Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Мамонтов, Существование глобальных решений многомерных уравнений Бюргерса сжимаемой вязкой жидкости, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 8, 61–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:20:46

УДК 517.953

А. Е. Мамонтов

Существование глобальных решений многомерных уравнений Бюргерса сжимаемой вязкой жидкости

Работа посвящена доказательству разрешимости “в целом” по времени и данным многомерных уравнений движения вязкой сжимаемой баротропной жидкости в приближении Бюргерса (при отсутствии давления). Применением техники пространств Орлича получены новые оценки для плотности и установлено существование слабых решений задачи в ограниченной области с условием прилипания на границе. Определяющее уравнение для напряжений при этом берется сильно нелинейное, т.е. коэффициенты вязкости являются быстро растущими функциями от инвариантов тензора скоростей деформации.

Доказано также, что всякое решение рассматриваемого класса удовлетворяет энергетическому тождеству и закону сохранения массы.

Библиография: 30 названий.

Введение

Напомним, что уравнения вязкой сжимаемой баротропной жидкости имеют вид (см. [1])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (0.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \operatorname{div} \mathbb{P} + \rho \mathbf{f}. \quad (0.2)$$

Здесь ρ обозначает плотность жидкости, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, $\mathbf{f}$ – вектор внешних массовых сил, $\mathbb{P}$ – тензор напряжений, t – время; операторы div и ∇ действуют по пространственным переменным $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

До недавнего времени не было известно результатов о глобальной по времени и начальным данным разрешимости системы (0.1), (0.2) в случае $n \geq 2$. Однако достаточно полно были исследованы: случай одномерного движения с плоскими волнами (см., например, [2]–[4]), некоторые многомерные приближенные модели [5]–[7], единственность классических решений [8], а также разрешимость, локальная по времени [9]–[13] или же по начальным данным [14]. Некоторые новые подходы в многомерной глобальной теории были предложены в [15], [16]. Первый результат о корректности “в целом” для двумерной системы (0.1), (0.2) получен в [17], причем это сделано в предположении о зависимости объемной вязкости λ от плотности. В пользу отказа от постоянных коэффициентов вязкости в глобальной

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00622).

теории уравнений (0.1), (0.2) говорит работа [18], в которой доказана существенная локальность решений, построенных в [9].

Переходя к трехмерной модели, мы сталкиваемся по крайней мере с теми же трудностями, что и в случае несжимаемой жидкости. Проблема трехмерных уравнений Навье–Стокса, как известно, остается открытой; этот барьер удалось в некотором смысле преодолеть лишь регуляризацией с помощью нелинейной вязкости [19]. Поэтому естественно попытаться использовать такую же возможность при наличии сжимаемости.

Помимо рассмотрения нелинейной вязкости, вторым опорным пунктом нашей работы является применение техники пространств Орлича при формулировке функциональных классов для плотности. О перспективности такого подхода к оценке плотности можно судить по работам [15], [17]. Понятия о пространствах Орлича и Соболева–Орлича можно найти в монографиях [20], [21], мы заимствуем оттуда терминологию и обозначения (с той лишь разницей, что в целях избежания путаницы с символом сопряженного пространства мы обозначаем пространство Орлича, порожденное N -функцией M , символом L_M , а не L_M^* , как в [20]).

Основными результатами данной работы являются: доказательство разрешимости уравнений (0.1), (0.2) “в целом” по времени и данным в классе слабых решений (теорема 3.6) и вывод энергетического равенства для всех решений данного класса (теорема 3.7). Последнее свойство играет важную роль в теории слабых решений уравнений гидродинамики; такие решения получили в англоязычной литературе название “suitable weak solutions” и до сих пор исследовались только в “несжимаемом случае” и в основном для энергетических неравенств (см., например, [22], [23]).

Перейдем к точной формулировке задачи. Систему (0.1), (0.2) необходимо замкнуть, задав определяющее уравнение для напряжений $\mathbb{P}$. Выбрав в качестве (единственного) критерия его “физичности” аксиомы Стокса [24], мы тем самым ограничиваем рассмотрение определяющими соотношениями вида

$$\mathbb{P} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (\rho, \operatorname{div} \mathbf{u}, |\mathbb{D}|^2, J_3(\mathbb{D}), \dots, J_n(\mathbb{D})) \mathbb{D}^k, \quad (0.3)$$

где $\mathbb{D}$ – тензор скоростей деформации с компонентами $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, J_s – его основные инварианты, а $|\mathbb{D}|^2 \equiv \mathbb{D} : \mathbb{D} = \sum_{i,j=1}^n D_{ij}^2$. Мы будем рассматривать частный случай уравнения (0.3):

$$\mathbb{P} = \lambda (|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2) \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbb{I} + 2\mu (|\mathbb{D}|^2) \mathbb{D}, \quad (0.4)$$

являющийся естественным обобщением определяющего соотношения в классической модели жидкости. В связи с отсутствием давления (и плотности вообще) в (0.4) систему уравнений (0.1), (0.2), (0.4) естественно назвать моделью Бюргерса с нелинейной вязкостью. Для этой системы дадим постановку первой начально-краевой задачи в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \geq 0, \quad \rho \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{w}, \quad (0.5)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0. \quad (0.6)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей, число $T > 0$ произвольно. Естественно предположить

$$\text{mes}(\{\rho_0 = 0\} \cap \{\mathbf{w} \neq 0\}) = 0. \quad (0.7)$$

Постановка начальных данных для импульса, а не скорости связана со слабой регулярностью рассматриваемых нами решений и отсутствием нижней оценки для плотности. Однако нам все же потребуется величина

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{w}(\mathbf{x})/\rho_0(\mathbf{x}), & \rho_0(\mathbf{x}) > 0, \\ \text{произвольным образом продолжено,} & \rho_0(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (0.8)$$

(строго говоря, целый набор величин), введение которой благодаря (0.7) корректно в том смысле, что $\mathbf{w} = \rho_0 \mathbf{u}_0$. В дальнейшем, предполагая выполненными какие-либо свойства начального поля скоростей $\mathbf{u}_0$, мы подразумеваем, что они справедливы хотя бы для одного из его продолжений в “область вакуума” $\{\rho_0 = 0\}$, и именно это продолжение будет браться в качестве начальных данных для скорости.

Коэффициенты вязкости мы принимаем в виде

$$\lambda(s) = \exp(\sqrt{s}), \quad \mu(s) = \exp(s^{\varepsilon_0}), \quad (0.9)$$

где $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$.

§1. Априорные оценки

Для удобства сформулируем используемые нами свойства компактности решений задачи (0.1), (0.2), (0.4), (0.9), (0.5), (0.6) в виде оценок ее классических решений (с неотрицательной плотностью). Фактически эти оценки будут нами применяться ниже к гладким приближенным решениям, которые строятся в §2.

Обозначим

$$\Lambda(s) = \int_0^s \lambda(\xi) d\xi, \quad M(s) = \int_0^s \mu(\xi) d\xi, \\ \Phi_\alpha(u) = (1+u) \ln^\alpha(1+u), \quad \alpha > 1, \quad \Phi_1(u) = (1+u) \ln(1+u) - u.$$

Функции Φ_α являются N-функциями [20], и мы можем вычислить дополнительные к ним N-функции Ψ_α ; так,

$$\Psi_1(v) = e^v - v - 1.$$

Введем пространства

$$X = \{ \mathbf{v}, \text{ измеримые в } \Omega : |\text{div } \mathbf{v}|^2 \in E_\Lambda(\Omega), |\mathbb{D}(\mathbf{v})|^2 \in E_M(\Omega), \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0 \}, \quad (1.1)$$

$$\overline{X} = \{ \mathbf{v}, \text{ измеримые в } \Omega : |\text{div } \mathbf{v}|^2 \in L_\Lambda(\Omega), |\mathbb{D}(\mathbf{v})|^2 \in L_M(\Omega), \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0 \} \quad (1.2)$$

с нормой

$$\|\mathbf{v}\|_X = \|\mathbf{v}\|_{\overline{X}} = (\| |\text{div } \mathbf{v}|^2 \|_{L_\Lambda(\Omega)} + \| |\mathbb{D}(\mathbf{v})|^2 \|_{L_M(\Omega)})^{1/2}. \quad (1.3)$$

Как следует из предложения 1.1, X и $\overline{X}$ вложены в $L_\infty(\Omega)$. Условимся говорить, что: $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}$ *-слабо в $\overline{X}$, если $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}$ *-слабо в $L_\infty(\Omega)$; $\operatorname{div} \mathbf{v}_m \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v}$ *-слабо в $L_{\Lambda((\cdot)^2)}(\Omega)$ и $\mathbb{D}(\mathbf{v}_m) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{v})$ *-слабо в $L_{M((\cdot)^2)}(\Omega)$. Как следует из свойств *-слабой топологии в пространствах Орлича [20], ограниченные множества в $\overline{X}$ *-слабо секвенциально компактны, а замыканием пространства X в этой топологии является все $\overline{X}$.

