Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Кожевникова, Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 8, 61–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:18:16

УДК 517.956.223

Л. М. Кожевникова

Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях

Получены оценки сверху решений задачи Дирихле для псевдодифференциальных эллиптических уравнений с финитной правой частью. Эти оценки характеризуют поведение решений на бесконечности в областях с некомпактной границей в зависимости от геометрических свойств областей. Показано, что для неограниченных областей с нерегулярным поведением границы найденные оценки могут быть более эффективными, чем известные оценки для эллиптических уравнений второго порядка. В случае эллиптических уравнений второго порядка для широкого класса областей вращения доказана точность полученных оценок.

Библиография: 17 названий.

Введение

Пусть $\bar{\mathbf{y}} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ – произвольная точка пространства $\mathbb{R}_{n+1}$, $n \geq 1$. Координату y_0 будем выделять при помощи обозначения $x = y_0$. Положим также $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_n$, $\bar{\mathbf{y}} = (x, \mathbf{y})$. В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+1}$, не лежащей в полупространстве вида $\{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x < r\}$, рассматривается уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} (-1)^j D_x^j \hat{T}^{\bar{\beta}}(a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}})) T^{\bar{\alpha}} D_x^i u = \Phi, \quad \bar{\mathbf{y}} \in \Omega, \quad (0.1)$$

с псевдодифференциальными операторами $T^{\bar{\alpha}}$.

Множество индексов $\bar{\alpha} = (i, \alpha)$, $\bar{\beta} = (j, \beta) \in \mathcal{S}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{S} = \{\bar{\alpha} = (i, \alpha) \mid i = 0, \bar{k}, \alpha = \overline{1, N^i}\},$$

где k – натуральное число. Псевдодифференциальные операторы $T^{\bar{\alpha}}$ с комплексными символами $A^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z})$ определяются равенствами

$$T^{\bar{\alpha}} u = F_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}}^{-1} [A^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z}) F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[u]],$$

где $F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[u]$ – преобразование Фурье. Псевдодифференциальные операторы $\hat{T}^{\bar{\alpha}}$ имеют комплексно-сопряженные символы $\overline{A^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z})}$.

Комплекснозначные функции $a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}})$, $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}$, считаем измеримыми в Ω , продолженными нулем вне Ω и ограниченными для почти всех $\bar{\mathbf{y}} \in \Omega$, т.е.

$$|a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}})| \leq \bar{a}. \quad (0.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-97912-р_агидель_а, 06-01-00354-а).

Через $\mathcal{B}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_n$, обозначим непрерывную положительную при $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ функцию такую, что

$$\mathcal{B}(\mathbf{z}) \leq |\mathbf{z}|^B, \quad B > 0, \quad |\mathbf{z}| \geq 1.$$

На множестве комплекснозначных функций $g(\bar{\mathbf{y}}) = g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ при каждом $x \in \mathbb{R}$ определим функционал

$$\|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 = \int_{\mathbb{R}_n} (|D_x^k g(x, \mathbf{y})|^2 + |D_x^q g(x, \mathbf{y})|^2) d\mathbf{y} + \int_{\mathbb{R}_n} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) |F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[g]|^2 d\mathbf{z},$$

где q – целое неотрицательное число, $q \leq k$. На оператор $\mathcal{L}$ будем налагать требование эллиптичности в следующем виде. Пусть существуют положительное число $\hat{a}$ и функция $\mathcal{B}(\mathbf{z})$ такие, что для формы

$$\mathcal{G}(g) = \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) T^{\bar{\alpha}} D_x^i g \overline{T^{\bar{\beta}} D_x^j g}$$

справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}_{n+1}} \mathcal{G}(g) d\bar{\mathbf{y}} \geq \hat{a} \int_{-\infty}^{\infty} \|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx = \hat{a} \|g\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}}^2, \quad g(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega), \quad (0.3)$$

в котором подразумевается естественное вложение $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$. Здесь не будем останавливаться на сопоставлении данного определения эллиптичности уравнения (0.1) с другими определениями (см., например, [1], [2]).

Гильбертово пространство $\dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega)$ определим как пополнение пространства $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|v\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}}$. Через $\dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}^*(\Omega)$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов на $\dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega)$. Для уравнения (0.1) с $\Phi \in \dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}^*(\Omega)$ рассматривается комплекснозначное решение задачи Дирихле из пространства $\dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega)$.

На измеримые комплекснозначные функции $A^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z})$, $\bar{\alpha} = (i, \alpha) \in \mathcal{S}$, наложим следующие условия. Существуют число $A > 0$ и функция $\mathcal{B}(\mathbf{z})$ такие, что для почти всех $(x, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}_{n+1}$ справедливы неравенства

$$|A^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z})| \leq \begin{cases} A \mathcal{B}^{1-i/k}(\mathbf{z}), & \mathcal{B}(\mathbf{z}) \geq 1, \\ A \mathcal{B}^{\max(0, 1-i/q)}(\mathbf{z}), & \mathcal{B}(\mathbf{z}) < 1. \end{cases} \quad (0.4)$$

Здесь и ниже при $q = 0$ считаем, что дробь i/q равна ∞ .

В качестве примера рассмотрим вещественное уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} (-1)^{|\bar{\alpha}|} D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} (a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u) = \Phi. \quad (0.5)$$

Здесь $\bar{\alpha} = (i, \alpha) = (i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндексы с целыми неотрицательными числами i, α_s , $s = \overline{1, n}$, $|\bar{\alpha}| = i + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Множество $\mathcal{S}$ определяется параметрами q, k, l_s, m_s , $q \leq k, l_s \leq m_s, l_s, m_s \in \mathbb{N}, s = \overline{1, n}$, следующим образом:

$$\mathcal{S} = \left\{ \bar{\alpha} = (i, \alpha) \mid \mu(\bar{\alpha}) = \frac{i}{q} + \frac{\alpha_1}{l_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{l_n} \geq 1, \nu(\bar{\alpha}) = \frac{i}{k} + \frac{\alpha_1}{m_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{m_n} \leq 1 \right\}.$$

При $q = 0$ будем требовать, чтобы $l_s = 1, s = \overline{1, n}$.

Для уравнения (0.5) ставится задача Дирихле, определяемая следующими граничными условиями:

$$D_x^i u|_{\partial\Omega} = 0, \quad i < k, \quad D_{y_s}^{\alpha_s} u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \alpha_s < m_s, \quad s = \overline{1, n}. \quad (0.6)$$

Уравнение (0.5) и более общие уравнения рассматривались в работах [3], [4], посвященных доказательству фредгольмовости задачи Дирихле для этих уравнений. Легко видеть, что решение задачи (0.5), (0.6) будет действительным (см. § 1).

Потребуем, чтобы для коэффициентов уравнения (0.5) для действительных функций $g(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнялось следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} g D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} g d\bar{\mathbf{y}} \\ \geq \hat{a} \int_{\Omega} \left(\sum_{s=1}^n \{ |D_{y_s}^{l_s} g|^2 + |D_{y_s}^{m_s} g|^2 \} + |D_x^k g|^2 + |D_x^q g|^2 \right) d\bar{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (0.7)$$

Отметим, что для выполнения (0.7) достаточно, например, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) z_{\bar{\alpha}} z_{\bar{\beta}} \geq \hat{a} \left(z_{(k, \mathbf{0})}^2 + z_{(q, \mathbf{0})}^2 + \sum_{s=1}^n \{ z_{(0, \mathbf{m}_s)}^2 + z_{(0, \mathbf{l}_s)}^2 \} \right),$$

для почти всех $\bar{\mathbf{y}} \in \Omega$ и любого набора чисел $z_{\bar{\alpha}}$; здесь через $\mathbf{m}_s = (0, \dots, 0, m_s, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{l}_s = (0, \dots, 0, l_s, 0, \dots, 0)$ обозначены мультииндексы с элементами m_s, l_s в позиции s .

Легко видеть, что уравнение (0.5) является частным случаем уравнения (0.1). Действительно, при $A^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z}) = \iota^{|\alpha|} \mathbf{z}^{\alpha} = (\iota z_1)^{\alpha_1} (\iota z_2)^{\alpha_2} \dots (\iota z_n)^{\alpha_n}$, $T^{\bar{\alpha}} = D_{\mathbf{y}}^{\alpha}$, $D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} = D_x^i D_{\mathbf{y}}^{\alpha}$, $\mathcal{B}^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n \{ z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s} \}$ выполняется условие (0.4), т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{2\alpha} &\leq \left(\sum_{s=1}^n z_s^{2m_s} \right)^{\nu-i/k} \leq \mathcal{B}^{2(\nu-i/k)}(\mathbf{z}) \leq \mathcal{B}^{2(1-i/k)}(\mathbf{z}), \quad \mathcal{B}(\mathbf{z}) \geq 1, \\ \mathbf{z}^{2\alpha} &\leq \left(\sum_{s=1}^n z_s^{2l_s} \right)^{\mu-i/q} \leq \mathcal{B}^{2(\mu-i/q)}(\mathbf{z}) \leq \mathcal{B}^{2(1-i/q)}(\mathbf{z}), \quad i < q, \quad q > 0, \quad \mathcal{B}(\mathbf{z}) \leq 1, \\ \mathbf{z}^{2\alpha} &\leq 1 = \mathcal{B}^0(\mathbf{z}), \quad i \geq q, \quad \mathcal{B}(\mathbf{z}) \leq 1, \end{aligned}$$

и уравнение (0.1) принимает вид (0.5), а условие (0.3) – вид (0.7).

Задача Дирихле для вещественного уравнения

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=0}^n (a_{ij}(\bar{\mathbf{y}}) u_{y_i})_{y_j} + \sum_{i=0}^n \{ b_i(\bar{\mathbf{y}}) u_{y_i} - (c_i(\bar{\mathbf{y}}) u)_{y_i} \} + d(\bar{\mathbf{y}}) u = \Phi \quad (0.5')$$

с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (0.6')$$

является частным случаем задачи Дирихле для уравнения (0.1). При этом условие

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=0}^n a_{ij} g_{y_i} g_{y_j} + \sum_{i=0}^n (b_i + c_i) g_{y_i} g + d g^2 \right\} d\bar{y} \geq \hat{a} \int_{\Omega} \{ |\nabla g|^2 + |g|^2 \} d\bar{y} \quad (0.7')$$

для $g(\bar{y}) \in C_0^\infty(\Omega)$ совпадает с ограничением (0.3) при $k = 1$, $q = 0$, $\mathcal{B}^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n z_s^2$.

В § 1 доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть существует положительная постоянная a_0 такая, что для любых $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}_{n+1}$ и почти всех $\bar{y} \in \Omega$ справедливы неравенства

$$\sum_{i,j=0}^n a_{ij}(\bar{y}) z_i z_j \geq a_0 |\bar{\mathbf{z}}|^2, \quad (0.8)$$

$$d(\bar{y}) \geq a_0, \quad a_0 d(\bar{y}) - |b(\bar{y}) + c(\bar{y})|^2 \geq 0. \quad (0.9)$$

Тогда справедливо неравенство (0.7') с $\hat{a} = a_0/2$.

Если коэффициенты уравнения второго порядка

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=0}^n (a_{ij}(\bar{y}) u_{y_i})_{y_j} = \Phi \quad (0.5'')$$

удовлетворяют условию (0.8), то задача Дирихле (0.5''), (0.6') является частным случаем задачи Дирихле для уравнения (0.1). При этом справедливо неравенство (0.3) с параметрами $k = q = 1$, $\mathcal{B}^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n z_s^2$.

Коэффициенты уравнений (0.5'), (0.5'') считаем действительными измеримыми в Ω ограниченными для почти всех $\bar{y} \in \Omega$ функциями, т.е.

$$|d(\bar{y})| \leq \bar{a}, \quad |b_i(\bar{y})| \leq \bar{a}, \quad |c_i(\bar{y})| \leq \bar{a}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (0.2')$$

$$|a_{ij}(\bar{y})| \leq \bar{a}, \quad i, j = \overline{0, n}. \quad (0.2'')$$

Вопросы качественного поведения решений эллиптических уравнений привлекают внимание многих математиков. Отметим работы [5], [6] А. К. Гуцина, в которых получены интересные результаты о свойствах решения задачи Дирихле для уравнений второго порядка “промежуточных” между гёльдеровостью и принадлежностью соболевскому пространству. В работах [7], [8] В. П. Михайлова для полигармонических функций установлены критерии существования L_2 -предела и слабого L_2 -предела на правильной аналитической границе двумерной ограниченной области.

Настоящая работа посвящена исследованию поведения на бесконечности решения задачи Дирихле для уравнения (0.1) в зависимости от геометрии неограниченной области Ω .

В работе О. А. Олейник, Г. А. Иосифьяна [9] изучался вопрос о поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка, удовлетворяющих на той части границы области, которая принадлежит некоторой

окрестности бесконечности, либо однородным условиям Дирихле, либо условиям Неймана, либо условиям периодичности. Получены априорные оценки, характеризующие поведение таких решений в областях с некомпактной границей при $x \rightarrow +\infty$ в зависимости от геометрических свойств области и поведения функции $\Phi(\bar{\mathbf{y}})$, стоящей в правой части уравнения, при $x \rightarrow +\infty$. Приведем следствие из теоремы 1 этой работы для уравнения (0.5'').

Предполагается, что область $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+1}$ лежит в полупространстве $x > 0$, сечение $S_r = \{\bar{\mathbf{y}} \in \Omega \mid x = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$. В области Ω рассматривается уравнение (0.5'') с граничным условием Дирихле

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (0.10)$$

где $\Gamma = \{\bar{\mathbf{y}} \in \partial\Omega \mid x > 0\}$. Пусть $\Lambda(r)$ – измеримая на $(0, \infty)$ функция такая, что

$$0 < \Lambda(r) \leq \inf_{C_0^\infty(\Omega)} \left\{ \int_{S_r} E(u) d\bar{\mathbf{y}} \mid \int_{S_r} u^2 d\bar{\mathbf{y}} = 1 \right\}, \quad E(u) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}(\bar{\mathbf{y}}) u_{y_i} u_{y_j}.$$

Предполагается, что $\int_1^\infty \Lambda^{1/2}(x) dx = \infty$.

