \text{gr}\langle x_1, x_{n-1}, x_n \rangle$. Рассмотрим отображение алфавита $\{x_1, \dots, x_n\}$ в G_n , переводя каждый из элементов x_1, x_{n-1}, x_n в себя, а остальные элементы в единицу. Продолжая это отображение до гомоморфизма соответствующей свободной группы в G_n , мы видим, что все соотношения группы G_n переходят в единицу. Мы имеем индуцированный гомоморфизм $\phi: G_n \rightarrow G_n$. Очевидно, он является ретракцией, т.е. $\phi^2 = \phi$. С одной стороны очевидно, что подгруппа $\phi(G_n)$ в G_n равна $\text{gr}\langle x_1, x_{n-1}, x_n \rangle$; с другой стороны, эта группа задается соотношениями группы G_n с дополнительными условиями $x_2 = \dots = x_{n-2} = 1$. Таким образом, при $n > 3$

$$\text{gr}\langle x_1, x_{n-1}, x_n \rangle = \phi(G_n) = \langle x_1, x_{n-1}, x_n \mid [x_{n-1}, x_n] = [x_n, x_1] = 1 \rangle \cong \mathcal{F}_2 \times \mathbb{Z},$$

что и требовалось доказать.

Итак, $C(x_i) \cong \mathcal{F}_2 \times \mathbb{Z}$ для всех i от 1 до n ; в частности, центр группы $C(x_i)$ циклический. Если бы x_i представлялся диаграммой с более чем одной нетривиальной компонентой, то в силу [3; теорема 15.35] его централизатор имел бы не менее двух прямых сомножителей, изоморфных $\mathbb{Z}$. Поэтому центр централизатора не был бы циклическим. Учитывая, что элемент x_i нетривиален, заключаем, что $\text{compr}(x_i) = 1$. (Заметим, что нечетность числа n мы пока не использовали.)

Применим лемму 32 и предположим без ограничения общности, что $x_1 \prec x_2$. Допустим, что $x_2 \prec x_3$. Тогда по лемме 31 должно быть $x_1 \prec x_3$, что влечет перестановочность элементов x_1 и x_3 . Ясно, что эти элементы не коммутируют

в G_n . Полученное противоречие позволяет вновь применить лемму 32 и сделать вывод, что $x_3 \prec x_2$. Далее мы снова придем к противоречию, если предположим, что $x_4 \prec x_3$, т.е. на самом деле $x_3 \prec x_4$. Продолжая аналогичные рассуждения, мы придем к выводу, что $x_{2k+1} \prec x_{2k}$, $x_{2k+1} \prec x_1$, $x_2 \prec x_1$ – противоречие.

Теорема доказана.

В связи с теоремой 30 уместно поставить следующую проблему.

ПРОБЛЕМА 7. *При каких n группы G_n являются группами диаграмм? При каких n группы G_n изоморфно представимы диаграммами?*

Если при некотором нечетном $n \geq 5$ группа G_n представима диаграммами, то мы получим еще один контрпример к гипотезе о подгруппах. В противном случае получим усиление теоремы 30.

§6. Искривление подгрупп в группах диаграмм

Вопросы, связанные с искривлением подгрупп, составляют один из актуальных предметов исследования в геометрической теории групп. По этому поводу см. [30]–[32]. Напомним ряд определений.

Пусть A – группа с конечным множеством порождающих X . В этом случае для любого $g \in G$ существуют такое $n \geq 0$ и такие $x_1, \dots, x_n \in X^{\pm 1}$, что $g = x_1 \dots x_n$. Наименьшее число n с таким свойством называется *длиной* элемента g относительно системы порождающих X и обозначается $|g|_X$.

Если имеются две функции ϕ, ψ из G во множество целых неотрицательных чисел, то будем писать $\phi \preceq \psi$, если найдется натуральная константа C такая, что $\phi(g) \leq C\psi(g)$ для всех $g \in G$. Если для двух таких функций справедливы условия $\phi \preceq \psi$ и $\psi \preceq \phi$ одновременно, то мы называем такие функции *эквивалентными* и обозначаем этот факт в виде $\phi \sim \psi$. Очевидно, что $\sim$ на самом деле есть отношение эквивалентности (не следует путать его с другим отношением эквивалентности для функций, часто используемым, когда речь идет о функциях Дэна). Таким образом, для двух функций имеет место $\phi \sim \psi$ тогда и только тогда, когда найдется такая натуральная константа C , что

$$\frac{\phi(g)}{C} \leq \psi(g) \leq C\phi(g) \quad \text{для всех } g \in G.$$

Если X и Y – конечные множества порождающих одной и той же группы A , то элементарное рассуждение показывает, что функции $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$ эквивалентны.

Пусть имеются две конечно порожденные группы A и B такие, что A – подгруппа в B . Зафиксируем некоторую конечную систему порождающих X для группы A и конечную систему порождающих Y для группы B . Для любого элемента $g \in A$ определены два числа: $|g|_X$ и $|g|_Y$. Функции $|\cdot|_X, |\cdot|_Y$ можно считать функциями на A . Условимся далее сравнивать относительно $\preceq$ функции, заданные на различных группах, вложенных одна в другую, взяв соответствующие ограничения этих функций. Из элементарных соображений следует, что $|\cdot|_Y \preceq |\cdot|_X$. Если имеет место и обратное, т.е. если $|\cdot|_X \preceq |\cdot|_Y$, то говорят, что подгруппа A вложена в B *квазиизометрично*, или *без искривления* (это происходит, если $|\cdot|_X \sim |\cdot|_Y$).

