Общероссийский математический портал

Е. Е. Петров, Теоремы Пэли–Винера для матричного преобразования Радона, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 8, 103–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm422>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:27:05

УДК 517.43

Е. Е. Петров

Теоремы Пэли–Винера для матричного преобразования Радона

Теоремы о значениях обычного преобразования Радона на различных функциональных пространствах обобщаются на случай матричного преобразования Радона.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Под теоремами Пэли–Винера для некоторого интегрального преобразования понимается описание значений преобразования на том или ином функциональном пространстве (или, что все равно, описание образов функциональных пространств).

В настоящей работе теоремы Пэли–Винера для обычного преобразования Радона (о.п.Р.) [1], [2] обобщаются на матричное преобразование Радона (м.п.Р.) [3]. А именно обобщаются: теорема об образе пространства C^∞ -функций на $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями [2], [4]; теоремы об образах пространства C^∞ -функций с быстро убывающими производными [1], [2], [5] и его подпространства, состоящего из функций, ортогональных к полиномам [6]; теорема об образе пространства C^∞ -функций с носителями в компактном выпуклом множестве $K \subset \mathbb{R}^n$ [7]; теорема об образе пространства $\mathcal{L}^2(K)$ функций с интегрируемым квадратом модуля и носителями в K [8]; более общая теорема об образе пространства функций $f \in \mathcal{L}^2(K)$, для которых $|y|^w \mathcal{F}_n f(y) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{F}_n f$ – преобразование Фурье, а $w \in \mathbb{R}$ – заданное число [9]; теорема о достаточных условиях, выделяющих образ C^∞ -функций с конечным порядком убывания на бесконечности [10].

Образы соответствующих пространств характеризуются дополнительными условиями, вводимыми ниже в п. 2. Доказательства основаны на связи м.п.Р. с о.п.Р. Возникающий метод доинтегрирования [2] сводит теоремы для м.п.Р. к соответствующим теоремам для о.п.Р. В частности, метод позволяет легко обобщить теорему о носителе [2] и дать прозрачные доказательства ранее опубликованных версий обобщения двух первых теорем [3], [11].

Работа стимулирована сообщением [12]. Автор выражает благодарность профессору М. И. Граеву и В. П. Лексину за обсуждение работы и критические замечания.

2. Основные понятия. Пусть $\mathbb{R}^{n \times m}$ – пространство вещественных $n \times m$ -матриц $x = (x_{ij}) (n \geq m)$, U – многообразие Штифеля ортонормированных m -реперов в $\mathbb{R}^n$, естественным образом отождествленных с $n \times m$ -матрицами, $O(m)$ – группа ортогональных матриц порядка m . Пусть $k = m(n - m)$.

Среди k -мерных плоскостей пространства $\mathbb{R}^{n \times m}$ выделяется комплекс H плоскостей, задаваемых матричными уравнениями $u \cdot x = s$, где $u \in U$, $s \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – параметры плоскости, $u \cdot x$ – произведение транспонированной матрицы ${}^t u$ на матрицу x . Пары (u, s) и $(u^t g, gs)$, $g \in O(m)$, и только они задают одну и ту же плоскость комплекса. Функцией на комплексе H считается функция $\varphi(u, s)$ на прямом произведении $U \times \mathbb{R}^{m \times m}$ с условием инвариантности $\varphi(u^t g, gs) = \varphi(u, s)$, $g \in O(m)$. Пусть

$$\delta(u \cdot x - s) = \prod_{i,j=1}^m \delta((u \cdot x - s)_{ij})$$

– дельта-функция, связанная с поверхностью $u \cdot x = s$. Преобразование, сопоставляющее комплекснозначной функции $f(x)$ функцию

$$\hat{f}(u, s) = \int_{u \cdot x = s} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \delta(u \cdot x - s) dx$$

на комплексе H , называется м.п.Р. [3]. При $m = 1$ это о.п.Р., которое ниже будет обозначаться символом $\mathcal{R}_n f$.

Как известно [4], [5], [8; доб. перев.], для характеристики образов пространств основных функций при о.п.Р. необходимы так называемые алгебраические условия Кавальери: для $q \in \mathbb{Z}_+$ – неотрицательного целого числа и четной функции $\varphi(u, s)$ на цилиндре $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u, s) s^q ds = P_q(u) \quad (1)$$

есть однородный степени q многочлен от координат точки $u \in S^{n-1}$ сферы.

Для интегрального преобразования, связанного с k -мерными ($k < n - 1$) плоскостями в $\mathbb{R}^n$, при описании образов возникают различные условия [2], [5], [13], [14]. В случае м.п.Р. $k < nm - 1$ и естественно ожидать появления различных аналогов условий (1). Обозначим через tr след квадратной матрицы. Пусть $\langle x, y \rangle = \text{tr}(x \cdot y)$ – стандартное внутреннее произведение в $\mathbb{R}^{n \times m}$, $|x|^2 = \langle x, x \rangle$ – квадрат модуля элемента x . Для функции $\varphi(u, s)$ на комплексе H введем моментные условия (М): для $q \in \mathbb{Z}_+$ и $\lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \langle \lambda, s \rangle^q ds = P_q(u\lambda)$$

является однородным степени q многочленом от координат произведения $u\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Запись условий (М) инвариантна относительно замены $(u, s) \rightarrow (u^t g, gs)$, $g \in O(m)$, параметров плоскости. Поэтому (М) есть условия на функцию, определенную на комплексе H .

Введем дополнительные условия Кавальери (С): для $q \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}^{(m-1) \times m}$, $m \times (m-1)$ -матрицы λ_* максимального ранга и $i = 1, 2, \dots, m$ интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) s_{ii}^q \delta(\lambda_* \cdot s - t) ds = p_q^{(i)}(u_i; u\lambda_*, t)$$

по t -мерной плоскости вида $\lambda_* \cdot s = t$ есть однородный степени q многочлен от элементов столбца u_i с функциональными элементами, зависящими от t и произведения $u\lambda_*$.

Пусть u_* – подматрица в u , дополнительная к столбцу u_i ; s^* – подматрица в s , дополнительная к строке s_i , e – единичная матрица порядка t . Выполнение условий (C) только для $q = 0$ и $\lambda_* = e_*$ будем обозначать символом $C(0)$ и называть нулевыми условиями Кавальери: для $i = 1, 2, \dots, t$ интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(u, s) ds_i = p_0^{(i)}(u_i; u_*, s^*) = a_0(u_*, s^*)$$

по строке s_i матрицы s есть функция, не зависящая от столбца u_i .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из $O(m)$ -инвариантности функции $\varphi(u, s)$ следует независимость функции a_0 от номера i .

Для м.п.Р. в пространстве над локальным неархимедовым полем нулевые условия Кавальери рассматривались в [15].

Для точек ω стандартной сферы S^{nm-1} в $\mathbb{R}^{n \times m}$ введем опорную функцию

$$S_K(\omega) = \sup_{x \in K} \langle \omega, x \rangle$$

компактного выпуклого множества K . Обозначим через (L) условие: $\varphi(u, s) = 0$ на каждой паре (u, s) , для которой существует $\theta \in S^{m^2-1} \subset \mathbb{R}^{m \times m}$ такое, что $\langle \theta, s \rangle > S_K(u\theta)$. Условие (L) инвариантно относительно замены $(u, s) \rightarrow (u^t g, gs)$, $g \in O(m)$, параметров плоскости. Поэтому оно является условием на функцию, определенную на комплексе H .

Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})$ обозначим пространство C^∞ -функций на $\mathbb{R}^{m \times m}$ с быстро убывающими производными, а через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n \times m})$ – его подпространство функций с компактными носителями. Аналогичный смысл имеют обозначения $\mathcal{S}(H)$ и $\mathcal{D}(H)$. Пусть $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{n \times m})$ и $\mathcal{L}^2(H)$ – стандартные пространства Лебега функций с интегрируемыми квадратами модулей на $\mathbb{R}^{n \times m}$ и H соответственно. Для фиксированного $w \in \mathbb{R}$ будет рассматриваться пространство

$$\mathcal{D}^w(\mathbb{R}^{n \times m}) = \{f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{n \times m}) : |y|^w \mathcal{F}_{nm} f(y) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{n \times m})\},$$

где $\mathcal{F}_{nm} f$ – преобразование Фурье функции f [9]. При $w \geq 0$ это соболевское пространство

$$\mathcal{H}^w(\mathbb{R}^{n \times m}) = \{f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{n \times m}) : (1 + |y|^2)^{w/2} \mathcal{F}_{nm} f(y) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{n \times m})\}.$$

Почти аналогичным образом вводится пространство

$$\mathcal{D}^w(H) = \{\varphi \in \mathcal{L}^2(H) : |\lambda|^{w-k/2} |\det \lambda|^{(n-m)/2} \mathcal{F}_{m^2} \varphi(u, \lambda) \in \mathcal{L}^2(H)\}.$$

Здесь $\mathcal{F}_{m^2}$ – преобразование Фурье функции $\varphi(u, s)$ по аргументу $s \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Какое-либо условие в нижнем индексе функционального пространства будет обозначать выделение соответствующего подпространства. Например, $\mathcal{S}_M(H)$ – подпространство в $\mathcal{S}(H)$ функций, удовлетворяющих условиям (M).