В цитируемой работе [9] при любом $R > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ для обобщенного решения задачи (0.5''), (0.10) доказана оценка

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R^{R+1}} \Lambda(x) u^2 d\bar{\mathbf{y}} &\leq \int_{\Omega_R^{R+1}} E(u) d\bar{\mathbf{y}} \\ &\leq \exp \left\{ -(1-\varepsilon) \int_{R/2}^R \Lambda^{1/2}(x) dx \right\} \times \int_{\Omega_{R/2}^{R+1+\varphi(R)}} E(u) d\bar{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

где $\varphi(R)$ определяется условием

$$\int_{R/2}^R \Lambda^{1/2}(x) dx = \int_{R+1}^{R+1+\varphi(R)} \Lambda^{1/2}(x) dx.$$

Здесь и ниже используется обозначение $\Omega_{r_1}^{r_2} = \{\bar{\mathbf{y}} \in \Omega \mid r_1 < x < r_2\}$, значения параметров $r_1 = -\infty$ или $r_2 = \infty$ могут быть опущены.

Отметим, что никаких подтверждений точности полученных оценок авторы не приводят. С нашей точки зрения характеристика $\Lambda(x)$ неограниченной области Ω недостаточно эффективна для областей с нерегулярным поведением границы. Пусть, например,

$$\begin{aligned} Q_a &= \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x > 0, |\mathbf{y}| < \max(1, x^a)\}, \\ \tilde{Q}_a &= Q_a \setminus \bigcup_{i=1}^\infty \ell_i, \quad \ell_i = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x = i, i^b \leq |\mathbf{y}|\}, \quad 0 < b < a < 1. \end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{Q}_a \subset Q_a$, то $\Lambda(r, Q_a) \leq \Lambda(r, \tilde{Q}_a)$, причем функции будут отличаться лишь в натуральных точках, поэтому $\Lambda(r)$ можно взять одинаковой для областей Q_a и $\tilde{Q}_a$. Тем не менее, далее мы установим для области $\tilde{Q}_a$ существенно лучшую оценку, такую же, как и для области Q_b .

В работе Е. М. Ландиса, Г. П. Панасенко [10] рассматривалось эллиптическое уравнение (0.5'') в $\mathbb{R}_{n+1}$, коэффициенты $a_{ij}(\bar{y})$ и правая часть $\Phi(\bar{y})$ которого являются периодическими функциями по переменным $y_1, \dots, y_n$. Относительно правой части предполагалось, что она экспоненциально быстро убывает при $|x| \rightarrow \infty$. Доказано, что в этом случае периодическое по $y_1, \dots, y_n$ решение $u(\bar{y})$ уравнения (0.5'') либо столь же быстро стабилизируется к константе k_1 при $x \rightarrow +\infty$ и к константе k_2 при $x \rightarrow -\infty$, либо неограничено. Аналогичная задача рассматривалась для полупространства $x > 0$. В этом случае исследовалось поведение решения при $x \rightarrow +\infty$ и была доказана такая же теорема о стабилизации ограниченного решения или решения с $\text{grad } u \in L_2(\mathbb{R}_{n+1}^+)$.

В работе [11] получены неувлучшаемые оценки, характеризующие поведение при $|x| \rightarrow \infty$ решения бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = \Phi + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \quad (0.11)$$

в неограниченной области Ω на плоскости $\mathbb{R}_2$ с граничными условиями

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (0.12)$$

где ν – направление внешней нормали к $\partial\Omega$. Приведем одну из них.

Пусть $\delta(\omega)$, $\pi < \omega \leq 2\pi$, – единственное решение уравнения

$$\sin^2(\omega\delta) = \delta^2 \sin^2 \omega,$$

удовлетворяющее условию $0 < \omega\delta(\omega) \leq \pi$. Пусть $\gamma(\rho) = \{\bar{y} = (x, y) \in \Omega \mid |\bar{y}| = \rho\}$ не является целой окружностью ни при каком $\rho > 0$ и $l(\rho)$ – длина наибольшей из дуг, составляющих $\gamma(\rho)$. Пусть $l(\rho) \leq \rho\omega$, где $\omega \in [1.24\pi, 2\pi]$. Тогда решение задачи (0.11), (0.12) удовлетворяет оценке

$$\int_{\Omega \cap \{|\bar{y}| > \rho\}} \mathcal{E}(u) d\bar{y} \leq C \rho^{-2\delta(\omega)} \left(\int_{\Omega} \mathcal{E}(u) d\bar{y} \right)^{1/2} \quad (0.13)$$

с постоянной C , зависящей только от $\omega, \Phi, \Phi_1, \Phi_2$. Здесь $\mathcal{E}(u) = u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2$. Утверждается, что оценка (0.13) неувлучшаема в том смысле, что показатель степени $2\delta(\omega)$ не может быть увеличен, например, для областей типа угла.

Чтобы сформулировать наши результаты, введем следующее обозначение:

$$\lambda(r_1, r_2) = \inf \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx \mid g(\bar{y}) \in C_0^\infty(\Omega), \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |g|^2 d\bar{y} = 1 \right\}, \quad r_1 < r_2. \quad (0.14)$$

Для неотрицательных ρ и $a, b \geq 0$ положим

$$\rho^{[a,b]} = \begin{cases} \rho^a, & \rho < 1, \\ \rho^b, & \rho \geq 1. \end{cases}$$

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ назовем $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью области Ω , если существует число $\theta > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$1 \leq \theta \lambda_J^{J+1} \Delta_J^{2[k,q]}, \quad J = \overline{0, \infty}, \quad (0.15)$$

где $\lambda_J^{J+1} = \lambda(x_J, x_{J+1})$, $\Delta_J = x_{J+1} - x_J$.

Приведем необходимое и достаточное условие существования $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательности:

$$\text{при любом } r_1 > 0 \text{ найдется } r_2 > r_1 \text{ такое, что } \lambda(r_1, r_2) > 0. \quad (0.16)$$

При $q > 0$ доказательство утверждения аналогично доказательству, приведенному в [12; § 3, следствие 1 к утверждению 2]. При этом λ -последовательность можно построить, начиная с любого $x_0 > 0$. Таким образом, λ -последовательность существует для очень широкого класса неограниченных областей.

Отметим, что при $q = 0$ очевидное неравенство

$$\|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 \geq \int_{\mathbb{R}_n} |g(x, \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}, \quad x \in \mathbb{R},$$

влечет неравенство

$$\lambda(r_1, r_2) \geq 1, \quad r_2 > r_1. \quad (0.17)$$

Поэтому $\lambda[k, 0, \mathcal{B}]$ -последовательность можно построить всегда, начиная с любого $x_0 > 0$. Действительно, выбирая $\theta \geq 1$, можно положить, например, $x_{J+1} = x_J + 1$, $J = \overline{0, \infty}$.

Ради некоторого упрощения формулировок результатов потребуем существование такого числа x_* , что $\lambda(-\infty, x_*) > 0$. Нетрудно доказать, что это условие будет выполнено и при любом $x > x_*$ (см. [12; § 3, замечание к утверждению 2]). Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $x_* = x_0$ и

$$\lambda^0 = \lambda(-\infty, x_0) > 0. \quad (0.18)$$

В случае $q = 0$ требование (0.18) не является ограничением, поскольку, как уже отмечалось, $\lambda^0 \geq 1$.

Чтобы исключить влияние функционала Φ на поведение решения на бесконечности, будем считать, что Φ имеет ограниченный носитель. Не ограничивая общности, можно полагать, что

$$\text{supp } \Phi \subset \Omega^{x_0}. \quad (0.19)$$

Через $\Xi = \{k, q, \theta, \hat{a}, \bar{a}, A\}$ обозначим набор постоянных. Зависимость других постоянных от постоянных из этого набора будем указывать в круглых скобках. В следующем утверждении рассматривается обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (0.1), определенное в § 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть область Ω удовлетворяет требованию (0.18), $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ – некоторая $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательность и выполнены условия (0.2)–(0.4), (0.19). Тогда существуют положительные постоянные $\kappa(\Xi)$, $M(\Xi, \Phi)$ такие, что для решения $u(\bar{\mathbf{y}})$ задачи Дирихле для уравнения (0.1) при всех $N \geq 2$ справедлива оценка

$$\int_{x_N}^\infty \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx \leq M \exp(-\kappa N). \quad (0.20)$$

Для уравнений второго порядка (0.5'), (0.5'') оценка (0.20) запишется в виде

$$\int_{\Omega_{x_N}} \{|\nabla u|^2 + |u|^2\} d\bar{\mathbf{y}} \leq M \exp(-\kappa N), \quad N \geq 2, \quad (0.20')$$

$$\int_{\Omega_{x_N}} |\nabla u|^2 d\bar{\mathbf{y}} \leq M \exp(-\kappa N), \quad N \geq 2, \quad (0.20'')$$

соответственно. Используя (0.14), (0.15), легко установить следствие оценки (0.20''):

$$\int_{\Omega_{x_{N+1}}} |u|^2 d\bar{\mathbf{y}} \leq M' \Delta_N^2 \exp(-\kappa N), \quad N \geq 2. \quad (0.21)$$

Конечно, оценка (0.20) зависит от выбора $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательности. Назовем $\bar{\lambda}[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательность $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ оптимальной, если существует постоянная $E(\Xi)$ такая, что для любой другой $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательности $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ справедлива импликация

$$(x_L \leq \bar{x}_N) \implies (L \leq EN). \quad (0.22)$$

Так как используемый нами метод не позволяет определить точное значение κ в (0.20) и оно здесь не существенно, то можно считать, что оптимальная $\bar{\lambda}$ -последовательность обеспечивает “наиболее быстро убывающую” с ростом $x = \bar{x}_N$ экспоненту в (0.20). Установлено, что оптимальной является λ -последовательность с минимально возможными, без нарушения условия (0.15), интервалами $(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$ (см. § 3, утверждение 4).

Определим область вращения

$$\Omega(f) = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x > d, |\mathbf{y}| < f(x)\} \quad (0.23)$$

с положительной функцией $f(x)$ ($d \in (-\infty, 0]$). От функции f будем требовать только, чтобы множество $\Omega(f)$ было областью. В частности, это влечет измеримость f . Кроме того, на любом конечном отрезке $[a, b]$ такая функция в некоторой точке отрезка принимает свое минимальное значение. Это сразу следует из замкнутости надграфика функции.

Для областей вращения вида (0.23), не содержащих полупространство, естественно выразить оценку (0.20) в терминах функции $f(x)$. С этой целью определим понятие П-последовательности. При этом на функцию $\mathcal{B}(\mathbf{z})$ налагаются следующие ограничения.

Потребуем, чтобы функции

$$\mathcal{B}_s(z_s) = \mathcal{B}(0, \dots, z_s, \dots, 0), \quad z_s \in \mathbb{R}, \quad s = \overline{1, n},$$

были четными, возрастающими при $z_s > 0$ и существовали положительные числа c_1, c_2 такие, что

$$\mathcal{B}_s(hz_s) \leq c_1 \mathcal{B}_s(z_s) \mathcal{B}_s(h), \quad h > 0, \quad z_s > 0, \quad (0.24)$$

$$\mathcal{B}_s(z_s) \leq c_2 |z_s|, \quad |z_s| \leq 1. \quad (0.25)$$

Будем предполагать также справедливость неравенств

$$\mathcal{B}(\mathbf{z}) \geq \mathcal{B}_s(z_s), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}_n, \quad s = \overline{1, n}. \quad (0.26)$$

Положим

$$\phi_s(r) = \frac{1}{\mathcal{B}_s(1/r)}, \quad \phi(r) = \min_{s=\overline{1, n}} \phi_s(r), \quad r > 0.$$

Потребуем, чтобы $\lim_{r \rightarrow 0} \phi_s(r) = 0$; для этого достаточно, чтобы

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{B}_s(z) = \infty, \quad s = \overline{1, n}.$$

Например, для функции $\mathcal{B}^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n \{z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s}\}$ соответствующие функции определяются равенствами

$$\mathcal{B}_s^2(z) = z^{2m_s} + z^{2l_s}, \quad \phi_s^2(r) = \frac{r^{2(m_s+l_s)}}{r^{2m_s} + r^{2l_s}}, \quad r > 0, \quad l_s, m_s \in \mathbb{N}, \quad s = \overline{1, n}.$$

При этом выполняются условия (0.24)–(0.26). Нетрудно показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}} r^{[m, l]} \leq \phi(r) \leq r^{[m, l]}, \quad r > 0, \\ m = \max_{s=\overline{1, n}} m_s, \quad l = \min_{s=\overline{1, n}} l_s, \quad l_s \leq m_s, \quad s = \overline{1, n}.$$

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ определим индуктивно следующим образом:

$$x_{N+1} = \sup \left\{ r \mid \inf_{x \in [x_N, r]} \phi(f(x)) \geq (r - x_N)^k, \quad r \leq x_N + 1 \right\}, \quad N = \overline{0, \infty}, \quad (0.27')$$

начиная с произвольного $x_0 > 0$. Следуя [13], эту последовательность назовем $\Pi[k, 0, \phi(r)]$ -последовательностью функции f . Аналогично, при $q > 0$ полагаем

$$x_{N+1} = \sup \left\{ r \mid \inf_{x \in [x_N, r]} \phi(f(x)) \geq (r - x_N)^{[k, q]} \right\}, \quad N = \overline{0, \infty}, \quad (0.27'')$$

начиная с произвольного $x_0 > 0$. Эту последовательность обозначим через $\Pi[k, q, \phi(r)]$. При этом обозначение $\Pi[1, 1, r]$ далее будем сокращать до символа Π . В § 4 установлено, что при $q \geq 0$ $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность является $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью для области $\Omega(f)$.

Несложным следствием теоремы 1 в случае области вращения является следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (0.2)–(0.4), (0.19), (0.24)–(0.26). Тогда существуют положительные постоянные $\tilde{\kappa}(\Xi)$, $\tilde{M}(\Xi, \Phi)$ такие, что для решения $u(\bar{\mathbf{y}})$ задачи Дирихле для уравнения (0.1) в области вращения $\Omega(f)$ справедлива оценка

$$\int_r^\infty \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx \leq \tilde{M} \exp \left(-\tilde{\kappa} \int_1^r \frac{dx}{\phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}} \right), \quad r \geq \tilde{R}. \quad (0.28)$$

Здесь $\sigma(q) = 0$, если $q = 0$, и $\sigma(q) = 1/q$ в ином случае.

