Общероссийский математический портал

В. С. Белоносов, Классические решения квазиэллиптических уравнений, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 9, 21–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:12:17

УДК 517.95

В. С. Белоносов

Классические решения квазиэллиптических уравнений

В статье построены фундаментальные решения квазиэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. Это позволило развить соответствующую теорию объемных потенциалов, установить оценки гёльдеровских норм решений для уравнений с постоянными коэффициентами, а затем распространить их на уравнения с переменными коэффициентами. В итоге получены точные внутренние оценки шаудеровского типа, частными случаями которых являются известные классические результаты для эллиптических и параболических уравнений.

Библиография: 12 названий.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное n -мерное пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_n)$. Скалярное произведение векторов x и y из $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через xy , а евклидову норму вектора x – через $\|x\|$. Символ D_i означает дифференцирование по x_i ; $D = (D_1, \dots, D_n)$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ – операция частного дифференцирования по x порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Как обычно, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$.

В настоящей работе изучаются квазиэллиптические уравнения в пространстве $\mathbb{R}^n$. Напомним соответствующие определения. Пусть $m_1, \dots, m_n$ – произвольный набор натуральных чисел, $\max m_j = m$, $q = (m/m_1, \dots, m/m_n)$. Функция $f(x)$ называется q -однородной порядка k , если $f(\lambda^{q_1} x_1, \dots, \lambda^{q_n} x_n) = \lambda^k f(x)$ при $\lambda > 0$, $x \neq 0$; q -порядком (степенью) одночлена $a_\alpha x^\alpha$ является число αq , а q -порядком (степенью) многочлена – наибольший из q -порядков составляющих его одночленов.

Рассмотрим q -однородный многочлен порядка m с комплексными коэффициентами

$$L(i\xi) = \sum_{\alpha q = m} a_\alpha (i\xi)^\alpha.$$

Этот многочлен называется *квазиэллиптическим*, если он не обращается в нуль при ненулевых $\xi \in \mathbb{R}^n$. В квазиэллиптическом многочлене старшая степень каждой переменной ξ_j равна m_j , а коэффициенты при всех мономах вида $\xi_j^{m_j}$ отличны от нуля.

Возьмем гладкую комплекснозначную функцию $u(x)$ и составим дифференциальное выражение

$$L(D)u = \sum_{\alpha q = m} a_\alpha D^\alpha u(x). \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00508).

Это выражение называется квазиэллиптическим, если его символ $L(i\xi)$ является квазиэллиптическим многочленом. Любой эллиптический или параболический оператор при соответствующем выборе чисел m_j становится квазиэллиптическим. Возможность объединить в рамках одной теории столь разнообразные типы уравнений инициировала систематическое изучение квазиэллиптических операторов. Начатое Л. Р. Волевичем в 1960 году (см. [1], [2]), оно продолжается до сего времени, но все еще далеко от завершения. Не выявлены особенности фундаментальных решений, отсутствуют точные оценки шаудеровского типа для уравнений с переменными коэффициентами, не найдены условия разрешимости общих граничных задач в сложных областях.

В настоящей работе будут построены фундаментальные решения квазиэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. Это позволит развить теорию квазиэллиптических объемных потенциалов, доказать априорные оценки гёльдеровских норм решений для уравнений с постоянными коэффициентами, а затем распространить их на уравнения с переменными коэффициентами. В итоге получится точная внутренняя оценка шаудеровского типа, объединяющая в качестве частных случаев классические результаты для эллиптических и параболических уравнений.

Используемая нами техника является развитием методики [3], [4]. Ранее она уже была реализована в [5] для так называемых квазипараболических систем, образующих подмножество в классе квазиэллиптических уравнений.