Образ какого-либо функционального пространства $\mathcal{A}$ при отображении $f \rightarrow \hat{f}$ будет обозначаться символом $\mathcal{A}^\wedge$.

3. Результаты. Обобщением теоремы об образе $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^\wedge$ для о.п.Р. [2], [4] является

ТЕОРЕМА 1. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge = \mathcal{D}_M(H)$.

Пусть $GL(m)$ – группа невырожденных матриц порядка m . Плоскости комплекса H можно задавать уравнениями $\xi \cdot x = s$, где m -репер $\xi \in E$ не обязательно ортонормированный. Функцией на H в таком случае считается функция $\varphi(\xi, s)$ на $E \times \mathbb{R}^{m \times m}$ с условием однородности

$$\varphi(\xi^t g, gs) = |\det g|^{-m} \varphi(\xi, s), \quad g \in GL(m, \mathbb{R}).$$

Таковой является функция

$$\hat{f}(\xi, s) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \delta(\xi \cdot x - s) dx.$$

Легко проверить, что функция $\varphi(\xi, s)$ вполне определяется своим ограничением $\varphi(u, s)$ на $U \times \mathbb{R}^{m \times m}$ в соответствии с формулой

$$\varphi(\xi, s) = |\det(\xi \cdot \xi)|^{-m/2} \varphi(\xi(\xi \cdot \xi)^{-1/2}, (\xi \cdot \xi)^{-1/2} s).$$

Условия (М) на функцию $\varphi(u, s)$ эквивалентны (см. ниже лемму 9) условиям

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, s) (\operatorname{tr} s)^q ds = P_q(\xi) \quad (2)$$

на функцию $\varphi(\xi, s)$. Тем самым формулировка теоремы об образе $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge$ в работе [3] эквивалентна теореме 1. К сожалению, доказательство теоремы в [3] имеет пробел.

Как и в случае интегрального преобразования, связанного с k -мерными плоскостями в $\mathbb{R}^n$ при $k < n - 1$ [13; предложение 2.3], верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $m > 1$ подпространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge$ в $\mathcal{S}_M(H)$ является собственным.

Возникает задача о недостающих, дополнительных к (М) условиях. Теорему об образе $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^\wedge$ для о.п.Р. [1], [2], [5] обобщает

ТЕОРЕМА 2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge = \mathcal{S}_{M, C(0)}(H)$.

Таким образом, при $m > 1$ дополнительными к (М) являются условия $C(0)$. При $m = 1$ условия $C(0)$ входят в (М).

СЛЕДСТВИЕ. В пространстве $\mathcal{D}(H)$ условия $C(0)$ следуют из условий (М).

Далее, из условий (С) вытекает пара условий (М) и $C(0)$. Поэтому имеет место

ТЕОРЕМА 3. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge = \mathcal{S}_C(H)$.

Для функции $\varphi(\xi, s)$ быстрое убывание на H интерпретируется как быстрое убывание по s , равномерное по $\xi \in \Gamma$ для любого сечения Γ естественного расслоения $E \rightarrow U$ [5]. Условия Кавальери (C) для функции $\varphi(u, s)$ эквивалентны условиям (см. лемму 10): для $q \in \mathbb{Z}_+$ и $i = 1, 2, \dots, m$ интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\xi, s) s_{ii}^q ds_i = p_q^{(i)}(\xi_i; \xi_*, s^*) \equiv \sum_{|\alpha|=q} a_q^{(i)}(\xi_*, s^*) \xi_i^\alpha \quad (3)$$

есть однородный степени q многочлен от ξ_i с функциональными коэффициентами от остальных столбцов и строк матриц ξ и s соответственно. Таким образом, теорема об образе $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge$ в [11] следует из теоремы 3.

Пусть $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^{n \times m})$ – подпространство в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})$ функций, ортогональных к полиномам [6], $\mathcal{S}^*(H)$ – подпространство в $\mathcal{S}(H)$ функций, ортогональных к полиномам от аргумента s в том смысле, что

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) P(s) ds = 0.$$

При $m = 1$ условие (C) поглощается условием ортогональности. Обобщением теоремы Семяннистого [6] является

ТЕОРЕМА 4. $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge = \mathcal{S}_C^*(H)$.

Пусть $\mathcal{D}(K)$ – подпространство в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n \times m})$ функций с носителями в компактном выпуклом множестве K . Через $K^\wedge$ обозначим подмножество плоскостей комплекса, пересекающих K . Обобщением теоремы Людвиг [7; теорема 3.1] на случай м.п.Р. является

ТЕОРЕМА 5. $\mathcal{D}(K)^\wedge = \mathcal{D}_M(K^\wedge)$.

Теорема 5 может быть переформулирована в аналитической форме [8; добавл. перев.].

ТЕОРЕМА 5'. $\mathcal{D}(K)^\wedge = \mathcal{D}_{M,L}(H)$.

Пусть $\mathcal{D}^w(K)$ – подпространство в $\mathcal{D}^w(\mathbb{R}^{n \times m})$ функций с носителями в K . Теореме Смита [9; теорема 13.4] обобщает

ТЕОРЕМА 6. $\mathcal{D}^w(K)^\wedge = \mathcal{D}_{M,L}^{w+k/2}(H)$.

В частности, при $w = 0$ получаем обобщение на случай м.п.Р. теоремы Лакса–Филлипса [8] (прямого аналога классической теоремы Пэли–Винера)

$$\mathcal{L}^2(K)^\wedge = \mathcal{D}_{M,L}^{k/2}(H).$$

Рассмотрим функции на $\mathbb{R}^{n \times m}$ с конечным порядком убывания на бесконечности [10]. Считается, что функция $f(x)$ имеет асимптотику типа $O(|x|^{-l})$ (обозначение $f(x) \sim O(|x|^{-l})$) при $|x| \rightarrow \infty$, $l \in \mathbb{Z}_+$, если существуют постоянные $A, B > 0$ такие, что $|f(x)| \leq A|x|^{-l}$ при $|x| \geq B$.

Символом $M(l)$ будем обозначать выполнение условий (M) только для показателей $q = 0, 1, \dots, l$. Пусть $\partial_{ij} = \partial/\partial x_{ij}$ и $\partial^\alpha = \partial_{11}^{\alpha_{11}} \partial_{12}^{\alpha_{12}} \dots \partial_{nm}^{\alpha_{nm}}$ для мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{n \times m}$. Теорему Солмона [10; теорема 7.7] на случай м.п.Р. обобщает

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}_C(H)$. Тогда

- а) φ есть м.п.Р. некоторой C^∞ -функции $f(x) \sim O(|x|^{-nm-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$;
- б) $f(x) \sim O(|x|^{-nm-l-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$, если и только если $\varphi(u, s)$ удовлетворяет условиям $M(l)$;
- с) если $f(x) \sim O(|x|^{-nm-l-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$ для всех целых $l \geq -1$, то $\partial^\alpha f(x) \sim O(|x|^{-nm-l-1-|\alpha|})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

4. Вспомогательный материал. Пусть $\Gamma(x)$ – гамма-функция, du – инвариантная относительно преобразования $g_1 u g_2$ группы $O(n) \times O(m)$ мера на многообразии U , нормированная условием

$$\int_U du = \frac{2^m \pi^{nm/2}}{\Gamma_m(n/2)},$$

где $\Gamma_m(\lambda) = \pi^{m(m-1)/4} \Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda - 1/2) \cdots \Gamma(\lambda - (m-1)/2)$. В частности, инвариантная мера $d\omega$ на сфере S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ нормирована условием: мера всей сферы равна $2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

Положим $d = m(m+1)/2$. На сфере $S^{nm-1} \subset \mathbb{R}^{n \times m}$ матрицы ранга, меньшего m , образуют подмногообразие меньшей размерности. Для матриц ранга m , т.е. почти всюду, имеет место

ЛЕММА 1. Матрица $\omega \in S^{nm-1}$ ранга m имеет однозначное разложение $\omega = u\tau$, где $u \in U$, а $\tau \in S_+^{d-1}$ – верхняя треугольная матрица порядка m с положительными диагональными элементами τ_{ii} , $i = 1, 2, \dots, m$. При этом

$$d\omega = \prod_{i=1}^m \tau_{ii}^{n-i} du d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для симметрической матрицы ${}^t\omega\omega$ хорошо известно (см., например, [16]) разложение ${}^t\omega\omega = {}^t\tau\tau$ с однозначно определенной матрицей τ .