Сформулируем два вспомогательных утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (неравенство Корна). *Гладкие векторные поля $\mathbf{v}$ в Ω , исчезающие на границе, допускают при всех $p \in (1, +\infty)$ оценку*

$$\|\mathbf{v}\|_{W_p^1(\Omega)} \leq C_1(\Omega) \frac{p^2}{p-1} \|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_{L_p(\Omega)}. \quad (1.4)$$

Доказательство сводится к применению оценок для оператора Лапласа (которые можно найти, например, в [25]), поскольку

$$\Delta \mathbf{v} = 2 \operatorname{div}(\mathbb{D}(\mathbf{v})) - [\operatorname{tr} \mathbb{D}(\mathbf{v})] \cdot \mathbb{I}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *В условиях предложения 1.1 при $\alpha > 2$*

$$\|\nabla \otimes \mathbf{v}\|^2_{L_{\Psi_\alpha}(\Omega)} \leq C_2(\Omega) \|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|^2_{L_{\Psi_{\alpha-2}}(\Omega)}. \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.4) оператор $\mathbb{D}(\mathbf{v}) \rightarrow \nabla \otimes \mathbf{v}$ ограничен в $\mathcal{L}(L_p(\Omega))$ при $p \geq 2$ с нормой $2C_1(\Omega)p$. Следовательно (см. [26]), он ограничен также в $\mathcal{L}(L_R(\Omega), L_S(\Omega))$ с нормой $2C_1(\Omega)$, где $R(\xi) \simeq \exp(\xi^{\gamma/(1-\gamma)})$, $S(\xi) \simeq \exp(\xi^\gamma)$, а $\gamma < 1$ произвольно. Положив $\gamma = 2/\alpha$, получим (1.5), что и требовалось.

Целью данного параграфа является доказательство следующего утверждения.

ЛЕММА 1.3. *Пусть*

$$\alpha \geq 2 + \frac{1}{\varepsilon_0}. \quad (1.6)$$

Тогда всякое классическое решение системы (0.1), (0.2), (0.4), (0.9), (0.5), (0.6) в цилиндре Q_T такое, что $\rho \geq 0$, удовлетворяет следующим оценкам:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_{Q_T} (\lambda(|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + 2\mu(|\mathbb{D}|^2) |\mathbb{D}|^2) d\mathbf{x} dt \\ & \leq C_3 \equiv 2e^T \left(T \|\rho_0\|_{L_1(\Omega)} \|\mathbf{f}\|_{L_\infty(Q_T)}^2 + \int_{\Omega} \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 d\mathbf{x} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} & \|\rho\|_{L_\infty(0, T, L_{\Phi_\alpha}(\Omega))} \\ & \leq C_4 \equiv e^{\alpha(\ln \alpha + 1)T} [C_3 + 1 + (T + 4(e\alpha)^\alpha) \operatorname{mes} \Omega] \|\rho_0\|_{L_{\Phi_\alpha}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} (\lambda(|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2) + 2M(|\mathbb{D}|^2)) d\mathbf{x} \leq C_5 \equiv e^{2C_2 C_4 C_9 (C_3 + T)} \\ & \times \left(\int_{\Omega} (\lambda(|\operatorname{div} \mathbf{u}_0|^2) + 2M(|\mathbb{D}(\mathbf{u}_0)|^2)) d\mathbf{x} + 2 + 2T \|\rho_0\|_{L_1(\Omega)} \|\mathbf{f}\|_{L_\infty(Q_T)}^2 \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \rho \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} dt \\ & \leq C_6 \equiv 2TC_2 C_4 C_9 (2 + C_5) (T + C_3) + 2T \|\rho_0\|_{L_1(\Omega)} \|\mathbf{f}\|_{L_\infty(Q_T)}^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Энергетическая оценка (1.7) является простым следствием энергетического тождества

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\lambda(|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + 2\mu(|\mathbb{D}|^2) |\mathbb{D}|^2) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}$$

и закона сохранения массы $\|\rho(t, \cdot)\|_{L_1(\Omega)} = \|\rho_0\|_{L_1(\Omega)}$, справедливых для всех гладких решений рассматриваемой задачи.

Прежде чем доказывать (1.8)–(1.10), отметим неравенство

$$\Phi_1(v\Phi'_\alpha(v) - \Phi_\alpha(v)) \leq \alpha(\ln \alpha + 1)(\Phi_\alpha(v) + 4(e\alpha)^\alpha), \quad (1.11)$$

а также два следствия из (1.7) и неравенства Корна:

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \Psi_1(|\operatorname{div} \mathbf{u}|) d\mathbf{x} dt &\leq C_3 + T \operatorname{mes} \Omega, \\ \int_0^T \|\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega)}^2 dt &\leq \int_0^T C_7(\Omega) \|\mathbb{D}\|_{L_{2n}(\Omega)}^2 dt \\ &\leq C_8(\Omega) \int_{Q_T} (1 + |\mathbb{D}|^{2n}) d\mathbf{x} dt \\ &\leq C_9(\Omega)(T + C_3). \end{aligned} \quad (1.12) \quad (1.13)$$

Выписывая согласно (0.1) уравнение

$$\frac{\partial \Phi_\alpha(\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\Phi_\alpha(\rho)\mathbf{u}) + (\rho\Phi'_\alpha(\rho) - \Phi_\alpha(\rho)) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

и применяя в нем неравенство Юнга и оценку (1.11), получим неравенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi_\alpha(\rho) d\mathbf{x} \leq \alpha(\ln \alpha + 1) \int_{\Omega} (\Phi_\alpha(\rho) + 4(e\alpha)^\alpha) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Psi_1(\operatorname{div} \mathbf{u}) d\mathbf{x},$$

которое влечет оценку

$$\int_{\Omega} \Phi_\alpha(\rho) d\mathbf{x} \leq e^{\alpha(\ln \alpha + 1)T} \left(C_3 + T \operatorname{mes} \Omega + \int_{\Omega} \Phi_\alpha(\rho_0) d\mathbf{x} + 4(e\alpha)^\alpha \operatorname{mes} \Omega \right). \quad (1.14)$$

В силу линейности уравнения (0.1) по отношению к ρ оценка (1.14) имеет место также для величин ρ/C , ρ_0/C с любой постоянной C . Положив $C = \|\rho_0\|_{L_{\Phi_\alpha}(\Omega)}$, легко получим (1.8).

Наконец, перейдем к доказательству второй априорной оценки для скорости (1.9), (1.10). Интегрируя по Ω тождество

$$\operatorname{div} \left(\mathbb{P} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(M(|\mathbb{D}|^2) + \frac{1}{2} \Lambda(|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2) \right) + \rho \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 + \sqrt{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot ((\sqrt{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \sqrt{\rho} \mathbf{f}),$$

легко получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (2M(|\mathbb{D}|^2) + \Lambda(|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2)) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \rho \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 d\mathbf{x} dt \\ & \leq 2\|\rho_0\|_{L_1(\Omega)} \|\mathbf{f}\|_{L_{\infty}(Q_T)}^2 + 2\|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)}^2 \|\rho\|_{L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega)} \|\nabla \otimes \mathbf{u}\|_{L_{\Psi_{\alpha}}(\Omega)}, \end{aligned}$$

которое благодаря оценке

$$\|\nabla \otimes \mathbf{u}\|_{L_{\Psi_{\alpha}}(\Omega)}^2 \leq C_2 \|\mathbb{D}\|_{L_M(\Omega)}^2 \leq C_2 \left(1 + \int_{\Omega} M(|\mathbb{D}|^2) d\mathbf{x} \right),$$

вытекающей из (1.5), (1.6) и стандартного неравенства $\|\varphi\|_{L_N(\Omega)} \leq 1 + \int_{\Omega} N(\varphi) d\mathbf{x}$, “замыкается” и с учетом (1.8), (1.13) приводит к (1.9), а затем и к (1.10). На этом доказательство леммы 1.3 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Из оценки (1.9) следует

$$\|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(0,T,X)} \leq 2\sqrt{C_5}. \quad (1.15)$$

§ 2. Конструкция приближенных решений

Предположим, что в задаче (0.1), (0.2), (0.4), (0.9), (0.5), (0.6)

$$\mathbf{f} \in L_{\infty}(Q_T), \quad \rho_0 \in L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega), \quad \mathbf{u}_0 \in X \quad (2.1)$$

с α , удовлетворяющим (1.6). Это обеспечивает осмысленность величин C_3 – C_6 в правых частях оценок (1.7)–(1.10).