Отметим, что факт эквивалентности функций длины $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$ не зависит от выбора конечных систем порождающих X и Y . Если рассматривать функции с точностью до эквивалентности, то можно ввести функции длины ℓ_A и ℓ_B в конечно порожденных группах A и B соответственно, зависящие только от A и B . Квазиизометричность вложения A в B означает, что $\ell_A \sim \ell_B$.

Рассмотрим теперь общую ситуацию вложения A в B для двух конечно порожденных групп, $A \leq B$. Пусть выделены конечные порождающие множества X и Y в группах A и B соответственно. Можно рассмотреть функцию

$$\text{disto}(n) = \max_{|g|_Y \leq n} |g|_X,$$

которая характеризует искривление подгруппы A при ее вложении в B и называется *функцией искривления подгруппы A в B* . Легко понять, что при замене множеств порождающих функция искривления $\text{disto}(n)$ меняется не сильно. Читатель сам без труда может выписать соответствующие неравенства. Можно поэтому говорить о линейном, квадратичном, полиномиальном, экспоненциальном и т. п. искривлении. Вопрос об искривлении интересен еще и тем, что он связан с так называемой проблемой вхождения. Пусть имеются две конечно порожденные группы A и B , где $A \leq B$. *Проблема вхождения* элементов группы B в подгруппу A — это вопрос о существовании алгоритма, который по данному групповому слову от порождающих группы B выясняет, принадлежит ли элемент группы B , задаваемый этим словом, подгруппе A . Проблема вхождения элементов группы B в подгруппу A разрешима тогда и только тогда, когда функция искривления $\text{disto}(n)$, определенная выше, рекурсивна (эквивалентно, имеет рекурсивную сверху оценку).

Представляют интерес вопросы о том, при каких условиях все конечно порожденные подгруппы в данной группе будут вкладываться в нее (или в любую ее конечно порожденную подгруппу) без искривления. Таким свойством обладают свободные группы, а также абелевы группы. Уже для случая нильпотентных групп ситуация принципиально меняется: в любой нильпотентной неабелевой группе без кручения имеются циклические подгруппы, которые не вкладываются в данную группу изометрично. Заметим, что заведомо не всякая группа диаграмм обладает таким свойством, так как в силу классического результата К. А. Михайловой [33] уже в группе $\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$ имеются конечно порожденные подгруппы с неразрешимой проблемой вхождения.

Отметим два недавних результата Бурильо [7]: он доказал, что любая циклическая подгруппа в группе F вкладывается в нее без искривления, а также указал квазиизометричные вложения в группу F подгрупп, изоморфных $F \times \mathbb{Z}^n$ ($n \geq 1$) и $F \times F$.

Естественно возникает вопрос о том, не будет ли любая конечно порожденная подгруппа в F вкладываться квазиизометрично. Мы даем на этот вопрос отрицательный ответ. А именно, для любого натурального $d \geq 2$ мы построим в F конечно порожденную подгруппу с функцией искривления не менее n^d . Заметим, что факт квазиизометричной вложимости циклических подгрупп в *любую* конечно порожденную группу, представимую диаграммами (а не только группу F), легко вытекает из [3; лемма 15.29]. Мы докажем еще более сильный результат.

ТЕОРЕМА 33. Пусть B – конечно порожденная подгруппа некоторой группы диаграмм G , и пусть A – конечно порожденная абелева подгруппа в B . Тогда A вкладывается в B квазиизометрично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что группы диаграмм не имеют кручения [3; теорема 15.11], поэтому подгруппа A изоморфна $\mathbb{Z}^m$ для некоторого натурального m . (Это, конечно, также следует и из теоремы 15.) Пусть $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$, где $\mathcal{P} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ – полугрупповое копредставление. Обозначим через $A_1, \dots, A_m$ сферические диаграммы с базой w , представляющие свободные порождающие подгруппы $A \cong \mathbb{Z}^m$. Так как эти элементы попарно коммутируют в G , можно применить теорему 17. Таким образом, мы имеем слово $v = v_1 \dots v_n$, сферические (v_j, v_j) -диаграммы Δ_j ($1 \leq j \leq n$), целые числа d_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) и некоторую (w, v) -диаграмму Γ такие, что

$$\Gamma^{-1} A_i \Gamma = \Delta_1^{d_{i1}} + \dots + \Delta_n^{d_{in}}$$

одновременно для всех $1 \leq i \leq m$. При этом каждая из диаграмм $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ является либо тривиальной, либо простой абсолютно приведенной. Сопряжение с помощью диаграммы Γ есть изоморфизм групп диаграмм $G = \mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ и $\mathcal{D}(\mathcal{P}, v)$. Поскольку при изоморфизме свойство квазиизометричной вложимости, очевидно, не меняется, мы можем без ограничения общности считать, что B есть подгруппа в $\mathcal{D}(\mathcal{P}, v)$.