После этого однозначно выписывается матрица $u = \omega\tau^{-1} \in U$. Условие $|\omega| = 1$ показывает, что $|\tau| = 1$.

Далее, для матриц $x \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга m имеется как обычное полярное разложение $x = \omega\rho$ с направлением $\omega \in S^{nm-1}$ и радиусом $\rho = |x|$, так и матричное полярное разложение $x = ut$, $u \in U$, t – верхняя треугольная матрица порядка m с положительными диагональными элементами t_{ii} , $i = 1, 2, \dots, m$. Возникает равенство

$$\rho^{nm-1} d\omega d\rho = \prod_{i=1}^m t_{ii}^{n-i} du dt, \quad \left(dt := \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} dt_{ij}\right),$$

известных (см., например, [16]) разложений меры dx на пространстве $\mathbb{R}^{n \times m}$. Поскольку $\rho = |x| = |t|$, то, переходя к обычным полярным координатам $t = \tau\rho$ с учетом равенства $dt = \rho^{d-1} d\tau d\rho$, получаем разложение меры $d\omega$. Лемма 1 доказана.

Для матриц ранга $r < m$ из пространства $\mathbb{R}^{n \times m}$ условимся называть “первыми” столбцами набор первых по порядку номеров линейно независимых r столбцов. Матрицу из $\mathbb{R}^{m \times m}$ ранга r будем называть правильной, если ее элементы на пересечениях первых r строк и “первых” столбцов образуют верхнюю треугольную матрицу с положительными диагональными элементами, а элементы последних $m - r$ строк нулевые.

ЛЕММА 2. Для матрицы $\omega \in S^{nm-1}$ ранга $r < m$ существует разложение $\omega = u\tau$, где $\tau \in S_+^{d-1}$ — однозначно определенная правильная матрица, а матрица $u = (u', u'') \in U$ задана с точностью до произвольной подматрицы u'' последних $m - r$ столбцов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ω принадлежит сфере, то $r \geq 1$. Пусть вначале “первые” столбцы в ω совпадают с действительно первыми $\omega_1, \dots, \omega_r$. Введем разбиение $\omega = (\omega', \omega'')$ матрицы ω на блоки, ω' — подматрица первых r столбцов. В лемме 1 установлено однозначное разложение $\omega' = u'\tau'$. Тогда в произведении

$$(\omega', \omega'') = (u', u'') \begin{pmatrix} \tau' & \tau'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

подматрица τ'' однозначно определяется из равенства $\omega'' = u'\tau''$, а подматрицу u'' можно взять любой при условии $(u', u'') \in U$. Разложение $\omega = u\tau$, где τ правильная, установлено. Равенство $|\omega| = 1$ показывает, что $\tau \in S_+^{d-1}$. В общем случае подстановка σ переводит “первые” столбцы на первые места. Тогда $\omega = \omega_1 \sigma^{-1} = u\tau_1 \sigma^{-1} = u\tau$ и лемма 2 доказана.

Далее, пусть $v \in U$ и $\theta \in S^{m^2-1} \subset \mathbb{R}^{m \times m}$. Очевидно, что $\omega = v\theta \in S^{nm-1}$. Леммы 1 и 2 показывают, что отображение $(v, \theta) \rightarrow v\theta$ прямого произведения $U \times S^{m^2-1}$ на сферу S^{nm-1} сюръективно. Обозначим через

$$B_\omega = \{(v, \theta) \in U \times S^{m^2-1} : v\theta = \omega\}$$

слой этого отображения над точкой ω . Согласно лемме 1 слой над точкой ω ранга m содержит пару (u, τ) , порожденную разложением $\omega = u\tau$. Согласно лемме 2 слой над точкой ω ранга $r < m$ содержит все пары $((u', u''), \tau)$ с произвольной подматрицей u'' .

ЛЕММА 3. Слой B_ω состоит из всех пар (u, τ) разложения $\omega = u\tau$ и их сдвигов $(u^t g, g\tau)$, $g \in O(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что вместе с парами (u, τ) полярного разложения $\omega = u\tau$ слой B_ω содержит и все сдвиги $(u^t g, g\tau)$, $g \in O(m)$. Требуется показать, что этим слой B_ω исчерпывается.

Пусть пара $(v, \theta) \in B_\omega$ произвольна. Из равенства $v\theta = u\tau$ следует, что ${}^t\theta\theta = {}^t\tau\tau$. По леммам 1 и 2 имеем, вообще говоря, неоднозначное разложение $\theta = g\tau$, где $g = (g', g'') \in O(m)$ и g'' произвольна в случае $r < m$. Из системы $v(g', g'') = u\tau$ равенств выделим равенства $vg'\tau' = u'\tau'$ “первых” столбцов. Откуда $vg' = u'$. Присоединив произведение vg'' , получаем матрицу $v(g', g'') = (u', vg'') \in U$. В таком случае матрицу (u', vg'') можно принять за сомножитель u в разложении $\omega = u\tau$. В итоге $vg = u$, откуда $v = u^t g$ и лемма 3 доказана.

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^{n \times m}$, плоскостей комплекса H и компактного выпуклого множества $K \subset \mathbb{R}^{n \times m}$.

ЛЕММА 4. Гиперплоскость $\langle \omega, x \rangle = p$ содержит плоскость $u \cdot x = s$ комплекса, если и только если $\omega = u\theta$ и $p = \langle \theta, s \rangle$ для некоторого $\theta \in S^{m^2-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если соотношения выполняются, то очевидно, что плоскость содержится в гиперплоскости. Обратно, пусть гиперплоскость проходит через плоскость $u \cdot x = s$. Уравнения $u_i \cdot x_j = s_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$) являются базовыми для пучка гиперплоскостей, проходящих через плоскость. Поэтому уравнение гиперплоскости получается линейным комбинированием уравнений базы пучка. Расположив m^2 коэффициентов в матрицу, получаем $\omega = u\theta$ и $p = \langle \theta, s \rangle$. Условие $|\omega| = 1$ влечет $|\theta| = 1$.

ЛЕММА 5. *Каждая гиперплоскость пространства $\mathbb{R}^{n \times m}$ расслаивается на плоскости комплекса H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle \omega, x \rangle = p$ — уравнение гиперплоскости. По леммам 1 и 2 $\omega = u\tau$. Фиксируем u (любое в случае неоднозначности) и все точки s гиперплоскости $\langle \tau, s \rangle = p$ в $\mathbb{R}^{n \times m}$. Тогда система $u \cdot x = s$ параллельных плоскостей комплекса дает расслоение. Действительно, плоскость $u \cdot x = s$ согласно лемме 3 входит в гиперплоскость. И через каждую точку x_0 гиперплоскости (т.е. с условием $\langle \omega, x_0 \rangle = p$) проходит плоскость указанного семейства. А именно, проходит плоскость $u \cdot x = s_0$, где $s_0 = u \cdot x_0$, поскольку $\langle \tau, s_0 \rangle = \langle u\tau, x_0 \rangle = p$. Соображения размерности завершают расслоение. Лемма 5 доказана.

Напомним, что через $S_K(\omega)$ обозначена опорная функция компактного выпуклого множества $K \subset \mathbb{R}^{n \times m}$.

ЛЕММА 6. *Плоскость $u \cdot x = s$ комплекса пересекает множество K , если и только если $-S_K(-u\theta) \leq \langle \theta, s \rangle \leq S_K(u\theta)$ для любого $\theta \in S^{m^2-1}$. Множество $K^\wedge$ плоскостей комплекса, пересекающих K , компактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если плоскость $u \cdot x = s$ пересекает K , то любая гиперплоскость $\langle u\theta, x \rangle = \langle \theta, s \rangle$ пучка гиперплоскостей, проходящих через данную плоскость, пересекает множество K . Как известно (см., например, [7; лемма 3.6]), в таком случае параметры $\omega = u\theta$ и $p = \langle \theta, s \rangle$ гиперплоскости удовлетворяют двойному неравенству леммы.

Обратно, пусть двойное неравенство имеет место для всех $\theta \in S^{m^2-1}$. Это значит [7], что все гиперплоскости $\langle u\theta, x \rangle = \langle \theta, s \rangle$ пересекают K . В частности, при $\theta = e_{ij}$ (единица на (i, j) -м месте и нули в остальных местах) гиперплоскости $u_i \cdot x_j = s_{ij}$, задающие плоскость $u \cdot x = s$, пересекают K . Таким образом, плоскость пересекает множество K . Остается напомнить, что $S_K(\omega)$ — непрерывная функция. Поэтому двойное неравенство леммы задает ограниченное замкнутое множество в $U \times \mathbb{R}^{m \times m}$. Лемма 6 доказана.