Известно [21], что пространства вида X сепарабельны и в них плотно $C^{\infty}(\Omega)$, поэтому можно составить счетный набор бесконечно дифференцируемых в Ω функций ω_j , ортонормированный в $L_2(\Omega)$ и такой, что его линейная оболочка плотна в X . Заменим данные ρ_0 , $\mathbf{u}_0$ последовательностью величин

$$\rho_{0m} \in C^{\infty}(\Omega), \quad \mathbf{u}_{0m} = \sum_{i=1}^m \alpha_{mi} \omega_i \quad (2.2)$$

таких, что

$$\rho_{0m} \geq 1/m, \quad \|\rho_{0m}\|_{L_1(\Omega)} \leq 2\|\rho_0\|_{L_1(\Omega)}, \quad \|\rho_{0m}\|_{L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega)} \leq 2\|\rho_0\|_{L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega)}, \quad (2.3)$$

$$\rho_{0m} \rightarrow \rho_0 \text{ сильно в } L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega), \quad \mathbf{u}_{0m} \rightarrow \mathbf{u}_0 \text{ сильно в } X \text{ при } m \rightarrow +\infty, \quad (2.4)$$

и будем искать приближенное решение рассматриваемой задачи в виде

$$\rho_m(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_m(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \gamma_{mj}(t) \omega_j(\mathbf{x})$$

как решение задачи

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_m(\mathbf{u}_m)_{1/m}) = 0, \quad (2.5)$$

$$\int_{\Omega} \left[\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} + ((\mathbf{u}_m)_{1/m} \cdot \nabla) \mathbf{u}_m \right) - \operatorname{div} \mathbb{P}(\mathbf{u}_m) - \rho_m \mathbf{f} \right] \cdot \omega_s d\mathbf{x} = 0, \quad (2.6)$$

$$s = 1, 2, \dots, m,$$

$$\rho_m|_{t=0} = \rho_{0m}, \quad \gamma_{mj}(0) = \alpha_{mj}. \quad (2.7)$$

Индекс $1/m$ в символе $(\mathbf{u}_m)_{1/m}$ обозначает усреднение по $\mathbf{x}$ с радиусом $1/m$.

Отметим, что соотношения (2.3), (2.4) гарантируют равномерную по m ограниченность величин, как мы их будем записывать, $C_3(m)$ – $C_6(m)$ в правых частях оценок $(1.7)_m$ – $(1.10)_m$, $(1.15)_m$ (так мы обозначим оценки (1.7)–(1.10), (1.15), примененные к задаче с данными (2.2)). Введем обозначения

$$C_{10}(t) = m \cdot \exp(t(Tm)^{n/2}(C_3(m) + T \operatorname{mes} \Omega)), \quad \beta_m = C_3(m)C_{10}(T),$$

$$T_0(m) = \left(\beta_m \max_{j=1,2,\dots,m} \|\operatorname{div} \omega_j\|_{L_{\infty}(\Omega)} \right)^{-1/2},$$

$$K_m(t) = \{ \gamma \in C(t, t + T_0(m)) \mid \|\gamma\|_{C(t, t+T_0(m))} \leq \beta_m \}.$$

Целью §2 является доказательство следующего утверждения.

ЛЕММА 2.1. *Задача (2.5)–(2.7) имеет в Q_T решение, удовлетворяющее оценкам $(1.7)_m$ – $(1.10)_m$ и такое, что $\rho > 0$.*

Для доказательства леммы 2.1 достаточно установить

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. *Пусть задано некоторое $\tau \in [0, T]$. Предположим, что решение задачи (2.5)–(2.7) существует в Q_{τ} , обладает свойством $\rho > 0$ и удовлетворяет в Q_{τ} оценкам $(1.7)_m$ – $(1.10)_m$, а также*

$$\frac{1}{\rho_m(\tau)} \leq C_{10}(\tau), \quad |\gamma_m(\tau)| \leq \beta_m \quad (2.8)$$

(в случае $\tau = 0$ утверждение “решение существует в Q_{τ} ” не имеет смысла, но мы полагаем его по определению справедливым). Тогда решение задачи (2.5)–(2.7) продолжается вплоть до $t = \tau + T_0(m)$ с сохранением оценок $(1.7)_m$ – $(1.10)_m$, свойства $\rho > 0$ и ограничений

$$\sup_{t \in (\tau, \tau + T_0(m))} \frac{1}{\rho_m(t)} \leq C_{10}(\tau + T_0(m)), \quad \gamma_m \in K_m(\tau). \quad (2.9)$$

В самом деле, при $\tau = 0$ предположения (2.8) выполнены в силу (2.3) (здесь следует отметить тождество $|\alpha_m| = \|\mathbf{u}_{0m}\|_{L_2(\Omega)}$), и глобальное решение строится за $[T/T_0(m)] + 1$ шагов последовательным применением утверждения 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2.2. Построим вполне непрерывный оператор, действующий в $K_m(\tau)$, неподвижной точкой которого будет составляющая γ_m искомого решения. А именно, задав произвольно $\gamma^0 \in K_m(\tau)$, найдем сначала функцию ξ из условий

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div}(\xi(\mathbf{u}^0)_{1/m}) = 0, \quad \xi|_{t=\tau} = \rho_m(\tau) \quad (2.10)$$

(здесь обозначено $\mathbf{u}^0 = \sum_{j=1}^m \gamma_j^0 \omega_j$), а затем построим вектор-функцию γ^1 как решение задачи

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\xi \left(\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial t} + ((\mathbf{u}^0)_{1/m} \cdot \nabla) \mathbf{u}^1 \right) - \operatorname{div} \mathbb{P}(\mathbf{u}^1) - \xi \mathbf{f} \right] \cdot \omega_s d\mathbf{x} = 0, \\ s = 1, 2, \dots, m, \quad \gamma_j^1|_{t=\tau} = \gamma_{mj}(\tau) \end{aligned} \quad (2.11)$$

(аналогично обозначено $\mathbf{u}^1 = \sum_{j=1}^m \gamma_j^1 \omega_j$). Поскольку ξ непрерывно и допускает оценку

$$\sup_{t \in (\tau, \tau + T_0(m))} \xi^{-1} \leq \sup(\rho_m(\tau))^{-1} \exp(T_0(m) \|\operatorname{div}(\mathbf{u}^0)_{1/m}\|_{L_1(\tau, \tau + T_0(m), L_{\infty}(\Omega))}), \quad (2.12)$$

то определитель матрицы Грама

$$\left\{ \int_{\Omega} \xi \omega_j \omega_s d\mathbf{x} \right\}_{j,s=1}^m$$

отделен от 0, так что уравнение (2.11) разрешается относительно $\frac{d\gamma^1}{dt}$ и по теореме Пеано имеет локальное решение. Более того, умножая это уравнение скалярно на вектор $\{\gamma_s^1\}_{s=1}^m$, получим энергетическое равенство для величин ξ , $\mathbf{u}^1$ и, “склеивая” его с соответствующим равенством для ρ_m , $\mathbf{u}_m$, имеющим место на $(0, \tau)$, придем к оценке

$$\int_{\Omega} \xi |\mathbf{u}^1|^2 d\mathbf{x} \leq C_3(m).$$

Эта оценка ввиду (2.12) гарантирует продолжимость γ^1 вплоть до $t = \tau + T_0(m)$, причем

$$\begin{aligned} \max_{t \in (\tau, \tau + T_0(m))} |\gamma^1|^2 &= \|\mathbf{u}^1\|_{L_{\infty}(\tau, \tau + T_0(m), L_2(\Omega))}^2 \leq \sup_{t \in (\tau, \tau + T_0(m))} \xi^{-1} \int_{\Omega} \xi |\mathbf{u}^1|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq C_3(m) C_{10}(\tau) \exp\left(T_0^2(m) \beta_m \max_{j=1,2,\dots,m} \|\operatorname{div} \omega_j\|_{L_{\infty}(\Omega)}\right) \leq \beta_m^2, \end{aligned}$$

т.е. оператор $B: \gamma^0 \rightarrow \gamma^1$ действует в $K_m(\tau)$.