§ 1. Фундаментальные решения

Согласно известной теореме Хёрмандера–Лоясевича (см. [6]) всякий ненулевой дифференциальный оператор $L(D)$ с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение, принадлежащее пространству S' обобщенных функций медленного роста (сопряженному с пространством Шварца $\mathcal{S}$ быстро убывающих функций). Иными словами, дифференциальное уравнение

$$L(D)G(x) = \delta(x), \quad (2)$$

где δ – мера Дирака в нуле, разрешимо в S' . Найдем решение уравнения (2) для квазиэллиптического оператора (1), используя преобразование Фурье обобщенных функций. При этом преобразование Фурье суммируемых функций условимся вычислять по формуле

$$F[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

В классе S' дифференциальное уравнение (2) эквивалентно алгебраическому

$$L(i\xi)\Phi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \quad (3)$$

где $\Phi = F[G]$ (см. [7]). Покажем, что решением уравнения (3) является обобщенная функция Φ , действующая на элементы $\varphi \in \mathcal{S}$ по правилу

$$(\Phi, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left\{ \int_{\|\xi\| < 1} \left[\varphi(\xi) - \sum_{\alpha q \leq m - |q|} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \varphi(0) \xi^\alpha \right] \frac{d\xi}{L(i\xi)} + \int_{\|\xi\| > 1} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{L(i\xi)} \right\}. \quad (4)$$

При $m < |q|$ не существует мультииндексов α , для которых $\alpha q \leq m - |q|$, и соответствующую сумму в правой части (4) следует опустить.

Понятно, что второй из интегралов в (4) сходится при всех $\varphi \in \mathcal{S}$. Установим сходимость первого. Для этого перейдем к обобщенным полярным координатам $\xi_j = \rho^{q_j} \omega_j$. Здесь $\rho \geq 0$, а $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — элемент единичной сферы $\|\omega\| = 1$. Якобиан такой замены имеет вид $\rho^{|q|-1} J(\omega)$, где функция $J(\omega)$ бесконечно дифференцируема. Учитывая, что $L(i\xi) = \rho^m L(i\omega)$, и принимая во внимание очевидное неравенство

$$\left| \varphi(\xi) - \sum_{\alpha q \leq m - |q|} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \varphi(0) \xi^\alpha \right| \leq C_\varphi \rho^{m - |q| + \varepsilon} \quad \text{при } \|\xi\| \leq 1, \quad \varepsilon > 0,$$

закключаем, что

$$\left| \int_{\|\xi\| < 1} \left[\varphi(\xi) - \sum_{\alpha q \leq m - |q|} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \varphi(0) \xi^\alpha \right] \frac{d\xi}{L(i\xi)} \right| \leq C_\varphi \int_0^1 \rho^{\varepsilon-1} d\rho \int_{\|\omega\|=1} \left| \frac{J(\omega)}{L(i\omega)} \right| d\omega.$$

Следовательно, формула (4) определяет некоторую обобщенную функцию Φ из пространства $\mathcal{S}'$.

Теперь проверим уравнение (3). Заметим, что если $f(\xi)$ — q -однородная функция порядка m , то производная $D^\alpha f(\xi)$ будет q -однородной порядка $m - \alpha q$. Отсюда и из свойств полинома $L(i\xi)$ вытекает

$$D^\alpha [L(i\xi) \varphi(\xi)]|_{\xi=0} = 0 \quad \text{при } \varphi \in \mathcal{S}, \quad \alpha q < m.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (L(i\xi) \Phi(\xi), \varphi(\xi)) &= (\Phi(\xi), L(i\xi) \varphi(\xi)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left\{ \int_{\|\xi\| < 1} \frac{L(i\xi) \varphi(\xi) - 0}{L(i\xi)} d\xi + \int_{\|\xi\| > 1} \varphi(\xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Значит, обобщенная функция Φ в самом деле удовлетворяет уравнению (3).