Отметим, что утверждение леммы 6 не зависит от выбора пары (u, s) , задающей плоскость. Эквивалентная пара $(u^t g, g s)$, $g \in O(m)$, удовлетворяет двойному неравенству с параметром $\theta' = g\theta$.

Пусть $\mathcal{L}_0^2(\mathbb{R}^{n \times m})$ — подпространство в $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{n \times m})$ функций с компактными носителями.

ЛЕММА 7. $\mathcal{L}_0^2(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge \subset \mathcal{L}^2(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть носитель функции f содержится в шаре с центром в начале и радиусом r . Как и в случае о.п.Р. [9], неравенство Коши–Шварца дает

$$\left| \int_{u \cdot x = s} f(x) d\mu(x) \right|^2 \leq \int_{u \cdot x = s, |x| \leq r} 1 d\mu(x) \int_{u \cdot x = s} |f(x)|^2 d\mu(x).$$

Пересечение плоскости и шара имеет максимальный (k -мерный) объем μ при $s = 0$. Поэтому

$$\left| \int_{u \cdot x = s} f(x) d\mu(x) \right|^2 \leq \mu \int_{u \cdot x = s} |f(x)|^2 d\mu(x).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \int_U \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} |\hat{f}(u, s)|^2 ds du &\leq \mu \int_U \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \int_{u \cdot x = s} |f(x)|^2 d\mu(x) ds du \\ &= \mu \int_U \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |f(x)|^2 dx du = \mu' \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Основой доказательств достаточности условий теорем 1–7 является прием доинтегрирования [2]. А именно, к функции $\varphi(u, s)$ применяется о.п.Р. $\mathcal{R}_{m^2}$ по аргументу $s \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Если $\varphi(u, s) = \hat{f}(u, s)$ и $\langle \theta, s \rangle = p$ – уравнение гиперплоскости в пространстве $\mathbb{R}^{m \times m}$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{m^2} \hat{f}(u, \theta, p) &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \delta(\langle \theta, s \rangle - p) \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \delta(u \cdot x - s) dx ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \delta(\langle \theta, u \cdot x \rangle - p) dx = \mathcal{R}_{nm} f(u\theta, p). \end{aligned} \quad (4)$$

По леммам 1 и 2 соответствие $(u, \theta) \rightarrow \omega = u\theta$ является отображением на всю сферу S^{nm-1} . Поэтому получилось о.п.Р. функции f , определенное на всех гиперплоскостях.

Отсюда, например, легко получить теорему о носителе для м.п.Р. и теорему об инъективности м.п.Р. на пространстве $\mathcal{L}_0^2(\mathbb{R}^{n \times m})$.

ТЕОРЕМА (о носителе). *Непрерывная быстро убывающая функция $f(x)$ на $\mathbb{R}^{m \times m}$ имеет носитель в шаре $\{x : |x| \leq \rho\}$, если ее м.п.Р. $\hat{f}(u, s)$ имеет носитель в множестве $U \times \{s : |s| \leq \rho\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть носитель функции $\hat{f}(u, s)$ расположен в указанном множестве. Тогда функция $\mathcal{R}_{m^2} \hat{f}(u, \theta, p)$ имеет носитель в множестве $U \times S^{m^2-1} \times [-\rho, \rho]$, а функция

$$\mathcal{R}_{nm} f(\omega, p) = \mathcal{R}_{m^2} \hat{f}(u, s, p), \quad \omega = u\theta,$$

имеет носитель в прямом произведении $S^{nm-1} \times [-\rho, \rho]$. По теореме о носителе для о.п.Р. [2] в таком случае $f(x)$ сосредоточена в шаре $\{x : |x| \leq \rho\}$.

ТЕОРЕМА (об инъективности). $M.n.P. \wedge: \mathcal{L}_0^2(\mathbb{R}^{n \times m}) \rightarrow \mathcal{L}^2(H)$ инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из инъективности о.п.Р. $\mathcal{R}_{nm} = \mathcal{R}_{m^2} \circ \wedge$ [17; теорема 3.1] следует требуемое.

Такова идея сведения проблем для м.п.Р. к задачам для о.п.Р., которая, конечно, осложняется при отсутствии условия $\varphi = \hat{f}$.

5. Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n \times m})$. Ее м.п.Р. $\hat{f}(u, s)$, очевидно, есть C^∞ -функция на H с компактным носителем. Она необходимо удовлетворяет условиям (М). Действительно, интеграл в левой части условий (М) существует в силу компактности носителя. И если $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{Z}_+^{n \times m}$ – матричный мультииндекс неотрицательных целых чисел, $|\alpha| = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{nm}$, $\alpha! = \alpha_{11}! \alpha_{12}! \dots \alpha_{nm}!$, $x^\alpha = x_{11}^{\alpha_{11}} x_{12}^{\alpha_{12}} \dots x_{nm}^{\alpha_{nm}}$, то интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \delta(u \cdot x - s) dx \langle \lambda, s \rangle^q ds = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \langle u\lambda, x \rangle^q dx$$

есть многочлен вида

$$P_q(\xi) = \sum_{|\alpha|=q} c_\alpha \xi^\alpha$$

от $\xi = u\lambda$ с коэффициентами

$$c_\alpha = \frac{q!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) x^\alpha dx.$$

Таким образом, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge \subset \mathcal{D}_M(H)$.

Докажем обратное включение. К пространству $\mathcal{D}_M(H)$ применим о.п.Р. $\mathcal{R}_{m^2}$ по аргументу $s \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Как известно [1], [2], ядро преобразования в этом случае тривиально. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}_M(H)$. Тогда C^∞ -функция

$$\Phi(u, \theta, p) = \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \delta(\langle \theta, s \rangle - p) ds, \quad (5)$$

определенная на $U \times S^{m^2-1} \times \mathbb{R}$, имеет компактный носитель.

ЛЕММА 8. Функция $\Phi(u, \theta, p)$ есть C^∞ -функция $\Psi(u\theta, p)$ от произведения $\omega = u\theta \in S^{nm-1}$ и $p \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На слое $B_{\omega, p} = \{(u, \theta, p) : u\theta = \omega\}$ (см. п. 3) функция $\Phi(u, \theta, p)$ постоянна. Действительно, в силу $O(m)$ -инвариантности функции $\varphi(u, s)$

$$\begin{aligned} \Phi(u^t g, g\theta, p) &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(ug, s) \delta(\langle {}^t g\theta, s \rangle - p) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, gs) \delta(\langle \theta, gs \rangle - p) ds = \Phi(u, \theta, p). \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно установить постоянство функции по u'' в разбиении $u = (u', u'')$ матрицы u , соответствующем произведению $u\tau$, где τ – правильная матрица ранга $r \leq m$.

Поскольку $\Phi(u, \tau, p)$ имеет компактный носитель, то для $q = 0, 1, \dots$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u, \tau, p) p^q dp = \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \langle \tau, s \rangle^q ds = P_q(u\tau)$$

согласно условиям (М). Ясно, что он не зависит от u'' . В таком случае разность

$$\Phi((u', u''), \tau, p) - \Phi((u', v''), \tau, p), \quad u'' \neq v'',$$

ортогональна ко всем полиномам от аргумента p :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(u, \tau, p) - \Phi(v, \tau, p)] p^q dp = 0, \quad u' \neq v'.$$

Так как разность имеет компактный носитель, то по теореме Вейерштрасса она обязана быть тождественным нулем. В результате $\Phi(u, \tau, p)$ не зависит от u'' . Итак, $\Phi(u, \theta, p)$ есть функция $\Psi(\omega, p)$ от произведения $\omega = u\theta$ и p . В силу сюръективности отображения $(u, \theta) \rightarrow u\theta \in S^{nm-1}$ функция $\Psi(\omega, p)$ определена на всем цилиндре $S^{nm-1} \times \mathbb{R}$.

Из гладкости функции $\Phi(u, \theta, p)$ следует гладкость функции $\Psi(\omega, p)$. В случае негладкости в точке $\omega_0 = u_0\theta_0$ получаем функцию $\Psi(u\theta_0, p_0)$, негладкую в точке u_0 . С другой стороны, $\Psi(u\theta_0, p_0) = \Phi(u, \theta_0, p_0)$ является C^∞ -функцией переменного u . Лемма 8 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Очевидно, что функция $\Psi(\omega, p)$ имеет компактный носитель. Из построения также видно, что она четная: $\Psi(-\omega, -p) = \Psi(\omega, p)$. Наконец, условия (М) на $\varphi(u, s)$ дают еще условия Кавальери (1) для $\Psi(\omega, p)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega, p) p^q dp &= \int_{-\infty}^{+\infty} p^q \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \delta(\langle \theta, s \rangle - p) ds dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \langle \theta, s \rangle^q ds = P_q(u\theta) \equiv P_q(\omega). \end{aligned} \quad (6)$$

По теореме об образе пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n \times m})$ для о.п.р. [2], [4] функция $\Psi(\omega, p)$ является образом $\mathcal{R}_{nm} f(\omega, p)$ некоторой функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n \times m})$. Остается показать, что $\hat{f}(u, s) = \varphi(u, s)$. Как установлено равенствами (4), диаграмма преобразований

$$\begin{array}{ccc} \varphi(u, s) & \xrightarrow{\mathcal{R}_{m^2}} & \Psi(\omega, p) \xleftarrow{\mathcal{R}_{nm}} f(x) \\ & \mathcal{R}_{m^2} \swarrow & \searrow \wedge \\ & \hat{f}(u, s) & \end{array} \quad (7)$$

является коммутативной. Поскольку у преобразования $\mathcal{R}_{m^2}$ на пространстве $\mathcal{D}(H)$ ядро нулевое, то $\hat{f} = \varphi$.