Умножая (2.11) скалярно на $\left\{ \frac{d\gamma_s^1}{dt} \right\}_{s=1}^m$, аналогично (1.10) получим ограниченность B как оператора из $C(\tau, \tau + T_0(m))$ в $W_2^1(\tau, \tau + T_0(m))$, так что по теореме Шаудера существование искомой неподвижной точки этого оператора в $K_m(\tau)$

установлено. Эта точка вместе с соответствующим $\xi = \rho_m$ представляет решение (2.5)–(2.7) на $(\tau, \tau + T_0(m))$. Ввиду леммы 1.3 и сделанных выше пояснений о процедуре получения оценок для скорости из (2.11) справедливость оценок (1.7)_m–(1.10)_m для построенного решения установлена. Из них, в частности, вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div}(\mathbf{u}_m)_{1/m}\|_{L_1(\tau, \tau+T_0(m), L_\infty(\Omega))} &\leq (Tm)^{n/2} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_m\|_{L_2(Q_T)} \\ &\leq (Tm)^{n/2} (C_3(m) + T \operatorname{mes} \Omega), \end{aligned}$$

позволяющее вывести (2.9)₁ из (2.8)₁. Утверждение 2.2 доказано.

§3. Разрешимость основной задачи

В этом параграфе мы установим существование слабого решения задачи (0.1), (0.2), (0.4), (0.9), (0.5), (0.6), понимая под ним следующее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пара функций

$$\rho \in L_\infty(0, T, L_{\Phi_\alpha}(\Omega)), \quad \mathbf{u} \in L_\infty(0, T, \overline{X})$$

называется *слабым решением* задачи (0.1), (0.2), (0.4), (0.9), (0.5), (0.6), если $\rho \geq 0$,

$$(\lambda(|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2)|\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + 2\mu(|\mathbb{D}|^2)|\mathbb{D}|^2) \in L_1(Q_T) \quad (3.1)$$

и следующие интегральные тождества

$$\int_0^t \int_\Omega \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \right) d\mathbf{x} ds = \int_\Omega \rho \varphi|_{s=t} d\mathbf{x} - \int_\Omega \rho_0 \varphi(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \left[\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} + (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbb{P}(\mathbf{u})) : \mathbb{D}(\mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right] d\mathbf{x} ds \\ = \int_\Omega \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|_{s=t} d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.3)$$

выполнены для почти всех $t \in (0, T)$ и всех финитных вблизи $\partial\Omega \times (0, T)$ функций $\varphi, \mathbf{v} \in C^\infty(Q_T)$. При этом краевое условие (0.6) понимается в смысле обращения $\mathbf{u}$ в 0 на $\partial\Omega \times (0, T)$ как непрерывной по $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ функции (что следует из (3.1)) при почти всех $t \in (0, T)$.

Далее в §3 мы будем пользоваться обозначениями и свойствами негативных пространств Соболева–Орлича, изложенными в §4.

Первым шагом на пути обоснования предельного перехода в уравнениях (0.1), (0.2) является следующее утверждение, позволяющее перейти к пределу в конвективных членах.

ЛЕММА 3.2. *Существуют такие функции*

$$\rho \in L_\infty(0, T, L_{\Phi_\alpha}(\Omega)), \quad \rho \geq 0, \quad \text{и} \quad \mathbf{u} \in L_\infty(0, T, \overline{X}) \quad (3.4)$$

и такая подпоследовательность приближенных решений (снова обозначим ее $\rho_m, \mathbf{u}_m$), что

$$\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u}, \quad (\mathbf{u}_m)_{1/m} \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{* -слабо в } L_\infty(0, T, \overline{X}), \quad (3.5)$$

$$\rho_m \rightarrow \rho \quad \text{* -слабо в } L_\infty(0, T, L_{\Phi_\alpha}(\Omega)), \quad (3.6)$$

$$\rho_m \mathbf{u}_m \rightarrow \rho \mathbf{u}, \quad \rho_m (\mathbf{u}_m)_{1/m} \rightarrow \rho \mathbf{u} \quad \text{* -слабо в } L_\infty(0, T, L_{\Phi_\alpha}(\Omega)), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \rho_m \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{u}_m &\rightarrow \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \quad \rho_m \mathbf{u}_m \otimes (\mathbf{u}_m)_{1/m} \rightarrow \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \\ &\text{* -слабо в } L_\infty(0, T, L_{\Phi_\alpha}(\Omega)), \end{aligned} \quad (3.8)$$

причем при почти всех $t \in (0, T)$

$$\rho_m(t) \rightarrow \rho(t) \quad \text{* -слабо в } L_{\Phi_\alpha}(\Omega), \quad (3.9)$$

$$\rho_m \mathbf{u}_m(t) \rightarrow \rho \mathbf{u}(t) \quad \text{* -слабо в } L_{\Phi_\alpha}(\Omega), \quad (3.10)$$

$$\rho_m \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{u}_m(t) \rightarrow \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}(t) \quad \text{* -слабо в } L_{\Phi_\alpha}(\Omega). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценок (1.8)_m, (1.15)_m свойства (3.5) и (3.6) очевидны, причем $\rho \geq 0$. Отметим, что, вообще говоря, $\mathbf{u}$ не является элементом $L_\infty(0, T, X)$ и его нельзя приблизить ограниченными функциями в норме этого пространства.

Ограниченность последовательностей $\{\rho_m \mathbf{u}_m\}$ и $\{\rho_m (\mathbf{u}_m)_{1/m}\}$ в пространстве $L_\infty(0, T, L_{\Phi_\alpha}(\Omega))$ позволяет построить их (частичные) *-слабые пределы $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L_\infty(0, T, L_{\Phi_\alpha}(\Omega))$. Для доказательства совпадения $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \rho \mathbf{u}$ воспользуемся соображениями о компактности из [27]. А именно, из (2.5) вытекает ограниченность $\left\{ \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \right\}$ в пространстве $L_\infty(0, T, W^{-1} L_{\Phi_\alpha}(\Omega))$. Следовательно [27], мы можем считать, что

$$\rho_m \rightarrow \rho \quad \text{в норме } L_2(0, T, W_{\frac{2n}{2n-1}}^{-1}(\Omega)). \quad (3.12)$$

Вместе с (3.5) это позволяет доказать, что $\rho_m \mathbf{u}_m \rightarrow \rho \mathbf{u}$ слабо в $L_2(0, T, W_{\frac{2n}{2n-1}}^{-1}(\Omega))$, откуда $\mathbf{a} = \rho \mathbf{u}$, и аналогично $\mathbf{b} = \rho \mathbf{u}$. Одновременно из (3.12) (опять же после выделения подпоследовательности) следует (3.9).

Далее, используя (3.7), совершенно аналогично доказываем (3.6) и (3.10); достаточно проверить ограниченность последовательности $\left\{ \frac{\partial(\rho_m \mathbf{u}_m)}{\partial t} \right\}$ в пространстве $L_2(0, T, W^{-1} L_{\Phi_\alpha}(\Omega))$. Но, в самом деле, $\rho_m \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}$ ограничены благодаря оценкам (1.8)_m и (1.10)_m, а величины $\mathbf{u}_m \frac{\partial \rho_m}{\partial t}$ — ввиду предложения 4.6 и указанных выше оценок для их сомножителей (здесь мы опираемся на вложение X в $W^1 L_{\Phi_2}(\Omega)$, вытекающее из (1.5)).

