Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Осин, О росте ранга подгрупп в конечно порожденных группах, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 8, 81–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:34:54

УДК 512.54

Д. В. Осин

О росте ранга подгрупп в конечно порожденных группах

В работах [1] и [2] независимо введены и исследованы функции роста ранга для подгрупп конечно порожденной свободной группы. В предлагаемой статье понятие роста ранга распространяется на подгруппы произвольной конечно порожденной группы G и исследуется зависимость асимптотического поведения введенных функций от выбора конечного порождающего множества в G . Для широкого класса групп (включающего, в частности, свободные полинильпотентные группы) получены оценки роста ранга подгрупп, обобщающие известный результат Баумслага–Эйделькинда о конечно порожденных нормальных делителях. Рассматриваются также некоторые вопросы, связанные с реализацией произвольных функций в качестве функций роста ранга подгрупп в разрешимых группах.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что подгруппа H конечно порожденной группы G не обязательно обладает конечной системой порождающих. В этом случае, используя словарную функцию длины на G , можно ввести некоторый асимптотический инвариант – функцию роста ранга, который несет гораздо больше информации о подгруппе, нежели простая констатация отсутствия конечного порождающего множества.

Для подгрупп свободной группы конечного ранга такой инвариант независимо изучался в работах [1] и [2]. Напомним некоторые основные определения и результаты. Пусть H – подгруппа свободной группы F с конечным базисом X ; значения функции роста ранга r_H подгруппы H определяются следующим образом: $r_H(n)$ есть ранг подгруппы H_n , порожденной всеми элементами подгруппы H , длина которых относительно X не превосходит n .

Ясно, что при малых значениях параметра n поведение введенной функции сильно зависит от выбора системы порождающих в F . Поэтому изучение функций роста ранга проводится с точностью до некоторой эквивалентности, индуцированной отношением частичного порядка на множестве Ω всех функций $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Более точно, пусть $f, g \in \Omega$; будем говорить, что f асимптотически не превосходит g и писать $f \preceq g$, если существуют такие константы $c, k \in \mathbb{N}$, что

$$f(n) \leq kg(cn) \quad (1.1)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Отметим сразу, что для доказательства неравенства $f \preceq g$ достаточно проверить выполнение условия (1.1) для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Далее, положим

$$f(n) \sim g(n) \iff f(n) \preceq g(n) \text{ и } g(n) \preceq f(n).$$

Класс эквивалентности функции f будем обозначать $[f]$.

В [1] и [2] показано, что класс эквивалентности функции роста ранга подгруппы не зависит от выбора конечной системы порождающих в F . Доказано также, что в случае, когда подгруппа H нормальна в F , имеет место следующее обобщение формулы Шрайера:

$$r_H \sim \gamma_{F/H}, \quad (1.2)$$

где $\gamma_{F/H}$ — функция роста факторгруппы F/H (напомним, что функция роста конечно порожденной группы K задается равенством $\gamma_K(n) = \text{card}\{k \in K : l(k) \leq n\}$, где $l(k)$ — длина элемента k относительно выбранной системы порождающих в K). С другой стороны, оказывается, что любая неубывающая функция $f \in \Omega$, не превосходящая некоторой экспоненты, может быть реализована с точностью до эквивалентности как функция роста ранга некоторой (не обязательно нормальной) подгруппы.

В терминах введенных функций в [1] и [2] независимо сформулировано и доказано обобщение известной теоремы Хаусона (см. [3]): рост ранга пересечения двух подгрупп асимптотически не превосходит произведения ростов ранга этих подгрупп.

В настоящей статье понятие роста ранга переносится на случай подгрупп произвольных конечно порожденных групп. При этом оказывается, что непосредственное распространение определения приводит к функциям (названным *функциями роста специального ранга*), класс эквивалентности которых зависит от выбора конечного порождающего множества в основной группе. Этим объясняется необходимость введения *функций роста общего ранга*, которые являются асимптотическими инвариантами подгрупп и в случае свободной основной группы совпадают с функциями роста специального ранга и с функциями роста ранга из [1] и [2].

Предлагаемая статья состоит из пяти параграфов. В § 2 даны необходимые определения и формулировки основных результатов. В § 3 доказаны теоремы, описывающие зависимость асимптотического поведения функций роста общего и специального ранга от выбора конечного порождающего множества в основной группе. Рост общего ранга в группах некоторого класса $\mathcal{H}$, включающего, в частности, свободные полилинейпотентные группы, исследуется в § 4. Наконец, некоторые вопросы, связанные с реализацией произвольных функций в качестве функций роста ранга подгрупп, обсуждаются в § 5.

Автор выражает признательность А. Ю. Ольшанскому за постановку задачи и постоянное внимание к данной работе.

§ 2. Формулировка основных результатов

Пусть G — произвольная группа с конечным порождающим множеством X , H — подгруппа в G . Определим на G функцию длины $l: G \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ относительно X , полагая для всякого $g \in G$ значение $l(g)$ равным длине кратчайшего слова в алфавите $X \cup X^{-1}$, представляющего элемент g (значение $l(1)$ считаем равным 0). Введенная таким образом словарная функция длины задает на подгруппе H фильтрацию

$$\{1\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots,$$

где H_n – подгруппа, порожденная всеми элементами $h \in H$, длина которых не превосходит n , т.е.

$$H_n = \text{gr}\{h \in H : l(h) \leq n\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Наименьшее возможное число порождающих произвольной конечно порожденной группы K будем называть ее *рангом* и обозначать $\text{rank } K$ (для единичной группы E считаем $\text{rank } E = 1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функции $r_H^*, r_H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, заданные равенствами

$$r_H^*(n) = \text{rank } H_n,$$

$$r_H(n) = \min_{H_n \subseteq K \subseteq H} \text{rank } K$$

(минимум берется по всевозможным подгруппам K , содержащим H_n и содержащимся в H), будем называть соответственно *функцией роста специального и общего ранга* подгруппы H относительно порождающего множества X .

Если основная G группа свободна, то подгруппы H_n являются свободными множителями в H (см. [1]). Отсюда следует, что $\min_{H_n \subseteq K \subseteq H} \text{rank } K = \text{rank } H_n$ и $r_H^* \equiv r_H$. Принимая во внимание последнее равенство, для подгрупп свободных групп будем говорить просто о *функциях роста ранга*.

Оказывается, что функции роста специального ранга подгрупп могут, вообще говоря, меняться достаточно произвольным образом при замене конечного порождающего множества в основной группе. Легко заметить, что для любой функции $f \in \Omega$, реализующейся в качестве функции роста ранга (специального или общего) некоторой подгруппы H в конечно порожденной группе G , выполнено условие

(а) $f(n) \leq a^n$ для любых $n \in \mathbb{N}$ при некотором фиксированном a .

Если, кроме того, подгруппа H не является локально циклической, то выполнено условие

(б) $f(n) > 1$ при всех достаточно больших n .

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Для любых двух функций $f, g \in \Omega$, удовлетворяющих условиям (а) и (б), существуют такие группа G , подгруппа $H \subset G$ и две конечных системы порождающих U и V группы G , что при всех достаточно больших n

$$r_H^{*(U)}(n) = f(n), \quad r_H^{*(V)}(n) = g(n),$$

где $r_H^{*(U)}$ и $r_H^{*(V)}$ – функции роста специального ранга подгруппы H относительно порождающих множеств U и V соответственно.

Заметим, что выполнение условия (б) существенно, так как для локально циклической подгруппы имеем $r_H^* \equiv 1$ для любой системы порождающих в основной группе.

В противоположность теореме 2.1 будет доказана

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть G – произвольная группа, U и V – два конечных порождающих множества в G и H – подгруппа в G . Тогда для любых двух конечных порождающих множеств U и V группы G имеем

$$r_H^{(U)} \sim r_H^{(V)}.$$

Таким образом, рост общего ранга является асимптотическим инвариантом подгруппы и представляет по сравнению с ростом специального ранга значительно больший интерес. В дальнейшем, говоря о функции роста общего ранга, мы будем подразумевать соответствующий класс эквивалентности, не уточняя, относительно какого именно конечного порождающего множества в G она вычисляется.