В частности, для псевдодифференциального уравнения

$$(-1)^k D_x^{2k} u + (-1)^q D_x^{2q} u + \sum_{s=1}^n F_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}}^{-1}[\{z_s^{2l} + z_s^{2m}\} F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[u]] = \Phi,$$

где m, l ($l \leq m$) – нецелые положительные числа, а $k, q \in \mathbb{N}$, в трубчатых областях $\Omega(f)$ оценка (0.28) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_r(f)} \{|D_x^k u|^2 + |D_x^q u|^2\} dx d\mathbf{y} + \sum_{s=1}^n \int_r^\infty \int_{\mathbb{R}_n} (z_s^{2l} + z_s^{2m}) |F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[u]|^2 dx d\mathbf{z} \\ & \leq \widetilde{M} \exp\left(-\tilde{\kappa} \int_1^r \frac{dx}{f^{[m/k, l/q]}(x)}\right), \quad r \geq \widetilde{R}. \end{aligned}$$

В области $\Omega(f_a)$ с функцией $f_a(x) = \max\{1, x^a\}$, $a > 0$, $x > 0$, для решения задачи (0.5), (0.6) при $r \geq \widetilde{R}_a$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega_r(f_a)} \left\{ (D_x^q u)^2 + \sum_{s=1}^n (D_{y_s}^{l_s} u)^2 \right\} dx d\mathbf{y} \leq \widetilde{M}_a \exp(-\tilde{\kappa}_a r^{1-a\sigma(q)}),$$

где при $q > 0$ предполагается, что $a < q/l$.

В области $\Omega(f_{-a})$ с функцией $f_{-a}(x) = \min\{1, x^{-a}\}$, $a > 0$, $x > 0$, для решения задачи (0.5), (0.6) при $r \geq \widetilde{R}_{-a}$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega_r(f_{-a})} \left\{ (D_x^k u)^2 + \sum_{s=1}^n (D_{y_s}^{m_s} u)^2 \right\} dx d\mathbf{y} \leq \widetilde{M}_{-a} \exp(-\tilde{\kappa}_{-a} r^{1+am/k}).$$

Из последней оценки видно, что в случае сужающихся областей она гарантирует большую скорость убывания решения для тех уравнений, у которых отношение m/k больше, где m – порядок старшей производной по $y_1, y_2, \dots, y_n$, k – по x . Предыдущая же оценка показывает, что в случае расширяющихся областей следует ожидать большую скорость убывания решения тех уравнений, для которых отношение l/q меньше. Здесь l и $q > 0$ – порядки входящих в уравнение младших производных решения по переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$ и x соответственно.

Пусть существует постоянная $c_3 > 0$ такая, что справедливо неравенство

$$\mathcal{B}(h\mathbf{z}) \leq c_3 \mathcal{B}(\mathbf{z}) \max_{s=1, n} \mathcal{B}_s(h), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}_n, \quad h > 0. \quad (0.29)$$

Если при этом существует постоянная $\omega \geq 1$ такая, что

$$\sup \{f(z) \mid z \in [x - \phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}, x + \phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]]}\} \leq \omega f(x), \quad x \geq 1, \quad (0.30)$$

то $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ является оптимальной $\bar{\lambda}[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью для $\Omega(f)$ (§4, утверждение 7). В частности, $\Pi[k, q, r^{[m, l]}]$ -последовательность функции $f(x)$ является оптимальной $\bar{\lambda}[k, q, \mathcal{B}(\mathbf{z})]$ -последовательностью с

$$\mathcal{B}^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n \{z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s}\}$$

для $\Omega(f)$ (при $q = 0$ считаем, что $l = l_s = 1$). Если $x_0 \geq 1$, то существует постоянная $c > 0$ такая, что справедливы оценки (см. § 4, утверждение 7)

$$c^{-1} \int_1^{x_N} \frac{dx}{\phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}} \leq N \leq c \int_1^{x_N} \frac{dx}{\phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}}, \quad N \geq 1. \quad (0.31)$$

Соотношение (0.31) при $k = q = 1$, $\phi(r) = r$ для П-последовательности функции $f_b(x)$ принимает вид

$$c^{-1} x_N^{1-b} \leq N \leq c x_N^{1-b}, \quad N \geq 1. \quad (0.31b)$$

Оценка (0.21) не может быть существенно улучшена ввиду следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть П-последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ положительной функции $f(x)$ подчиняется неравенствам

$$\frac{1}{\bar{\omega}} \leq \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{x_{N+1} - x_N} \leq \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} \geq 1, \quad N = \overline{0, \infty}, \quad (0.32)$$

и выполнены условия (0.2''), (0.8), (0.19). Тогда для неотрицательного решения задачи (0.5''), (0.6') в области $\Omega(f)$ существуют положительные числа $K, K'(\bar{\omega}, n, \hat{a}, \bar{a}), \mu, \mu'(\bar{\omega}, n, \hat{a}, \bar{a}, x_0, x_1)$ такие, что справедливы неравенства

$$\int_{\Omega_{x_N^{N+1}}(f)} u^2 d\bar{y} \geq \mu' \Delta_N^2 \exp(-K'N) \geq \mu \exp(-KN), \quad N \geq 1. \quad (0.33)$$

В § 4 установлено, что для функции $f(x)$ условие (0.30) является достаточным, чтобы П $[k, q, \phi(r)]$ -последовательность $\{x_J\}_{J=0}^{\infty}$ этой функции удовлетворяла условию (0.32) (см. § 4, утверждение 7). Следовательно, для широкого класса областей вращения $\Omega(f)$ с функцией f , удовлетворяющей условию (0.30) при $k = q = 1$, $\phi(r) = r$, оценка (0.33) доказывает точность оценки (0.21).

В § 4 установлено следствие оценки (0.21) для области $\tilde{Q}_a$ (см. утверждение 6)

$$\int_{\Omega_r^{r+1}(\tilde{f}_a)} u^2 d\bar{y} \leq \tilde{M}_b \exp(-\tilde{\kappa}_b r^{1-b}), \quad r \geq \tilde{R}_b, \quad (0.34)$$

точность которой будет показана ниже.

ТЕОРЕМА 4. Пусть положительная функция $f(x)$ удовлетворяет условию (0.30) при $k = q = 1$, $\phi(r) = r$ и выполнены условия (0.2''), (0.8), (0.19). Тогда для неотрицательного решения задачи (0.5''), (0.6') в области $\Omega(f)$ существуют положительные числа $\tilde{K}(\bar{\omega}, n, \hat{a}, \bar{a}), \tilde{\mu}(\bar{\omega}, n, \hat{a}, \bar{a}, x_0, x_1)$ такие, что справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_r^{r+1}(f)} u^2 d\bar{y} \geq \tilde{\mu} \exp\left(-\tilde{K} \int_1^r \frac{dx}{f(x)}\right), \quad r \geq \tilde{r}. \quad (0.35)$$

В частности, функция $f_b(x)$, $x > 0$, удовлетворяет условиям теоремы 4. Применяя принцип максимума для неотрицательного решения задачи (0.5''), (0.6') в области $\tilde{Q}_a = \Omega(\tilde{f}_a) \supset Q_b$, устанавливаем оценку

$$\int_{\Omega_r^{r+1}(\tilde{f}_a)} u^2 d\bar{y} \geq \tilde{\mu}_b \exp(-\tilde{K}_b r^{1-b}), \quad r \geq \tilde{r}_b.$$

Это доказывает точность оценки (0.34) для области $\tilde{Q}_a$.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Через $\|u\|_Q$ будем обозначать норму в $\mathbf{L}_2(Q)$. В случае, когда $Q = \Omega$, символ Q опускаем. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(v, w) &= \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) T^{\bar{\alpha}} D_x^i v \overline{T^{\bar{\beta}} D_x^j w}, \\ (v, w)_{\mathcal{G}, (a, b)} &= \int_a^b \int_{\mathbb{R}_n} \mathcal{G}(v, w) dx d\mathbf{y}, \\ (v, w)_{\mathcal{B}} &= \int_{\mathbb{R}_n} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) F[v] \overline{F[w]} d\mathbf{z} + \int_{\mathbb{R}_n} \{ D_x^k v \overline{D_x^k w} + D_x^q v \overline{D_x^q w} \} d\mathbf{y}, \\ (v, w)_{\mathcal{B}, (a, b)} &= \int_a^b (v(x), w(x))_{\mathcal{B}} dx, \quad \|v\|_{\mathcal{B}, (a, b)}^2 = (v, v)_{\mathcal{B}, (a, b)}, \\ v, w &\in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1}).\end{aligned}$$

Символ $(-\infty, \infty)$ заменяем на $\mathbb{R}$.

Обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (0.1) назовем функцию $u(\bar{\mathbf{y}}) \in \dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(u, v)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}} = \Phi(v) \quad (1.1)$$

для любой функции $v(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Оценим интеграл

$$- \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n (b_i(\bar{\mathbf{y}}) + c_i(\bar{\mathbf{y}})) g_{y_i} g d\bar{\mathbf{y}} \leq \int_{\Omega} \left(\varepsilon |\nabla g|^2 + \frac{|c + b|^2}{4\varepsilon} g^2 \right) d\bar{\mathbf{y}}, \quad g(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пользуясь (0.8) и полагая $\varepsilon = a_0/2$, получаем

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=0}^n a_{ij}(\bar{\mathbf{y}}) g_{y_i} g_{y_j} + \sum_{i=0}^n (b_i(\bar{\mathbf{y}}) + c_i(\bar{\mathbf{y}})) g_{y_i} g + d(\bar{\mathbf{y}}) g^2 \right\} d\bar{\mathbf{y}} \\ & \geq \frac{a_0}{2} \|\nabla g\|^2 + \int_{\Omega} \left(d(\bar{\mathbf{y}}) - \frac{|c(\bar{\mathbf{y}}) + b(\bar{\mathbf{y}})|^2}{2a_0} \right) g^2 d\bar{\mathbf{y}}.\end{aligned}$$

Ввиду условий (0.9) неравенство (0.7') доказано.

Множества действительных функций пространства $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ будем обозначать через $C_0^\infty(\Omega)$.

ЛЕММА 1. Для любой функции $g(x) \in C^\infty[a, b]$ и любого $\varepsilon \leq (b - a)^2$ справедливы неравенства

$$\int_a^b (D_x^p g)^2 dx \leq \varepsilon^{-p} \int_a^b [\varepsilon^i (D_x^i g)^2 + G_i g^2] dx, \quad p = \overline{0, i}, \quad (1.2)$$

где $G_i \geq 1$ – постоянная, зависящая только от i , причем $G_{i+1} \geq G_i$. Здесь i – произвольное натуральное число.

Доказательство леммы см. в работе [12].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Delta = b - a$, $\Pi_a^b = (a, b) \times \mathbb{R}_n$. Тогда существует постоянная $\tilde{C}(i) > 0$ такая, что для любой функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ справедливы неравенства

$$\frac{\|D_x^p g\|_{\Pi_a^b}^2}{\Delta^{2(i-p)}} \leq \tilde{C} \|D_x^i g\|_{\Pi_a^b}^2 + \tilde{C} \frac{\|g\|_{\Pi_a^b}^2}{\Delta^{2i}}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.3)$$

Здесь i – произвольное натуральное число.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ниже через $\tilde{C}$ будем обозначать, вообще говоря, различные постоянные, зависящие от i, k, q, A .

ЛЕММА 2. Пусть $\bar{\alpha} = (i, \alpha) \in \mathcal{S}$. Тогда существует такая постоянная $\tilde{C}(A, k, q) > 0$, что для любой функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ справедливы неравенства

$$\frac{\|T^{\bar{\alpha}} D_x^p g\|_{\Pi_a^b}^2}{\Delta^{2(i-p)}} \leq \tilde{C} \|g\|_{\mathcal{B}, (a, b)}^2 + \tilde{C} \frac{\|g\|_{\Pi_a^b}^2}{\Delta^{2[k, q]}}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.4)$$

Здесь $T^{\bar{\alpha}}$ – псевдодифференциальный оператор с символом, удовлетворяющим условию (0.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала для Π_0^1 установим неравенства

$$\frac{\|T^{\bar{\alpha}} D_x^p g\|_{\Pi_0^1}^2}{\Delta^{2i}} \leq \tilde{C} \|\mathcal{B}F[g]\|_{\Pi_0^1}^2 + \tilde{C} \left(\frac{\|D_x^k g\|_{\Pi_0^1}^2}{\Delta^{2k}} + \frac{\|D_x^q g\|_{\Pi_0^1}^2}{\Delta^{2q}} \right) + \tilde{C} \frac{\|g\|_{\Pi_0^1}^2}{\Delta^{2[k, q]}}, \quad (1.5)$$

$$\bar{\alpha} \in \mathcal{S}, \quad p = \overline{0, i}.$$

Далее, чтобы получить (1.4), достаточно сделать замену первой переменной интегрирования в (1.5), пользуясь формулой $x = a + \hat{x}\Delta$.

На первом шаге будем рассматривать функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Pi_0^1)$. Для них справедливо разложение в ряд Фурье

$$g(\hat{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\mathbf{y}) \sin j\pi \hat{x}, \quad a_j(\mathbf{y}) = 2 \int_0^1 g(\hat{x}, \mathbf{y}) \sin j\pi \hat{x} d\hat{x}. \quad (1.6)$$

Продифференцировав (1.6) p раз по $\hat{x}$ и применив оператор $T^{\bar{\alpha}}$, получаем равенства Парсеваля

$$\int_0^1 |T^{\bar{\alpha}} D_x^p g|^2 d\hat{x} = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} |T^{\bar{\alpha}} a_j(\mathbf{y})|^2, \quad p = \overline{0, i}.$$

Интегрируя их по $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$ и пользуясь равенством Планшереля, получаем

$$\|T^{\bar{\alpha}} D_x^p g\|_{\Pi_0^1}^2 = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} \int_{\mathbb{R}_n} |A^{\bar{\alpha}}(\hat{x}, \mathbf{z})|^2 |\tilde{a}_j(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.7)$$

Здесь функции $\tilde{a}_j(\mathbf{z})$ являются преобразованием Фурье функций $a_j(\mathbf{y})$. В частности, справедливо соотношение

$$\|D_x^p g\|_{\Pi_0^1}^2 = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} \int_{\mathbb{R}_n} |\tilde{a}_j(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.7')$$

Установим неравенство

$$|A^{\bar{\alpha}}(\hat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leq A^2 \left\{ \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2q} + \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2k} + \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) + \frac{1}{\Delta^{2[k,q]}} \right\}, \quad p = \overline{0, i}, \quad \alpha \in \mathcal{S}. \quad (1.8)$$

Здесь без ограничения общности считаем, что $A \geq 1$.