В результате $\mathcal{D}_M(H) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge$ и теорема 1 доказана.

ЛЕММА 9. *Условия (М) на функцию $\varphi(u, s)$ и условия (2) на $\varphi(\xi, s)$ эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(\xi, s)$ удовлетворяет условиям (2). Для невырожденных λ и $u \in U$

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \langle \lambda, s \rangle^q ds = \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u\lambda, {}^t\lambda s) [\operatorname{tr}({}^t\lambda s)]^q d({}^t\lambda s) = P_q(u\lambda).$$

Для вырожденных λ осталось совершить предельный переход под знаком интеграла в левой части последнего равенства и под знаком многочлена в правой.

Обратно, пусть ограничение $\varphi(u, s)$ функции $\varphi(\xi, s)$ удовлетворяет условиям (М). Тогда для $\xi = u\lambda$, где $u \in U$ и $\lambda \in GL(m, \mathbb{R})$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, s) (\operatorname{tr} s)^q ds &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, {}^t\lambda^{-1}s) \langle \lambda, {}^t\lambda^{-1}s \rangle^q d({}^t\lambda^{-1}s) \\ &= P_q(u\lambda) = P_q(\xi). \end{aligned}$$

Эквивалентность установлена и тем самым доказана версия теоремы из [3].

Для доказательства предложения 1 обобщим на матричный случай контрпример М. И. Граева, приведенный в [14]. А именно, укажем функцию из $\mathcal{S}_M(H)$, но не из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge$.

Пусть

$$\Phi_0(y) = \begin{cases} \exp(-\langle y, y \rangle - \langle y, y \rangle^{-1}), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

— функция из пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})$ с нулевыми производными всех порядков при $y = 0$. Для положительных, одновременно не равных единице чисел $a_1, a_2, \dots$ положим $\rho(u) = \sum_i a_i \Delta_i^2(u)$, где суммирование ведется по всем минорам $\Delta_i(u)$ порядка m матрицы $u \in U$. Построим функцию $\mathcal{F}_{m^2}\varphi_0(u, \sigma) := \rho(u)\Phi_0(u\sigma)$, определенную на $U \times \mathbb{R}^{m \times m}$. Ее частные производные по σ быстро убывают по σ равномерно по $u \in U$. Так как при $\sigma = 0$ производные нулевые, то для $q = 0, 1, \dots$ имеет место равенство

$$(\langle \lambda, i\partial_\sigma \rangle^q \delta(\sigma), \mathcal{F}_{m^2}\varphi_0(u, \sigma)) = 0$$

в смысле действия обобщенной функции в $\mathbb{R}^{m \times m}$ на основную по аргументу σ ; $\partial_\sigma = (\partial/\partial\sigma_{ij})$. Следовательно, обратное преобразование Фурье

$$\varphi_0(u, s) = \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \mathcal{F}_{m^2}\varphi_0(u, \sigma) \exp(-i\langle \sigma, s \rangle) d\sigma$$

быстро убывает по s равномерно по $u \in U$. Кроме того, интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi_0(u, s) \langle \lambda, s \rangle^q ds = (\langle \lambda, s \rangle^q, \varphi_0(u, s)) = (\langle \lambda, i\partial_\sigma \rangle^q \delta(\sigma), \mathcal{F}_{m^2}\varphi_0(u, \sigma)) = 0$$

есть однородный степени q многочлен от $u\lambda$ с нулевыми коэффициентами. Однако интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(u, s) ds_1 &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi_0\left(u, \begin{pmatrix} s_1 \\ t \end{pmatrix}\right) \delta(s^* - t) dt ds_1 \\ &= (2\pi i)^m \rho(u) \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \Phi_0(u\sigma) \delta(\sigma_1) \exp(i\langle s^*, \sigma^* \rangle) d\sigma \\ &= (2\pi i)^m \rho(u) \int_{\mathbb{R}^{(m-1) \times m}} \Phi_0\left(u \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^* \end{pmatrix}\right) \exp(i\langle s^*, \sigma^* \rangle) d\sigma^* \\ &= (2\pi i)^m \rho(u) \int_{\mathbb{R}^{(m-1) \times m}} \exp(-|\sigma^*|^2 - |\sigma^*|^{-2} + i\langle s^*, \sigma^* \rangle) d\sigma^* \end{aligned}$$

явно зависит от столбца u_1 . Действительно, интеграл по σ^* отличен от нуля и не зависит от u . В итоге необходимые условия $C(0)$ не выполняются, тем самым φ_0 не принадлежит пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge$.

6. Доказательство теорем 2 и 3. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})$. Наличие всех производных функции $\hat{f}(u, s)$ и их быстрое убывание по s вытекает непосредственно из определения. Как и в доказательстве теоремы 1, проверяется необходимость условий (M). Равенство

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \delta(u \cdot x - s) dx ds_i = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \delta(u_* \cdot x - s^*) dx$$

показывает необходимость условий $C(0)$.

Таким образом, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge \subset \mathcal{S}_{M, C(0)}(H)$.

Обратно, пусть $\varphi \in \mathcal{S}_{M, C(0)}(H)$. Построим функцию $\Phi(u, \theta, p)$ по формуле (4). Из свойств функции $\varphi(u, s)$ непосредственно вытекает гладкость класса C^∞ функции $\Phi(u, \theta, p)$ и быстрое убывание по p , равномерное по $(u, \theta) \in U \times S^{m^2-1}$, ее частных производных.

Покажем, что в отсутствии компактности носителя функции $\varphi(u, s)$ условия $C(0)$ обеспечивают постоянство функции $\Phi(u, \theta, p)$ на слоях отображения $(u, \theta) \rightarrow u\theta$.

Поскольку имеет место инвариантность $\Phi(u^t g, g\theta, p) = \Phi(u, \theta, p)$, $g \in O(m)$, то в соответствии с леммой 3 достаточно установить постоянство функции на всех парах (u, τ) с различными подматрицами u'' разбиения $u = (u', u'')$, порожденного произведением $u\tau$, где τ правильная.

ЛЕММА 10. *Для функции $\varphi \in \mathcal{S}_{C(0)}(H)$ интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}^{j \times m}} \varphi(u, s) ds_{i_1} \dots ds_{i_j}$$

по строкам матрицы s с номерами $i_1, \dots, i_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) не зависит от столбцов матрицы u с номерами $i_1, \dots, i_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно доказать для $j = 2$ и $i_1 = 1$, $i_2 = 2$. Двойной интеграл по строкам s_1 и s_2 записывается в виде двух повторных. По условиям $C(0)$ один из них не зависит от u_1 , а второй — от u_2 .

Продолжим доказательство теоремы 2. Для пары (u, τ) из слоя B_ω интеграл (4) можно представить повторным интегралом

$$\Phi(u, \tau, p) = \int_{\mathbb{R}^{r \times m}} \delta(\langle \tau', s' \rangle - p) \int_{\mathbb{R}^{(m-r) \times m}} \varphi(u, s) ds'' ds',$$

где r — ранг матрицы ω . По лемме 10 интеграл не зависит от u'' .

Итак, $\Phi(u, \theta, p)$ постоянна на слоях сюръективного отображения $(u, \theta) \rightarrow \omega = u\theta \in S^{nm-1}$. Следовательно, она является некоторой функцией $\Psi(\omega, p)$, определенной на всем цилиндре $S^{nm-1} \times \mathbb{R}$. Как и при доказательстве теоремы 1, из гладкости функции $\Phi(u, \theta, p)$ выводим гладкость функции $\Psi(\omega, p)$. Быстрое убывание по p всех производных функции $\Phi(u, \theta, p)$, равномерное по $(u, \theta) \in U \times S^{m^2-1}$, непосредственно влечет быстрое убывание по p всех производных функции $\Psi(\omega, p)$, равномерное по $\omega \in S^{nm-1}$. Равенство (5) показывает, что условия (М) на функцию $\varphi(u, s)$ влекут обычные условия Кавальери (1) для $\Psi(\omega, p)$. По теореме об образе $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge$ для о.п.Р. [1], [2] существует функция $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})$, для которой $\mathcal{R}_{nm} f = \Psi$. Остается обратиться к коммутативной диаграмме (7) и учесть, что о.п.Р. по аргументу s на пространстве $\mathcal{S}(H)$ инъективно. В результате $\hat{f} = \varphi$ и тем самым $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge \supset \mathcal{S}_{M, C(0)}(H)$. Доказательство теоремы 2 завершено.