Нам достаточно доказать, что $\ell_A \preceq \ell_B$. Рассмотрим диаграммы

$$\Delta'_j = \varepsilon(v_1 \dots v_{j-1}) + \Delta_j + \varepsilon(v_{j+1} \dots v_n)$$

для всех j от 1 до n . Обозначим через $\Psi_1, \dots, \Psi_r$ те из диаграмм $\Delta'_1, \dots, \Delta'_n$, которые являются нетривиальными. Они образуют базис X свободной абелевой подгруппы C . Поскольку A вкладывается в C квазиизометрично, имеем $\ell_A \sim \ell_C$. Для любого элемента группы $\mathcal{D}(\mathcal{P}, v)$, представленного приведенной диаграммой Δ , через $\#(\Delta)$ обозначим число клеток в Δ . Таким образом, $\#$ есть функция на группе диаграмм. Пусть Y – конечное множество порождающих группы B , и пусть K – максимальное число клеток, которое имеют диаграммы из B . Тогда очевидно, что $\#(\Delta) \leq K|\Delta|_Y$ для любой диаграммы Δ из B . Тем самым мы имеем $\# \preceq \ell_B$. Пусть $s_1, \dots, s_r$ – произвольные целые числа. Рассмотрим элемент $\Delta = \Psi_1^{s_1} \dots \Psi_r^{s_r}$ группы C . Из того факта, что все диаграммы Δ_j ($1 \leq j \leq n$) абсолютно приведены, а также из определения диаграмм Ψ_k ($1 \leq k \leq r$) легко следует, что $\#(\Delta) = |s_1|\#(\Psi_1) + \dots + |s_r|\#(\Psi_r)$. Поскольку $|\Delta|_X = |s_1| + \dots + |s_r|$, мы можем вывести неравенство $|\Delta|_X \leq \#(\Delta) \leq K'|\Delta|_X$, где K' – максимальное число клеток среди диаграмм множества X . Поэтому $\ell_C \sim \#$.

Суммируя сказанное, мы приходим к выводу о том, что $\ell_A \sim \ell_C \sim \# \preceq \ell_B$, что вместе с очевидным неравенством $\ell_B \preceq \ell_A$ дает требуемую эквивалентность $\ell_A \sim \ell_B$.

Теорема доказана.

Рассмотрим группу F , возьмем произвольный элемент $g \in F$ и его централизатор $C_F(g)$ в F . В [3; следствие 15.36] мы дали описание централизаторов в группе F : они являются конечными прямыми суммами групп, изоморфных либо F , либо $\mathbb{Z}$. В частности, все они конечно порождены. Уточним здесь, что если элемент

$g \in F$ представлен диаграммой Δ , то для нахождения его централизатора нужно найти абсолютно приведенную диаграмму Δ' , сопряженную Δ (что делается эффективно в силу [3; лемма 15.14]), и разложить Δ' в сумму (сферических) компонент. Каждой тривиальной компоненте сопоставим группу F , каждой нетривиальной – группу $\mathbb{Z}$, беря затем прямое произведение этих групп. Легко понять, что при этом получаются в точности группы вида $F^m \times \mathbb{Z}^n$, где $0 \leq m \leq n + 1$.

Следующая теорема усиливает результаты Бурильо из [7], где установлено, что в F имеется квазиизометрично вложенная подгруппа, изоморфная $F \times F$ (предложение 9), а также для любого $n \geq 1$ имеются квазиизометрично вложенные в F подгруппы, изоморфные $F \times \mathbb{Z}^n$ (следствие 6). Хотя группа $F \times F$ не может быть централизатором никакого элемента из F , она вкладывается без искривления в $F^2 \times \mathbb{Z}$, а последняя группа является централизатором некоторого элемента. Отсюда прямо выводится первый из цитированных результатов.

ТЕОРЕМА 34. *Для любого элемента $g \in F$ группы F централизатор $C_F(g)$ этого элемента вкладывается в F квазиизометрично.*

Вначале нам понадобится одна лемма, заключение которой несложно получается как следствие [7; предложение 2]. Мы дадим непосредственное доказательство нужного нам факта.

Пусть $\mathcal{P} = \langle x \mid x^2 = x \rangle$. Для любого $k \geq 1$ через $\#_k(g)$ обозначим количество клеток в приведенной сферической диаграмме с базой x^k , задающей элемент $g \in F \cong \mathcal{D}(\mathcal{P}, x^k)$. Число $|g|$ есть длина элемента $g \in F$ относительно множества порождающих $\{x_0, x_1\}$.

ЛЕММА 35. *Для любого $g \in F$ справедливы неравенства*

$$\frac{|g|}{3} \leq \#_3(g) \leq 2|g|.$$

При любом натуральном k функция $\#_k$ эквивалентна функции длины $|\cdot|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диаграммы, соответствующие путям

$$(x^2, x \rightarrow x^2, 1)(1, x^2 \rightarrow x, x^2) \quad \text{и} \quad (x, x \rightarrow x^2, x)(1, x^2 \rightarrow x, x^2),$$

из двух клеток каждая, задают элементы x_0, x_1 группы $F \cong \mathcal{D}(\mathcal{P}, x^3)$. Если g – элемент длины n , то он представим диаграммой с базой x^3 , которая имеет не более $2n$ клеток. Второе неравенство этим доказано.

Докажем первое неравенство. Пусть элемент g представлен приведенной диаграммой Δ с базой x^3 . Самый длинный позитивный путь в диаграмме из $\iota(\Delta)$ в $\tau(\Delta)$ разрезает диаграмму на две части – положительную и отрицательную. Количество клеток в каждой из частей одинаково; пусть оно равно m . Тогда $\#_3(g) = 2m$. Самый длинный позитивный путь, как легко видеть, имеет длину $m + 3$. Представим элемент g нормальной формой: $g = g_1 g_2^{-1}$, где каждый из элементов g_1, g_2 является положительным, т.е. представим в виде произведения положительных степеней порождающих. Так как $|g| \leq |g_1| + |g_2|$, достаточно оценить длину элемента g_1 , а для длины g_2 справедлива аналогичная оценка. Итак,

пусть $g_1 = x_0^j x_{i_1} \dots x_{i_s}$, где $s \geq 0$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s$, — нормальная форма элемента g_1 . Для каждого $i \geq 1$ заменим x_i на равный ему в F элемент $x_0^{1-i} x_1 x_0^{i-1}$. Тогда мы получим, что g_1 равен в F слову

$$x_0^{j-i_1+1} x_1 x_0^{i_1-i_2} x_1 \dots x_0^{i_{s-1}-i_s} x_1 x_0^{i_s-1},$$

длина которого равна

$$|j - i_1 + 1| + (i_2 - i_1) + \dots + (i_s - i_{s-1}) + i_s - 1 + s = 2i_s - i_1 + |j - i_1 + 1| + s - 1.$$

При $s = 0$ эта длина равна j .