Рассмотрим сначала случай $\mathcal{B}(\mathbf{z}) \geq 1$. Используя условие (0.4) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$|A^{\bar{\alpha}}(\hat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leq A^2 \mathcal{B}^{2(1-i/k)}(\mathbf{z}) \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2i} \leq A^2 \left(\left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2k} + \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) \right),$$

из которой следует (1.8).

Пусть теперь $\mathcal{B}(\mathbf{z}) < 1$, $i \geq q$. Согласно условию (0.4) имеем

$$|A^{\bar{\alpha}}(\hat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leq A^2 \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2i} \leq A^2 \left(\left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2k} + \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2q} \right).$$

Пусть $\mathcal{B}(\mathbf{z}) < 1$, $i < q$. Используя неравенство Юнга и (0.4), выводим

$$|A^{\bar{\alpha}}(\hat{x}, \mathbf{z})|^2 \frac{j^{2p}}{\Delta^{2i}} \leq A^2 \mathcal{B}^{2(1-i/q)}(\mathbf{z}) \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2i} \leq A^2 \left(\mathcal{B}^2(\mathbf{z}) + \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2q} \right).$$

Подставляя (1.8) в (1.7), получим

$$\frac{\|T^{\bar{\alpha}} D_{\hat{x}}^p g\|_{\Pi_0^1}^2}{\Delta^{2i}} \leq A^2 E_p \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_n} \left\{ \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2k} + \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2q} + \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) + \frac{1}{\Delta^{2[k,q]}} \right\} |\tilde{a}_j(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z}. \quad (1.9)$$

Пользуясь (1.7'), из последнего соотношения выводим (1.5) с $\tilde{C} = A^2$.

Докажем теперь неравенство (1.5) для функции $g(\hat{x}, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$. Известно [14; гл. III, § 4, п. 2], что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует оператор продолжения $E_{\hat{x}}: C^k(\Pi_0^1) \rightarrow C^k(\Pi_{-1}^2)$ такой, что $\bar{g}(\hat{x}, \mathbf{y}) = E_{\hat{x}}(g(\hat{x}, \mathbf{y}))$, $\bar{g}|_{\Pi_0^1} = g$. При этом справедливы неравенства

$$\|D_{\hat{x}}^i \bar{g}\|_{\Pi_{-1}^2}^2 \leq C_i \|D_{\hat{x}}^i g\|_{\Pi_0^1}^2. \quad (1.10)$$

Поскольку оператор $E_{\hat{x}}$ коммутирует с преобразованием Фурье по $\mathbf{y}$, то справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}F[\bar{g}]\|_{\Pi_{-1}^2}^2 \leq C_0 \|\mathcal{B}F[g]\|_{\Pi_0^1}^2. \quad (1.11)$$

Пусть $\eta(\hat{x}) \in C_0^\infty(-1, 2)$ – срезающая функция, не превосходящая единицы, равная единице на $[0, 1]$. Тогда для функции $\hat{g} = \bar{g}\eta$, принадлежащей $C_0^\infty(\Pi_{-1}^2)$, при помощи (1.5) можно установить, что

$$\frac{\|T^{\bar{\alpha}} D_{\hat{x}}^p \hat{g}\|_{\Pi_{-1}^2}^2}{\Delta^{2i}} \leq A^2 \left\{ 3^{2k} \frac{\|D_{\hat{x}}^k \hat{g}\|_{\Pi_{-1}^2}^2}{\Delta^{2k}} + 3^{2q} \frac{\|D_{\hat{x}}^q \hat{g}\|_{\Pi_{-1}^2}^2}{\Delta^{2q}} + \|\mathcal{B}F[\hat{g}]\|_{\Pi_{-1}^2}^2 + \frac{\|\hat{g}\|_{\Pi_{-1}^2}^2}{\Delta^{2[k,q]}} \right\}. \quad (1.12)$$

Поскольку срезающая функция $\eta(\hat{x})$ зависит только от $\hat{x}$, то следствием неравенства (1.11) является оценка

$$\|\mathcal{B}F[\hat{g}]\|_{\Pi_{-1}^2}^2 \leq C_0 \|\mathcal{B}F[g]\|_{\Pi_0^1}^2. \quad (1.13)$$

Кроме того, пользуясь (1.10), для $i = \overline{0, k}$ выводим соотношения

$$\begin{aligned} \|D_{\hat{x}}^i \hat{g}\|_{\Pi_{-1}^2}^2 &\leq \left(\sum_{r=0}^i C_r^i \|D_{\hat{x}}^{i-r} \eta D_{\hat{x}}^r \bar{g}\|_{\Pi_{-1}^2} \right)^2 \\ &\leq E_1(i) \sum_{r=0}^i \|D_{\hat{x}}^r \bar{g}\|_{\Pi_{-1}^2}^2 \leq E_1(i) \sum_{r=0}^i C_r \|D_{\hat{x}}^r g\|_{\Pi_0^1}^2. \end{aligned}$$

Далее, применим неравенства (1.2) с $\varepsilon = 1$, имеющие в данном случае следующий вид:

$$\|D_{\hat{x}}^r g\|_{\Pi_0^1}^2 \leq \|D_{\hat{x}}^i g\|_{\Pi_0^1}^2 + G_i \|g\|_{\Pi_0^1}^2, \quad r = \overline{0, i}.$$

В результате получаем

$$\|D_{\hat{x}}^i \hat{g}\|_{\Pi_{-1}^2}^2 \leq E_2(i) (\|D_{\hat{x}}^i g\|_{\Pi_0^1}^2 + \|g\|_{\Pi_0^1}^2), \quad 0 \leq i \leq k. \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14), (1.13) в (1.12), выводим неравенство (1.5) для $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$. Сложив неравенства (1.5), записанные для действительной и мнимой части, установим (1.5) для функции $g \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$. Итак, (1.5) доказано в общей ситуации.

Вопросы существования решения краевых задач для псевдодифференциальных эллиптических уравнений рассматривались многими авторами (см., например, работы [1], [2]). Для удобства читателя приведем несложное доказательство теоремы существования решения задачи Дирихле для уравнения (0.1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть для области Ω существует $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^\infty$, выполнено условие (0.18) и коэффициенты уравнения (0.1) подчиняются условиям (0.2)–(0.4). Тогда существует единственное обобщенное решение $u(\bar{\mathbf{y}})$ задачи Дирихле для уравнения (0.1) с функционалом $\Phi \in (\dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega))^*$. Для него справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}} \leq \hat{a}^{-1} \|\Phi\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}}. \quad (1.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим билинейную форму $(w, v)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}}$ на гильбертовом пространстве $\dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega)$. Покажем, что $(w, v)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}}$ удовлетворяет теореме Лакса–Мильграма [15]. Очевидно, что для этой формулы выполняется следующее свойство полуторалинейности:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, v)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}} &= \alpha_1 (g_1, v)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}} + \alpha_2 (g_2, v)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}}, \\ (g, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}} &= \bar{\beta}_1 (g, v_1)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}} + \bar{\beta}_2 (g, v_2)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Из (0.3) легко следует свойство положительности этой билинейной формы.

Докажем ограниченность $(w, v)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}}$ в пространстве $\dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega)$. Для этого ввиду (0.2) достаточно показать ограниченность нормы $\|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\mathbb{R}_{n+1}}$. Пусть сначала $q > 0$. Для произвольной $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательности $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ имеем

$$\|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\mathbb{R}_{n+1}}^2 = \sum_{N=-\infty}^{-1} \|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\Pi_{x_0+N}^{x_0+N+1}}^2 + \sum_{N=0}^{\infty} \|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\Pi_{x_N}^{x_{N+1}}}^2.$$

Затем, применяя неравенства (1.4) для $p = i$ при $\Delta = 1$ для первых сумм и $\Delta = \Delta_J$ для вторых сумм, устанавливаем соотношения

$$\|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\mathbb{R}_{n+1}}^2 \leq \tilde{C} \left(\|v\|_{\mathcal{B}, (-\infty, x_0)}^2 + \|v\|_{\Omega^{x_0}}^2 + \sum_{N=0}^{\infty} \left\{ \|v\|_{\mathcal{B}, (x_N, x_{N+1})}^2 + \frac{\|v\|_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}}^2}{\Delta_N^{2[k, q]}} \right\} \right).$$

Используя условие (0.18) и определение (0.14), (0.15) λ -последовательности, выводим

$$\|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\mathbb{R}_{n+1}}^2 \leq \tilde{C} ((1 + \lambda_0^{-1}) \|v\|_{\mathcal{B}, (-\infty, x_0)}^2 + (1 + \theta) \|v\|_{\mathcal{B}, (x_0, \infty)}^2) \leq C_1 \|v\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}}^2.$$

Ограниченность $(w, v)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}}$ в случае $q = 0$ доказывается проще. Возьмем в качестве $\lambda[k, 0, \mathcal{B}]$ -последовательности $x_N = N + 1$, $N = \overline{0, \infty}$. Пользуясь неравенствами (1.4) при $p = i$, $\Delta = 1$, устанавливаем соотношения

$$\|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\mathbb{R}_{n+1}}^2 = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \|T^{\bar{\alpha}} D_x^i v\|_{\Pi_N^{N+1}}^2 \leq C_2 \|v\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}}^2.$$

По теореме Лакса–Мильграма существует единственный линейный оператор S , обладающий ограниченным обратным линейным оператором S^{-1} , такой, что

$$(w, v)_{\mathcal{B}, \mathbb{R}} = (Sw, v)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}}, \quad \|S\| \leq \hat{a}^{-1},$$

для любых $v, w \in \dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega)$.

Согласно теореме Рисса существует единственная функция $w(\bar{\mathbf{y}}) \in \dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству $(w, v)_{\mathcal{B}, \mathbb{R}} = \Phi(v)$ и равенству

$$\|w\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}} = \|\Phi\|_{\mathcal{B}, \mathbb{R}}.$$

Таким образом, для функции $u = Sw \in \dot{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega)$ справедливо интегральное тождество (1.1) и выполняется неравенство (1.15).

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение задачи (0.5), (0.6) вещественное. Действительно, если $u = u_1 + iu_2$, то мнимая часть u_2 удовлетворяет однородному уравнению $\mathcal{L}u_2 = 0$. В силу единственности решения задачи Дирихле $u_2 = 0$.

§ 2. Оценки сверху решений задачи Дирихле для псевдодифференциального уравнения

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Построим срезающую функцию $\xi(x)$. Пусть $h(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ – неубывающая функция, равная нулю и единице при $t \leq 0$ и $t \geq 1$ соответственно. Пусть

$$\hat{a}_i = \max_{t \in [0, 1]} |D^i h(t)|, \quad a_i = 3^i \hat{a}_i, \quad i = \overline{0, \infty}. \quad (2.1)$$

Из теоремы Лагранжа следует, что $\hat{a}_{i+1} \geq \hat{a}_i$, и тем более, что $a_{i+1} \geq a_i$.

Определим дифференциальные полиномы $P_p(\alpha)$ от гладкой функции $\alpha(x)$ при помощи условий $P_0(\alpha) = 1$, $P_p(\alpha) = (D + \alpha)P_{p-1}$. Тогда для $p = \overline{1, \infty}$ имеем

$$P_p(\alpha) = (D + \alpha)^{p-1} \alpha = \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} \alpha^{p_1} (D\alpha)^{p_2} (D^{s-1}\alpha)^{p_s}, \quad (2.2)$$

где $A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s}$ – целые неотрицательные числа.

Положим

$$b_p = \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} a_0^{p_1} a_1^{p_2} \dots a_{s-1}^{p_s}. \quad (2.3)$$

Очевидно, что $b_{p+1} \geq b_p$.

Выберем число $e_* > 1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$C_3(1 + \theta) \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \leq e_* \hat{a}, \quad (2.4)$$

где C_3 – постоянная, определяемая ниже и зависящая только от Ξ .

Зафиксируем натуральное число $N \geq 2$. Рассмотрим кусочно постоянной функцию $\beta(x)$ на промежутке $[x_0, x_{N+1})$ такую, что $\beta(x) = \delta_J$, $x \in [x_J, x_{J+1})$, $J = \overline{0, N}$, причем $\delta_0 = \delta_N = 0$ и $\delta_J^{-1} = e_* \Delta_J$, $J = \overline{1, N-1}$.

Построим функцию $\alpha(x) \leq \beta(x)$, сглаживая функцию $\beta(x)$ по следующему правилу. Если $\delta_{J-1} < \delta_J$, то на отрезке $[x_J, x_J + \Delta_J/3]$ функция $\alpha(x)$ определяется так:

$$\alpha(x) = \delta_{J-1} + (\delta_J - \delta_{J-1}) h\left(\frac{3(x - x_J)}{\Delta_J}\right).$$

Если же $\delta_J > \delta_{J+1}$, то на отрезке $[x_{J+1} - \Delta_J/3, x_{J+1}]$ полагаем

$$\alpha(x) = \delta_J - (\delta_J - \delta_{J+1}) h\left(1 + \frac{3(x - x_{J+1})}{\Delta_J}\right).$$

В оставшихся точках считаем, что $\alpha(x) = \beta(x)$.