Наконец, из тождества

$$\frac{\partial(\rho_m \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{u}_m)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho_m \mathbf{u}_m)}{\partial t} \otimes \mathbf{u}_m + \sqrt{\rho_m} \mathbf{u}_m \otimes \sqrt{\rho_m} \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}$$

и оценок (1.7)_m–(1.10)_m вытекает ограниченность $\left\{ \frac{\partial(\rho_m \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{u}_m)}{\partial t} \right\}$ в пространстве $L_2(0, T, W^{-1} L_{\Phi_\alpha}(\Omega))$, что влечет сходимость $\rho_m \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{u}_m \rightarrow \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ в норме $L_2(0, T, W^{-1}_{\frac{2n}{2n-1}}(\Omega))$ и, следовательно, (3.11). Лемма 3.2 доказана.

Из оценки (1.7)_m следует ограниченность последовательности $\{\mathbb{P}(\mathbf{u}_m)\}$ в пространстве $L_{\Phi_\beta}(Q_T)$, где $\beta = \min\{1; 1/(2\varepsilon_0)\}$. Следовательно, мы можем считать, что

$$\mathbb{P}(\mathbf{u}_m) \rightarrow \overline{\mathbb{P}} \quad * \text{-слабо в } L_{\Phi_\beta}(Q_T), \quad (3.13)$$

где $\overline{\mathbb{P}}$ – некоторый элемент пространства $L_{\Phi_\beta}(Q_T)$. Умножая (2.5) на функцию $\varphi \in C^\infty(Q_T)$, финитную вблизи $\partial\Omega \times (0, T)$, а (2.6) – на $\alpha \in C^\infty(0, T)$ (обозначим при этом $\mathbf{v} = \alpha \omega_s$) и интегрируя по Q_t и $(0, t)$ соответственно, получим равенства

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \rho_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + (\mathbf{u}_m)_{1/m} \cdot \nabla \varphi \right) d\mathbf{x} ds &= \int_\Omega \rho_m \varphi|_{s=t} d\mathbf{x} - \int_\Omega \rho_{0m} \varphi(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ \int_0^t \int_\Omega \left[\rho_m \mathbf{u}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} + (\rho_m \mathbf{u}_m \otimes (\mathbf{u}_m)_{1/m} - \mathbb{P}(\mathbf{u}_m)) : \mathbb{D}(\mathbf{v}) + \rho_m \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right] d\mathbf{x} ds \\ &= \int_\Omega \rho_m \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}|_{s=t} d\mathbf{x} - \int_\Omega \rho_{0m} \mathbf{u}_{0m} \cdot \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ввиду соотношений (2.4), (3.6)–(3.10) и (3.13) после перехода к пределу при $m \rightarrow \infty$ первое из написанных равенств даст (3.2), а второе примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \left[\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} + (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \overline{\mathbb{P}}) : \mathbb{D}(\mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right] d\mathbf{x} ds \\ = \int_\Omega \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|_{s=t} d\mathbf{x} - \int_\Omega \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Замыкая это равенство по отношению к $\mathbf{v}$, получаем, что оно имеет место для всех $\mathbf{v} \in C^1(0, T, X)$; при этом, однако, мы опираемся на утверждение “ $\mathbb{D}(\mathbf{v}) \in L_{\Psi_\beta}(Q_T)$ для всех $\mathbf{v} \in L_\infty(0, T, X)$ ”, справедливое лишь при $\beta \geq 1/(2\varepsilon_0)$, т.е. при

$$\varepsilon_0 \geq \frac{1}{2} \quad (3.15)$$

(в этом случае (1.6) заведомо выполнено при $\alpha \geq 4$).

Таким образом, если предположить (3.15), то для выполнения интегральных тождеств в определении 3.1 осталось показать $\operatorname{div} \overline{\mathbb{P}} = \operatorname{div} \mathbb{P}(\mathbf{u})$. Мы сделаем это, опираясь на монотонность $\mathbb{P}(\cdot)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если $\lambda(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$ являются неубывающими функциями, то для любой пары $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ гладких векторных полей всюду выполнено неравенство

$$(\mathbb{P}(\mathbf{v}) - \mathbb{P}(\mathbf{w})) : \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \geq 0. \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать $\lambda_v = \lambda(|\operatorname{div} \mathbf{v}|^2)$, $\mu_v = \mu(|\mathbb{D}(\mathbf{v})|^2)$ и аналогично λ_w и μ_w . Имеем тождество

$$\begin{aligned} & (\mathbb{P}(\mathbf{v}) - \mathbb{P}(\mathbf{w})) : \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= (\lambda_v \operatorname{div} \mathbf{v} - \lambda_w \operatorname{div} \mathbf{w})(\operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{w}) + 2(\mu_v \mathbb{D}(\mathbf{v}) - \mu_w \mathbb{D}(\mathbf{w})) : (\mathbb{D}(\mathbf{v}) - \mathbb{D}(\mathbf{w})), \end{aligned}$$

первое слагаемое в правой части которого неотрицательно, а второе оценивается снизу величиной $(\mu_v - \mu_w)(|\mathbb{D}(\mathbf{v})|^2 - |\mathbb{D}(\mathbf{w})|^2)$, также неотрицательной, что и требовалось.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Для всех $\mathbf{w} \in L_\infty(0, T, \overline{X})$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega (\overline{\mathbb{P}} - \mathbb{P}(\mathbf{w})) : \mathbb{D}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \, d\mathbf{x} \, ds &\geq \frac{1}{2} \int_\Omega \rho |\mathbf{u}|^2|_{s=t} \, d\mathbf{x} \\ &- \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 \, d\mathbf{x} + \int_0^t \int_\Omega (\overline{\mathbb{P}} : \mathbb{D}(\mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \, d\mathbf{x} \, ds. \end{aligned} \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.5)–(2.7) вытекает энергетическое равенство

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \mathbb{P}(\mathbf{u}_m) : \mathbb{D}(\mathbf{u}_m) \, d\mathbf{x} \, ds &= \int_0^t \int_\Omega \rho_m \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \, ds \\ &- \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_m |\mathbf{u}_m|^2|_{s=t} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_{0m} |\mathbf{u}_{0m}|^2 \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

в котором ввиду (2.4), (3.7) и (3.11) можно перейти к пределу (при почти всех t):

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t \int_\Omega \mathbb{P}(\mathbf{u}_m) : \mathbb{D}(\mathbf{u}_m) \, d\mathbf{x} \, ds &= \int_0^t \int_\Omega \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \, ds \\ &- \frac{1}{2} \int_\Omega \rho |\mathbf{u}|^2|_{s=t} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

С другой стороны, положив в (3.16) $\mathbf{v} = \mathbf{u}_m$, интегрируя по Q_t и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим неравенство

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t \int_\Omega \mathbb{P}(\mathbf{u}_m) : \mathbb{D}(\mathbf{u}_m) \, d\mathbf{x} \, ds &\geq \int_0^t \int_\Omega \overline{\mathbb{P}} : \mathbb{D}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} \, ds \\ &+ \int_0^t \int_\Omega \mathbb{P}(\mathbf{w}) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \, ds - \int_0^t \int_\Omega \mathbb{P}(\mathbf{w}) : \mathbb{D}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} \, ds, \end{aligned}$$

которое вместе с (3.18) приводит к (3.17). Предложение 3.4 доказано.

Отметим, что

$$\operatorname{div} \overline{\mathbb{P}} \in L_2(0, T, W^{-1}L_{\Phi_\alpha}(\Omega)). \quad (3.19)$$

В самом деле, записав (3.2), (3.14) в виде уравнения

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \rho \mathbf{f} = \operatorname{div} \overline{\mathbb{P}},$$

заметим, что все слагаемые в его левой части принадлежат $L_2(0, T, W^{-1}L_{\Phi_\alpha}(\Omega))$ как $\mathcal{D}'$ -пределы соответствующих ограниченных последовательностей, так что имеет место (3.19).