В соответствии с процедурой сопоставления диаграмме нормальной формы, описанной в разделе 1, имеем неравенство $s + j \leq m$. При $s \geq 1$ элемент x_{i_s} соответствует ребру $(x^t, x \rightarrow x^2, x^{i_s})$ комплекса Сквайера, где $t \geq 1$, а потому в диаграмме Δ есть позитивный путь с меткой x^{t+2+i_s} , откуда вытекает неравенство $t + 2 + i_s \leq m + 3$, т.е. $i_s \leq m$.

Рассмотрим два случая.

а) $j \geq i_1 - 1$ или $s = 0$. Имеем $|g_1| \leq 2i_s + j + s - 2i_1 \leq 3m - 2$ при $s \geq 1$, а при $s = 0$ получаем $|g_1| = j \leq m$.

б) $s \neq 0$, $j < i_1 - 1$. В этом случае $|g_1| \leq 2i_s + s - j - 2 \leq 3m - 2$.

Подытоживая, заключаем, что всегда $|g_1| \leq 3m$ и $|g_2| \leq 3m$. Следовательно, $|g| \leq 6m = 3\#_3(g)$, что и требовалось доказать.

Наконец, осталось заметить, что $|\#_k(g) - \#_3(g)| \leq 2|k - 3|$, так как диаграмма, представляющая элемент g в группе $\mathcal{D}(\mathcal{P}, x^k)$, получается из Δ при помощи сопряжения диаграммой из $|k - 3|$ клеток. Отсюда следует, что функции $\#_k$ и $\#_3$ эквивалентны (надо использовать тот факт, что $\#_k(g) = 0$ в том и только том случае, когда $g = 1$).

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 34. Пусть $g \in G$ — произвольный элемент. Представим его (x, x) -диаграммой и приведем эту диаграмму к абсолютно приведенной форме путем сопряжения. Получим некоторую диаграмму Δ с базой x^k . В силу леммы 35 функция длины в F эквивалентна функции $\#_k$. Пусть $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_m$ — разложение диаграммы Δ в сумму компонент, где Δ_i — сферическая диаграмма с базой z_i ($1 \leq i \leq m$). При этом любой элемент из централизатора Δ есть сумма (z_i, z_i) -диаграмм при i от 1 до m , причем i -е слагаемое коммутирует с Δ_i . Для каждого i от 1 до m пусть $G_i = F$, если Δ_i тривиальна, и $G_i = \mathbb{Z}$, если Δ_i нетривиальна. При этом $C_F(g) \cong G_1 \times \dots \times G_m$. Выберем систему порождающих в каждой из групп G_i : если $G_i = F$, то система порождающих состоит из x_0, x_1 , а при $G_i = \mathbb{Z}$ система состоит из одного порождающего циклической группы. Эти системы порождающих задают некоторую систему порождающих Y централизатора элемента Δ . Ясно, что любой элемент h из централизатора представим единственным образом в виде $h_1 \dots h_m$, где $h_i \in G_i$ при $1 \leq i \leq m$, причем $|h|_Y = |h_1|_1 + \dots + |h_m|_m$ (через $|\cdot|_i$ обозначена длина в G_i относительно выбранного множества порождающих). Так как число клеток в Δ равно сумме количества клеток в диаграммах Δ_i ($1 \leq i \leq m$), то из эквивалентности функции длины и количества клеток диаграммы легко следует эквивалентность функции $|\cdot|_Y$ и

функции длины в группе $F \cong \mathcal{D}(\mathcal{P}, x^k)$, а это означает, что вложение $C_F(g)$ в g квазиизометрично. (Если $G_i = F$, то мы применяем лемму 35, а в случае $G_i = \mathbb{Z}$ эквивалентность функции длины и количества клеток очевидна.)

Теорема доказана.

Прежде чем перейти к доказательству следующего результата о подгруппах в F , вложенных с искривлением, рассмотрим следующую конструкцию, восходящую к [33]. Пусть H – группа, порожденная конечным множеством X , R – конечное подмножество в H , N – нормальное замыкание множества R в H . Рассмотрим подгруппу K в $H \times H$, порожденную всеми элементами вида (x, x) , где $x \in X$, а также всеми элементами вида $(r, 1)$, где $r \in R$. Легко видеть, что для любых $g, h \in H$ элемент (g, h) лежит в K тогда и только тогда, когда смежные классы элементов g и h по подгруппе N равны. Это доказывается точно так же, как в [33]; см. также [29].

Можно рассмотреть аналог функции Дэна для данной ситуации: для любого элемента $g \in N$ через $k(g)$ обозначим наименьшее число k , для которого элемент g равен в группе H произведению k элементов, сопряженных в H элементам из R либо обратным к ним. Положим

$$\Phi(n) = \max_{|g| \leq n} k(g),$$

где $|g|$ – длина элемента g относительно множества порождающих X . Эту функцию можно назвать *функцией Дэна задания $\langle X | R \rangle$ относительно H* ; ясно, что если H свободна, то это обычная функция Дэна.