Установим оценки интеграла $\int_{x_J}^{x_{J+1}} \alpha(t) dt$, $J = \overline{1, N-1}$. Имеем

$$\frac{1}{3e_*} = \frac{\delta_J \Delta_J}{3} = \int_{x_J + \Delta_J/3}^{x_J + 2\Delta_J/3} \delta_J dt \leq \int_{x_J}^{x_{J+1}} \alpha(t) dt \leq \int_{x_J}^{x_{J+1}} \delta_J dt = \delta_J \Delta_J = \frac{1}{e_*}. \quad (2.5)$$

Очевидно, что во всех случаях производные функции $\alpha(x)$ подчиняются оценкам

$$|D^i \alpha(x)| \leq \left(\frac{3}{\Delta_J}\right)^i \delta_J \max_{t \in [0,1]} |D^i h(t)| \leq \frac{a_i \delta_J}{\Delta_J^i} = \frac{a_i}{e_* \Delta_J^{i+1}} \quad (2.6)$$

при $x \in [x_J, x_{J+1}]$, $J = \overline{1, N-1}$, $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, полиномы $P_p(\alpha)$ удовлетворяют неравенствам

$$|P_p(\alpha)| \leq \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} \left(\frac{a_0}{e_* \Delta_J}\right)^{p_1} \dots \left(\frac{a_{s-1}}{e_* \Delta_J^s}\right)^{p_s} \leq \frac{b_p}{e_* \Delta_J^p}, \quad (2.7)$$

$$x \in [x_J, x_{J+1}], \quad J = \overline{1, N-1}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Определим неубывающую гладкую функцию $\xi(x)$ на $\mathbb{R}$ условиями

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ \xi(x_1)h\left(\frac{x-x_0}{\Delta_0}\right), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \exp\left(-\int_x^{x_N} \alpha(t) dt\right), & x_1 \leq x \leq x_N, \\ 1, & x \geq x_N. \end{cases}$$

На промежутке $[x_1, x_N]$, очевидно, $\xi' = \alpha\xi$, и ввиду (2.5) справедливы неравенства

$$\exp\left(\frac{1}{3e_*}\right) \leq \frac{\xi(x_{J+1})}{\xi(x_J)} \leq \exp\left(\frac{1}{e_*}\right), \quad J = \overline{1, N-1}. \quad (2.8)$$

Перемножая эти неравенства, находим, что $\exp\left(\frac{N-1}{3e_*}\right) \leq \frac{\xi(x_N)}{\xi(x_1)}$ и

$$\xi(x_1) \leq \exp\left(-\frac{N-1}{3e_*}\right). \quad (2.9)$$

Нетрудно доказать, что на промежутке $[x_1, x_N]$ справедливо соотношение

$$D^p \xi = \xi P_p(\alpha), \quad D^p \xi^2 = \xi^2 \sum_{l=0}^p C_p^l P_l(\alpha) P_{p-l}(\alpha), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Далее, пользуясь (2.7), выводим

$$|D^p \xi| \leq \xi \frac{b_p}{e_* \Delta_J^p}, \quad |D^p \xi^2| \leq \xi^2 \frac{2^p b_p^2}{e_* \Delta_J^p}, \quad x \in [x_J, x_{J+1}], \quad (2.10)$$

$$J = \overline{1, N-1}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Оценим производные $D^p \xi$, $D^p \xi^2$, $p = \overline{1, k}$, на отрезке $[x_0, x_1]$. Ввиду (2.1) имеем

$$|D^p \xi(x)| \leq \xi(x_1) \frac{\hat{a}_p}{\Delta_0^p}, \quad |D^p \xi^2(x)| \leq \xi^2(x_1) \frac{2^p \hat{a}_p^2}{\Delta_0^p}, \quad x \in [x_0, x_1], \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Положим в (1.1) $v = u\xi^2(x) \in \mathring{\mathbf{W}}_{\mathcal{B}}(\Omega)$. Так как $\Phi(u\xi^2) \equiv 0$, то получаем равенство

$$(u, u\xi^2)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}} = 0.$$

Используя (0.3), выводим неравенство

$$\hat{a} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx \leq \hat{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\xi^2 \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 - \|\xi u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 \right) dx$$

$$+ \operatorname{Re}(u\xi, u\xi)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}} - \operatorname{Re}(u, u\xi^2)_{\mathcal{G}, \mathbb{R}} = I. \quad (2.12)$$

Оценим интегралы в I с учетом того, что $D^p \xi \equiv 0$, $D^p(\xi^2) \equiv 0$, $p \in \mathbb{N}$, вне промежутка $[x_0, x_N]$. Пользуясь (0.2), выводим неравенство

$$\begin{aligned} I \leq & C_1 \sum_{J=0}^{N-1} \int_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}} \left\{ \sum_{i=q,k} \left(|D_x^i u| \xi \sum_{p=0}^{i-1} |D_x^p u| |D^{i-p} \xi| + \left(\sum_{p=0}^{i-1} |D_x^p u| |D^{i-p} \xi| \right)^2 \right) \right. \\ & + \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} \left(\sum_{p=0}^{i-1} |T^{\bar{\alpha}} D_x^p u| |D^{i-p} \xi| \sum_{p=0}^{j-1} |T^{\bar{\beta}} D_x^p u| |D^{j-p} \xi| \right. \\ & \left. \left. + |T^{\bar{\beta}} D_x^j u| \sum_{p=0}^{i-1} |T^{\bar{\alpha}} D_x^p u| \{ |D^{i-p} \xi| \xi + |D^{i-p} \xi^2| \} \right) \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Для случая $q = 0$ считаем, что сумма $\sum_{i=q,k}$ содержит лишь одно слагаемое при $i = k$.

Используя (2.10) на промежутках $[x_J, x_{J+1}]$, $J = \overline{1, N-1}$, и применяя (2.11) на промежутке $[x_0, x_1]$, устанавливаем, что

$$\begin{aligned} I \leq & C_2 \sum_{J=1}^{N-1} \int_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}} \xi^2 \left[\mu \left(\sum_{i=q,k} |D_x^i u|^2 + \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{S}} |T^{\bar{\alpha}} D_x^i u|^2 \right) \right. \\ & + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=q,k} \sum_{p=0}^{i-1} \frac{|D_x^p u|^2}{e_*^2 \Delta_J^{2(i-p)}} + \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{S}} \sum_{p=0}^{i-1} \frac{|T^{\bar{\alpha}} D_x^p u|^2}{e_*^2 \Delta_J^{2(i-p)}} \right) \Big] dx dy \\ & + C_2 \int_{\Pi_{x_0}^{x_1}} \xi^2(x_1) \left(\sum_{i=q,k} \sum_{p=0}^i \frac{|D_x^p u|^2}{\Delta_0^{2(i-p)}} + \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{S}} \sum_{p=0}^i \frac{|T^{\bar{\alpha}} D_x^p u|^2}{\Delta_0^{2(i-p)}} \right) dx dy, \quad (2.13) \end{aligned}$$

где $\mu \in (0, 1]$ – произвольное число.

Пользуясь неравенствами (1.3), (1.4) с $\Delta = \Delta_J$, применяя определение λ -последовательности (0.15), (0.14), находим для $J = \overline{0, N-1}$, $p = \overline{0, i}$, что

$$\begin{aligned} J'_J &= \frac{\|D_x^p u\|_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}}^2}{\Delta_J^{2(i-p)}} \leq \tilde{C} \left(\|u\|_{\mathcal{B}, (x_J, x_{J+1})}^2 + \frac{\|u\|_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}}^2}{\Delta_J^{2[k, q]}} \right) \\ &\leq \tilde{C}(1 + \theta) \|u\|_{\mathcal{B}, (x_J, x_{J+1})}^2, \quad i = q, k, \quad q > 0, \\ J''_J &= \frac{\|T^{\bar{\alpha}} D_x^p u\|_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}}^2}{\Delta_J^{2(i-p)}} \leq \tilde{C} \left(\|u\|_{\mathcal{B}, (x_J, x_{J+1})}^2 + \frac{\|u\|_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}}^2}{\Delta_J^{2[k, q]}} \right) \\ &\leq \tilde{C}(1 + \theta) \|u\|_{\mathcal{B}, (x_J, x_{J+1})}^2, \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Поэтому из (2.14) для $J = \overline{1, N-1}$, $p = \overline{0, i}$, ввиду (2.8) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{x_J}^{x_{J+1}} \xi^2 \frac{\|D_x^p u\|_{\mathbb{R}_n}^2}{\Delta_J^{2(i-p)}} dx &\leq \tilde{C}(1 + \theta) \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \int_{x_J}^{x_{J+1}} \xi^2 \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx, \\ i = q, k, \quad q > 0, \\ \int_{x_J}^{x_{J+1}} \xi^2 \frac{\|T^{\bar{\alpha}} D_x^p u\|_{\mathbb{R}_n}^2}{\Delta_J^{2(i-p)}} dx &\leq \tilde{C}(1 + \theta) \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \int_{x_J}^{x_{J+1}} \xi^2 \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx, \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Теперь, выбрав $\mu = 1/e_*$ и применив (2.14), (2.15), оценим интеграл I

$$I \leq C_3(1 + \theta) \left[\frac{1}{e_*} \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \int_{x_1}^{x_N} \xi^2 \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx + \xi^2(x_1) \int_{x_0}^{x_1} \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx \right].$$

Используя последнюю оценку и оценку (2.12), выбирая e_* согласно (2.4), заключаем, что

$$\hat{a} \|u\|_{\mathcal{B},(x_N,\infty)}^2 \leq C_4 \xi^2(x_1) \|u\|_{\mathcal{B},(x_0,x_1)}^2.$$

Таким образом, согласно (2.9) и (1.15) установлено неравенство (0.20) с $\kappa = 2/(3e_*) < 2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ввиду (0.27'), (0.27'') для $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательности $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ функции $f(x)$ с $x_0 = 1$ справедливы неравенства

$$\int_{x_J}^{x_{J+1}} \frac{dx}{\phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}} \leq \frac{\Delta_J}{\inf_{[x_J, x_{J+1}]} \phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}} \leq 1, \quad J = \overline{0, \infty}, \quad (2.16)$$

суммируя которые по $J = \overline{0, N}$, получаем, что

$$\int_1^{x_{N+1}} \frac{dx}{\phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}} \leq N + 1. \quad (2.17)$$

Так как $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ функции f является $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью области $\Omega(f)$, то в условиях теоремы 2 справедлива оценка (0.20). Используя (0.20) и (2.17), устанавливаем оценку

$$\int_{x_N}^\infty \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx \leq M e^\kappa \exp\left(-\kappa \int_1^{x_{N+1}} \frac{dx}{\phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}}\right), \quad N \geq 2. \quad (2.18)$$

Выберем произвольное $r \geq x_2$. Зафиксируем N такое, что $r \in [x_N, x_{N+1})$. Из (2.18) выводим соотношение

$$\int_r^\infty \|u(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx \leq M e^\kappa \exp\left(-\kappa \int_1^r \frac{dx}{\phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}}\right).$$

§ 3. О λ -последовательностях

Существование оптимальной $\bar{\lambda}$ -последовательности с произвольным $\bar{x}_0 > 0$ доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [12; § 3] при $q > 0$ в случае дифференциального уравнения. Поэтому здесь рассматривается только случай $q = 0$.

ЛЕММА 3. Пусть a, d, c – такие действительные числа, что

$$0 \leq a < a + d \leq c, \quad \Delta = (0, a) \cup (a + d, c), \quad |\Delta| = c - d.$$

Тогда для любой функции $g(x) \in \mathbf{C}^\infty[0, c]$ при $2c \geq 3d$ справедливы неравенства

$$\int_\Delta |g(x)|^2 dx \leq e_p \int_a^{a+d} |g(x)|^2 dx + 3^p c^{2p} \int_0^c |g_p(x)|^2 dx, \quad p \geq 1, \quad (3.1)$$

где $g_p = D_x^p g$ и числа e_p удовлетворяют неравенствам

$$e_p \leq \bar{e}_p \left(\frac{c}{d} \right)^{2p-1} \quad (3.2)$$

с числами $\bar{e}_p$, зависящими только от p .

Доказательство леммы см. в работе [12].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть числа $0 < z \leq a < b \leq c$ удовлетворяют неравенству $2(c - z) \geq 3(b - a)$. Тогда

$$\lambda^{-1}(z, c) \leq (e_k + 1)\lambda^{-1}(a, b) + 3^k(c - z)^{2k}. \quad (3.3)$$

Если, кроме того,

$$(\bar{e}_k + 1)(b - a)^{1-2k} \leq 3^k(c - z)\lambda(a, b), \quad (3.4)$$

то

$$1 \leq 2 \cdot 3^k(c - z)^{2k}\lambda(z, c). \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим неравенство (3.1) к интервалам $(a, b) \subset (z, c)$ и функции $g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, продолженной нулем вне Ω , в следующем виде:

$$\int_{\Delta} |g(x, \mathbf{y})|^2 dx \leq e_k \int_a^b |g(x, \mathbf{y})|^2 dx + 3^k(c - z)^{2k} \int_z^c |g_k(x, \mathbf{y})|^2 dx, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}_n,$$

где $g_k = D_x^k g$ и $\Delta = (z, a) \cup (b, c)$. После интегрирования по $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$ находим, что

$$\int_{\Omega_z^c} |g(x, \mathbf{y})|^2 dx d\mathbf{y} \leq (e_k + 1) \int_{\Omega_a^b} |g(x, \mathbf{y})|^2 dx d\mathbf{y} + 3^k(c - z)^{2k} \int_{\Omega_z^c} |g_k(x, \mathbf{y})|^2 dx d\mathbf{y}.$$

Применив (0.14), получаем соотношение

$$\int_{\Omega_z^c} |g(x, \mathbf{y})|^2 dx d\mathbf{y} \leq (e_k + 1)\lambda^{-1}(a, b) \int_a^b \|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx + 3^k(c - z)^{2k} \int_z^c \|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx.$$

Тем самым установлено неравенство (3.3). Из него, пользуясь (3.2) и (3.4), выводим (3.5).

Построим специальную $\bar{\lambda}[k, 0, \mathcal{B}]$ -последовательность с $\bar{\theta} \geq 1$ и докажем, что она является оптимальной при $\bar{\theta} \geq 2 \cdot 3^k$.

Сначала докажем неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow r_2} \lambda(r_1, r) \leq \lambda(r_1, r_2). \quad (3.6)$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и ненулевую функцию $g \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ такую, что

$$(\lambda(r_1, r_2) + \varepsilon) \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |g(x, \mathbf{y})|^2 dx d\mathbf{y} \geq \int_{r_1}^{r_2} \|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx.$$

Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, нетрудно установить существование такого $\delta > 0$, что

$$(\lambda(r_1, r_2) + 2\varepsilon) \int_{\Omega_{r_1}} |g(x, \mathbf{y})|^2 dx d\mathbf{y} \geq \int_{r_1}^r \|g(x)\|_{\mathcal{B}}^2 dx$$

при всех r таких, что $|r - r_2| < \delta$. Отсюда следует, что при таких r верно неравенство

$$\lambda(r_1, r) \leq \lambda(r_1, r_2) + 2\varepsilon.$$

Тем самым (3.6) установлено.