Перейдем к теореме 3. Очевидно, для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})$ функция $\hat{f}(u, s)$ бесконечно дифференцируема и ее производные быстро убывают по s . Равенства

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \hat{f}(u, s) s_{ii}^q \delta(\lambda_* \cdot s - t) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} s_{ii}^q \delta(\lambda_* \cdot s - t) \delta(u \cdot x - s) ds dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \langle u_i, x_i \rangle^q \delta(\lambda_* \cdot u \cdot x) dx = \sum_{|\alpha|=q} a_\alpha^{(i)}(u\lambda_*, t) u_i^\alpha \end{aligned}$$

показывают, что интеграл есть однородный степени q многочлен от u_i с коэффициентами

$$a_\alpha^{(i)}(u\lambda_*, t) = \frac{q!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) x_i^\alpha \delta((u\lambda_*) \cdot x - t) dx.$$

Таким образом, включение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge \subset \mathcal{S}_C(H)$ установлено.

Для доказательства обратного включения достаточно показать, что функция $\varphi(u, s) \in \mathcal{S}_C(H)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Гладкость класса C^∞ и быстрое убывание по s , равномерное по $u \in U$, всех производных функции $\varphi(u, s)$ непосредственно следует из свойств функции $\varphi(\xi, s)$. Условие $C(0)$ есть условие (С) с показателем $q = 0$, ограниченное на $\xi = u$. Докажем, что условие (С) влечет выполнение условий (М).

ЛЕММА 11. Условия (С) и (3) эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях (С) ограничимся матрицами $\lambda_* = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_m)$, для которых λ_*^* невырождена. Для ненулевого числа λ_{ii} условия перепишем в виде

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) (\lambda_{ii} s_{ii})^q \delta(\lambda_* \cdot s - t) ds = p_q^{(i)}(u \lambda_{ii}; u \lambda_*, t),$$

воспользовавшись однородностью многочлена $p_q^{(i)}$. Далее столбец $\lambda_i = (0, \dots, \lambda_{ii}, \dots, 0)$ вставим в λ_* в качестве i -го и полученную невырожденную матрицу обозначим через λ . Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \langle \lambda_i, s_i \rangle^q \delta(\lambda_* \cdot s - t) ds = p_q^{(i)}(u \lambda_i; u \lambda_*, t). \quad (8)$$

По $O(m)$ -инвариантности функции $\varphi(u, s)$ получаем справедливость условия (8) для любой матрицы $\lambda \in GL(m)$. Действительно, для любой $\mu \in GL(m)$ существует $g \in O(m)$, переводящая μ в λ . Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \langle \mu_i, s_i \rangle^q \delta(\mu_* \cdot s - t) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u^t g, s) \langle g \mu_i, g s_i \rangle^q \delta((g \mu_*) \cdot (g s) - t) d(g s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u^t g, \tilde{s}) \langle (g \mu)_i, \tilde{s}_i \rangle^q \delta((g \mu)_* \cdot \tilde{s} - t) d\tilde{s} \\ &= p_q^{(i)}(u^t g g \mu_i; u^t g g \mu_*, t) = p_q^{(i)}(u \mu_i; u \mu_*, t). \end{aligned}$$

Аналогично перепишем условие (3):

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, s) \langle e_i, s_i \rangle^q \delta(e_* \cdot s - t) ds = p_q^{(i)}(\xi e_i; \xi e_*, t).$$

Однородность функции $\varphi(\xi, s)$ дает возможность записать условия в виде

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, s) \langle \lambda_i, s_i \rangle^q \delta(\lambda_* \cdot s - t) ds = p_q^{(i)}(\xi \lambda_i; \xi \lambda_*, t) \quad (9)$$

для произвольного $\lambda \in GL(m)$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, s) \langle \lambda_i, s_i \rangle^q \delta(\lambda_* \cdot s - t) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, s) \langle \lambda e_i, s_i \rangle^q \delta((\lambda e_*) \cdot s - t) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi \lambda, {}^t \lambda s) \langle e_i, {}^t \lambda s_i \rangle^q \delta(e_* \cdot ({}^t \lambda s) - t) d({}^t \lambda s) \\ &= p_q^{(i)}(\xi \lambda e_i; \xi \lambda e_*, t) = p_q^{(i)}(\xi \lambda_i; \xi \lambda_*, t). \end{aligned}$$

Для доказательства леммы 11 остается установить эквивалентность (8) и (9). Очевидно, (8) следует из (9) при $\xi = u$. Обратно, если (8) имеет место, то представляя $\xi = u|\xi|$ в полярном разложении, $|\xi| = (\xi \cdot \xi)^{1/2}$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, s) \langle \lambda_i, s_i \rangle^q \delta(\lambda_* \cdot s - t) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, |\xi|^{-1}s) \langle |\xi| \lambda_i, |\xi|^{-1}s_i \rangle^q \delta((|\xi| \lambda_*) \cdot (|\xi|^{-1}s) - t) d(|\xi|^{-1}s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, \tilde{s}) \langle (|\xi| \lambda)_i, \tilde{s}_i \rangle^q \delta((|\xi| \lambda)_* \cdot \tilde{s} - t) d\tilde{s} \\ &= p_q^{(i)}(u|\xi| \lambda_i; u|\xi| \lambda_*, t) = p_q^{(i)}(\xi \lambda_i; \xi \lambda_*, t). \end{aligned}$$

ЛЕММА 12. Если $\varphi \in \mathcal{S}_C(H)$, то функции $a_\alpha^{(i)}(\xi_*, s^*)$ в условиях (3) являются гладкими с быстро убывающими по s^* производными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3) продифференцируем по ξ_i^α . Тогда

$$a_\alpha^{(i)}(\xi_*, s^*) = \frac{1}{\alpha!} \partial_i^\alpha \int_{\mathbb{R}^m} s_{ii}^q \varphi(\xi, s) ds_i,$$

где, напомним, ξ_* и s^* — подматрицы в ξ и в s , дополнительные к первому столбцу и первой строке соответственно. Пусть ξ пробегает сечение Γ естественного расслоения $E \rightarrow U$. Поскольку $\partial_i^\alpha \varphi(\xi, s)$ быстро убывает равномерно по $\xi \in \Gamma$, то интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} s_{ii}^q \partial_i^\alpha \varphi(\xi, s) ds_i$$

сходится равномерно относительно ξ и s^* . В итоге функция

$$a_\alpha^{(i)}(\xi_*, s^*) = \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^m} s_{ii}^q \partial_i^\alpha \varphi(\xi, s) ds_i$$

быстро убывает. Быстрое убывание всех производных функции $\varphi(\xi, s)$ обеспечивает также наличие и быстрое убывание по s^* всех производных функции $a_\alpha^{(i)}$.

ЛЕММА 13. Для $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_+$ и функции $\varphi \in \mathcal{S}_C(H)$ интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} \varphi(\xi, s) s_{11}^{\gamma_1} s_{22}^{\gamma_2} ds_1 ds_2$$

по строкам s_1 и s_2 матрицы s есть биоднородный по столбцам ξ_1 и ξ_2 многочлен бистепени (γ_1, γ_2) с коэффициентами, зависящими от остальных столбцов и строк соответственно матриц ξ и s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Двойной интеграл дает равенство двух повторных. По условиям (С) и лемме 12

$$\sum_{|\alpha|=\gamma_1} \xi_1^\alpha \int_{\mathbb{R}^m} s_{22}^{\gamma_2} a_\alpha^{(2)}(\xi_*, s^*) ds_2 = \sum_{|\beta|=\gamma_2} \xi_2^\beta \int_{\mathbb{R}^m} s_{11}^{\gamma_1} a_\beta^{(1)}(\xi_*, s^*) ds_1.$$

Продифференцировав это равенство по ξ_1^α для данного α , получаем, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} s_{22}^{\gamma_2} a_\alpha^{(2)}(\xi_*, s^*) ds_2 = \frac{1}{\alpha!} \sum_{|\beta|=\gamma_2} \xi_2^\beta \int_{\mathbb{R}^m} s_{11}^{\gamma_1} \partial_1^\alpha a_\beta^{(1)}(\xi_*, s^*) ds_1$$

является однородным степени γ_2 многочленом от ξ_2 с коэффициентами, не зависящими от ξ_1 . Последнее становится очевидным после дополнительного дифференцирования по ξ_2^β

$$\frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^m} s_{11}^{\gamma_1} \partial_1^\alpha a_\beta^{(1)}(\xi_*, s^*) ds_1 = \frac{1}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^m} s_{22}^{\gamma_2} \partial_2^\beta a_\alpha^{(2)}(\xi_*, s^*) ds_2.$$

В результате двойной интеграл равен многочлену

$$\sum_{|\alpha|=\gamma_1} \xi_1^\alpha \sum_{|\beta|=\gamma_2} \xi_2^\beta a_{\alpha,\beta}^{(1,2)}(\xi_{**}, s^{**})$$

от ξ_1 и ξ_2 с коэффициентами, зависящими от $\xi_{**} = (\xi_3, \dots, \xi_m)$ и $s^{**} = (s_3, \dots, s_m)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{Z}_+$ и функции $\varphi \in \mathcal{S}_C(H)$ интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, s) s_{11}^{\gamma_1} \dots s_{mm}^{\gamma_m} ds = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^{n \times m}} a_\alpha \xi^\alpha$$

есть однородный по столбцам матрицы ξ многочлен m -степени $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ с постоянными коэффициентами a_α .