В качестве примера мы исследуем функции роста общего ранга в достаточно широком классе групп, включающем, в частности, свободные полинильпотентные группы. Пусть, как обычно, $\gamma_m G$ обозначает m -й член нижнего центрального ряда группы G (т.е. $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_{j+1}(G) = [\gamma_j(G), G]$). Напомним, что свободная полинильпотентная группа, отвечающая последовательности натуральных чисел $n_1, \dots, n_k$, – это свободная группа в многообразии $\mathfrak{P}_{(n_1, \dots, n_k)}$ всех групп G , удовлетворяющих тождеству $\gamma_{n_k}, \dots, \gamma_{n_1} G = 1$. Мы будем рассматривать группы несколько более общего вида $F/\gamma_m R$, где F – свободная группа конечного ранга, R – нетривиальная нормальная подгруппа в F , $m > 1$ и факторгруппа F/R разрешима; класс всех таких групп будем обозначать $\mathcal{K}$. Аналогом формулы (1.3) для групп класса $\mathcal{K}$ является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $G = F/\gamma_m R \in \mathcal{K}$, $A = R/\gamma_m R$, ε – естественный гомоморфизм $G \rightarrow \overline{G} = F/R$, H – нетривиальная нормальная подгруппа в G , r_H – функция роста общего ранга подгруппы $\overline{H} = \varepsilon(H)$ в $\overline{G}$, $\gamma_{G/AH}$ – функция роста факторгруппы G/AH . Тогда

$$\gamma_{G/AH} \preceq r_H \preceq r_{\overline{H}} \cdot (\gamma_{G/AH})^{m-1} + (\gamma_{G/AH})^{2m-3}. \quad (2.1)$$

В некоторых случаях функции роста общего ранга допускают более точные оценки.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $G = F/[R, R]$, причем группа F/R полициклическа. Пусть, кроме того, H – нетривиальная нормальная подгруппа в G ; обозначим $A = R/[R, R]$. Если при этом факторгруппа G/AH содержит нильпотентную подгруппу L степени t конечного индекса, то

$$r_H \sim n^d, \quad (2.2)$$

где

$$d = \sum_{i=1}^t i \cdot \dim_{\mathbb{Z}}(\gamma_i L / \gamma_{i+1} L),$$

и $\dim_{\mathbb{Z}}(\gamma_i L / \gamma_{i+1} L)$ обозначает размерность абелевой группы $\gamma_i L / \gamma_{i+1} L$ как $\mathbb{Z}$ -модуля; в противном случае

$$r_H \sim 2^n. \quad (2.3)$$

С помощью следствия 2.1 можно, в частности, вычислять функции роста общего ранга в свободных группах произведения многообразия абелевых групп на многообразии нильпотентных фиксированной ступени. Так, например, для коммутанта G' свободной метабелевой группы G ранга s имеем:

$$r_{G'} \sim n^s.$$

Теорема 2.3 позволяет также перенести известный результат Баумслага–Эйделькинда о конечно порожденных нормальных подгруппах свободной полинильпотентной группы (см. [4], [5]) на случай произвольных групп класса $\mathcal{K}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *В группе $G = F/\gamma_m R \in \mathcal{K}$ нормальная подгруппа $H \neq 1$ тогда и только тогда имеет конечное число образующих, когда ее индекс конечен по модулю $A = R/\gamma_m R$, т.е. $|G/AH| < \infty$.*

Последняя часть предлагаемой работы посвящена описанию множества функций $\Omega(\mathfrak{U})$, которые реализуются с точностью до эквивалентности в качестве функций роста общего ранга подгрупп (не обязательно нормальных) в конечно порожденных группах некоторых заданных многообразий $\mathfrak{U}$.

Приведем сначала два примера. Обозначим для краткости Ω_0 множество всех неубывающих функций $f \in \Omega$ таких, что $f(n) \leq a^n$ для некоторой константы a . Ясно, что все функции, реализуемые как функции роста общего ранга, лежат в Ω_0 . В случае многообразия всех групп $\mathfrak{D}$ мы имеем

$$\Omega(\mathfrak{D}) = \Omega_0,$$

так как любая функция $f \in \Omega_0$ может быть реализована с точностью до эквивалентности как функция роста ранга некоторой подгруппы абсолютно свободной группы (см. [1]). С другой стороны, легко заметить, что для многообразия $\mathfrak{N}_c$ нильпотентных групп ступени c множество $\Omega(\mathfrak{N}_c)$ состоит только из ограниченных функций. Следующие теоремы предоставляют нам еще несколько не столь очевидных примеров подобного рода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Будем говорить, что функция f натурального аргумента *полиномиальна*, если для некоторых фиксированных $c, d \in \mathbb{N}$ $f(n) \leq cn^d$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Во избежание недоразумений отметим, что полиномиальная функция не обязана быть полиномом. Так, например, полиномиальными в нашем смысле являются функции $\sin n$, $\ln n$, n^π и т. д. Множество полиномиальных функций $f \in \Omega_0$ будем обозначать Ω_p . В следующих теоремах $\mathfrak{S}_l$, как обычно, обозначает многообразие разрешимых групп ступени l .

ТЕОРЕМА 2.4. *Для многообразия метабелевых групп имеет место равенство*

$$\Omega(\mathfrak{S}_2) = \Omega_p.$$

Кроме того, всякая полиномиальная функция $f \in \Omega_p$ может быть реализована с точностью до эквивалентности в качестве функции роста общего ранга некоторой подгруппы свободной метабелевой группы.

При переходе от многообразия метабелевых групп к многообразиям $\mathfrak{S}_l$ при $l \geq 3$ ситуация существенно меняется: оказывается, в этом случае

$$\Omega(\mathfrak{S}_l) = \Omega_0.$$

Более того, имеет место

ТЕОРЕМА 2.5. *Любая функция $f \in \Omega_0$ может быть реализована с точностью до эквивалентности как функция роста общего ранга некоторой подгруппы в свободной разрешимой группе степени 3.*

§ 3. Асимптотическое поведение функций роста ранга

Функции роста специального ранга. Предварительные результаты.

При доказательстве теоремы 2.1 нам понадобится конструкция, использованная в работе [6]. Напомним основные понятия.

Пусть F – свободная группа с базисом $X = \{x_1, \dots, x_s\}$, $l_F: F \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ – функция длины на F относительно X , $T = \{t_\lambda\}$ – множество несократимых слов в алфавите $X^{\pm 1}$ со следующими свойствами (для удобства изложения мы не делаем в дальнейшем различия между элементами свободных групп и представляющими их словами).

(i) Пусть r – подслово некоторого слова $t_\lambda \in T$ и $l_F(r) \geq \frac{1}{50}l_F(t_\lambda)$. Тогда r встречается в t_λ лишь единожды.

(ii) Если, кроме того, r является подсловом некоторого $t_\mu \in T^{\pm 1}$, то $t_\mu = t_\lambda$.

Далее, пусть $w(t_\lambda)$ – некоторое слово в алфавите $T^{\pm 1}$. Подставим в $w(t_\lambda)$ вместо элементов t_λ множества T их несократимые записи в порождающих $x_1, \dots, x_s$ и проведем все возможные сокращения. Полученное слово в алфавите $X^{\pm 1}$ будем называть *T -словом*.

Предположим, что подгруппа $N \triangleleft F$ является нормальным замыканием в F некоторого множества T -слов. Пусть также $G = F/N$, $\varepsilon: F \rightarrow G$ – естественный гомоморфизм. Нам понадобится следующая

ЛЕММА 3.1. *Пусть u – некоторое T -слово. Тогда существует такое T -слово v , что $\varepsilon(v) = \varepsilon(u)$ и для всякого элемента w с условием $\varepsilon(w) = \varepsilon(u)$ выполнено неравенство $l_F(v) \leq l_F(w)$.*

С точностью до обозначений утверждение леммы доказано в работе [6; лемма 8].

ЛЕММА 3.2. *Пусть w – некоторое T -слово, представимое в F в виде несократимого слова*

$$w = t_{\lambda_1}^{\alpha_1} \dots t_{\lambda_k}^{\alpha_k} \quad (3.1)$$

(все $\alpha_i = \pm 1$) в алфавите $T^{\pm 1}$. Тогда

$$l_F(w) \geq \max_{i=1, \dots, k} l_F(t_{\lambda_i}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по k . При $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть $k = l + 1$. Тогда $u = u_0 t_{\lambda_{l+1}}^{\alpha_{l+1}}$, где $u_0 = t_{\lambda_1}^{\alpha_1} \dots t_{\lambda_l}^{\alpha_l}$ и длина $l_F(u_0) \geq \max_{i=1, \dots, l} l_F(t_{\lambda_i})$. Ввиду условий (i) и (ii) возможные сокращения на стыке u_0 и $t_{\lambda_{l+1}}^{\alpha_{l+1}}$ достаточно малы. Точнее, $l_F(u) \geq l_F(u_0) + l_F(t_{\lambda_{l+1}}) - c$, где $c \leq \frac{2}{50} l_F(t_{\lambda_{l+1}})$ и $c \leq \frac{2}{50} l_F(t_{\lambda_l})$. Последнее неравенство вместе с предположением индукции влечет $c \leq \frac{2}{50} l_F(u_0)$. Значит, $l_F(u) > \max\{l_F(u_0); l_F(t_{\lambda_{l+1}})\}$. Теперь утверждение следует из предположения индукции.

Из доказанной леммы, в частности, вытекает, что всякая подгруппа в F , порожденная некоторым подмножеством множества T , порождается им свободно.