Чтобы решить исходное уравнение (2), подсчитаем $G(x) = F^{-1}[\Phi]$. По определению обратного преобразования Фурье обобщенных функций для каждой основной функции $\varphi(x)$ имеем

$$\begin{aligned} (G(x), \varphi(x)) &= (F^{-1}[\Phi](x), \varphi(x)) = (\Phi(\xi), F^{-1}[\varphi](\xi)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\|\xi\| < 1} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{ix\xi} - \sum_{\alpha q \leq m - |q|} \frac{(ix)^\alpha \xi^\alpha}{\alpha!} \right) \varphi(x) dx \right] \frac{d\xi}{L(i\xi)} \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\|\xi\| > 1} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \varphi(x) dx \right] \frac{d\xi}{L(i\xi)}. \end{aligned}$$

Поменяем местами интегралы по x и ξ . В первом слагаемом это всегда возможно, а во втором достаточно, чтобы функция $[L(i\xi)]^{-1}$ была суммируема в области $\|\xi\| > 1$. Так как

$$\int_{\|\xi\|>1} \frac{d\xi}{|L(i\xi)|} = \int_1^\infty \rho^{|q|-m-1} d\rho \int_{\|\omega\|=1} \left| \frac{J(\omega)}{L(i\omega)} \right| d\omega,$$

то суммируемости можно добиться за счет ограничения $m - |q| > 0$. Потребуем временно, чтобы это ограничение выполнялось. Переставив интегралы по x и ξ , получим

$$(G(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x) \varphi(x) dx,$$

где

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \left\{ \int_{\|\xi\|<1} \left[e^{ix\xi} - \sum_{\alpha q \leq m-|q|} \frac{(ix)^\alpha \xi^\alpha}{\alpha!} \right] \frac{d\xi}{L(i\xi)} + \int_{\|\xi\|>1} \frac{e^{ix\xi} d\xi}{L(i\xi)} \right\}. \quad (5)$$

Эта функция и является искомым фундаментальным решением.

Исследуем подробнее структуру $G(x)$. Воспользуемся методикой, предложенной в [7] при построении фундаментального решения для оператора Лапласа. Положим $x_j = r^{q_j} \theta_j$, где $\|\theta\| = 1$, и выполним в правой части (5) замену переменных $\xi_j = r^{-q_j} \zeta_j$. Обозначив через ρ и ω обобщенные полярные координаты точки ζ и заметив, что сфера $\|\xi\| = 1$ перейдет в эллипсоид $\rho = r$, после простых преобразований находим

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{r^{m-|q|}}{(2\pi)^n} \left\{ \int_{\rho < r} \left[e^{i\theta\zeta} - \sum_{\alpha q \leq m-|q|} \frac{(i\theta)^\alpha \zeta^\alpha}{\alpha!} \right] \frac{d\zeta}{L(i\zeta)} + \int_{\rho > r} \frac{e^{i\theta\zeta} d\zeta}{L(i\zeta)} \right\} \\ &= \frac{r^{m-|q|}}{(2\pi)^n} \left\{ \int_{\rho < 1} \left[e^{i\theta\zeta} - \sum_{\alpha q \leq m-|q|} \frac{(i\theta)^\alpha \zeta^\alpha}{\alpha!} \right] \frac{d\zeta}{L(i\zeta)} + \int_{\rho > 1} \frac{e^{i\theta\zeta} d\zeta}{L(i\zeta)} \right\} \\ &\quad - \frac{r^{m-|q|}}{(2\pi)^n} \sum_{\alpha q \leq m-|q|} \frac{(i\theta)^\alpha}{\alpha!} \int_1^r \rho^{\alpha q - m + |q| - 1} d\rho \int_{\|\omega\|=1} \frac{\omega^\alpha J(\omega) d\omega}{L(i\omega)}. \end{aligned}$$