ТЕОРЕМА 3.5. *Всякая тройка функций ρ , $\mathbf{u}$, $\bar{\mathbb{P}}$ класса (3.4), (3.19), удовлетворяющая тождествам (3.2) и (3.14), удовлетворяет также энергетическому равенству*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2|_{s=t} d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int_{\Omega} \bar{\mathbb{P}} : \mathbb{D}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} ds - \int_0^t \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} ds = 0. \quad (3.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что

$$\left\| \rho \frac{\partial \mathbf{u}_{\xi}}{\partial t} \right\|_{L_2(0, T, W^{-1} L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega))} \leq C_{11}, \quad (3.21)$$

где C_{11} не зависит от ξ , а индекс ξ означает стекловское усреднение по t :

$$F_{\xi}(t, \mathbf{x}) = \xi^{-1} \int_t^{t+\xi} F(s, \mathbf{x}) ds.$$

В самом деле, (3.21) вытекает из тождества

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}_{\xi}}{\partial t} = \left(\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} \right)_{\xi} - \mathbf{u}(t + \xi) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\xi}$$

и предполагаемых в условиях теоремы свойств ρ , $\mathbf{u}$.

Замыкая тождества (3.2), (3.14) по отношению к φ и $\mathbf{v}$, мы видим, что они справедливы для $\varphi \in W_2^1(0, T, W^1 L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega))$ и $\mathbf{v} \in W_2^1(0, T, \bar{X})$, поскольку элементы указанных пространств можно приблизить гладкими по крайней мере $*$ -слабо. Подставив $\varphi = |\mathbf{u}_{\xi}|^2/2$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_{\xi}$ и вычитая одно тождество из другого, после алгебраических преобразований придем к равенству

$$\begin{aligned} [\text{левая часть (3.20)}] &= \left\langle \left(\rho \mathbf{f} - \rho \frac{\partial \mathbf{u}_{\xi}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\mathbb{P}} \right), \mathbf{u}_{\xi} - \mathbf{u} \right\rangle_{Q_t} \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\xi})) : (\nabla \otimes \mathbf{u})_{\xi} d\mathbf{x} ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\xi}|^2|_{s=t} d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\xi}|^2|_{s=0} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{u} \in L_2(0, T, W^1 L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega))$, то $\mathbf{u}_{\xi} \rightarrow \mathbf{u}$ в норме этого пространства и почти при всех t (для некоторой последовательности ξ_m) в норме $L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega)$. Этот факт вместе с (3.21) позволяет доказать сходимость к нулю (при почти всех t) первых трех слагаемых в правой части последнего равенства. В таком случае существует и предел γ четвертого слагаемого. Таким образом,

$$[\text{левая часть (3.20)}](t) = \gamma = \text{const}. \quad (3.22)$$

Так как $\rho |\mathbf{u}|^2 \in L_{\infty}(0, T, L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega))$ и $\frac{\partial(\rho |\mathbf{u}|^2)}{\partial t} \in L_2(0, T, W^{-1} L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega))$, то $\rho |\mathbf{u}|^2$ непрерывно по t в $*$ -слабой топологии $L_{\Phi_{\alpha}}(\Omega)$. Следовательно, переходя в (3.22) к пределу при $t \rightarrow 0$, видим, что γ может быть только нулем. Теорема 3.5 доказана.

Таким образом, правая часть неравенства (3.17) обращается в нуль. Полагая в (3.17) $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — гладкая и финитная вблизи $\partial\Omega \times (0, T)$ функция, и устремляя ε к нулю, придем стандартными рассуждениями к требуемому соотношению $\operatorname{div} \bar{\mathbb{P}} = \operatorname{div} \mathbb{P}(\mathbf{u})$. В результате доказано, что пара $\rho, \mathbf{u}$ удовлетворяет (3.2), (3.3) и энергетическому тождеству

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2|_{s=t} d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbb{P}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} ds = \int_0^t \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} ds. \quad (3.23)$$

Из (3.23) следует (3.1), т.е. пара $\rho, \mathbf{u}$ является слабым решением в смысле определения 3.1.

Суммируя все условия на данные задачи, возникшие при построении решения, мы можем сформулировать доказанные результаты в виде двух теорем.

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть коэффициенты вязкости в задаче (0.1), (0.2), (0.4), (0.5), (0.6) даются формулами (0.9), причем выполнено (3.15). Пусть также данные задачи удовлетворяют условиям (2.1) с $\alpha \geq 4$; число $T > 0$ произвольно. Тогда в Q_T существует решение указанной задачи в смысле определения 3.1. При этом уравнения (0.1), (0.2) выполнены как равенства в пространстве $L_2(0, T, W^{-1}L_{\Phi_\alpha}(\Omega))$, а начальные данные (0.5) принимаются по непрерывности в $*$ -слабой топологии $L_{\Phi_\alpha}(\Omega)$.*

ТЕОРЕМА 3.7. *Всякое слабое решение задачи (0.1), (0.2), (0.4), (0.5), (0.6), (0.9) в смысле определения 3.1 удовлетворяет при почти всех $t \in (0, T)$ энергетическому тождеству (3.23).*

Помимо закона энергетического баланса (3.23) слабые решения класса (3.4) удовлетворяют закону сохранения массы:

$$\int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.24)$$

Докажем это. Как указывалось выше, из (3.4) следует $\mathbf{u} \in L_\infty(0, T, W^1L_{\Psi_2}(\Omega))$, что, в свою очередь, влечет по теореме вложения в нестепенные классы Гёльдера [21]:

$$\mathbf{u} \in L_\infty(0, T, C^\sigma(\Omega)), \quad \sigma(r) = r \ln^2 \frac{1}{r}. \quad (3.25)$$

Взяв в (3.2) $\varphi = \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})$ такую, что $\varphi_\varepsilon = 1$ вне ε -окрестности Γ_ε границы $\partial\Omega$, мы видим, что для доказательства тождества (3.24) достаточно установить, что

$$J(\varepsilon) \equiv \int_0^t \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_\varepsilon d\mathbf{x} ds \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Но, в самом деле, можно считать, что $|\nabla \varphi_\varepsilon| \leq 2/\varepsilon$, и с помощью (3.25) выводим

$$|J(\varepsilon)| \leq \frac{2T}{\varepsilon} \max_{\Gamma_\varepsilon \times (0, T)} |\mathbf{u}| \cdot \|\rho\|_{L_\infty(0, T, L_{\Phi_\alpha}(\Omega))} \cdot \|1_{\Gamma_\varepsilon}\|_{L_{\Psi_\alpha}(\Omega)} \leq C_{12} \ln^{2-\alpha} \frac{1}{\varepsilon},$$

где C_{12} не зависит от ε (здесь использовано явное представление нормы характеристической функции 1_{Γ_ε} [20]), и за счет $\alpha > 2$ выводим (3.24).

§ 4. О негативных пространствах Соболева–Орлича

Понятия негативных пространств и их свойства, несмотря на стандартность, требуют уточнения в случае пространств Орлича. Основываясь на понятиях пространств Соболева–Орлича (данных в [21]), которых существует два типа: $W^1 L_\Psi$ и $W^1 E_\Psi$, мы вводим также два типа дуальных к ним негативных пространств, которые условно обозначаем $W^{-1} E_\Phi$ и $W^{-1} L_\Phi$ соответственно. Мы не будем различать пространства скалярных и векторнозначных функций, так как это не приводит к недоразумениям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть Φ – некоторая N-функция. Тогда

$$W^{-1} L_\Phi(\Omega) \equiv [\overset{\circ}{W}^1 E_\Psi(\Omega)]^*, \quad (4.1)$$

где Ψ – N-функция, дополнительная к Φ .

Регулярные функции $u \in L_\Phi(\Omega)$ понимаются как элементы пространства $W^{-1} L_\Phi(\Omega)$ в следующем стандартном смысле:

$$u \langle v \rangle = \int_{\Omega} uv \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}^1 E_\Psi(\Omega). \quad (4.2)$$

Очевидно, что если $w \in L_\Phi(\Omega)$, то $\nabla w \in W^{-1} L_\Phi(\Omega)$, причем

$$\|\nabla w\|_{W^{-1} L_\Phi(\Omega)} \leq \|w\|_{L_\Phi(\Omega)}. \quad (4.3)$$

Включение регулярных функций в пространство $W^{-1} L_\Phi(\Omega)$ по формуле (4.2) оправдывается следующим утверждением.