Экспоненциальные множества слов. Как и в работе [6], нам потребуются вспомогательные множества слов с экспоненциальным ростом. Пусть $\mathcal{A}$ — множество слов в конечном алфавите X , $l: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ — функция длины относительно X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Сферической функцией роста* множества $\mathcal{A}$ назовем функцию

$$\sigma_{\mathcal{A}}(n) = \text{card } \mathcal{A}_n,$$

где

$$\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} : l(a) = n\}.$$

Пусть $c \in \mathbb{N}$ — некоторая фиксированная константа (ее значение будет определено позднее). Положим $X^k = \{x_{k1}, \dots, x_{kc}\}$, $k = 1, \dots, 100$, и рассмотрим множество $\mathcal{A}^k$ всех слов в алфавите X^k . Легко заметить, что

$$\sigma_{\mathcal{A}^k}(n) = c^n.$$

Занумеруем элементы множества $\mathcal{A}_n^k$ в произвольном порядке: $a_{n1}^{(k)}, \dots, a_{n, c^n}^{(k)}$ и рассмотрим множество $\mathcal{B}_n$ слов b_{ni} в алфавите $X_0 = (\bigcup_{k=1}^{100} X^k) \cup \{z, s\}$, заданных следующим образом. Пусть $n = 100m + k$, где $1 \leq k \leq 100$. Тогда положим

$$b_{ni} = a_{m-1, 100i+1}^{(k)} z a_{m-1, 100i+2}^{(k)} z \dots a_{m-1, 100i+100}^{(k)} z s^k,$$

где $i = 0, 1, \dots, [c^{m-1}/100] - 1$ (если $[c^{m-1}/100] = 0$, то полагаем $\mathcal{B}_n = \emptyset$). Легко проверить, что длина слова b_{ni} относительно X_0 равна n . Далее, пусть

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n.$$

Нам потребуются некоторые свойства построенного множества.

ЛЕММА 3.3. *Для любых двух функций $f, g \in \Omega$ не более, чем экспоненциального роста, существует такая константа c , что для соответствующего множества $\mathcal{B}$ выполняется неравенство*

$$f(n) + g(n) < \sigma_{\mathcal{B}}(n-1)$$

при всех достаточно больших n .

$\text{Ker } \eta = N^F$, а гомоморфизмы ν и γ определяются (единственным образом) требованием коммутативности диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} Q & \xrightarrow{\lambda} & R & \xrightarrow{\mu} & S \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ N & \xrightarrow{\nu} & F & \xrightarrow{\eta} & G \end{array} \quad (3.5)$$

Положим

$$T = \{b_{n-1,i}p, b_{n-1,j+f(n)}pq : n > K, i = 1, \dots, f(n), j = 1, \dots, g(n)\}.$$

Покажем, что для множества T выполнены условия (i) и (ii). Пусть $t \in T$, r – подслово в t . Заметим, что из условия $l_F^{(X)}(r) \geq \frac{1}{50}l_F^{(X)}(t)$ следует, что r содержит в качестве подслова слово вида $za_{ij}^{(k)}z$. Действительно, предположив противное для слова $t = b_{n-1,j+f(n)}pq = a_{m-1,100i+1}^{(k)}za_{m-1,100i+2}^{(k)}z \dots a_{m-1,100i+100}^{(k)}zs^k pq$, где $n-1 = 100m+k$, $1 \leq k \leq 100$, получим $l_F^{(X)}(r) \leq \max\{2+k+m; 2(m-1)+1\}$. Легко проверить, что значения выражений $2+k+m$ и $2(m-1)+1$ при достаточно больших m (без ограничения общности можно считать, что при всех $n > K$) меньше, чем $\frac{1}{50}(n+1) = \frac{1}{50}l_F^{(X)}(t)$. Аналогичным образом мы приходим к противоречию в случае $t = b_{n-1,i}p$. Остается заметить, что подслово $za_{nj}z$ встречается в t лишь единожды и не встречается ни в каком другом слове $t' \in T^{\pm 1}$.

Из выполнения условий (i) и (ii) для множества T следует, что γ является гомоморфизмом (с точностью до обозначений это утверждение совпадает с леммой 6 работы [6]).

Пусть теперь $Y = X_0 \cup \{p, pq\}$, $U = \eta(X)$, $V = \eta(Y)$, $l_F^{(X)}, l_F^{(Y)}$ – функции длины на F относительно свободных порождающих множеств X и Y , $l_G^{(U)}, l_G^{(V)}$ – индуцированные функции длины на G относительно U и V соответственно. Заметим, что

$$l_F^{(X)}(\beta(r_{ij})) = i, \quad l_F^{(X)}(\beta(t_{ij})) = i+1, \quad (3.6)$$

$$l_F^{(Y)}(\beta(r_{ij})) = i, \quad l_F^{(Y)}(\beta(t_{ij})) = i. \quad (3.7)$$

Обозначим $H = \gamma(S)$ и положим

$$H_l^{(U)} = \{h \in H : l_G^{(U)}(h) \leq l\},$$

$$H_l^{(V)} = \{h \in H : l_G^{(V)}(h) \leq l\}.$$

Покажем, что при всех $l > K$

$$H_l^{(U)} = \gamma\pi_l(F_l), \quad (3.8)$$

$$H_l^{(V)} = \gamma\sigma_l(G_l). \quad (3.9)$$

Действительно, из формул (3.6), (3.7) и коммутативности диаграммы (3.5) следует, что $l_G^{(U)}(\gamma(f_{lj})) \leq l$ при $l > K$, поэтому $\gamma\pi_l(F_l) \leq H_l^{(U)}$.

Для доказательства включения $H_l^{(U)} \leq \gamma\tau_l(F_l)$ достаточно показать, что всякий элемент $h \in H$ длины $l_G^{(U)}(h) \leq l$ лежит в $\gamma\tau_l(F_l)$. Итак, пусть $h \in H$, $l_G^{(U)}(h) \leq l$ и h_0 — какой-нибудь прообраз элемента h в группе F , представимый T -словом. По лемме 3.1 существует T -слово w , являющееся кратчайшим элементом в смежном классе $h = h_0N$. Но тогда по лемме 3.2 $l_F^{(X)}(w)$ не меньше, чем длина любого $t_{\lambda_i} \in T$, входящего в запись (3.1). Следовательно, w не содержит в своей записи элементов t_{λ_i} длины большей, чем l . Значит, w лежит в подгруппе M группы F , порожденной теми из элементов $\beta(r_{ij}), \beta(t_{ij})$, длина которых относительно X не превосходит l . Но из коммутативности диаграммы (3.5) и существования вложений φ_i, ψ_i следует, что подгруппа $\eta(M) \leq H$ порождается образами $\eta\beta(r_{ij}), \eta\beta(t_{ij})$ тех элементов $\beta(r_{ij}), \beta(t_{ij})$, длина которых в точности равна l , т.е.

$$\begin{aligned} M &= \text{gr}\{\eta\beta(r_{l1}), \dots, \eta\beta(r_{lf(l)}), \eta\beta(t_{l-1,1}), \dots, \eta\beta(t_{l-1,g(l-1)})\} \\ &= \text{gr}\{\eta\beta(r_{l1}), \dots, \eta\beta(r_{lf(l)})\} = \gamma\tau_l(F_l) \end{aligned} \quad (3.10)$$

(см. (3.6) и (3.7)). Так как элемент h лежит в подгруппе $\eta(M)$, то включение $H_l^{(U)} \leq \gamma\tau_l(F_l)$, а с ним и равенство (3.8) доказаны. Доказательство равенства (3.9) аналогично. Следует лишь заменить всюду X и U соответственно на Y и V , а вместо (3.10) написать

$$\begin{aligned} M &= \text{gr}\{\eta\beta(r_{l1}), \dots, \eta\beta(r_{lf(l)}), \eta\beta(t_{l,1}), \dots, \eta\beta(t_{l,g(l)})\} \\ &= \text{gr}\{\eta\beta(t_{l1}), \dots, \eta\beta(t_{lg(l)})\} = \gamma\sigma_l(G_l). \end{aligned}$$

Остается заметить, что гомоморфизмы $\gamma\tau_l$ и $\gamma\sigma_l$ являются изоморфными вложениями, а значит, группы $\gamma\tau_l(F_l)$ и $\gamma\sigma_l(G_l)$ свободны и $\text{rank } \gamma\tau_l(F_l) = f(l)$, $\text{rank } \gamma\sigma_l(G_l) = g(l)$. Из (3.8) и (3.9) получаем

$$\begin{aligned} r_H^{*(U)}(n) &= f(n), \\ r_H^{*(V)}(n) &= g(n) \end{aligned}$$

при всех достаточно больших n ($n > K$). Теорема доказана.

Функции роста общего ранга. Доказательство теоремы 2.2. Используя обозначения теоремы 2.2, положим $U = \{u_1, \dots, u_s\}$, $V = \{v_1, \dots, v_t\}$. Каждый элемент множества U представляется в виде некоторого слова в алфавите $V \cup V^{-1}$: $u_1 = w_1(v_\lambda), \dots, u_s = w_s(v_\lambda)$. Положим

$$c = \max_i l_G^{(V)}(w_i). \quad (3.11)$$

Покажем, что

$$H_n^{(U)} \subseteq H_{cn}^{(V)}, \quad (3.12)$$

где $H_n^{(U)}$ и $H_n^{(V)}$ определены так же, как и в доказательстве теоремы 2.1. Пусть $h \in H$ и $l_G^{(U)}(h) \leq n$. Тогда, учитывая (3.11), получим $l_G^{(V)}(h) \leq cn$, откуда следует вхождение (3.12). По определению функции роста общего ранга

$$r_H^{(V)}(cn) = \min_{H_{cn}^{(V)} \subseteq K \subseteq H} \text{rank } K \geq \min_{H_n^{(U)} \subseteq K \subseteq H} \text{rank } K = r_H^{(U)}(n). \quad (3.13)$$

Аналогично доказывается, что для некоторого $k = \text{const}$

$$r_H^{(U)}(kn) \geq r_H^{(V)}(n). \quad (3.14)$$

Комбинируя (3.13) и (3.14), получаем утверждение теоремы 2.2.