Получившийся интеграл по области $\rho < 1$ обозначим через $(2\pi)^n U(\theta)$, интеграл по области $\rho > 1$ — через $(2\pi)^n V(\theta)$, а интеграл по переменной ρ в пределах от 1 до r вычислим в явном виде. В результате придем к выражению

$$\begin{aligned} G(x) &= r^{m-|q|} \left\{ U(\theta) + V(\theta) + \ln r \sum_{\alpha q = m-|q|} \mu_\alpha \theta^\alpha + \sum_{\alpha q < m-|q|} \nu_\alpha \theta^\alpha (r^{\alpha q - m + |q|} - 1) \right\} \\ &= r^{m-|q|} \left(U(\theta) + V(\theta) - \sum_{\alpha q < m-|q|} \nu_\alpha \theta^\alpha \right) + \ln r \sum_{\alpha q = m-|q|} \mu_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha q < m-|q|} \nu_\alpha x^\alpha. \end{aligned}$$

Коэффициенты μ_α и ν_α определяются по формулам

$$\mu_\alpha = \int_{\|\omega\|=1} \frac{(i\omega)^\alpha J(\omega) d\omega}{(2\pi)^n \alpha! L(i\omega)}, \quad \nu_\alpha = \int_{\|\omega\|=1} \frac{(i\omega)^\alpha J(\omega) d\omega}{(2\pi)^n \alpha! (\alpha q - m + |q|) L(i\omega)}.$$

Полагая

$$W(\theta) = \left(U(\theta) + V(\theta) - \sum_{\alpha q < m - |q|} \nu_\alpha \theta^\alpha \right),$$

$$P(x) = \sum_{\alpha q = m - |q|} \mu_\alpha x^\alpha, \quad Q(x) = \sum_{\alpha q < m - |q|} \nu_\alpha x^\alpha,$$

получаем разложение

$$G(x) = r^{m-|q|} W(\theta) + P(x) \ln r + Q(x). \quad (6)$$

Полином $P(x)$ является q -однородным порядка $m - |q|$, а q -степень многочлена $Q(x)$ меньше $m - |q|$.

Покажем, что найденное фундаментальное решение бесконечно дифференцируемо по x всюду, исключая точку $x = 0$. В отношении функций $r(x)$, $\theta_j(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$ это утверждение очевидно. Более того, из соображений однородности и явных формул для коэффициентов μ_α , ν_α вытекает, что все производные функций $r(x)$ и $\theta_j(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|D^\beta r(x)| \leq C_\beta r^{1-\beta q}, \quad |D^\beta \theta_j(x)| \leq C_\beta r^{-\beta q},$$

а ненулевые производные многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ — неравенствам

$$|D^\beta P(x)| \leq C_\beta r^{m-|q|-\beta q}, \quad |D^\beta Q(x)| \leq C_\beta (r^{m-|q|-\beta q} + 1),$$

константы C_β в которых зависят только от m , n , q , β и минимума функции $|L(i\omega)|$ на единичной сфере.

Остается проверить, что $W(\theta)$ обладает аналогичными свойствами. Достаточно установить бесконечную дифференцируемость W по переменным θ_j в области $\|\theta\| > 0$ и оценить производные $D_\theta^\beta W$ на единичной сфере. Для выражений U и $\nu_\alpha \theta^\alpha$, входящих в состав $W(\theta)$, это делается элементарно. Слагаемое V предварительно преобразуем. Воспользуемся очевидным тождеством $\Delta_\zeta e^{i\theta\zeta} = -\|\theta\|^2 e^{i\theta\zeta}$, где Δ_ζ — оператор Лапласа, и применим формулу Грина:

$$\begin{aligned} (2\pi)^n \|\theta\|^2 V(\theta) &= \int_{\rho>1} \frac{\|\theta\|^2 e^{i\theta\zeta} d\zeta}{L(i\zeta)} = - \int_{\rho>1} \frac{\Delta_\zeta e^{i\theta\zeta} d\zeta}{L(i\zeta)} \\ &= - \int_{\|\zeta\|>1} e^{i\theta\zeta} \Delta_\zeta \left[\frac{1}{L(i\zeta)} \right] d\zeta \\ &\quad + \int_{\|\zeta\|=1} \frac{\partial e^{i\theta\zeta}}{\partial n_\zeta} \frac{dS}{L(i\zeta)} - \int_{\|\zeta\|=1} e^{i\theta\zeta} \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \left[\frac{1}{L(i\zeta)} \right] dS. \end{aligned}$$