Обозначим через Y указанное выше множество порождающих группы K . Допустим, что элемент $(g, 1) \in K$ представим в виде произведения m элементов, каждый из которых принадлежит множеству $Y^{\pm 1}$. Тогда в K имеет место равенство

$$(g, 1) = (u_0, u_0)(r_1, 1)^{\varepsilon_1}(u_1, u_1) \dots (r_m, 1)^{\varepsilon_m}(u_m, u_m),$$

где $u_0, u_1, \dots, u_m \in H$, $r_1, \dots, r_m \in R$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1$. Следовательно, в H выполнены равенства $g = u_0 r_1^{\varepsilon_1} u_1 \dots r_m^{\varepsilon_m} u_m$, $1 = u_0 u_1 \dots u_m$. Тогда

$$g = u_0 u_1 \dots u_m r_1^{\varepsilon_1 u_1 \dots u_m} \dots r_m^{\varepsilon_m u_m} = r_1^{\varepsilon_1 u_1 \dots u_m} \dots r_m^{\varepsilon_m u_m}.$$

Из этого следует неравенство $k(g) \leq m$. В частности, представляя $(g, 1)$ в виде наименьшего возможного числа порождающих из $Y^{\pm 1}$, мы приходим к неравенству $k(g) \leq |(g, 1)|_K$. Для любого натурального n имеется элемент $g \in H$ такой, что $|g|_X \leq n$, $\Phi(n) = k(g)$. Группа $H \times H$ обладает естественным множеством порождающих $Z = (X \times \{1\}) \cup (\{1\} \times X)$; ясно, что $|(g, 1)|_Z \leq |g|_X \leq n$, но при этом $|(g, 1)|_K \geq k(g) = \Phi(n)$. Из определения функции искривления следует, что $\text{disto}(n) \geq \Phi(n)$, где речь идет о вложении K в $H \times H$. Мы доказали следующую лемму.

ЛЕММА 36. Пусть H – группа, порожденная конечным множеством X , R – конечное подмножество в H . Рассмотрим подгруппу K в $H \times H$, порожденную множеством Y , состоящим из элементов вида (x, x) , где $x \in X$, и элементов вида $(r, 1)$, $r \in R$. Тогда имеет место неравенство

$\text{disto}(n) \geq \Phi(n)$, где $\text{disto}(n)$ есть функция искривления для вложения группы K с множеством порождающих Y в группу $H \times H$ с множеством порождающих $Z = (X \times \{1\}) \cup (\{1\} \times X)$, а $\Phi(n)$ — функция Дэна задания $\langle X | R \rangle$ относительно группы H .

Важное свойство группы F состоит в том, что $F \times F$ вложима в F . Поэтому для получения подгруппы с искривлением в F нам следует взять такую подгруппу H с конечным множеством порождающих X и такое конечное подмножество R в H , что функция Дэна задания $\langle X | R \rangle$ относительно H будет строго выше линейной. Тогда в обозначениях, введенных выше, мы получим вложение K в $H \times H$, последняя же группа вкладывается в $F \times F$, а потому и в F . При этом вложение K в F не будет квазиизометричным. Заметим, что если взять $H = F$, $R = \{[x_0, x_1]\}$, то *относительная* функция Дэна будет линейной, несмотря на то, что абсолютная (т.е. взятая относительно свободной группы с множеством порождающих $\{x_0, x_1\}$) функция Дэна будет квадратичной. Рассмотрим на примере то, как можно построить подгруппу в F с не менее чем квадратичным искривлением; последующая теорема будет обобщением данного примера.

ПРИМЕР 37. Пусть $H = \mathbb{Z} \text{ wr } \mathbb{Z}$ — подгруппа в F , построенная в § 4. Обозначим ее порождающие через a и b . Пусть при этом элементы $a_n = a^{b^n}$ ($n \in \mathbb{Z}$) образуют базис свободной абелевой подгруппы. В качестве R возьмем множество, состоящее из одного элемента $[a, b] = a_0^{-1}a_1$. Сопрягая данный элемент всевозможными элементами группы H , получим все элементы вида $c_i = a_i^{-1}a_{i+1}$ ($i \in \mathbb{Z}$). Очевидно, что элементы вида c_i также образуют базис свободной абелевой группы. Рассмотрим элемент $g_n = [a^n, b^n] = a_0^{-n}a_n^n \in H$. Его длина относительно множества порождающих $\{a, b\}$ не превосходит $4n$. В то же время справедливо равенство $g_n = c_0^n c_1^n \dots c_{n-1}^n$, которое показывает, что g_n представим в виде произведения n^2 элементов вида c_i ($i \in \mathbb{Z}$). Из того, что элементы вида c_i образуют базис свободной абелевой подгруппы, очевидно, что g_n не представим в виде произведения, состоящего менее чем из n^2 сомножителей вида $c_i^{\pm 1}$. Отсюда следует, что функция Дэна $\Phi(n)$ задания $\langle a, b | [a, b] \rangle$ относительно H удовлетворяет неравенству $\Phi(4n) \geq n^2$. Пусть K — подгруппа в $H \times H$, порожденная элементами (a, a) , (b, b) , $([a, b], 1)$. Лемма 36 показывает, что функция искривления disto , характеризующая вложение K в $H \times H$, не менее чем квадратична. В частности, K вложена в $H \times H$ не квазиизометрично. Остается вложить $H \times H$ в $F \times F$, а затем в F . С учетом того, что $\ell_F \preceq \ell_{H \times H}$, мы получаем, что K вкладывается в F не квазиизометрично.