Функции роста ранга и гомоморфизмы. В настоящем пункте мы докажем одно вспомогательное утверждение, необходимое для дальнейшего изложения.

ЛЕММА 3.4. Пусть $G = \text{gr}\{g_1, \dots, g_s\}$ – произвольная группа, H – подгруппа в G , $\varphi: G \rightarrow \overline{G}$ – эпиморфизм и $\overline{H} = \varphi(H)$ – образ подгруппы H . Обозначим r_H и $r_{\overline{H}}$ функции роста общего ранга подгрупп H и $\overline{H}$ относительно порождающих множеств $\{g_1, \dots, g_s\}$, $\{\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_s)\}$ групп G и $\overline{G}$ соответственно. Тогда

$$r_{\overline{H}}^*(n) \leq r_H^*(n), \quad (3.15)$$

$$r_{\overline{H}}(n) \leq r_H(n) \quad (3.16)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\bar{l}$ функцию длины на $\overline{G}$ относительно системы порождающих $\{\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_s)\}$, $\overline{H}_n = \text{gr}\{\bar{h} \in \overline{H} : \bar{l}(\bar{h}) \leq n\}$. Неравенство (3.15) следует из того, что $\overline{H}_n = \varphi(H_n)$. Далее, по определению $r_H(n) = \min_{H_n \subseteq T \subseteq H} \text{rank } T$. Пусть $r_H(n) = \text{rank } T_0$, $H_n \subseteq T_0 \subseteq H$. Так как $\overline{H}_n = \varphi(H_n)$, то $\overline{H}_n \subseteq \varphi(T_0)$ и $r_{\overline{H}}(n) = \min_{\overline{H}_n \subseteq S \subseteq \overline{H}} \text{rank } S \leq \text{rank } \varphi(T_0) = r_H(n)$ и неравенство (3.16) доказано.

В качестве следствия доказанной леммы получаем неравенство

$$r_{\overline{H}} \preceq r_H, \quad (3.17)$$

где $r_{\overline{H}}$ и r_H – функции роста общего ранга подгруппы H и ее гомоморфного образа $\overline{H}$, вычисленные относительно произвольных конечных порождающих множеств в группах G и $\overline{G}$. Действительно, в силу теоремы 2.2 неравенство (3.17) достаточно установить для каких-нибудь фиксированных конечных систем порождающих в G и $\overline{G}$, что и сделано в лемме 3.4.

§ 4. Функции роста общего ранга подгрупп в группах класса $\mathcal{K}$

Предварительные результаты. Прежде чем непосредственно перейти к доказательству теоремы 2.3, докажем некоторые вспомогательные результаты. При этом мы несколько раз воспользуемся очевидным при $r \geq 2$ числовым неравенством

$$\sum_{l=0}^k r^l < 2r^k. \quad (4.1)$$

В следующей лемме дается довольно грубая оценка ранга подгруппы в конечно порожденной нильпотентной группе, которая, однако, достаточна для наших целей. Более точная оценка может быть получена с помощью формулы Витта (см. [7]).

ЛЕММА 4.1. Пусть G – r -порожденная нильпотентная группа степени k , N – подгруппа в G . Тогда

$$\text{rank } N < 2r^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 = G_k \triangleleft G_{k-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_0 = G$ — нижний центральный ряд группы $G = \text{gr}\{g_1, \dots, g_r\}$. Хорошо известно, что факторгруппа G_i/G_{i+1} порождается теми смежными классами, которые содержат простые $(i+1)$ -кратные левонормированные коммутаторы $(g_{l_1}, \dots, g_{l_{i+1}})$ (см. [7]). Таким образом, по индукции легко установить, что $\text{rank } G_i/G_{i+1} \leq r^{i+1}$. Обозначим $N_i = N \cap G_i$ и рассмотрим естественные гомоморфизмы $\varphi_i: G \rightarrow G/G_i$. Тогда $N_i/N_{i+1} = N_i/(N_i \cap G_{i+1}) \cong \varphi_{i+1}(N_i)$. Факторы G_i/G_{i+1} абелевы, поэтому

$$\text{rank } N_i/N_{i+1} = \text{rank } \varphi_{i+1}(N_i) \leq \text{rank } G_i/G_{i+1} \leq r^{i+1}.$$

Но группы N_i образуют нормальный ряд в N , а значит,

$$\text{rank } N \leq \sum_{l=0}^{k-1} \text{rank } N_l/N_{l+1} \leq \sum_{l=0}^{k-1} r^{l+1}.$$

Теперь требуемое утверждение следует из (4.1) в случае $r \geq 2$ и является очевидным при $r = 1$.

При доказательстве верхней оценки в неравенстве (2.1) решающую роль играет следующая

ЛЕММА 4.2. Пусть группа $P = ST$ представляется в виде произведения своих нормальных подгрупп S и T . Пусть, кроме того, $\text{rank } P = r$, $\text{rank } P/T = s$ и группа T нильпотентна степени t . Тогда

$$\text{rank } S \leq 2^{t+1}sr^t + 2^{t+1}r^{2t-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_1, \dots, x_r\}$ и $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s\}$ — порождающие множества групп P и P/T соответственно, $\varphi: P \rightarrow P/T$ — естественный гомоморфизм. Рассмотрим множество Y , построенное следующим образом. Во-первых, включим в Y произвольные прообразы $y_1, \dots, y_s$ элементов $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s$, лежащие в подгруппе S . Далее, пусть элемент $\varphi(x_i)$ представляется в виде слова $w_i(\bar{y}_\lambda)$ в алфавите $\{\bar{y}_1^{\pm 1}, \dots, \bar{y}_s^{\pm 1}\}$. Добавим к множеству Y элементы вида $a_i = x_i^{-1}w_i(y_\lambda)$, $i = 1, \dots, r$, где $w_i(y_\lambda)$ — слово, полученное из $w_i(\bar{y}_\lambda)$ заменой $\bar{y}_\lambda$ на y_λ и $\bar{y}_\lambda^{-1}$ на y_λ^{-1} . Ясно, что $a_i \in T$. Итак,

$$Y = \{y_1, \dots, y_s, a_1, \dots, a_r\},$$

где $y_i \in S$, $a_i \in T$. Легко проверить, что Y тоже порождает P .

Факторгруппа P/S является нильпотентной степени не более t и ранга не более r . Она может быть задана копредставлением

$$P/S = \langle Y \mid r = 1, r \in \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_3 \rangle, \quad (4.2)$$

где $\mathfrak{R}_1$ — множество слов вида y_i , $i = 1, \dots, s$, $\mathfrak{R}_2$ — множество всех $(t+1)$ -кратных коммутаторов элементов $a_1, \dots, a_r$, а $\mathfrak{R}_3$ — множество слов, построенное следующим образом. Пусть N — свободная нильпотентная группа степени t ранга r со свободными порождающими $n_1, \dots, n_r$, и τ — гомоморфизм $N \rightarrow P/S$, переводящий n_j в a_j . Обозначим $K = \text{Ker } \tau$. По лемме 4.1 ранг подгруппы K меньше, чем $2r^t$;

пусть $k_1, \dots, k_q$ ($q < 2r^t$) – некоторая система ее порождающих. Рассмотрим слова $v_i(n_\lambda)$, представляющие элементы k_i в алфавите $\{n_1^{\pm 1}, \dots, n_r^{\pm 1}\}$, и если $K \neq 1$, включим в $\mathfrak{R}_3$ слова вида $v_i(a_\lambda)$, $i = 1, \dots, q$, полученные из $v_i(n_\lambda)$ заменой n_λ на a_λ и n_λ^{-1} на a_λ^{-1} . Если же $K = 1$, то положим $\mathfrak{R}_3 = \emptyset$.

Покажем, что копредставление (4.2) действительно задает группу P/S . Ясно, что для всякого $r \in \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_3$ равенство $r = 1$ справедливо в группе P/S (здесь и далее мы отождествляем слова $r \in \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_3$ и представляемые ими элементы). Пусть теперь элемент r представляется словом $u(y_\lambda, a_\mu)$ в алфавите $Y^{\pm 1}$ и равен 1 в P/S . С помощью конечного числа вычеркиваний подслов вида $y_\lambda^{\pm 1}$ мы можем редуцировать слово $u(y_\lambda, a_\mu)$ к слову $u_0(a_\mu)$, не содержащему $y_\lambda^{\pm 1}$. Далее, элемент n группы N , представляемый словом $u_0(n_\mu)$, получающимся из $u_0(a_\mu)$ соответствующей заменой, лежит в подгруппе K . Но тогда слово $u_0(n_\mu)$ (а значит, и $u_0(a_\mu)$) можно редуцировать к слову $u_1(n_\mu)$ (соответственно $u_1(a_\mu)$), представляющему единичный элемент в группе N , с помощью конечного числа вычеркиваний и вставок подслов вида $v_i(n_\lambda)$ (соответственно $v_i(a_\lambda)$). Наконец, слово $u_1(a_\mu)$ редуцируется к пустому с помощью конечного числа вставок и вычеркиваний слов из $\mathfrak{R}_2$, так как соответствующее ему слово $u_1(n_\mu)$ редуцируется к пустому с помощью конечного числа вставок и вычеркиваний $(t+1)$ -кратных коммутаторов элементов $n_1, \dots, n_r$.