СЛЕДСТВИЕ 2. Условия (3) влекут условия (2), и тем самым из условий (С) следуют условия (М).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 1 интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, s) (\text{tr } s)^q ds &= \sum_{|\gamma|=q} \frac{q!}{\gamma!} \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(\xi, s) s_{11}^{\gamma_1} \dots s_{mm}^{\gamma_m} ds \\ &= \sum_{|\gamma|=q} \frac{q!}{\gamma!} \sum_{\alpha} c_\alpha \xi^\alpha = P_q(\xi) \end{aligned}$$

есть однородный степени q многочлен от ξ . Доказательство теоремы 3, таким образом, завершено.

7. Доказательство теорем 4 и 5. Случай $m = 1$ теоремы 4 очевидным образом следует из теоремы 2 (см., например, [2; гл. I, следствие 2.5]). Случай $m > 1$ сведем к обычному.

Во-первых, согласно теореме 2 $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge \subset \mathcal{S}_{M,C}(H)$. Во-вторых, равенство

$$\int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \hat{f}(u, s) P(s) ds = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) P(u \cdot x) dx = 0$$

для любого многочлена $P(s)$ показывает, что $\hat{f} \in \mathcal{S}^*(H)$. Так как $\mathcal{S}_{M,C}(H) \cap \mathcal{S}^*(H) = \mathcal{S}_C^*(H)$, то $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^{n \times m})^\wedge \subset \mathcal{S}_C^*(H)$.

Обратно, пусть $\varphi \in \mathcal{S}_C^*(H)$. Условия ортогональности дают тривиальное выполнение условий (М) для φ . Тогда по теореме 2 имеем $\varphi(u, s) = \hat{f}(u, s)$ для некоторой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n \times m})$. При этом для $\omega = u\theta$

$$\mathcal{R}_{nm} f(\omega, p) = \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \delta(\langle \theta, s \rangle - p) ds.$$

Если теперь $Q(p)$ — произвольный полином, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{nm} f(\omega, p) Q(p) dp &= \int_{-\infty}^{+\infty} Q(p) \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \delta(\langle \theta, s \rangle - p) ds dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) Q(\langle \theta, s \rangle) ds = 0 \end{aligned}$$

в силу ортогональности к многочленам функции $\varphi(u, s)$. По теореме 3 для о.п.Р. [2] получаем, что $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^{n \times m})$. Теорема 4 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 5. Пусть $f \in \mathcal{D}(K)$ в теореме 5. Ясно, что $\hat{f}(u, s)$ обращается в нуль на плоскостях, непересекающих множества K . Таким образом, носитель функции $\hat{f}(u, s)$ входит в $K^\wedge$. Очевидны также условия (М) для $\hat{f}(u, s)$. В итоге $\mathcal{D}(K)^\wedge \subset \mathcal{D}_M(K^\wedge)$.

Обратно, пусть дана функция $\varphi \in \mathcal{D}_M(K^\wedge)$. По лемме 6 носитель функции $\varphi(u, s)$ компактен. По теореме 1 найдется единственная функция $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n \times m})$ такая, что $\hat{f}(u, s) = \varphi(u, s)$. Покажем, что носитель функции f сосредоточен в K . Пусть гиперплоскость $\langle \omega, x \rangle = p$ не пересекает K . По лемме 5 она расслаивается на плоскости комплекса, которые, таким образом, не пересекают K . Тем самым

$$\mathcal{R}_{nm} f(\omega, p) = \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \delta(\langle \tau, s \rangle - p) ds = 0,$$

где $\omega = u\tau$. По теореме Людвига [7] для о.п.Р. носитель функции $f(x)$ расположен в K . Теорема 5 доказана.

Теорема 5' вытекает из теоремы 5 и леммы 6.

8. Доказательство теоремы 6. Пусть $f \in \mathcal{D}^w(K)$. Для $\hat{f}(u, s)$ необходимость условий (М) и (L) только что установлена (C^∞ тут не требуется). Покажем принадлежность функции $\hat{f}(u, s)$ к пространству $\mathcal{D}^{w+k/2}(H)$, где $k = m(n-m)$.

Во-первых, в силу леммы 7 имеем $\mathcal{D}^w(K) \subset \mathcal{L}^2(H)$. Далее, обозначим символом $\mathcal{F}_1 \mathcal{R}_{nm} f(\omega, \rho)$ преобразование Фурье функции $\mathcal{R}_{nm} f(\omega, p)$ по аргументу p . Как известно, справедливо равенство $\mathcal{F}_{nm} f(\omega \rho) = \mathcal{F}_1 \mathcal{R}_{nm} f(\omega, \rho)$. По теореме Смита [9; теорема 13.4] для о.п.Р.

$$|\rho|^{w+(n-m)/2} \mathcal{F}_1 \mathcal{R}_{nm} f(\omega, \rho) \in \mathcal{L}^2(S^{nm-1} \times \mathbb{R}).$$

Поэтому существует интеграл

$$\int_{S^{nm-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}_{nm} f(\omega \rho)|^2 |\rho|^{2w+nm-1} d\rho d\omega.$$

К интегралу по сфере применим разложение $\omega = u\theta$ леммы 1. Имеем

$$\int_U \int_{S_+^{d-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}_{nm} f(u\tau\rho)|^2 |\rho|^{2w+nm-1} \prod_{i=1}^m \tau_{ii}^{n-i} d\rho d\tau du.$$

Добавим интегрирование по группе $O(m)$ ортогональных матриц и сделаем замену $u = vg$, $g \in O(m)$, переменной интегрирования. Получим интеграл

$$\int_U \int_{O(m)} \int_{S_+^{d-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}_{nm} f(vg\tau\rho)|^2 |\rho|^{2w+nm-1} \prod_{i=1}^m \tau_{ii}^{n-i} d\rho d\tau dg dv.$$

Опять воспользуемся леммой 1 для разложения $\theta = g\tau$:

$$\begin{aligned} & \int_U \int_{S^{m^2-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}_{nm} f(v\theta\rho)|^2 |\rho|^{2w+nm-1} |\det \theta|^{n-m} \prod_{i=1}^m \tau_{ii}^{n-i} d\rho d\theta dv \\ &= 2 \int_U \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} |\mathcal{F}_{nm} f(v\lambda)|^2 |\lambda|^{2w} |\det \lambda|^{n-m} d\lambda dv. \end{aligned}$$

Остается напомнить простую связь $\mathcal{F}_{nm} f(v\lambda) = \mathcal{F}_{m^2} \hat{f}(v, \lambda)$ между преобразованием Фурье и м.п.Р. Таким образом, $\hat{f} \in \mathcal{D}^{w+k/2}(H)$ и включение

$$\mathcal{D}^w(K)^\wedge \subset \mathcal{D}_{M,L}^{w+k/2}(H)$$

установлено.