Опишем индуктивное построение элементов $\bar{\lambda}[k, 0, \mathcal{B}]$ -последовательности. Пусть построен элемент $\bar{x}_\nu$. Положим

$$\bar{x}_{\nu+1} = \inf \{x > \bar{x}_\nu : 1 \leq \bar{\theta} \lambda(\bar{x}_\nu, x)(x - \bar{x}_\nu)^{2[k, 0]}\}.$$

Множество под знаком $\inf$ при условии $\bar{\theta} \geq 1$ непусто, что следует из (0.17). В силу (3.6) имеем неравенство

$$1 \leq \bar{\theta} \lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})(\bar{x}_{\nu+1} - \bar{x}_\nu)^{2[k, 0]}. \quad (3.7)$$

Кроме того, при любом $c \in (\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$ выполнено противоположное неравенство

$$1 > \bar{\theta} \lambda(\bar{x}_\nu, c)(c - \bar{x}_\nu)^{2[k, 0]}. \quad (3.8)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ – произвольная $\lambda[k, 0, \mathcal{B}]$ -последовательность, $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ – специальная $\bar{\lambda}[k, 0, \mathcal{B}]$ -последовательность с $\bar{\theta} \geq 2 \cdot 3^k$. Тогда найдется число $C(\Xi) > 1$ такое, что справедлива импликация (0.22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить неравенство

$$\bar{x}_{\nu+1} - \bar{x}_\nu \leq C(x_{J+1} - x_J) \quad (3.9)$$

для вложенных отрезков $[x_J, x_{J+1}] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$. Действительно, на промежутке $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ располагается не более $[C]$ целых отрезков $[x_J, x_{J+1}]$ и, возможно, два нецелых отрезка на концах. Отрезок $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$ будет содержать не более $(C+1)N$ отрезков $[x_J, x_{J+1}]$, поэтому будет справедливо (0.22). Для доказательства (3.9) установим неравенство

$$(c - \bar{x}_\nu) \leq C(x_{J+1} - x_J) \quad (3.10)$$

при некотором $c \geq \bar{x}_{\nu+1}$.

Напомним, что $\bar{\theta} \geq 2 \cdot 3^k$. Положим

$$C = \max\left(\frac{3}{2}, \frac{\theta(\bar{e}_k + 1)}{3^k}\right)$$

и выберем число c_1 из равенства

$$\frac{c_1 - \bar{x}_\nu}{x_{J+1} - x_J} = C, \quad (3.11)$$

обеспечивающего (3.10). Если окажется, что $c_1 - \bar{x}_\nu < 1$, то $x_{J+1} - x_J < 1$. В таком случае

$$\frac{3^k(c_1 - \bar{x}_\nu)}{\theta(x_{J+1} - x_J)} \geq \bar{e}_k + 1 \geq \frac{\bar{e}_k + 1}{\theta\lambda(x_J, x_{J+1})(x_{J+1} - x_J)^{2k}}$$

и условие (3.4) выполнено. Положим $c = \max(c_1, x_{J+1})$. Отметим, что для c выполнены условия утверждения 3. Применим утверждение 3 к числам $z = \bar{x}_\nu$, $a = x_J$, $b = x_{J+1}$. Тогда из (3.5) получаем, что точка $\bar{x}_{\nu+1}$ специальной $\bar{\lambda}$ -последовательности должна удовлетворять неравенству $\bar{x}_{\nu+1} \leq c$. Поскольку $x_{J+1} < \bar{x}_{\nu+1}$, то $c = c_1$, и (3.10) справедливо.

Если же окажется $c_1 - \bar{x}_\nu \geq 1$, то из (3.11) следует, что $C(x_{J+1} - x_J) \geq 1$. Положим $c = \bar{x}_\nu + 1 \geq \bar{x}_{\nu+1}$. Утверждение 4 доказано.

§ 4. Примеры λ -последовательностей для трубчатых областей

ЛЕММА 4. Пусть функция $w(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ и равна нулю в окрестности двух полуплоскостей $\Gamma_{a,h}[s] = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x = a, |y_s| > h\}$, $s \in \overline{1, n}$. Если выполнены условия (0.24)–(0.26), то справедливо обобщенное неравенство Фридрихса–Стеклова

$$\int_{\Pi_a^b} |w(x, \mathbf{y})|^2 dx d\mathbf{y} \leq E \left\{ \Delta^{2i} \int_{\Pi_a^b} |D_x^i w|^2 dx d\mathbf{y} + \phi_s^2(h) \int_{\Pi_a^b} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) |F[w]|^2 dx d\mathbf{z} \right\},$$

$$i \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

с некоторой постоянной E , не зависящей от i, s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала для области Π_0^1 и функции $v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$, равной нулю в окрестности множества $\hat{\Gamma}_{0,1}[s]$, докажем неравенство

$$\int_{\Pi_0^1} |v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}} \leq E \left\{ \int_{\Pi_0^1} |D_{\hat{x}}^i v|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}} + \int_{\Pi_0^1} \phi_s^2(|\hat{z}_s|) |F[v]|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{z}} \right\}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Затем, используя растяжение и сдвиг переменных, из (4.2) выведем (4.1).

Возведя в квадрат равенство

$$-g(\xi) = -g(\eta) + \int_\xi^\eta g'(y) dy, \quad \xi \leq \eta,$$

для функции $g(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ несложно установить неравенство

$$g^2(\xi) \leq 2g^2(\eta) + 2(\eta - \xi) \int_\xi^\eta g'^2(y) dy, \quad \xi \leq \eta.$$

Интегрируя последнее неравенство по $\xi \in (0, 1)$ и $\eta \in (1, 2)$, находим, что

$$\int_0^1 g^2(\xi) d\xi \leq 2 \int_1^2 g^2(\eta) d\eta + 4 \int_0^2 g'^2(y) dy.$$

Аналогично,

$$\int_{-1}^0 g^2(\xi) d\xi \leq 2 \int_{-2}^{-1} g^2(\eta) d\eta + 4 \int_{-2}^0 g'^2(y) dy.$$

Применяя два последних неравенства, для функции $v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ устанавливаем соотношение

$$\int_{|\hat{y}_s| < 1} |v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{y}_s \leq 2 \int_{|\hat{y}_s| > 1} |v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{y}_s + 4 \int_{-\infty}^{\infty} |D_{\hat{y}_s} v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{y}_s,$$

интегрируя которое по $\hat{x} \in (0, 1)$ и оставшимся переменным $\hat{y}_j \in \mathbb{R}$, $j \neq s$, получаем

$$\int_{\Pi_0^1, |\hat{y}_s| > 1} |v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}} \geq \frac{1}{4} \int_{\Pi_0^1} |v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}} - \int_{\Pi_0^1} |D_{\hat{y}_s} v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}}. \quad (4.3)$$

Запишем неравенство Стеклова для функции $g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$:

$$\int_0^1 g^2(x) dx \leq \int_0^1 g'^2 dx \leq \int_0^1 (D_x^i g)^2 dx.$$

Отсюда для функции $v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1} \setminus \Gamma_{0,1}[s])$ следует неравенство

$$\int_{\Pi_0^1, |\hat{y}_s| > 1} |v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}} \leq \int_{\Pi_0^1, |\hat{y}_s| > 1} |D_{\hat{x}}^i v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}}. \quad (4.4)$$

Положим $M = \mathcal{B}_s^2(4)c_1^2 c_2^2 / 16$. Из соотношений (4.4), (4.3) получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_0^1} |D_{\hat{x}}^i v|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}} + M \int_{\Pi_0^1} \phi_s^2(|\hat{z}_s|) |F[v]|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{z}} \\ & \geq \int_{\Pi_0^1, |\hat{y}_s| > 1} |v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}} + M \int_{\Pi_0^1} \phi_s^2(|\hat{z}_s|) |F[v]|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{z}} \\ & \geq \int_{\Pi_0^1} \left\{ \frac{1}{4} |v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 - |D_{\hat{y}_s} v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 \right\} d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}} + M \int_{\Pi_0^1} \phi_s^2(|\hat{z}_s|) |F[v]|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Пользуясь равенством $|F[D_{\hat{y}_s} v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})]| = |\hat{z}_s F[v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})]|$ и теоремой Планшереля, запишем равенства

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_n} |v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{\mathbf{y}} &= \int_{\mathbb{R}_n} |F_{\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \hat{\mathbf{z}}}[v]|^2 d\hat{\mathbf{z}}, \\ \int_{\mathbb{R}_n} |D_{\hat{y}_s} v(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{\mathbf{y}} &= \int_{\mathbb{R}_n} \hat{z}_s^2 |F_{\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \hat{\mathbf{z}}}[v]|^2 d\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Используя (4.5), (4.6), выводим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_0^1} |D_{\hat{x}}^i v|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{y}} + M \int_{\Pi_0^1} \phi_s^2(|\hat{z}_s|) |F[v]|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{z}} \\ & \geq \int_{\Pi_0^1} \left\{ \frac{1}{4} - \hat{z}_s^2 + M \phi_s^2(|\hat{z}_s|) \right\} |F[v]|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Далее для любого $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}_n$ докажем следующую оценку снизу:

$$\frac{1}{4} - \hat{z}_s^2 + M\phi_s^2(|\hat{z}_s|) > \frac{3}{16}. \quad (4.8)$$

Применяя условия (0.24), (0.25), устанавливаем соотношения

$$M\phi_s^2(|\hat{z}_s|) = \frac{M}{\mathcal{B}_s^2(1/|\hat{z}_s|)} \geq \frac{M}{c_1^2 \mathcal{B}_s^2(4) \mathcal{B}_s^2(1/(4|\hat{z}_s|))} \geq \frac{16M\hat{z}_s^2}{c_1^2 c_2^2 \mathcal{B}_s^2(4)} = \hat{z}_s^2, \quad |\hat{z}_s| \geq \frac{1}{4}.$$

Отсюда следует справедливость (4.8) при $|\hat{z}_s| \geq 1/4$. В случае, когда $|\hat{z}_s| < 1/4$, имеем неравенство

$$\frac{1}{4} - |\hat{z}_s|^2 + M\phi_s^2(|\hat{z}_s|) > \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Тем самым (4.6) установлено. Используя (4.7), (4.8) и (4.6), выводим неравенство (4.2).

Положим

$$x = a + \Delta \hat{x}, \quad \mathbf{y} = h \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{z} = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{h}, \quad w(x, \mathbf{y}) = v\left(\frac{x-a}{\Delta}, \frac{\mathbf{y}}{h}\right).$$

Легко проверить справедливость следующего равенства:

$$F_{\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \hat{\mathbf{z}}}[v]\left(\frac{x-a}{\Delta}, \hat{\mathbf{z}}\right) = h^{-n} F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[w](x, \mathbf{z}).$$

Поэтому

$$\int_{\Pi_0^1} \phi_s^2(|\hat{z}_s|) |F_{\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \hat{\mathbf{z}}}[v]|^2 d\hat{x} d\hat{\mathbf{z}} = \int_{\Pi_a^b} \phi_s^2(|z_s|h) |F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[w]|^2 \frac{dx}{\Delta} \frac{d\mathbf{z}}{h^n}. \quad (4.9)$$

Так как ввиду (0.24), (0.26)

$$\phi_s(|z_s|h) = \frac{1}{\mathcal{B}_s(1/|z_s|h)} \leq \frac{c_1 \mathcal{B}_s(|z_s|)}{\mathcal{B}_s(1/h)} \leq c_1 \phi_s(h) \mathcal{B}(\mathbf{z}), \quad s = \overline{1, n},$$

то (4.1) следует из (4.2), (4.9).

Для каждого $s = \overline{1, n}$, рассмотрим область типа слоя

$$\Omega[f, s] = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x > d, |y_s| < f(x)\} \quad (4.10)$$

с положительной функцией $f(x)$ ($d \in (-\infty, 0]$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть существует число $\omega_1 \geq 1$ такое, что положительная функция $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, и возрастающая последовательность положительных чисел $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ удовлетворяют при $J = \overline{0, \infty}$ одному из условий

$$\inf_{[x_J, x_{J+1}]} \phi(f(x)) \leq \omega_1 \Delta_J^{[k, q]}, \quad \omega_1 \geq 1, \quad (4.11)$$

$$q = 0, \quad \Delta_J = 1 \quad (4.12)$$

и для функции $\mathcal{B}(\mathbf{z})$ справедливы неравенства (0.24)–(0.26). Тогда последовательность $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ является $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью для области $\Omega(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторого J выполнено условие (4.11). Обозначим через $\hat{x} = \hat{x}_J$ любую точку отрезка $[x_J, x_{J+1}]$ такую, что

$$\inf_{[x_J, x_{J+1}]} f(x) = f(\hat{x}_J).$$

Тогда согласно условию (4.11) имеем

$$\phi(f(\hat{x}_J)) \leq \omega_1 \Delta_J^{[k,q]}. \quad (4.13)$$

Пусть $\phi(f(\hat{x}_J)) = \phi_{s^*}(f(\hat{x}_J))$. Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_J}^{x_{J+1}}[f, s^*] = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x_J < x < x_{J+1}, |y_{s^*}| < f(x)\}.$$

Функцию $g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega[f, s^*])$ продолжим на все $\mathbb{R}_{n+1}$ нулем за пределы $\Omega[f, s^*]$. Предположим сначала, что $\Delta_J < 1$. Воспользовавшись неравенством (4.1) для $\Pi_{x_J}^{\hat{x}_J}$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_{x_J}^{\hat{x}_J}} |g(x, \mathbf{y})|^2 dx d\mathbf{y} \\ & \leq E \left\{ \Delta_J^{2k} \int_{\Pi_{x_J}^{\hat{x}_J}} |D_x^k g|^2 dx d\mathbf{y} + \phi^2(f(\hat{x}_J)) \int_{\Pi_{x_J}^{\hat{x}_J}} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) |F[g]|^2 dx d\mathbf{z} \right\}. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство справедливо для $\Pi_{\hat{x}_J}^{x_{J+1}}$. Сложив два неравенства и воспользовавшись (4.13), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{x_J}^{x_{J+1}}[f, s^*]} |g(x, \mathbf{y})|^2 dx d\mathbf{y} \\ & \leq \omega_1^2 E \Delta_J^{2k} \left\{ \int_{\Omega_{x_J}^{x_{J+1}}[f, s^*]} |D_x^k g|^2 dx d\mathbf{y} + \int_{\Pi_{x_J}^{x_{J+1}}} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) |F[g]|^2 dx d\mathbf{z} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$1 \leq E \omega_1^2 \Delta_J^{2k} \lambda(x_J, x_{J+1}; \Omega[f, s^*]).$$