ЛЕММА 4.2. *Функции из $C_0^\infty(\Omega)$ плотны в пространстве $W^{-1} L_\Phi(\Omega)$ в *-слабом смысле. Если же, дополнительно, функция Φ удовлетворяет Δ_2 -условию, то $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $W^{-1} L_\Phi(\Omega)$ по норме.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in W^{-1} L_\Phi(\Omega)$. На подпространстве в $E_\Psi(\Omega)$, состоящем из градиентов функций из $C_0^\infty(\Omega)$, определим функционал U по формуле $U \langle \nabla b \rangle = -u \langle b \rangle$. Поскольку

$$|U \langle \nabla b \rangle| \leq C_{13}(\Omega, \Phi) \|u\|_{W^{-1} L_\Phi(\Omega)} \|\nabla b\|_{E_\Psi(\Omega)},$$

то U допускает непрерывное продолжение на все пространство $E_\Psi(\Omega)$. Зная общий вид функционалов на $E_\Psi(\Omega)$ [20], мы можем утверждать существование $\mathbf{v} \in L_\Phi(\Omega)$ такой, что

$$U \langle \mathbf{w} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in E_\Psi(\Omega).$$

В частности, для $\mathbf{w} = \nabla b$, $b \in \overset{\circ}{W}^1 E_\Psi(\Omega)$, имеем

$$u \langle b \rangle = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla b \, d\mathbf{x}.$$

Построим последовательность $\{\mathbf{v}_m\} \subset C_0^\infty(\Omega)$, $*$ -слабо сходящуюся к $\mathbf{v}$ в $L_\Phi(\Omega)$. Тогда для всех $b \in \mathring{W}^1 E_\Psi(\Omega)$ существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b \operatorname{div} \mathbf{v}_m d\mathbf{x} = - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{v}_m \cdot \nabla b d\mathbf{x} = u\langle b \rangle,$$

т.е. $\operatorname{div} \mathbf{v}_m \rightarrow u$ $*$ -слабо в $W^{-1}L_\Phi(\Omega)$.

В случае, если Φ удовлетворяет Δ_2 -условию, последовательность $\{\mathbf{v}_m\}$ можно выбрать сходящейся к $\mathbf{v}$ в норме $L_\Phi(\Omega)$, и в силу (4.3) это приведет к сильной сходимости $\operatorname{div} \mathbf{v}_m \rightarrow u$ в $W^{-1}L_\Phi(\Omega)$. Лемма 4.2 доказана.

Таким образом, для функций Φ , удовлетворяющих Δ_2 -условию, пространство $W^{-1}L_\Phi(\Omega)$ можно трактовать как пополнение множества гладких функций в норме

$$\|u\|_{W^{-1}L_\Phi(\Omega)} = \sup_{w \in \mathring{W}^1 E_\Psi(\Omega)} \int_{\Omega} uw d\mathbf{x} / \|w\|_{\mathring{W}^1 L_\Psi(\Omega)}, \quad (4.4)$$

а если Δ_2 -условие не выполнено, то $W^{-1}L_\Phi(\Omega)$ является замыканием регулярных функций в $*$ -слабой топологии, соответствующей (4.4).

Структура пространства $[\mathring{W}^1 L_\Psi(\Omega)]^*$ остается невыясненной; для ее уточнения прежде всего следовало бы описать $(L_\Psi(\Omega))^*$, что затруднительно [20]. Однако мы можем указать объекты, заведомо содержащиеся в $[\mathring{W}^1 L_\Psi(\Omega)]^*$, — это элементы пространства $W^{-1}E_\Phi(\Omega)$, определяемого следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть Φ — некоторая N -функция. Символом $W^{-1}E_\Phi(\Omega)$ обозначим подпространство в $W^{-1}L_\Phi(\Omega)$, состоящее из градиентов функций из $L_\Phi(\Omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть Φ и Ψ — дополнительные N -функции. Тогда $W^{-1}E_\Phi(\Omega)$ является подпространством в $[\mathring{W}^1 L_\Psi(\Omega)]^*$, причем

$$\|\mathbf{w}\|_{W^{-1}E_\Phi(\Omega)} = \|\mathbf{w}\|_{[\mathring{W}^1 L_\Psi(\Omega)]^*}. \quad (4.5)$$

В самом деле, если $\mathbf{w} \in W^{-1}E_\Phi(\Omega)$, т.е. $\mathbf{w} = \nabla b$, $b \in L_\Phi(\Omega)$, то определив действие $\mathbf{w}$ на произвольный элемент $\mathbf{v} \in \mathring{W}^1 L_\Psi(\Omega)$ согласно (4.2) по правилу

$$\mathbf{w}\langle \mathbf{v} \rangle = - \int_{\Omega} b \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \|\nabla b\|_{[\mathring{W}^1 L_\Psi(\Omega)]^*} &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathring{W}^1 L_\Psi(\Omega)} \int_{\Omega} b \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} / \|\mathbf{v}\|_{\mathring{W}^1 L_\Psi(\Omega)}, \\ \|\nabla b\|_{W^{-1}L_\Phi(\Omega)} &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathring{W}^1 E_\Psi(\Omega)} \int_{\Omega} b \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} / \|\mathbf{v}\|_{\mathring{W}^1 L_\Psi(\Omega)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что второе из этих выражений не превосходит первого. Более того, используя эквивалентность двух представлений нормы Орлича (см. [20]), получаем, что указанные величины равны друг другу. Предложение 4.4 доказано.

Выясним вопрос о возможности умножать элементы негативных пространств на элементы дуальных пространств. Нам будет достаточно ограничиться случаем, когда “позитивные” пространства вложены в L_∞ (т.е. порождаются достаточно быстро растущими N-функциями) и умножение не приводит к потере суммируемости. Установим сначала вспомогательное утверждение, в котором Δ^{-1} понимается как оператор решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (хотя могут быть и другие краевые условия).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Какова бы ни была N-функция Φ , скорость роста которой на бесконечности ограничивается условием*

$$\int_0^\infty r^{-(2n-1)/(n-1)} \Phi(r) dr < \infty, \quad (4.6)$$

оператор $\nabla \circ \Delta^{-1}$ непрерывно действует из $L_1(\Omega)$ в $L_\Phi(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности достаточно рассмотреть случай, когда $\Phi(r) \succ r^{1+\varepsilon}$ с $\varepsilon > 0$, что гарантирует не более чем степенной рост на бесконечности дополнительной к Φ функции Ψ . Обозначим

$$\Psi_1(r) = \int_0^r s^{-1} \Psi(s) ds.$$

Как показано в [28], условие (4.6) является необходимым и достаточным для того, чтобы имел место факт

$$W^1 L_\Psi(\Omega) \text{ вложено в } L_\infty(\Omega). \quad (4.7)$$

Если $\mathbf{v}$ – гладкое векторное поле, обращающееся в 0 на $\partial\Omega$, то, отделив его безвихревую часть $\nabla\varphi$, будем иметь для нее оценку (см. [25])

$$\|\varphi\|_{W_p^1(\Omega)} \leq C_1(\Omega) \frac{p^2}{p-1} \|\mathbf{v}\|_{L_p(\Omega)},$$

из которой выводится (см. [29])

$$\|\varphi\|_{W^1 L_{\Psi_1}(\Omega)} \leq C_{14}(\Omega, \Phi) \|\mathbf{v}\|_{L_\Psi(\Omega)}.$$

Следовательно, решение задачи

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

(с гладкой f) удовлетворяет требуемой оценке

$$\|\nabla u\|_{L_\Phi(\Omega)} = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{E_\Psi(\Omega)}=1} \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{E_\Psi(\Omega)}=1} \int_\Omega \varphi \Delta u \, d\mathbf{x} \leq C_{14} C_{15} \|f\|_{L_1(\Omega)},$$

где C_{15} – норма оператора вложения $W^1 L_{\Psi_1}(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$, конечная ввиду (4.7) и эквивалентности $\Psi \sim \Psi_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть Φ и Ψ – пара дополнительных N -функций, причем выполнено (4.6). Тогда

- 1) для всех $\alpha \in W^1 E_\Psi(\Omega)$, $\beta \in W^{-1} L_\Phi(\Omega)$ определено произведение $\alpha\beta \in W^{-1} L_\Phi(\Omega)$ (как функционал, действующий по правилу $(\alpha\beta)\langle\varphi\rangle = \beta\langle\alpha\varphi\rangle$), причем

$$\|\alpha\beta\|_{W^{-1} L_\Phi(\Omega)} \leq 2C_{16} \|\alpha\|_{W^1 L_\Psi(\Omega)} \|\beta\|_{W^{-1} L_\Phi(\Omega)},$$