Можно указать явно (т.е. в терминах нормальных форм) порождающие подгруппы в F , изоморфной K . Элементы $a = x_1 x_2 x_1^{-2}$ и $b = x_0$ порождают в F подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z} \text{ wr } \mathbb{Z}$. Правила $(x_0, 1) \mapsto x_1 x_2 x_1^{-2}$, $(x_1, 1) \mapsto x_1^2 x_2 x_1^{-3}$, $(1, x_0) \mapsto x_2 x_3 x_2^{-2}$, $(1, x_1) \mapsto x_2^2 x_3 x_2^{-3}$ задают вложение $F \times F$ в F . Пользуясь этим, нетрудно вычислить порождающие группы K . Следующие элементы группы F порождают подгруппу, изоморфную K :

$$\begin{aligned} & x_1^2 x_2^2 x_6^2 x_7^{-1} x_7^{-1} x_6^{-2} x_3^{-1} x_2^{-1} x_1^{-2}, \\ & x_1 x_2 x_4 x_5 x_4^{-2} x_1^{-2}, \\ & x_1^3 x_2^2 x_5 x_6 x_5^{-2} x_3^{-1} x_2^{-1} x_1^{-3}. \end{aligned}$$

Теперь докажем результат об искривленных подгруппах в F в общем виде.

ТЕОРЕМА 38. *Для любого натурального $d \geq 2$ существует конечно порожденная подгруппа K_d в группе F такая, что соответствующая функция искривления удовлетворяет неравенству $n^d \leq \text{disto}(n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим по индукции группы H_k ($k \geq 0$) следующим образом. Положим $H_0 = 1$, $H_{k+1} = H_k \text{ wr } \langle a_{k+1} \rangle$ при $k \geq 0$, где все группы вида $\langle a_k \rangle$ бесконечные циклические. Согласно следствию 20 все они вкладываются в F . Зафиксируем число $d \geq 2$ и рассмотрим группу $H_d \times H_d$, которая также вкладывается в F . Для любых натуральных k, n зададим элемент $g_k(n)$ как левонормированный коммутатор

$$g_k(n) = [a_1^n, a_2^n, \dots, a_k^n],$$

определяемый индукцией по k : $g_1(n) = a_1^n$, $g_{k+1}(n) = [g_k(n), a_{k+1}^n]$ при $k \geq 1$.

Элемент $g_k(1)$ будем обозначать просто через g_k . В качестве R_d возьмем одноэлементное множество, состоящее из $g_d = [a_1, a_2, \dots, a_d]$.

Назовем *основными* элементы группы H_d вида

$$a_i(t_1, \dots, t_r) = a_i^{a_{i+1}^{t_1} \dots a_{i+r}^{t_r}},$$

где $1 \leq i \leq d$, $0 \leq r \leq d - i$, $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{Z}$. При $r = 0$ получается элемент a_i . При этом, очевидно, $a_i = a_i(0) = a_i(0, 0) = \dots$ и т.д. Вообще, в записи основного элемента мы имеем право дописывать нули к последовательности $t_1, \dots, t_r$ так, чтобы число членов получившейся последовательности в скобках после a_i не превосходило $d - i$.

Рассмотрим два элемента $w_i = a_i(s_{i+1}, \dots, s_d)$ и $w_j = a_j(t_{j+1}, \dots, t_d)$, где $1 \leq i \leq j \leq d$, а s_k ($i < k \leq d$) и t_k ($j < k \leq d$) — произвольные целые числа. (Ясно, что любые два основных элемента можно представить в таком виде.) Если последовательность $t_{j+1}, \dots, t_d$ не является концом последовательности $s_{i+1}, \dots, s_d$, то элементы w_i и w_j коммутируют. Действительно, в этом случае можно выбрать наибольшее k , при котором $s_k \neq t_k$. Сопряжение при помощи элемента, обратного к $a_{k+1}^{s_{k+1}} \dots a_d^{s_d} = a_{k+1}^{t_{k+1}} \dots a_d^{t_d}$, переводит элементы w_i, w_j соответственно в элементы $w'_i = a_i(s_{i+1} \dots s_k) \in H_{k-1}^{a_k^{s_k}}$, $w'_j = a_j(t_{j+1} \dots t_k) \in H_{k-1}^{a_k^{t_k}}$. Но из элементарных свойств сплетений ясно, что в группе вида $G \text{ wr } \langle z \rangle$, где z порождает $\mathbb{Z}$, подгруппы G^{z^s} и G^{z^t} поэлементно коммутируют для любых целых $s \neq t$. Если теперь последовательность $t_{j+1}, \dots, t_d$ является концом последовательности $s_{i+1}, \dots, s_d$, т.е. $s_k = t_k$ при $j < k \leq d$, то элементы w_i и w_j совпадают в случае $i = j$, а в случае $i < j$ можно записать $w_i = a_i(s_{i+1}, \dots, s_j)^v$, $w_j = a_j^v$, где $v = a_{j+1}^{s_{j+1}} \dots a_d^{s_d}$. Тогда для любого $\ell \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} w_i^{w_j^\ell} &= (a_i(s_{i+1}, \dots, s_j)^v)^{a_j^{\ell v}} = (a_i(s_{i+1}, \dots, s_j)^{a_j^\ell})^v = a_i^{a_{i+1}^{s_{i+1}} \dots a_j^{s_j + \ell}} v \\ &= a_i(s_{i+1}, \dots, s_j + \ell, s_{j+1}, \dots, s_d). \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, мы получаем правило, с помощью которого можно сопрягать основной элемент степенью другого основного элемента.