Далее, заметим, что равенство $r = 1$, $r \in \mathfrak{R}_2$, выполняется в группе P (так как $a_i \in T$), а значит,

$$S = (\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_3)^P, \quad (4.3)$$

т.е. подгруппа S порождается элементами из $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_3$ как нормальный делитель. Элементы $\mathfrak{R}_3$ будем кратко обозначать $v_1, \dots, v_q$. Рассмотрим множество

$$Z = \{y_i, (y_i, a_{k_1}^{\varepsilon_1}), \dots, (y_i, a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \dots, a_{k_t}^{\varepsilon_t}), v_j, (v_j, a_{k_1}^{\varepsilon_1}), \dots, (v_j, a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \dots, a_{k_{t-1}}^{\varepsilon_{t-1}})\},$$

где $(y_i, a_{k_1}^{\pm 1}), \dots, (y_i, a_{k_1}^{\pm 1}, \dots, a_{k_t}^{\pm 1}), (v_j, a_{k_1}^{\varepsilon_1}), \dots, (v_j, a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \dots, a_{k_{t-1}}^{\varepsilon_{t-1}})$ – соответствующие левонормированные коммутаторы, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, q$, $k_l = 1, \dots, r$, $\varepsilon_l = \pm 1$, $l = 1, \dots, t$. Покажем, что $S = \text{gr } Z$. Для этого достаточно показать, что $z^y \in \text{gr } Z$ для любых $z \in Z$ и $y \in Y^{\pm 1}$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $y = y_i^{\pm 1}$. Очевидно, $z^{y_i^{\pm 1}} \in \text{gr } Z$ для любого $z \in Z$, так как $y_i \in Z$.
2. $y = a_k^{\pm 1}$. Рассмотрим различные возможности для z .

- а) $z = y_i$; тогда $z^y = y_i^{a_k^{\pm 1}} = y_i(y_i, a_k^{\pm 1}) \in \text{gr } Z$.
- б) $z = (y_i, a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \dots, a_{k_l}^{\varepsilon_l})$, $1 \leq l < q$; тогда для сопряженного элемента получаем $z^y = (y_i, a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \dots, a_{k_l}^{\varepsilon_l})(y_i, a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \dots, a_{k_l}^{\varepsilon_l}, a_k^{\pm 1}) \in \text{gr } Z$.
- в) $z = (y_i, a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \dots, a_{k_t}^{\varepsilon_t})$; тогда $z^y = z$, так как элемент z лежит в центре группы T .

Случай $z = v_j$, $z = (v_j, a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \dots, a_{k_l}^{\varepsilon_l})$, $1 \leq l < t-1$, и $z = (v_j, a_{k_1}^{\varepsilon_1}, \dots, a_{k_{t-1}}^{\varepsilon_{t-1}})$ рассматриваются аналогично.

Для доказательства леммы осталось оценить число элементов множества Z . Заметим, что $\text{card } Z = s + s \cdot 2r + \dots + s \cdot (2r)^t + q + q \cdot 2r + \dots + q \cdot (2r)^{t-1}$. Учитывая, что $q < 2r^t$, окончательно получаем

$$\text{card } Z < s \cdot 2(2r)^t + q \cdot 2(2r)^{t-1} < 2^{t+1}sr^t + 2^{t+1}r^{2t-1}.$$

Вербальные сплетения. При доказательстве нижней оценки в неравенстве (2.1) нами будет использоваться вложение Шмелькина группы вида $F/V(R)$ в вербальное сплетение. Напомним основные определения (подробнее см. [8], [9]).

Пусть $\mathfrak{V}$ – произвольное многообразие, V – множество слов в некотором алфавите, задающее тождества многообразия $\mathfrak{V}$. Для произвольной группы G через $V(G)$ будем обозначать соответствующую вербальную подгруппу. Вербальным произведением $\mathfrak{V} \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ семейства групп $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, ассоциированным с многообразием $\mathfrak{V}$, называется факторгруппа свободного произведения $A = \prod_{\lambda \in \Lambda}^* A_\lambda$ по подгруппе $V(A) \cap [A_\lambda]^*$, где $[A_\lambda]^*$ – декартова подгруппа свободного произведения. Далее, пусть заданы две группы A и B . Дискретным вербальным сплетением $A \operatorname{wr}_V B$ групп A и B , ассоциированным с многообразием $\mathfrak{V}$, называется расщепляемое расширение вербального произведения $\mathfrak{V} \prod_{b \in B} A(b)$ (базы сплетения) групп $A(b) \cong A$ с помощью группы B . При этом $b^{-1}a(b_0b)b = a(b_0b)$, где $a(b)$ обозначает элемент группы $A(b)$, соответствующий элементу $a \in A$ при изоморфизме A и $A(b)$.

ЛЕММА 4.3 [9]. Пусть F – абсолютно свободная группа со свободными образующими x_μ , $\mu \in M$, и $R \triangleleft F$. Обозначим через U свободную группу в многообразии, соответствующем множеству слов V , свободно порожденную множеством u_μ , $\mu \in M$. Тогда отображение $x_\mu \rightarrow \bar{x}_\mu u_\mu(1)$, где $\bar{x}_\mu = x_\mu R \in F/R$, продолжается до изоморфизма группы $F/V(R)$ и некоторой подгруппы вербального сплетения $U \operatorname{wr}_V F/R$.

Пусть теперь G – группа вида $F/\gamma_m R$, где F – свободная группа конечного ранга r , $m > 1$, R – нетривиальный нормальный делитель в F . По лемме 4.3 группа G вложима в вербальное сплетение $S = U \operatorname{wr}_V \overline{G}$, где V – множество тождеств многообразия нильпотентных групп ступени m , U – свободная нильпотентная группа ранга r и ступени m , $\overline{G} = F/R$. Пусть $\theta: G \rightarrow S$ – соответствующее вложение, $A = R/\gamma_m R$.

Обозначим через T базу сплетения. Ясно, что T является свободной нильпотентной группой ступени m со свободным порождающим множеством $u_1(h), \dots, u_r(h)$, где h пробегает всю группу $\overline{G}$. Всякому неединичному элементу $t \in T$ поставим в соответствие семейство $\mathcal{P}_t$ всех таких множеств $X_\lambda = \{h_1, \dots, h_k\}$, что t представляется в виде

$$t = u_{i_1}^{\alpha_1}(h_1) \dots u_{i_k}^{\alpha_k}(h_k). \quad (4.4)$$

Упорядочим множества X_λ , положив

$$X_\lambda \leq X_\mu \iff X_\lambda \subseteq X_\mu.$$

Покажем, что для всякого неединичного $t \in T$ семейство $\mathcal{P}_t$ содержит единственный минимальный элемент. Действительно, пусть X_λ и X_μ – два минимальных элемента некоторого семейства $\mathcal{P}_t$. Рассмотрим гомоморфизм φ группы T на свою подгруппу $\widehat{T} = \operatorname{gr}\{u_1(h), \dots, u_r(h) : h \in \overline{G} \setminus X_\mu\}$ с ядром $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{gr}\{u_1(h), \dots, u_r(h) : h \in X_\mu\}$. Ясно, что $\varphi(t) = 1$. Но тогда $X_\lambda \subseteq X_\mu$, так как иначе, представляя элемент t в виде (4.4) при $h_1, \dots, h_k \in X_\lambda$ и учитывая минимальность X_λ , получим $\varphi(t) \neq 1$. Аналогично доказывается, что $X_\mu \subseteq X_\lambda$. Значит, $X_\lambda = X_\mu$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть g – произвольный элемент группы G . Тогда его образ $\theta(a)$ единственным образом представим в виде $\bar{g}t$, где $\bar{g} \in \bar{G}$, $t \in T$. Минимальный элемент семейства $\mathcal{P}_t$ назовем *носителем* элемента g и обозначим $\text{supp } g$.

ЛЕММА 4.4. Пусть $a \in \gamma_{m-1}A$, g – произвольный элемент G , $\bar{g}$ – его образ при естественном гомоморфизме $\varepsilon: G \rightarrow \bar{G}$. Тогда

$$\text{supp } a^g = \{h \in \bar{G} : \bar{h}g^{-1} \in \text{supp } a\}. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\theta(a) \in T$ и $\theta(a^g) \in T$. Кроме того, легко заметить, что из $a \in \gamma_{m-1}A$ следует, что $a^{g_1} = a^{g_2}$, если $\varepsilon(g_1) = \varepsilon(g_2)$. Проводя непосредственные вычисления, можно показать, что $\{h \in \bar{G} : \bar{h}g^{-1} \in \text{supp } a\} \in \mathcal{P}_{a^g}$. Минимальность множества $\{h \in \bar{G} : \bar{g}^{-1}h \in \text{supp } a\}$ следует из обратимости операции сопряжения.