где C_{16} – норма оператора вложения (4.7);

- 2) если же $\alpha \in W^1 L_\Psi(\Omega)$, $\beta \in W^{-1} E_\Phi(\Omega)$, то определено произведение $\alpha \cdot \beta \in W^{-1} E_\Phi(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть 1) предложения следует из того, что $\alpha\varphi \in \mathring{W}^1 E_\Psi(\Omega)$ для всех $\varphi \in \mathring{W}^1 E_\Psi(\Omega)$, причем ввиду (4.7)

$$\|\alpha\varphi\|_{W^1 L_\Psi(\Omega)} \leq 2C_{16} \|\alpha\|_{W^1 L_\Psi(\Omega)} \|\varphi\|_{W^1 L_\Psi(\Omega)}.$$

Перейдем ко второй части. Имеем $\beta = \nabla w$, где $w \in L_\Phi(\Omega)$, так что $\alpha \cdot \beta = \operatorname{div}(\alpha w) - w \operatorname{div} \alpha$. Поскольку $\alpha w \in L_\Phi(\Omega)$ и $w \operatorname{div} \alpha \in L_1(\Omega)$, то благодаря предложению 4.5 получаем $\alpha\beta \in W^{-1} E_\Phi(\Omega)$, что и требовалось.

Дополнительные замечания

1. О коэффициентах вязкости (ослабление требований (0.9)).

Как показано в [30], необходимым и достаточным условием глобального существования равностепенно интегрируемого решения уравнения (0.1) является достаточно быстрый рост

$$\int^\infty \frac{\ln M(r)}{r^2} dr = \infty$$

функции M , порождающей то пространство Орлича, принадлежности которому величины $\operatorname{div} \mathbf{u}$ берется в качестве исходной информации о коэффициентах уравнения (0.1) (рассматриваемого как уравнение для ρ). Таким образом, условие (0.9) невозможно существенно ослабить, если мы остаемся в рамках принятого в данной работе подхода к оценке плотности, а именно если выводим оценку вида (1.8), основываясь на свойствах гладкости скорости, вытекающих из энергетической оценки (1.7). Более того, из описания классов корректности уравнения (0.1), сделанного в [30], вытекает, что сама оценка (1.8) не допускает существенного усиления.

2. О роли коэффициента λ (ослабление требований на рост).

При получении априорных оценок (лемма 1.3) число ε_0 в (0.9) может быть сколь угодно малым. Но в таком случае, чтобы обеспечить (1.12) и получить оценку для плотности, мы взяли λ в виде (0.9). Впоследствии мы были вынуждены отказаться от малости ε_0 (см. (3.15)), и в таком случае (1.12) будет достигаться за счет μ независимо от характера роста λ . Следовательно, для доказательства теорем 3.6 и 3.7 на коэффициент λ достаточно наложить лишь следующие ограничения:

- 1) монотонность (для (3.16));
- 2) непрерывность (для предельного перехода под знаком $\mathbb{P}(\cdot)$ в методе монотонности);

- 3) рост на бесконечности не быстрее чем у μ (из тех же соображений, которые привели к (3.15): чтобы слагаемое $\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}$ в тензоре напряжений не ухудшило его суммируемость и не “вывело” его из пространства, сопряженного к тому пространству, где содержится $\mathbb{D}$).

3. О начальной скорости.

Теорема 3.6 имеет тот недостаток, что в ней начальные данные $\mathbf{u}_0$ берутся из класса X , который уже пространства $\overline{X}$ (принадлежность которому решения $\mathbf{u}(t)$ гарантируется теоремой при $t > 0$), хотя и снабжен той же нормой. Фактически нам потребовалась конечность правой части оценки (1.9). Помимо требования $\mathbf{u}_0 \in X$ это может быть достигнуто, например, предположением $\|\mathbf{u}_0\|_{\overline{X}} < 1$.

4. О внешних силах.

Предположения на $\mathbf{f}$, как нетрудно проследить, могут быть ослаблены до условия

$$\int_{Q_T} \Psi_\alpha(|\mathbf{f}|^2) d\mathbf{x} dt < \infty.$$

Автор признателен А. В. Кажихову за постоянное внимание к работе, а также П. И. Плотникову за ценные замечания.

Список литературы

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
2. Кажихов А. В., Шелутин В. В. Однозначная разрешимость “в целом” по времени начально-краевых задач для одномерных уравнений вязкого газа // Прикл. матем. и мех. 1977. Т. 41. № 2. С. 282–291.
3. Вайгант В. А. Стабилизация решений неоднородной краевой задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа // Задачи механики сплошной среды со свободными границами. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991. С. 31–52.
4. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
5. Кажихов А. В. Уравнения потенциальных течений вязкой сжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса: существование, единственность и стабилизация решений // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 3. С. 70–80.
6. Вайгант В. А., Кажихов А. В. Глобальные решения уравнений потенциальных течений сжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 1010–1022.
7. Мамонтов А. Е. Корректность квазистационарной модели сжимаемой вязкой жидкости // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. № 5. С. 1117–1131.
8. Serrin J. On the uniqueness of compressible fluid motion // Arch. Rational Mech. Anal. 1959. V. 3. № 3. P. 271–299.
9. Солонников В. А. О разрешимости начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости // Исследования по линейным операторам и теории функций. Т. 6. Л.: Наука, 1976. С. 128–142.
10. Nash J. Le probleme de Cauchy pour les equations differentielles d'un fluide general // Bull. Soc. Math. France. 1962. V. 90. № 4. P. 487–491.
11. Itaya N. The existence and uniqueness of the solution of the equations describing compressible viscous fluid flow // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1970. V. 46. № 4. P. 379–382.
12. Волтерт А. И., Худяев С. И. О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1972. Т. 87. № 4. С. 504–528.
13. Tani A. On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1977. V. 13. № 1. P. 193–253.
14. Matsumura A., Nishida T. The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases // J. Math. Kyoto Univ. 1980. V. 20. № 1. P. 67–104.

15. *Padula M.* Existence of global solutions for 2-dimensional viscous compressible flows // J. Funct. Anal. 1986. V. 69. P. 1–20.
16. *Lions P. L.* Compacité des solutions des equations de Navier–Stokes compressibles isentropiques // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1993. V. 317. № 1. P. 115–120.
17. *Вайгант В. А., Кажихов А. В.* О существовании глобальных решений двумерных уравнений Навье–Стокса сжимаемой вязкой жидкости // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36. № 6. С. 1283–1316.
18. *Вайгант В. А.* Пример несуществования “в целом” по времени решения уравнений Навье–Стокса сжимаемой вязкой баротропной жидкости // Динамика жидкости со свободными границами. Новосибирск: Изд-во ин-та гидродинамики СО РАН, 1993. С. 39–48.
19. *Ладъженская О. А.* О модификациях уравнений Навье–Стокса для больших градиентов скоростей // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1968. № 7. С. 126–154.
20. *Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлица. М.: Физматгиз, 1958.
21. *Kufner A., Fučík S., John O.* Function Spaces. Prague: Academia, 1977.
22. *Shinbrot M.* The energy equation for the Navier–Stokes system // SIAM J. Math. Anal. 1974. V. 5. № 6. P. 948–954.
23. *Veirao da Veiga H.* On the construction of suitable weak solution to the Navier–Stokes equations via a general approximation theorem // J. Math. Pures Appl. 1995. V. 64. P. 321–334.
24. *Серпин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: ИЛ, 1963.
25. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов: Изд-во Ростовского ун-та, 1984.
26. *Мамонтов А. Е.* Экстраполяция линейных операторов из L_p в пространства Орлица, порожденные быстро или медленно растущими N-функциями // Актуальные проблемы современной математики. Т. 2. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1996. С. 95–103.
27. *Simon J.* Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1987. V. 146. P. 65–96.
28. *Cianchi A.* Embedding theorems for Sobolev–Orlicz spaces // Preprint. Univ. di Firenze, 1994.
29. *Симоненко И. Б.* Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлица // Матем. сб. 1964. Т. 63 (105). № 4. С. 536–553.
30. *Кажихов А. В., Мамонтов А. Е.* Об одном классе выпуклых функций и точных классах корректности задачи Коши для уравнения переноса в пространствах Орлица // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 4. С. 831–850.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: mamontov@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
24.04.1996 и 01.06.1998