Пусть $1 \leq k \leq d$. Рассмотрим нормальное замыкание M_k элемента a_1 в H_k . Из сказанного выше легко выводится, что M_k есть абелева группа, свободно порожденная множеством элементов

$$a_1(s_2, \dots, s_k) = a_1^{a_2^{s_2} \dots a_k^{s_k}},$$

где $s_2, \dots, s_k \in \mathbb{Z}$. Можно определить гомоморфизм $\phi_k: M_k \rightarrow \mathbb{Z}$ из M_k в аддитивную группу $\mathbb{Z}$ по следующему правилу: $\phi_k(a_1(s_2, \dots, s_k)) = s_2 \dots s_k$. Из этого определения вытекает, что при $k > 1$ для любого $h \in M_{k-1}$ и для любого $\ell \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство

$$\phi_k(h^{a_k^\ell}) = \ell \phi_{k-1}(h).$$

В частности, ϕ_k равно нулю на M_{k-1} .

Нашей целью является установление двух фактов.

1) Для любого $h \in H_k$ имеет место равенство $\phi_k(g_k^h) = 1$.

Заметим, что g_k очевидным образом принадлежит M_k , поэтому можно применить ϕ_k к любому элементу, сопряженному g_k .

2) При $1 \leq k \leq d$ элемент $g_k(n)$ принадлежит нормальному замыканию элемента g_k , причем $\phi_k(g_k(n)) = n^k$.

Сначала выведем из этих фактов заключение теоремы. Элементы $a_1, \dots, a_d$ порождают группу H_d . Длина элемента $g_d(n)$ в этих порождающих, очевидно, не превосходит Dn , где $D = 3 \cdot 2^{d-1} - 2$ — константа, не зависящая от n . Из двух упомянутых нами фактов ясно, что элемент $g_k(n)$, являясь произведением элементов, сопряженных g_d , не может быть представлен в виде произведения менее чем n^d элементов, сопряженных g_d или обратных к ним. В обозначениях леммы 36 это приводит к неравенству $\Phi(Dn) \geq n^d$, и применение этой леммы окончательно показывает, что $n^d \preceq \text{disto}(n)$.

Докажем первое утверждение. Применим индукцию по k . При $k = 1$, очевидно, $g_1 = a_1 \in M_1$, и $g_1^h = a_1$ при любом $h \in H_1 = \langle a_1 \rangle$. По определению, $\phi_1(a_1) = 1$. Пусть $k > 1$, $h \in H_k$. Тогда $g_k = [g_{k-1}, a_k] = g_{k-1}^{-1} g_{k-1}^{a_k} \in M_k$, поскольку $g_{k-1} \in M_{k-1}$ по предположению индукции. Имеем равенства

$$\phi_k(g_k^h) = \phi_k([g_{k-1}, a_k]^h) = \phi_k(g_{k-1}^{-h} g_{k-1}^{a_k h}) = \phi_k(g_{k-1}^{-h}) + \phi_k(g_{k-1}^{a_k h}).$$

Так как $\phi_k = 0$ на M_{k-1} , первое слагаемое равно нулю. Далее, элементы $g_{k-1}^{a_k} \in H_{k-1}^{a_k}$ и $h \in H_{k-1}$ коммутируют, что следует из определения сплетения. Следовательно, $g_{k-1}^{a_k h} = g_{k-1}^{a_k}$. Из свойств отображения ϕ_k , отмеченных выше, следует, что при любом $g \in M_{k-1}$ справедливо равенство $\phi_k(g^{a_k}) = \phi_{k-1}(g)$. Поэтому второе слагаемое равно $\phi_k(g_{k-1}^{a_k}) = \phi_{k-1}(g_{k-1}) = 1$ ввиду $g_{k-1} \in M_{k-1}$. В итоге $\phi_k(g_k^h) = 1$, что и требовалось доказать.

Докажем второе утверждение. Обозначим через N_k нормальное замыкание элемента g_k в H_k . Индукцией по k докажем, что $g_k(n) \in N_k$. При $k = 1$ это очевидно, так как $g_1(n) = a_1^n = g_1^n$. Пусть $k > 1$, и утверждение доказано для значений меньших k . Поскольку $g_k = [g_{k-1}, a_k]$, имеет место равенство $g_{k-1}^{a_k} = g_{k-1}$ по модулю N_k . В группе H_k любой элемент из $H_{k-1}^{a_k}$ коммутирует с любым элементом из H_{k-1} . Следовательно, g_{k-1} централизует H_{k-1} по модулю N_k . Тогда

по модулю N_k любой элемент из нормального замыкания g_{k-1} есть некоторая степень g_{k-1} , в частности, это справедливо для элемента $g_{k-1}(n)$ в силу предположения индукции. Так как g_{k-1} и a_k коммутируют по модулю N_k , выводим отсюда, что $g_k(n) = [g_{k-1}(n), a_k^n]$ равно единице в факторгруппе H_k/N_k , т.е. $g_k(n) \in N_k$.