Пусть $\bar{l}: \bar{G} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ – словарная функция длины на группе $\bar{G}$ относительно порождающего множества, полученного естественным путем из базиса группы F . Обозначим $\rho: \bar{G} \times \bar{G} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ индуцированную правоинвариантную метрику, заданную равенством $\rho(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = \bar{l}(\bar{g}_1\bar{g}_2^{-1})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Шириной* элемента $a \in A$ назовем величину

$$d(a) = \max_{h \in \text{supp } a} \bar{l}(h).$$

ЛЕММА 4.5. Пусть $a \in A$, $g_1, g_2 \in G$, $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ – образы элементов g_1, g_2 в группе $\bar{G}$. Если $\rho(\bar{g}_1, \bar{g}_2) > 2d(a)$, то $\text{supp } a^{g_1} \cap \text{supp } a^{g_2} = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \in \text{supp } a^{g_1} \cap \text{supp } a^{g_2}$. Из равенства (4.5) следует, что существуют такие элементы $s_1, s_2 \in \text{supp } a$, что $s = \bar{s}_1g_1 = \bar{s}_2g_2$. Но тогда

$$\rho(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = \bar{l}(\bar{g}_1\bar{g}_2^{-1}) = l(\bar{g}_1s^{-1}s\bar{g}_2^{-1}) = l(s_1^{-1}s_2) \leq \bar{l}(s_1) + \bar{l}(s_2) \leq 2d(a),$$

что противоречит условию.

ЛЕММА 4.6. Пусть $a_1, \dots, a_l$ – произвольные нетривиальные элементы подгруппы $\gamma_{m-1}A$, причем носители $\text{supp } a_1, \dots, \text{supp } a_l$ попарно не пересекаются. Тогда элементы $a_1, \dots, a_l$ не содержатся ни в какой подгруппе $D \leq \gamma_{m-1}A$ ранга, меньшего l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа $\gamma_{m-1}A$ абелева, то достаточно показать, что элементы $a_1, \dots, a_l$ линейно независимы. Последнее равносильно линейной независимости образов $\theta(a_1), \dots, \theta(a_l) \in T$. Пусть

$$(\theta(a_1))^{\alpha_1} \dots (\theta(a_l))^{\alpha_l} = 1, \quad (4.6)$$

причем $\alpha_i \neq 0$ для некоторого i . Гомоморфизм φ группы T на свою подгруппу $\hat{T} = \text{gr}\{u_1(h), \dots, u_r(h) : h \in \text{supp } a_i\}$ с ядром $\text{Ker } \varphi = \text{gr}\{u_1(h), \dots, u_r(h) : h \in \bar{G} \setminus \text{supp } a_i\}$ оставляет элемент $(\theta(a_i))^{\alpha_i}$ неподвижным. С другой стороны, применяя φ к обеим частям (4.6), получим $\varphi(\theta(a_i)^{\alpha_i}) = 1$ (так как при $j \neq i$ носители $\text{supp } a_j$ лежат в $\bar{G} \setminus \text{supp } a_i$, а значит, $\theta(a_j) \in \text{Ker } \varphi$). Мы пришли к противоречию с условием $\alpha_i \neq 0$.

В заключение докажем частный случай нижней оценки функции роста общего ранга в неравенстве (2.1) (в дальнейшем общий случай будет сведен к доказанному).

ЛЕММА 4.7. Пусть G – конечно порожденная группа вида $F/\gamma_m R$, $m > 1$, $A = R/\gamma_m R$ и $H \triangleleft G$ – произвольная нормальная подгруппа, лежащая в $\gamma_{m-1} A$. Тогда

$$\gamma_{\overline{G}} \preceq r_H,$$

где $\overline{G} = F/R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем какой-нибудь элемент $a \in H$ и обозначим через d ширину элемента a . Положим $\overline{G}_n = \{\bar{g} \in \overline{G} : \bar{l}(\bar{g}) \leq n\}$, где $\bar{l}$ по-прежнему обозначает словарную функцию длины на $\overline{G}$ относительно множества порождающих, являющихся образами свободных порождающих F . Рассмотрим семейство $\mathcal{B}$ всех шаров $B_{\bar{g}_0}(d) = \{\bar{g} \in \overline{G} : \rho(\bar{g}_0, \bar{g}) \leq d\}$ радиуса d с центрами в элементах $\bar{g}_0 \in \overline{G}_n$. Выберем в $\mathcal{B}$ максимальное подсемейство $\mathcal{B}_0$ попарно непересекающихся шаров. Любое такое подсемейство имеет мощность

$$\text{card } \mathcal{B}_0 \geq \frac{\text{card } \overline{G}_n}{\text{card } B_1(2d)},$$

так как семейство шаров радиуса $2d$ с центрами в тех же элементах покрывает все множество $\overline{G}_n$. Действительно, для всякого $\bar{g} \in \overline{G}_n$ найдется элемент $\bar{g}_0$, являющийся центром некоторого шара из $\mathcal{B}_0$, такой, что $\rho(\bar{g}_0, \bar{g}) \leq 2d$ (иначе мы могли бы добавить к $\mathcal{B}_0$ еще один шар с центром в $\bar{g}$). Заметим, что

$$\frac{\text{card } \overline{G}_n}{\text{card } B_1(2d)} = c_0 \gamma_{\overline{G}}(n), \quad (4.7)$$

где $c_0 = (\text{card } B_1(2d))^{-1}$.

Далее, пусть $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_l$ – центры шаров из подсемейства $\mathcal{B}_0$, $g_1, \dots, g_l$ – их прообразы в группе G , кратчайшие относительно системы порождающих, получающейся естественным образом из базиса группы F (соответствующую функцию длины будем обозначать l). Рассмотрим набор элементов $h_1 = a^{g_1}, \dots, h_l = a^{g_l}$. Ясно, что $\rho(\bar{g}_i, \bar{g}_j) > 2d$ для любых $i, j = 1, \dots, l$. Значит, по лемме 4.5 носители $\text{supp } h_1, \dots, \text{supp } h_l$ попарно не пересекаются. Но тогда из леммы 4.6 следует, что ранг любой подгруппы, содержащей $h_1, \dots, h_l$, не менее l . Покажем, что при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $h_1, \dots, h_l \in H_{3n}$. Действительно, $l(h_i) \leq l(a) + 2l(g_i)$. Но при достаточно больших n имеем $l(a) \leq n$; кроме того, $l(g_i) = \bar{l}(\bar{g}_i) \leq n$, так как g_i – кратчайшие прообразы. Следовательно, $l(h_i) \leq 3n$ для всех $i = 1, \dots, l$. По определению функции роста общего ранга с учетом оценки (4.7) получаем

$$r_H(3n) \geq l = c_0 \gamma_{\overline{G}}(n),$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Доказательство теоремы 2.3. Напомним обозначения, введенные в теореме 2.3. Пусть $G = F/\gamma_m R \in \mathcal{K}$, $A = R/\gamma_m R$, ε – естественный гомоморфизм $G \rightarrow \overline{G} = F/R$, $r_{\overline{H}}$ – функция роста общего ранга подгруппы $\overline{H} = \varepsilon(H)$ в $\overline{G}$, $\gamma_{G/AH}$ – функция роста факторгруппы G/AH .

Обозначим через $M = \varphi^{-1}(AH)$ полный прообраз подгруппы AH при естественном гомоморфизме $\varphi: F \rightarrow G$. Рассмотрим факторгруппу $F/\gamma_m M$. Так

как $R \leq M$, то $\gamma_m M$ содержит $\gamma_m R$ и существует естественный гомоморфизм $\psi: G \rightarrow F/\gamma_m M$. Ясно, что образ $\psi(H)$ лежит в $B = M/\gamma_m M$. Кроме того, группа $\psi(H)$ нетривиальна. Действительно, пусть $\psi(H) = 1$. Тогда $H \not\leq A$, так как иначе $M = R$, гомоморфизм ψ является изоморфизмом и $H = 1$. Условие $\psi(H) = 1$ равносильно $H \leq \gamma_m(AH)$, откуда, переходя к факторгруппе по A , получаем $AH/A \leq \gamma_m(AH/A)$, что невозможно в силу разрешимости (по определению класса $\mathcal{K}$) и нетривиальности группы AH/A . Итак, $\psi(H) \neq 1$.

Возьмем такое число $l \geq 1$, что факторгруппа $(\psi(H)\gamma_l B)/\gamma_l B$ нетривиальна, но в тоже время $(\psi(H)\gamma_l B)/\gamma_{l-1} B = 1$. Наконец, пусть $\tilde{G} = F/\gamma_l M$, $\tilde{H}$ – образ подгруппы H при естественном гомоморфизме $\sigma: G \rightarrow \tilde{G}$. Кроме того, обозначим $\tilde{A} = M/\gamma_l M \cong B/\gamma_l B$. Очевидно, что группа $\tilde{G}$ и подгруппы $\tilde{H}$ и $\tilde{A}$ удовлетворяют всем условиям леммы 4.7, а значит,

$$\gamma_{G/AH} \sim \gamma_{F/M} \preceq r_{\tilde{H}}.$$

Учитывая неравенство (3.17), получаем

$$\gamma_{G/AH} \preceq r_H.$$

Нижняя оценка в неравенстве (2.1) доказана.