Аналогично, при $\Delta_J \geq 1$ установим неравенство

$$1 \leq E \omega_1^2 \Delta_J^{2q} \lambda(x_J, x_{J+1}; \Omega[f, s^*]).$$

Отметим, что в случае $q = 0$ последнее неравенство следует из (0.17). Таким образом, имеем оценку

$$1 \leq E \omega_1^2 \Delta_J^{2[k,q]} \lambda(x_J, x_{J+1}; \Omega[f, s^*]).$$

Заметим теперь, что если $\Omega' \subset \Omega$, то $\lambda(a, b; \Omega) \leq \lambda(a, b; \Omega')$. Это следует из того, что для Ω' сужается множество, по которому берется инфимум в (0.14). Ввиду вложения $\Omega(f) \subset \Omega[f, s^*]$ последовательность $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ является λ -последовательностью области $\Omega(f)$. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. Очевидно, $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность удовлетворяет одному из условий (4.11) или (4.12) с $\omega_1 = 1$. Согласно утверждению 5 $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность функции $f(x)$ является $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью области вращения $\Omega(f)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для Π -последовательности $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ с $x_0 = 1$ функции

$$f_b(x) = \max(1, x^b), \quad b \in (0, 1),$$

из (0.27'') получаем равенства

$$x_{J+1} - x_J = \min_{[x_J, x_{J+1}]} f_b(x) = x_J^b, \quad J = \overline{0, \infty}. \quad (4.14)$$

Пользуясь (4.14), выводим соотношения

$$\frac{\Delta_{J+1}}{\Delta_J} = \left(\frac{x_{J+1}}{x_J} \right)^b = \left(1 + \frac{\Delta_J}{x_J} \right)^b = \left(1 + x_J^{b-1} \right)^b \leq 2^b, \quad J = \overline{0, \infty}. \quad (4.15)$$

Поэтому если рассматривать область $\tilde{Q}_a$, определенную во введении, как область вращения с некоторой функцией $\tilde{f}_a(x)$, то

$$\inf_{[x_J, x_{J+1}]} \tilde{f}_a(x) \leq x_{J+1}^b = \left(\frac{x_{J+1}}{x_J} \right)^b x_J^b \leq 2^b (x_{J+1} - x_J).$$

Следовательно, Π -последовательность функции f_b удовлетворяет условию (4.11) и согласно утверждению 5 является λ -последовательностью для областей $\tilde{Q}_a = \Omega(\tilde{f}_a)$, $Q_b = \Omega(f_b)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если выполнены условия (0.2''), (0.8) и (0.19), то для решения задачи (0.5''), (0.6') в области $\tilde{Q}_a$ справедлива оценка (0.34).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ — Π -последовательность с $x_0 = 1$ функции $f_b(x)$. По следствию 2 последовательность $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ является λ -последовательностью как для области $Q_b = \Omega(f_b)$, так и для области $\tilde{Q}_a = \Omega(\tilde{f}_a)$. Поэтому, взяв ее в качестве λ -последовательности, по теореме 1 получим оценку (0.21), выполняющуюся как для области Q_b , так и для области $\tilde{Q}_a$:

$$\int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(\tilde{f}_a)} u^2(\bar{y}) d\bar{y} \leq M' \Delta_N^2 \exp(-\kappa N) = M' \Delta_N^2 e^\kappa \exp(-\kappa(N+1)), \quad N \geq 2. \quad (4.16)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $8\varepsilon b < \kappa$, и номер $N_0 \geq 2$ такой, что $x_{N_0}^{b-1} < \varepsilon$. Из (4.15) следуют неравенства

$$\Delta_N \leq (1 + \varepsilon)^{Nb} \Delta_0, \quad N \geq N_0. \quad (4.17)$$

Выберем произвольное $r \geq x_{N_0}$ и зафиксируем N такое, что $r \in [x_N, x_{N+1})$. Поскольку $\Delta_N \geq 1$, то $r + 1 < x_{N+2}$. Пользуясь неравенствами (4.16), (4.17), очевидным неравенством $\ln(1 + \varepsilon) < 2\varepsilon$ и (0.31b), несложно установить соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r^{r+1}(\tilde{f}_a)} u^2(\bar{y}) d\bar{y} &\leq \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+2}}(\tilde{f}_a)} u^2(\bar{y}) d\bar{y} \leq C_1 \exp((2b \ln(1 + \varepsilon) - \kappa)(N + 1)) \\ &\leq C_1 \exp\left(-\frac{\kappa}{2}(N + 1)\right) \leq C_1 \exp(-C_2 x_{N+1}^{1-b}) \\ &\leq C_1 \exp(-C_2 r^{1-b}). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Для функции $\rho^{[a,b]}$ приведем некоторые неравенства, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\text{если } \rho \leq \varrho, \quad \text{то } \rho^{[a,b]} \leq \varrho^{[a,b]}; \quad (4.18)$$

$$\text{если } c \geq 1, \quad \text{то } (c\rho)^{[a,b]} \leq \rho^{[a,b]} c^{\max(a,b)}. \quad (4.19)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Если выполнены условия (0.25)–(0.26), (0.29)–(0.30), то $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательность $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ функции $f(x)$ является оптимальной $\bar{\lambda}[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательностью для $\Omega(f)$ и для нее справедливы соотношения (0.31), (0.32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\hat{x}_\nu$ любую точку отрезка $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ такую, что $\inf_{[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]} f(x) = f(\hat{x}_\nu)$. Из определения $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательности функции f имеем либо неравенство

$$\phi(f(\hat{x}_\nu)) \leq \bar{\Delta}_\nu^{[k,q]},$$

либо равенства

$$q = 0, \quad \bar{\Delta}_\nu = 1.$$

Пользуясь (4.18), устанавливаем, что в любом случае выполнено соотношение

$$\phi(f(\hat{x}_\nu))^{[1/k, \sigma(q)]} \leq \bar{\Delta}_\nu. \quad (4.20)$$

Применяя (0.30), находим вблизи $\hat{x}_\nu$ точку $\bar{x}_\nu^* \in [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ такую, что

$$f(\bar{x}_\nu^*) \leq \omega f(\hat{x}_\nu). \quad (4.21)$$

Согласно определениям $\Pi[k, q, \phi(r)]$ -последовательности (0.27'), (0.27'') справедливо неравенство

$$\bar{\Delta}_\nu^{[k,q]} \leq \phi(f(\bar{x}_\nu^*)), \quad (4.22)$$

которое можно переписать в виде

$$\bar{\Delta}_\nu \leq \phi(f(\bar{x}_\nu^*))^{[1/k, \sigma(q)]}. \quad (4.23)$$

Следствием неравенства (0.24) является следующая оценка:

$$\phi(\alpha r) = \frac{1}{\max_{s=\overline{1,n}} \mathcal{B}_s(1/\alpha r)} \leq c_1 \frac{\max_{s=\overline{1,n}} \mathcal{B}_s(\alpha)}{\max_{s=\overline{1,n}} \mathcal{B}_s(1/r)} \leq c(\alpha) \phi(r), \quad (4.24)$$

$$\alpha > 0, \quad c(\alpha) \geq 1.$$

Используя (4.21) и (4.22), при помощи (4.24) выводим соотношение

$$\bar{\Delta}_\nu^{[k,q]} \leq c(\omega) \phi(f(\hat{x}_\nu)). \quad (4.25)$$

Соотношения (4.23), (4.21), (4.18), (4.24) и (4.19) приводят к оценке

$$\bar{\Delta}_\nu \leq c(\omega)^{\max(1/k, \sigma(q))} \phi(f(\hat{x}_\nu))^{[1/k, \sigma(q)]}. \quad (4.26)$$

Пользуясь (4.23), из неравенства (0.30) при $x = \bar{x}_\nu^*$ находим, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [\bar{x}_\nu^* - \bar{\Delta}_\nu, \bar{x}_\nu^* + \bar{\Delta}_\nu]\} \leq \omega f(\bar{x}_\nu^*).$$

Поскольку справедливы включения $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}] \subset [\bar{x}_\nu^* - \bar{\Delta}_\nu, \bar{x}_\nu^* + \bar{\Delta}_\nu]$, то ввиду (4.21) имеем

$$f(\hat{x}_\nu) \leq f(x) \leq \omega f(\bar{x}_\nu^*) \leq \omega^2 f(\hat{x}_\nu), \quad x \in [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]. \quad (4.27)$$

Для любого отрезка $[a, b] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ докажем неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1}{\phi(f(\hat{x}_\nu))^2} &\leq \lambda(a, b; \Omega(f)) \leq \frac{\delta_2}{\phi(f(\hat{x}_\nu))^2}, & q > 0, \\ \frac{\delta_1}{\phi(f(\hat{x}_\nu))^{[2,0]}} &\leq \lambda(a, b; \Omega(f)) \leq \frac{\delta_2}{\phi(f(\hat{x}_\nu))^{[2,0]}}, & q = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

с некоторыми числами $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, не зависящими от ν .

Для доказательства левых неравенств используем лемму 4. Согласно определению (0.14) имеем

$$\begin{aligned} \lambda(a, b; \Omega(f)) &= \inf_{g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega(f))} \frac{\int_{\Pi_a^b} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) |F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[g]|^2 dx d\mathbf{z} + \int_{\Pi_a^b} \{|D_x^k g|^2 + |D_x^q g|^2\} dx d\mathbf{y}}{\int_{\Pi_a^b} |g|^2 dx d\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Пользуясь (4.25), (4.1) и применяя (4.27), из (4.29) при $q > 0$ получаем

$$\lambda(a, b; \Omega(f)) \geq \frac{1}{Ec^2(\omega) \phi_s^2(f(a))} \geq \frac{1}{Ec^2(\omega) \phi_s^2(\omega^2 f(\hat{x}_\nu))}, \quad s = \overline{1, n}.$$

Если же $q = 0$, то из (4.29) точно так же выводим

$$\lambda(a, b; \Omega(f)) \geq \frac{1}{Ec^2(\omega) \phi_s^2(f(a))} + 1 \geq \frac{1}{Ec^2(\omega) \phi_s^2(\omega^2 f(\hat{x}_\nu))} + 1, \quad s = \overline{1, n}.$$

Выбирая $s = s^*$ так, чтобы $\phi(\omega^2 f(\hat{x}_\nu)) = \phi_{s^*}(\omega^2 f(\hat{x}_\nu))$, и применяя (4.24), получим оценки слева в формуле (4.28) при $q \geq 0$.

Чтобы доказать неравенство справа в (4.28), положим $h = f(\hat{x}_\nu)$. Тогда при $[a, b] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ справедливы неравенства

$$\lambda(a, b; \Omega(f)) \leq \lambda(a, b; \Omega(h)).$$

Нетрудно показать, что при $q > 0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \lambda(a, b; \Omega(h)) &= \inf_{g(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega(h))} \frac{\int_{\Pi_a^b} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) |F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[g]|^2 dx d\mathbf{z}}{\int_{\Pi_a^b} |g|^2 dx d\mathbf{y}} \\ &= \inf_{g(\mathbf{y}) \in \mathbf{C}_0^\infty(B(h, (0, 0)))} \frac{\int_{\mathbb{R}_n} \mathcal{B}^2(\mathbf{z}) |F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[g]|^2 d\mathbf{z}}{\int_{\mathbb{R}_n} |g|^2 d\mathbf{y}} \equiv H(h). \end{aligned}$$

Здесь и ниже через $B(R, \bar{\mathbf{y}})$ обозначен шар радиуса R с центром в точке $\bar{\mathbf{y}}$. Совершая замену переменных $\mathbf{y} = h\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{z} = \hat{\mathbf{z}}/h$, полагая $w(\hat{\mathbf{y}}) = g(\mathbf{y})$ и применяя (0.29), оценим величину $H(h)$:

$$\begin{aligned} H(h) &= \inf_{w(\hat{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(B(1, (0, 0)))} \frac{\int_{\mathbb{R}_n} \mathcal{B}^2(\hat{\mathbf{z}}/h) |F_{\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \hat{\mathbf{z}}} [w]|^2 d\hat{\mathbf{z}}}{\int_{\mathbb{R}_n} |w|^2 d\hat{\mathbf{y}}} \\ &\leq \frac{c_3^2}{\phi^2(h)} \inf_{w(\hat{\mathbf{y}}) \in \mathbf{C}_0^\infty(B(1, (0, 0)))} \frac{\int_{\mathbb{R}_n} \mathcal{B}^2(\hat{\mathbf{z}}) |F_{\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \hat{\mathbf{z}}} [w]|^2 d\hat{\mathbf{z}}}{\int_{\mathbb{R}_n} |w|^2 d\hat{\mathbf{y}}} = \frac{\delta}{\phi^2(f(\hat{x}_\nu))}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $q > 0$ правое неравенство (4.28) установлено. При $q = 0$ заметим, что

$$\lambda(a, b; \Omega(h)) = H(h) + 1 \leq 1 + \frac{\delta}{\phi^2(f(\widehat{x}_\nu))} \leq \frac{\delta + 1}{\phi^{[2,0]}(f(\widehat{x}_\nu))}.$$

Тем самым (4.28) установлено при $q \geq 0$.

Пусть $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ – произвольная $\lambda[k, q, \mathcal{B}]$ -последовательность. Для вложенных отрезков $[x_J, x_{J+1}] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ из определения (0.15) λ -последовательности и неравенств (4.28), (4.25) следуют соотношения

$$\Delta_J^{2[k,q]} \geq \frac{1}{\theta \lambda(x_J, x_{J+1})} \geq \frac{\phi^{2[1,\sigma(q)q]}(f(\widehat{x}_\nu))}{\theta \delta_2} \geq \frac{\bar{\Delta}_\nu^{2[k,q]}}{\theta \delta_2 c^2(\omega)}.$$

Отсюда находим, что $\bar{\Delta}_\nu \leq C \Delta_J$. Таким образом, для рассматриваемой П-последовательности $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ и произвольной λ -последовательности $\{x_J\}_{J=0}^\infty$ справедливо неравенство (3.9). Далее, повторяя рассуждения утверждения 4, устанавливаем импликацию (0.22). Таким образом, доказана оптимальность последовательности $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$.