Теперь индукцией по k докажем, что $\phi_k(g_k(n)) = n^k$ при $1 \leq k \leq d$. При $k = 1$ получим $\phi_1(g_1(n)) = \phi_1(a_1^n) = n\phi_1(a_1) = n$. Пусть $k > 1$; предположим, что $\phi_{k-1}(g_{k-1}(n)) = n^{k-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\phi_k(g_k(n)) &= \phi_k([g_{k-1}(n), a_k^n]) = \phi_k(g_{k-1}(n)^{-1}) + \phi_k(g_{k-1}(n)^{a_k^n}) \\ &= n\phi_{k-1}(g_{k-1}(n)) = n \cdot n^{k-1} = n^k\end{aligned}$$

(мы воспользовались свойствами отображения ϕ_k , тем, что $g_{k-1}(n) \in M_{k-1}$ и предположением индукции).

Теорема доказана.

Представляет интерес вопрос о том, какие еще функции могут быть реализованы как функции искривления конечно порожденных подгрупп в F . В частности, большой интерес представляет вопрос о том, может ли такая функция искривления не иметь рекурсивной сверху оценки. Дадим эквивалентную формулировку проблемы.

ПРОБЛЕМА 8. *Существует ли в группе F конечно порожденная подгруппа с неразрешимой проблемой вхождения?*

Список литературы

1. Kilibarda V. On the algebra of semigroup diagrams // PhD Thesis: Univ. of Nebraska-Lincoln, 1994.
2. Kilibarda V. On the algebra of semigroup diagrams // Internat. J. Algebra Comput. 1997. V. 7. №3. P. 313–338.
3. Guba V. S., Sapir M. V. Diagram groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1997. V. 130. №620. P. 1–117.
4. Pride S. J. Low-dimensional homotopy theory for monoids // Internat. J. Algebra Comput. 1995. V. 5. №6. P. 631–649.
5. Lothaire M. Combinatorics on words. Reading: Addison-Wesley, 1983.
6. Brown K. S. Finiteness properties of groups // J. Pure Appl. Algebra. 1987. V. 44. P. 45–75.
7. Burillo J. Quasi-isometrically embedded subgroups of Thompson's group F // J. Algebra. 1999. V. 212. №1. P. 65–78.
8. Каширицев Е. В. Графы и проблема слов для конечно-представленных полугрупп // Уч. зап. Тульского пед. ин-та. 1970. Т. 2. С. 290–302.
9. Remmers J. H. On the geometry of semigroup presentations // Adv. Math. 1980. V. 36. №3. P. 283–296.
10. Higgins P. M. Techniques of semigroup theory. New York: Oxford Univ. Press, 1992.
11. Stallings J. R. A graph-theoretic lemma and group-embeddings // Ann. of Math. Stud. 1987. V. 111. P. 145–155.
12. Cannon J. W., Floyd W. J., Parry W. R. Introductory notes on Richard Thompson's groups // Enseign. Math. (2). 1996. V. 42. №3–4. P. 215–256.
13. Guba V. Polynomial upper bounds for the Dehn function of R. Thompson's group F // J. Group Theory. 1998. V. 1. P. 203–211.
14. Guba V. S., Sapir M. V. The Dehn function and a regular set of normal forms for R. Thompson's group F // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1997. V. 62. №3. P. 315–328.

15. *Squier C. C., Otto F., Kobayashi Y.* A finiteness condition for rewriting systems // Theoret. Comput. Sci. 1994. V. 131. P. 271–294.
16. *Pride S. J.* Geometric methods in combinatorial group theory // Semigroups, formal languages and groups (York, UK, 1993). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 215–232.
17. *Serre J.-P.* Trees. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
18. *Haefliger A.* Complexes of groups and orbihedra // Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, Italy, 1990). Singapore: World Scientific, 1991. P. 504–540.
19. *Stillwell J.* Classical topology and combinatorial group theory. New York: Springer-Verlag, 1980.
20. *Саркисян Р. А.* Проблема сопряженности для наборов целочисленных матриц // Матем. заметки. 1979. Т. 25. № 6. С. 811–824.
21. *Grunewald F., Segal D.* Some general algorithms. 1. Arithmetic groups // Ann. of Math. (2). 1980. V. 112. P. 531–583.
22. *Brin M. G.* The ubiquity of Thompson's group F in groups of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval // J. London Math. Soc. (2) (to appear).
23. *Brin M. G., Squier C. C.* Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line // Invent. Math. 1985. V. 79. P. 485–498.
24. *Чеботарь А. А.* Подгруппы групп с одним определяющим соотношением, не содержащие свободных подгрупп ранга 2 // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. № 5. С. 570–586.
25. *Губа В. С.* О связи проблем равенства и делимости слов для полугрупп с одним определяющим соотношением // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 27–58.
26. *Bogley W. A.* Retractive maps and local collapsibility // PhD Thesis: Univ. of Oregon, 1987.
27. *Кузьмин Ю. В.* Об одном способе построения C -групп // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 4. С. 105–124.
28. *Кузьмин Ю. В.* Группы заузленных компактных поверхностей и центральные расширения // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 81–102.
29. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
30. *Gromov M.* Asymptotic invariants of infinite groups // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1993. V. 182. P. 1–125.
31. *Ol'shanskii A. Yu.* Distortion functions for subgroups // Geometric group theory down under (Canberra, Australia, 1996). Walter de Gruyter, 1999. P. 281–291.
32. *Ольшанский А. Ю.* Об искривлении подгрупп конечно-определенных групп // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 11. С. 51–98.
33. *Михайлова К. А.* Проблема вхождения для прямых произведений групп // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. № 6. С. 1103–1105.

Вологодский государственный педагогический университет;
Vanderbilt University (Nashville, TN)

Поступила в редакцию
19.11.1998 и 16.04.1999