Докажем верхнюю оценку. Для этого фиксируем какое-нибудь конечное порождающее множество X группы G и соответствующую функцию длины l . Через $\bar{l}$ обозначим функцию длины на $\bar{G}$ относительно $\varepsilon(X)$. Пусть

$$\begin{aligned} (AH)_n &= \text{gr}\{h \in AH : l(h) \leq n\}, \\ \bar{H}_n &= \text{gr}\{\bar{h} \in \bar{H} : \bar{l}(\bar{h}) \leq n\}. \end{aligned}$$

Из результатов работы [1] (см. (1.2)) следует, что функция роста ранга полного прообраза $M = \varphi^{-1}(AH)$ эквивалентна $\gamma_{F/M}$, а значит, и $\gamma_{G/AH}$. В частности,

$$\text{rank}(AH)_n = r_{AH}^*(n) \leq r_M(n) \leq k_1 \gamma_{G/AH}(c_1 n) \quad (4.8)$$

для некоторых $c_1, k_1 = \text{const}$.

Пусть $r_{\bar{H}}(n) = \text{rank } \bar{K} = s$, где $\bar{H}_n \leq \bar{K}$ и $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_s$ – минимальная система порождающих группы $\bar{K}$. Заметим, что по определению функции роста общего ранга s не превосходит ранга $\bar{H}_n$, который, в свою очередь, не больше, чем $\text{rank}(AH)_n$. Таким образом,

$$s \leq k_1 \gamma_{G/AH}(c_1 n). \quad (4.9)$$

Зафиксируем какие-нибудь прообразы $h_1, \dots, h_s$ элементов $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_s$ в группе H и положим

$$P = \text{gr}(\{h_1, \dots, h_s\} \cup (AH)_n), \quad S = P \cap H, \quad T = P \cap A.$$

Ясно, что S и T нормальны в P . Покажем, что $P = ST$. Действительно, пусть x – произвольный элемент группы P . Рассмотрим образ $\varepsilon(x)$. Очевидно, что $\varepsilon(x) \in \bar{H}_n$; значит, элемент $\varepsilon(x)$ представляется в виде некоторого слова $w(\bar{h}_i)$

в порождающих $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_s$. Положим $y = w(h_i)$, где $w(h_i)$ – слово, полученное из $w(\bar{h}_i)$ заменой $\bar{h}_i^{\pm 1}$ на $h_i^{\pm 1}$, $z = y^{-1}x$. Тогда $x = yz$, причем $y \in S$, $z \in T$.

Легко заметить, что $\text{rank } P \leq s + \text{rank}(AH)_n$, откуда с учетом (4.8) и (4.9) получаем

$$\text{rank } P \leq 2k_1\gamma_{G/AH}(c_1n). \quad (4.10)$$

Кроме того, $\text{rank } P/T = s$ и группа T нильпотентна степени $t \leq m-1$. По лемме 4.2

$$\text{rank } S \leq 2^m s \cdot (\text{rank } P)^{m-1} + 2^m \cdot (\text{rank } P)^{2m-3}.$$

Учитывая неравенство (4.10) и вхождение $H_n \subseteq S$, окончательно получаем

$$r_H(n) \leq \text{rank } S \leq k_2(r_{\overline{H}}(c_2n)(\gamma_{G/AH}(c_2n))^{m-1} + (\gamma_{G/AH}(c_2n))^{2m-3})$$

для некоторых констант c_2, k_2 . Теорема 2.3 доказана.

Доказательство следствия 2.1. Хорошо известно (и легко доказывается), что всякая подгруппа полициклической группы конечно порождена. Поэтому в данном случае для любой подгруппы $H \triangleleft G$ функция $r_{\overline{H}}$ ограничена и неравенство (2.1) при $m = 2$ превращается в эквивалентность

$$r_H \sim \gamma_{G/AH}.$$

В работе [10] показано, что полициклическая группа имеет либо полиномиальный, либо экспоненциальный рост. Остается заметить, что в случае, когда группа G/AH имеет экспоненциальный рост, мы получаем (2.3); если же рост G/AH полиномиален, то группа G/AH содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса (см. [10]) и ее функцию роста можно вычислить (с точностью до эквивалентности) по формуле Басса (см. [11]). В последнем случае мы получим в точности (2.2).

Конечно порожденные подгруппы. Доказательство следствия 2.2. Сделаем сначала одно замечание. Пусть для некоторой подгруппы H в конечно порожденной группе G функция роста общего ранга r_H ограничена. Отсюда совсем не обязательно следует конечность ранга подгруппы H . Например, в случае локально циклической подгруппы H бесконечного ранга получим

$$r_H \equiv 1,$$

но

$$\text{rank } H = \infty.$$

В самом деле, ограниченность функции роста общего ранга подгруппы H влечет ограниченность общего ранга в смысле Мальцева (см. [12]). Верно и обратное: если $H \subseteq G$ является группой конечного общего ранга C в смысле Мальцева, то $r_H(n) \leq C$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Перейдем к доказательству следствия 2.2. Пусть факторгруппа $|G/AH|$ бесконечна. Тогда из нижней оценки в неравенстве (2.1) следует бесконечность функции роста общего ранга (а значит, и просто ранга) подгруппы H . Если же $|G/AH| < \infty$, то как показывает сделанное выше замечание, из теоремы 2.3 следует лишь конечность общего ранга H в смысле Мальцева. Однако, в этом случае нужный результат легко получается из леммы 4.2. В самом деле, из условия $|G/AH| < \infty$ следует конечность ранга подгруппы AH . В лемме 4.2 положим $S = H$, $T = A$, $P = AH$; тогда получим $\text{rank } H < \infty$.

§ 5. Функции роста ранга и многообразия групп

Лемма о длине элемента. В настоящем параграфе мы будем рассматривать группы вида $G = F/[R, R] \in \mathcal{K}$. По лемме 4.3 всякая такая группа вложима в дискретное сплетение $S = U \operatorname{wr} \overline{G}$, где U – свободная абелева группа подходящего ранга, $\overline{G} = F/R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть G – группа вида $F/[R, R]$. Запись образа элемента $g \in G$ при вложении θ группы G в сплетение $S = U \operatorname{wr} \overline{G}$ вида

$$\theta(g) = \bar{g} \cdot u_{i_1}^{\alpha_1}(h_1) \dots u_{i_l}^{\alpha_l}(h_l) \quad (5.1)$$

где $\alpha_j \neq 0$, $u_{i_j}(h_j)$ – свободные порождающие базы сплетения и $u_{i_j}(h_j) \neq u_{i_k}(h_k)$ при $j \neq k$, назовем *канонической* (такая запись единственна с точностью до перестановки элементов u_j , см. [8]). *Размером канонической записи* назовем число $p(g)$ различных элементов $u_{i_j}(h_j)$ в (5.1).

Нетрудно установить, что $p(g) = \operatorname{card} \operatorname{supp} g$, так как в данном случае множество элементов h_j в записи (5.1) совпадает с носителем элемента g .

ЛЕММА 5.1. Пусть G – группа вида $F/[R, R]$, l – функция длины на G относительно порождающего множества, полученного естественным образом из базиса группы F . Тогда для всякого элемента $g \in G$ длина $l(g)$ не меньше размера канонической записи его образа, т.е.

$$l(g) \geq p(g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $l(g)$. При $l(g) = 1$ утверждение следует из явного вида вложения θ (см. лемму 4.3). Пусть $l(g) = k > 1$. Тогда $g = x^{\pm 1}g_0$, где $l(g_0) = k - 1$, x – порождающий элемент группы G . Рассмотрим для определенности случай $g = xg_0$. Положим $\theta(g_0) = \bar{g}_0 t$, $\theta(x) = \bar{x}u(1)$, где $\bar{g}_0, \bar{x} \in \overline{G}$, $t \in T$, а $u(1)$ – один из элементов свободного порождающего множества подгруппы $U(1)$ в базе сплетения T . Тогда $\theta(g) = \bar{x}u(1) \cdot \bar{g}_0 t = \bar{x}\bar{g}_0 u(\bar{g}_0)t$. При этом