Обратно, пусть $\varphi(u, s) \in \mathcal{D}^{w+k/2}(H)$ и дополнительно удовлетворяет условиям (М) и (L). Как и в доказательстве теоремы 4, условия (L) влекут компактность носителя функции. В таком случае условия (М) позволяют (см. п. 4) корректно определить на всем цилиндре $S^{nm-1} \times \mathbb{R}$ функцию

$$\Psi(\omega, p) = \mathcal{R}_{m^2} \varphi(u, \theta, p) = \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \varphi(u, s) \delta(\langle \theta, s \rangle - p) ds, \quad (10)$$

$\omega = u\theta$. Она четная: $\Psi(-\omega, -p) = \Psi(\omega, p)$. Как уже видели по (5), для $\Psi(\omega, p)$ выполняются обычные условия Кавальери (1). Кроме того, для $\varphi(u, s)$ с компактным носителем [9], [17]

$$\Psi(u\theta, p) \in \mathcal{L}^2(U \times S^{m^2-1} \times \mathbb{R}).$$

Согласно лемме 1 для $\theta \in S^{m^2-1}$ имеем $|\det \theta| = |\det g\tau| = \tau_{11} \cdots \tau_{mm} < 1$. Поэтому сходится интеграл

$$\int_U \int_{S^{m^2-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(u\theta, p)|^2 |\det \theta|^{n-m} dp d\theta du.$$

В интеграле по сфере произведем разложение $\theta = g\tau$ по лемме 1 и замену переменной $ug = v$ в интеграле по U . Получим интеграл

$$\begin{aligned} & \int_U \int_{O(m)} \int_{S_+^{d-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(ug\tau, p)|^2 \prod_{i=1}^m \tau_{ii}^{n-i} dp d\tau dg du \\ &= c \int_U \int_{S_+^{d-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(v\tau, p)|^2 \prod_{i=1}^m \tau_{ii}^{n-i} dp d\tau dv. \end{aligned}$$

Снова по лемме 1 интеграл записывается в виде

$$c \int_{S^{nm-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\omega, p)|^2 dp d\omega.$$

Таким образом, $\Psi \in \mathcal{L}^2(S^{nm-1} \times \mathbb{R})$.

Далее, если $p > S_K(\omega)$, то в интеграле (10) $\langle \theta, s \rangle > S_K(u\theta)$. По условиям (L) тогда $\varphi(u, s) = 0$. В результате $\Psi(\omega, p) = 0$ при $p > S_K(\omega)$.

Наконец, покажем, что преобразование Фурье $\mathcal{F}_1 \Psi(\omega, \rho)$ функции $\Psi(\omega, p)$ по одномерному аргументу p удовлетворяет условию

$$|\rho|^{w+(nm-1)/2} \mathcal{F}_1 \Psi(\omega, \rho) \in \mathcal{L}^2(S^{nm-1} \times \mathbb{R}). \quad (11)$$

Нетрудно проверить, что $\mathcal{F}_1 \Psi(u\theta, \rho) = \mathcal{F}_{m^2} \varphi(u, \theta\rho)$. В интеграле

$$I = \int_U \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} |\mathcal{F}_{m^2} \varphi(u, \lambda)|^2 |\lambda|^{2w} |\det \lambda|^{n-m} d\lambda du$$

перейдем к обычным полярным координатам $\lambda = \theta\rho$, $\theta \in S^{m^2-1}$. Затем к интегралу по сфере применим разложение леммы 1. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_U \int_{S^{m^2-1}} \int_0^{+\infty} |\mathcal{F}_1 \Psi(u\theta, \rho)|^2 \rho^{2w+nm-1} |\det \theta|^{n-m} d\rho d\theta du \\ &= \int_U \int_{O(m)} \int_{S_+^{d-1}} \int_0^{+\infty} |\mathcal{F}_1 \Psi(ug\tau, \rho)|^2 \rho^{2w+nm-1} \prod_{i=1}^m \tau_{ii}^{n-i} d\rho d\tau dg du. \end{aligned}$$

После замены $u\varrho = v$ переменной интегрирования, вычисления интеграла по $O(m)$ и применения леммы 1 к интегралу по $U \times S_+^{d-1}$ с точностью до постоянного множителя получаем

$$\begin{aligned} I &\sim \int_U \int_{S_+^{d-1}} \int_0^{+\infty} |\mathcal{F}_1 \Psi(v\tau, \rho)|^2 \rho^{2w+nm-1} \prod_{i=1}^m \tau_{ii}^{n-i} d\rho d\tau dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^{nm-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}_1 \Psi(\omega, \rho)|^2 |\rho|^{2w+nm-1} d\rho d\omega. \end{aligned}$$

Условие (11) установлено, и это значит, что

$$\Psi(\omega, p) \in \mathcal{D}^{w+(nm-1)/2}(S^{nm-1} \times \mathbb{R}).$$

Итак, функция $\Psi(\omega, p)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Смита [9] для о.п.Р. в пространстве $\mathbb{R}^{n \times m}$. По этой теореме найдется функция $f \in \mathcal{D}^w(K)$ такая, что $\mathcal{R}_{nm} f(\omega, p) = \Psi(\omega, p)$. Остается обратиться к коммутативной диаграмме (6) и учесть, что преобразование $\mathcal{R}_{m2}$ имеет тривиальное ядро на подпространстве $\mathcal{L}_0^2(H)$ функций $\varphi \in \mathcal{L}^2(H)$ с компактными носителями [17; теорема 3.1].

9. Доказательство теоремы 7. Для $m > 1$ по функции $\varphi \in \mathcal{S}_C(H)$ построим образ о.п.Р. по аргументу $s \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Как установлено при доказательстве теоремы 2, возникает функция $\Psi(\omega, p)$ на цилиндре $S^{nm-1} \times \mathbb{R}$ со свойствами четности, гладкостикласса C^∞ и быстрого убывания по p , равномерного по $\omega \in S^{nm-1}$, всех производных. При этом выполняются условия Кавальери (1) с показателем $q = 0$, как это следует из леммы 6 при $r = m$. По теореме Солмона [10; теорема 7.7] для о.п.Р. в пространстве $\mathbb{R}^{n \times m}$ найдется функция $f(x) \sim O(|x|^{-nm-1})$ класса C^∞ такая, что $\mathcal{R}_{nm} f = \Psi$. Поскольку о.п.Р. $\mathcal{R}_{m2}$ на пространстве $\mathcal{S}(H)$ имеет ненулевое ядро, то коммутативная диаграмма 6 показывает, что $\hat{f}(u, s) = \varphi(u, s)$. Пункт а) теоремы доказан.

Если дополнительно известно, что $f(x) \sim O(|x|^{-nm-l-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$, то по крайней мере для $q = 0, 1, \dots, l$ сходятся интегралы

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m \times m}} \hat{f}(u, s) \langle \lambda, s \rangle^q ds &= \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} f(x) \langle u\lambda, x \rangle^q dx \\ &= \int_{S^{nm-1}} \langle u\lambda, \omega \rangle^q \int_0^\infty \rho^{q+nm-1} f(\omega\rho) d\rho d\omega. \end{aligned}$$

Они дают однородные степени q многочлены от $u\lambda$. Необходимость условий $M(l)$ в пункте б) теоремы установлена. Обратно, если функция $\varphi \in \mathcal{S}_C(H)$ дополнительно удовлетворяет условиям $M(l)$, то функция $\Psi(\omega, p)$ удовлетворяет условиям (1) с показателями $q = 0, 1, \dots, l$. По уже упомянутой теореме Солмона [10] соответствующая функция f удовлетворяет условию $f(x) \sim O(|x|^{-nm-l-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$. Пункт б) теоремы доказан. Пункт с) не зависит от $m \geq 1$ и, таким образом, доказан в [10].

Список литературы

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленькин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
2. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
3. Петров Е. Е. Преобразование Радона в пространстве матриц // Тр. сем. по вект. и тенз. анализу. 1970. № 15. С. 299–315.
4. Гельфанд И. М., Граев М. И. Интегралы по гиперплоскостям основных и обобщенных функций // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. № 6. С. 1307–1310.
5. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1980. С. 53–226.
6. Семянистый В. И. О некоторых интегральных преобразованиях в евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 3. С. 536–539.
7. Ludwig D. The Radon transform in Euclidean space // Comm. Pure Appl. Math. 1966. V. 19. P. 49–81.
8. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теорема Пэли–Винера для преобразования Радона // Математика. Сб. пер. 1972. Т. 16. № 3. С. 97–112.
9. Smith K. T., Solomon D. C., Wagner S. L. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 1227–1270.
10. Solomon D. C. Asymptotic formulas for the dual Radon transform and applications // Math. Z. 1987. V. 195. P. 321–343.
11. Петров Е. Е. Теорема Пэли–Винера для комплекса Радона // Изв. вузов. Матем. 1977. № 3. С. 66–77.
12. Граев М. И. Интегральная геометрия на пространстве L^n , где L – кольцо матриц // Функци. анализ и его прил. 1996. Т. 30. № 4. С. 71–74.
13. Gonzalez F. B. Invariant differential operators and the range of the Radon d -plane transform // Math. Ann. 1990. V. 287. № 4. P. 627–635.
14. Петров Е. Е. Условие Кавальери для интегралов по k -мерным плоскостям, $k < n - 1$ // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 4. С. 191–205.
15. Чернов В. Г. Однородные обобщенные функции и преобразование Радона в пространстве прямоугольных матриц над непрерывным локально компактным несвязным полем // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191. № 3. С. 540–543.
16. Хуа Ло-Кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959.
17. Quinto E. T. The invertibility of rotation invariant Radon transforms // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 91. P. 510–522.

Коломенский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
28.10.1998