Левое неравенство (0.31) является следствием оценки (2.17). Докажем правое неравенство (0.31). Применяя (4.27), (4.24), (4.20), выводим следующую цепочку неравенств:

$$\int_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_{\nu+1}} \frac{dx}{\phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}} \geq \frac{\delta_3 \bar{\Delta}_\nu}{\phi(f(\widehat{x}_\nu))^{[1/k, \sigma(q)]}} \geq \delta_3, \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

Просуммировав последние неравенства, устанавливаем соотношение

$$\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_N} \frac{dx}{\phi(f(x))^{[1/k, \sigma(q)]}} \geq \delta_3 N.$$

Правое неравенство (0.31) является следствием последней оценки при $\bar{x}_0 \geq 1$.

Очевидно, справедливы неравенства $f(\widehat{x}_{\nu+1}) \leq f(\bar{x}_{\nu+1})$, поэтому из (4.27) имеем

$$f(\widehat{x}_{\nu+1}) \leq \omega^2 f(\widehat{x}_\nu), \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

Легко видеть, что верны и симметричные неравенства

$$f(\widehat{x}_\nu) \leq \omega^2 f(\widehat{x}_{\nu+1}), \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

Используя неравенства (4.20), (4.26), (4.24), (4.18), (4.19), оцениваем отношения:

$$\bar{\omega}^{-1} \leq \frac{\bar{\Delta}_{\nu+1}}{\bar{\Delta}_\nu} \leq \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} \geq 1, \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

Неравенства (0.32) установлены.

§ 5. Оценки снизу решений эллиптического уравнения второго порядка

Доказательство теорем 3, 4 основано на неравенстве Гарнака (см., например, [16], [17]) для решения уравнения

$$\sum_{i,j=0}^n (a_{ij}(\bar{\mathbf{y}})u_{y_i})_{y_j} = 0. \quad (0.5''')$$

Сформулируем неравенство Гарнака в удобном для нас частном виде: для неотрицательного решения $u(\bar{\mathbf{y}})$ уравнения (0.5''') в шаре $B(2\rho, \bar{\mathbf{w}})$, $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}_{n+1}$, справедливо неравенство

$$\max_{B(\rho, \bar{\mathbf{w}})} u(\bar{\mathbf{y}}) \leq \bar{H} \min_{B(\rho, \bar{\mathbf{w}})} u(\bar{\mathbf{y}}), \quad (5.1)$$

в котором постоянная $\bar{H} \geq 1$ зависит лишь от n , $\bar{a}$, $\hat{a}$.

ЛЕММА 5. Пусть

$$Q_\rho = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid 0 < x < 1, |\mathbf{y}| < \rho\},$$

$$\hat{Q} = Q_1 \cup B(2\rho, (0, \mathbf{0})) \cup B(2\rho, (1, \mathbf{0})), \quad \rho = \frac{1}{2\bar{\omega}}.$$

Тогда существует $\hat{H} \geq 1$ такое, что неотрицательное решение $u(x, \mathbf{y})$ уравнения (0.5''') в $\hat{Q}$ удовлетворяет неравенству

$$u(0, \mathbf{0}) \leq \hat{H} \inf_{\bar{Q}_\rho} u(\bar{\mathbf{y}}). \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку $(x^*, \mathbf{y}^*) \in Q_\rho$. Рассмотрим последовательность касающихся шаров $B(\rho, \bar{\mathbf{w}}_j)$, $\bar{\mathbf{w}}_j = (x^* - 2\rho j, \mathbf{0})$, $j = \bar{0}, \infty$. Точки касания шаров обозначим через $\bar{\mathbf{v}}_j = (x^* - \rho - 2\rho j, \mathbf{0})$, $j = \bar{0}, \infty$. Зафиксируем минимальное целое неотрицательное число s такое, что

$$\bar{B}(\rho, (0, \mathbf{0})) \cap \bar{B}(\rho, \bar{\mathbf{w}}_s) \neq \emptyset.$$

Поскольку шары $B(2\rho, \bar{\mathbf{w}}_j)$ лежат в $\hat{Q}$, $j = \bar{0}, s$, и $B(2\rho, (0, \mathbf{0})) \subset \hat{Q}$, то согласно неравенству (5.1) имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} u(0, \mathbf{0}) &\leq \max_{\bar{B}(\rho, (0, \mathbf{0}))} u(\bar{\mathbf{y}}) \leq \bar{H} \min_{\bar{B}(\rho, (0, \mathbf{0}))} u(\bar{\mathbf{y}}) \\ &\leq \bar{H} u(\bar{\mathbf{v}}_s) \leq \dots \leq \bar{H}^s u(\bar{\mathbf{v}}_0) \leq \bar{H}^{s+1} u(x^*, \mathbf{y}^*). \end{aligned}$$

Тем самым, неравенство (5.2) установлено, так как $s \leq 1/(2\rho) = \bar{\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем соотношения (0.33). Ввиду неравенств (0.32) и определения II-последовательности имеем включения

$$(x_J, \mathbf{0}) + (x_{J+1} - x_J)\hat{Q} \subset \Omega(f), \quad J = \bar{1}, \infty, \quad (5.3)$$

где левую часть следует понимать как гомотетию и параллельный перенос, примененные к $\hat{Q}$. По лемме 5 для пар $(x_J, \mathbf{0})$, $(x_{J+1}, \mathbf{0})$ при $\rho_J = (x_{J+1} - x_J)/(2\bar{\omega})$, $J = \bar{1}, \infty$, справедливы неравенства

$$u(x_J, \mathbf{0}) \leq \hat{H} \inf_{(x_J, \mathbf{0}) + \Delta_J \bar{Q}_{\rho_J}} u(\bar{\mathbf{y}}) \leq \hat{H} u(x_{J+1}, \mathbf{0}). \quad (5.4)$$

Применяя их N раз, выводим соотношения

$$u(x_1, \mathbf{0}) \leq \hat{H}^N \inf_{(x_N, \mathbf{0}) + \Delta_N \bar{Q}_{\rho_N}} u(\bar{\mathbf{y}}) \leq \hat{H}^N u(x_{N+1}, \mathbf{0}), \quad N \geq 1. \quad (5.5)$$

Далее, пользуясь последним неравенством, несложно установить соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(f)} u^2(\bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} &\geq \int_{(x_N, \mathbf{0}) + \Delta_N \bar{Q}_{\rho_N}} u^2(\bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} \\ &\geq C_1 \inf_{(x_N, \mathbf{0}) + \Delta_N \bar{Q}_{\rho_N}} u^2(\bar{\mathbf{y}}) \rho_N^n \Delta_N \geq C_1 \hat{H}^{-2N} u^2(x_1, \mathbf{0}) \frac{\Delta_N^{n+1}}{(2\bar{\omega})^n}. \end{aligned}$$

Применяя (0.32), находим, что

$$\rho_N \geq \rho_0 \bar{\omega}^{-N} = \frac{x_1 - x_0}{2} \bar{\omega}^{-N-1}, \quad \Delta_N \geq \Delta_0 \bar{\omega}^{-N} = (x_1 - x_0) \bar{\omega}^{-N}. \quad (5.6)$$

В итоге установим неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(f)} u^2(\bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} &\geq \mu' \exp(-N \ln(\bar{\omega}^{n-1} \hat{H}^2)) \Delta_N^2 \\ &\geq \mu' (x_1 - x_0)^2 \exp(-N \ln(\bar{\omega}^{n+1} \hat{H}^2)). \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ – П-последовательность функции $f(x)$. Как установлено в утверждении 7, условие (0.30) для функции $f(x)$ достаточно для выполнения неравенств (0.31), (0.32), поэтому условия теоремы 3 выполнены. Выберем произвольное $r \geq x_1$ и зафиксируем $N \geq 1$ такое, что $r \in [x_N, x_{N+1})$. Пусть сначала $r + 1 < x_{N+2}$. Положим $\tilde{\rho}_N = \min(\rho_N, \rho_{N+1})$. Пользуясь неравенством (5.5), несложно установить соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r^{r+1}(f)} u^2(\bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} &\geq \int_{(r, r+1) \times \{|\mathbf{y}| < \tilde{\rho}_N\}} u^2(\bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} \geq C_1 \inf_{(r, r+1) \times \{|\mathbf{y}| < \tilde{\rho}_N\}} u^2(\bar{\mathbf{y}}) \tilde{\rho}_N^n \\ &\geq C_1 \inf_{\{(x_N, \mathbf{0}) + \Delta_N \bar{Q}_{\rho_N}\} \cup \{(x_{N+1}, \mathbf{0}) + \Delta_{N+1} \bar{Q}_{\rho_{N+1}}\}} u^2(\bar{\mathbf{y}}) \tilde{\rho}_N^n \\ &\geq C_1 \hat{H}^{-2N-2} u^2(x_1, \mathbf{0}) \tilde{\rho}_N^n. \end{aligned}$$

Пусть теперь $r + 1 \geq x_{N+2}$. Применяя неравенства (5.5), (5.6), можно получить соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r^{r+1}(f)} u^2(\bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} &\geq \int_{(x_{N+1}, \mathbf{0}) + \Delta_{N+1} \bar{Q}_{\rho_{N+1}}} u^2(\bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} \\ &\geq C_1 \inf_{(x_{N+1}, \mathbf{0}) + \Delta_{N+1} \bar{Q}_{\rho_{N+1}}} u^2(\bar{\mathbf{y}}) \rho_{N+1}^n \Delta_{N+1} \\ &\geq C_2 \hat{H}^{-2N-2} \bar{\omega}^{-N-1} u^2(x_1, \mathbf{0}) \rho_{N+1}^n. \end{aligned}$$

Таким образом, для обоих случаев справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_r^{r+1}(f)} u^2(\bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} \geq \bar{\omega}^{-N-1} C_3 \hat{H}^{-2N-2} u^2(x_1, \mathbf{0}) \min\{\rho_N, \rho_{N+1}\}^n. \quad (5.7)$$

Пользуясь (5.6), (0.31) при $k = q = 1$, $\phi(r) = r$, из (5.7) выводим неравенство

$$\int_{\Omega_{r^{+1}}(f)} u^2(\bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} \geq C_4 \exp(-N \ln(\bar{\omega}^n \hat{H}^2)) \geq \tilde{\mu} \exp\left(-\tilde{K} \int_1^{x_N} \frac{dx}{f(x)}\right).$$

Теорема 4 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову и А. К. Гущину за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Список литературы

- [1] М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Псевдодифференциальные операторы*, Наука, М., 1968.
- [2] Г. И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*, Наука, М., 1973; англ. пер.: G. I. Eskin, *Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations*, Transl. Math. Monogr., **52**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1981.
- [3] В. П. Михайлов, “О первой краевой задаче для одного класса гипоеллиптических уравнений”, *Матем. сб.*, **63(105)**:2 (1964), 238–264.
- [4] В. П. Михайлов, “Первая краевая задача для некоторых полуограниченных гипоеллиптических уравнений”, *Матем. сб.*, **64(106)**:1 (1964), 10–51.
- [5] А. К. Гущин, “Некоторые свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **189**:7 (1998), 53–90; англ. пер.: A. K. Gushchin, “Some properties of the solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation”, *Sb. Math.*, **189**:7 (1998), 1009–1045.
- [6] А. К. Гущин, “О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка”, *Сиб. матем. журн.*, **46**:5 (2005), 1036–1052; англ. пер.: A. K. Gushchin, “On the interior smoothness of solutions to second-order elliptic equations”, *Siberian Math. J.*, **46**:5 (2005), 826–840.
- [7] В. П. Михайлов, “О существовании граничного значения у бигармонических функций”, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 81–94; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “Existence of boundary values for biharmonic functions”, *Sb. Math.*, **195**:12 (2004), 1781–1793.
- [8] В. П. Михайлов, “О существовании граничного значения у полигармонической функции”, *Сиб. матем. журн.*, **46**:5 (2005), 1125–1137; англ. пер.: V. P. Mikhailov, “Existence of the boundary value of a polyharmonic function”, *Siberian Math. J.*, **46**:5 (2005), 902–912.
- [9] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей”, *Матем. сб.*, **112(154)**:4(8) (1980), 588–610; англ. пер.: O. A. Oleĭnik, G. A. Iosif’jan, “On the behavior at infinity of solutions of second order elliptic equations in domains with noncompact boundary”, *Math. USSR-Sb.*, **40**:4 (1981), 527–548.
- [10] Е. М. Ландис, Г. П. Панасенко, “Об одном варианте типа Фрагмена–Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **5**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 105–136; англ. пер.: E. M. Landis, G. P. Panasenko, “A variant of a Phragmén–Lindelöf theorem for elliptic equations with coefficients that are periodic functions of all variables except one”, *Topics in modern mathematics, Petrovskii Semin.*, **5** (1985), 133–172.

- [11] В. А. Кондратьев, И. Копачек, Д. М. Леквеишвили, О. А. Олейник, “Неулучшаемые оценки в пространствах Гёльдера и точный принцип Сен-Венана для решения бигармонического уравнения”, Тр. МИАН, **166**, Наука, М., 1984, 91–106; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, J. Kopachek, D. M. Lekveishvili, O. A. Olejnik, “Sharp estimates in Hölder spaces and precise Saint-Venant principle for solutions of the biharmonic equation”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **166** (1986), 97–116.
- [12] Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения”, *Матем. сб.*, **196**:7 (2005), 67–100; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Stabilization of a solution of the first mixed problem for a quasi-elliptic evolution equation”, *Sb. Math.*, **196**:7 (2005), 999–1032.
- [13] Л. М. Кожевникова, “Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006), 93–128; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Anisotropic classes of uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for quasi-elliptic equations”, *Izv. Math.*, **70**:6 (2006), 1165–1200.
- [14] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, 2-е изд., Наука, М., 1983; англ. пер. 1-го изд.: V. P. Mikhailov, *Partial differential equations*, Mir, М., 1978.
- [15] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg; Academic Press, New York, 1965.
- [16] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural’ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [17] J. Moser, “On Harnack’s theorem for elliptic differential equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**:3 (1961), 577–591.

Л. М. Кожевникова (L. M. Kozhevnikova)

Стерлитамакская государственная
педагогическая академия;
Стерлитамакский филиал АН РБ
E-mail: kosul@mail.ru

Поступила в редакцию
27.11.2007 и 17.02.2008