$$p(g) \leq p(g_0) + 1 \leq l(g_0) + 1 = l(g).$$

Случай $g = x^{-1}g_0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Докажем сначала включение $\Omega(\mathfrak{S}_2) \subseteq \Omega_p$. В силу неравенства (3.17) достаточно доказать полиномиальность функций роста общего ранга подгрупп в свободных метабелевых группах. Итак, пусть G – свободная метабелева группа конечного ранга, $H \leq G$. Фиксируем какую-нибудь свободную систему порождающих X группы G и соответствующую функцию длины l . Пусть, как обычно, $\overline{H}$ – образ подгруппы H при естественном гомоморфизме $\varepsilon: G \rightarrow \overline{G} = F/F'$. Без ограничения общности можно предположить, что $\overline{H}$ обладает таким базисом $\{\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_k\}$, что при всех i имеет место $\bar{h}_i = \varepsilon(x_i^{d_i})$ для некоторых $x_i \in X$ и $d_i \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим множество Y , построенное следующим образом. Во-первых, включим в Y некоторые прообразы $h_1, \dots, h_k \in H$ элементов $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_k$. Далее, рассмотрим некоторый элемент $h \in H$ длины не более n . Элемент $\varepsilon(h)$ лежит в $\bar{H}$ и имеет длину относительно $\varepsilon(X)$ не более n ; ясно, что $\varepsilon(h)$ представляется в виде слова $w_h(\bar{h}_j)$ в алфавите $\{\bar{h}_1^{\pm 1}, \dots, \bar{h}_k^{\pm 1}\}$ длины не более n . Добавим к множеству Y все элементы вида $h^{-1}w_h(h_j)$, где $w_h(h_j)$ – слово, полученное из $w_h(\bar{h}_j)$ заменой $\bar{h}_j$ на h_j и $\bar{h}_j^{-1}$ на h_j^{-1} , а h пробегает множество всех элементов подгруппы H , имеющих длину не более n . Ясно, что $h^{-1}w_h(h_j) \in G'$ при любом h . Кроме того, при любом h длины не более n

$$l(h^{-1}w_h(h_j)) \leq cn \quad (5.2)$$

для некоторой константы c . Легко проверить, что построенное множество Y порождает некоторую подгруппу в H , содержащую H_n .

Заметим, что подгруппа B , порожденная элементами вида $h^{-1}w_h(h_j) \in Y$, лежит в A_{cn} . В силу теоремы 2.3 и полиномиальности функции роста абелевой факторгруппы G/A имеем $\text{rank } B \leq \text{rank } A_{cn} \leq c_1 n^d$ при некоторых $c_1, d = \text{const}$. Таким образом,

$$r_H(n) \leq \text{rank gr } Y \leq k + \text{rank } B \leq c_2 n^d$$

для некоторой константы c_2 .

Теперь покажем, что всякая функция $f \in \Omega_p$ реализуется с точностью до эквивалентности в качестве функции роста общего ранга некоторой подгруппы в свободной метабелевой группе. По определению полиномиальной функции найдутся такие константы c и s (которые можно считать натуральными), что $f(n) \leq cn^s$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Возьмем свободную метабелеву группу G со свободным порождающим множеством $X = \{x_1, \dots, x_{s+2}\}$ и рассмотрим множество элементов $W = \{w_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}, \lambda_j \in \mathbb{Z}, \text{ вида}$

$$w_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} = [x_{s+1}^l, x_{s+2}^l] x_1^{\lambda_1} \dots x_s^{\lambda_s},$$

где $l = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_s|$.

Ясно, что носители различных элементов множества W попарно не пересекаются. Обозначим $W_n = \{w \in W : l_G(w) \leq n\}$, где l_G – функция длины на G относительно X . Тогда для некоторой достаточно большой константы $k \in \mathbb{N}$ имеем $\text{card } W_{kn} \geq n^s \geq f(n)$. Значит, можно выбрать такое подмножество $V \subseteq W$, что

$$\text{card } V_{kn} = f(n),$$

где $V_n = \{v \in V : l_G(v) \leq n\}$. Рассмотрим подгруппу $H = \text{gr } V$ и покажем, что

$$r_H \sim f. \quad (5.3)$$

Действительно, из построения множества V следует, что $V_{kn} \subseteq H_{kn}$. По лемме 4.6

$$r_H(kn) \geq \text{card } V_{kn} = f(n). \quad (5.4)$$

Далее, пусть $h \in H$, $h = w_1^{\mu_1} \dots w_k^{\mu_k}$, где $w_1, \dots, w_k$ – различные элементы множества W , $\mu_1 \neq 0, \dots, \mu_k \neq 0$ и длина $l_G(h) \leq n$. Заметим, что если носители

элементов $g_1, g_2 \in [G, G]$ не пересекаются, то $\text{supp } g_1 g_2 = \text{supp } g_1 \cup \text{supp } g_2$. Поэтому, учитывая лемму 5.1, имеем $l_G(h) \geq p(h) = p(w_1^{\mu_1} \dots w_k^{\mu_k}) \geq p(w_j)$ для любого j . Непосредственное вычисление показывает, что каноническая запись элемента $\theta([x_{s+1}^l, x_{s+2}^l])$ имеет вид

$$\begin{aligned} & u_{s+1}^{-1}(1)u_{s+1}^{-1}(\bar{x}_{s+1}) \dots u_{s+1}^{-1}(\bar{x}_{s+1}^{l-1})u_{s+2}^{-1}(\bar{x}_{s+1}^l)u_{s+2}^{-1}(\bar{x}_{s+1}^l \bar{x}_{s+2}) \dots \\ & \dots u_{s+2}^{-1}(\bar{x}_{s+1}^l \bar{x}_{s+2}^{l-1})u_{s+1}(\bar{x}_{s+2}^l \bar{x}_{s+1}^{l-1}) \dots \\ & \dots u_{s+1}(\bar{x}_{s+2}^l \bar{x}_{s+1})u_{s+1}(\bar{x}_{s+2}^l)u_{s+2}(\bar{x}_{s+2}^{l-1}) \dots u_{s+2}(\bar{x}_{s+2}^1)u_{s+2}(1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для всякого элемента $w_j = w_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}$

$$p(w_j) = 4l \geq \frac{2}{3} l_G(w_j), \quad (5.5)$$

так как $l_G(w_j) \leq 6l$. Поэтому для всех $j = 1, \dots, k$ имеем $l_G(w_j) \leq \frac{3}{2} l_G(h) \leq \frac{3}{2} n$. Значит, $H_n \subseteq V_{[\frac{3}{2}n]}$ и по определению функции роста общего ранга

$$r_H(n) \leq f\left(\left\lceil \frac{3}{2}n \right\rceil\right) \leq f(2n). \quad (5.6)$$

Комбинируя неравенства (5.4) и (5.6), получаем (5.3). Теорема 2.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.5 по сути повторяет доказательство теоремы 2.4. Пусть G – свободная разрешимая группа ступени 3, свободно порожденная элементами $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. В качестве W следует выбрать подмножество таких элементов $w_{\bar{g}} \in G$, индексированных элементами $\bar{g} \in G_0/G_0''$, где $G_0 = \text{gr}\{x_1, x_2\}$, что

$$w_{\bar{g}} = [[x_3^l, x_4^l], [x_5^l, x_6^l]]^g,$$

где g – кратчайший (относительно x_1, x_2) представитель элемента $\bar{g}$ в G_0 (ясно, что $w_{\bar{g}}$ не зависит от выбора этого представителя), а l – длина элемента g относительно x_1, x_2 . Ввиду экспоненциальности роста свободной метабелевой группы G_0/G_0'' множество W имеет экспоненциальный рост.

Так же, как и выше, для заданной функции f не более чем экспоненциального роста выбирается подмножество $V \subseteq W$ со свойством

$$\text{card } V_{kn} = f(n). \quad (5.7)$$

Ясно, что $\text{supp } w_{\bar{g}_1} \cap \text{supp } w_{\bar{g}_2} = \emptyset$ при $\bar{g}_1 \neq \bar{g}_2$. Как следствие получаем нижнюю оценку функции роста общего ранга подгруппы $H = \text{gr } V$.

Находя в явном виде каноническую запись образа элемента $[[x_3^l, x_4^l], [x_5^l, x_6^l]]$, убедимся, что вместо неравенства (5.5) имеет место

$$p(w_{\bar{g}}) = 16l \geq \frac{8}{9} l_G(w_{\bar{g}}),$$

где l_G – функция длины на G относительно $\{x_1, \dots, x_6\}$. Рассуждая далее так же, как и в доказательстве теоремы 2.4, получаем верхнюю оценку для функции роста общего ранга подгруппы H .

Список литературы

1. *Osin D. V.* On the generating set's growth functions for subgroups of free groups // Internat. J. Algebra Comput. 1999. V. 9. №1. P. 41–50.
2. *Rosenmann A.* When Schreier transversals grow wild // Preprint, 1997.
3. *Howson A. G.* On the intersection of the finitely generated free groups // J. London Math. Soc. 1954. V. 29. P. 428–434.
4. *Эйделькин Д. И.* О конечно порожденных нормальных делителях полинильпотентных групп // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9. №1. С. 236–239.
5. *Baumslag G.* Some theorems on the free groups of certain product varieties // J. Combin. Theory. 1967. V. 2. P. 77–99.
6. *Ol'shanskii A. Yu.* Distortion functions for subgroups // Geometric group theory down under (Canberra, Australia, 1996). Walter de Gruyter, 1999. P. 281–291.
7. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. Сб. пер. 1968. Т. 12. №1. С. 3–36.
8. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
9. *Шмелькин А. Л.* Сплетения и многообразия групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. №1. С. 149–170.
10. *Wolf J. A.* Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds // J. Differential Geom. 1968. V. 2. P. 421–446.
11. *Bass H.* The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1972. V. 25. P. 603–614.
12. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Матем. сб. 1948. Т. 22. №2. С. 351–352.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
21.10.1998 и 13.11.1998