Здесь n_ζ — внешняя нормаль к сфере $\|\zeta\| = 1$. Продолжая действовать подобным образом, получаем

$$(2\pi)^n \|\theta\|^{2k} V(\theta) = (-1)^k \int_{\|\zeta\|>1} e^{i\theta\zeta} \Delta_\zeta^k \left[\frac{1}{L(i\zeta)} \right] d\zeta + \int_{\|\zeta\|=1} e^{i\theta\zeta} R_k(\theta, \zeta) dS. \quad (7)$$

Через R_k обозначена некоторая рациональная функция, в знаменателе которой стоит целая степень многочлена $L(i\zeta)$, а числитель зависит также и от его производных.

Получившийся поверхностный интеграл является бесконечно дифференцируемым по θ при любом k . Функцию $\Delta_\zeta^k [L(i\zeta)]^{-1}$ можно сделать убывающей при $\|\zeta\| \rightarrow \infty$ быстрее любой наперед заданной степени нормы $\|\zeta\|$ за счет выбора k . Значит, объемный интеграл также можно дифференцировать по θ любое наперед заданное число раз.

Таким образом, функция $W(\theta)$ бесконечно дифференцируема. Оценим модули ее производных. Известно (см., например, [6]), что для производных многочлена $L(i\zeta)$ выполнено неравенство

$$\max_{\|\zeta\|=1} |D^\gamma L(i\zeta)| \leq C \max_{\|\zeta\|=1} |L(i\zeta)|$$

с константой C , зависящей только от n , m и q . Поэтому модуль функции R_k , модули ее производных по θ и, следовательно, модули производных поверхностного интеграла в (7) ограничены при $\|\theta\| = 1$ константами, зависящими только от n , m , q , k , а также от наименьшего и наибольшего значений $|L(i\zeta)|$ на единичной сфере. Это утверждение распространяется и на объемный интеграл из формулы (7), и на все остальные слагаемые, входящие в состав W . Применив теперь оператор D^β к обеим частям равенства (6), находим

$$D^\beta G(x) = r^{m-|q|-\beta q} W^\beta(\theta) + P^\beta(x) \ln r + Q^\beta(x),$$

где функция $W^\beta(\theta)$ ограничена на сфере $\|\theta\| = 1$; $P^\beta(x)$ — q -однородный полином порядка $m - |q| - \beta q$, равный нулю при $m < |q| + \beta q$; $Q^\beta(x)$ — полином q -порядка, меньшего $m - |q| - \beta q$, равный нулю при $m \leq |q| + \beta q$.

Вернемся к случаю $m \leq |q|$. Выберем натуральное число k так, чтобы $m(k+1) > |q|$, и рассмотрим квазиэллиптический оператор $L^{k+1}(D)$, q -порядок которого равен $m(k+1)$. Для этого оператора существует фундаментальное решение $G_k(x)$ вида (6), причем функция $L^k(D)G_k(x)$ будет искомым фундаментальным решением для оператора L . Понятно, что точно такое же представление $G(x) = L^k(D)G_k(x)$ останется справедливым и в случае $m > |q|$. Итог всему сказанному подведем в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Всякий q -однородный квазиэллиптический оператор L имеет фундаментальное решение $G(x)$, которое при любых неотрицательных целых k представимо в виде*

$$G(x) = L^k(D)G_k(x), \quad G_k(x) = r^{m(k+1)-|q|} W_k(\theta) + P_k(x) \ln r + Q_k(x).$$

Функция $W_k(\theta)$ бесконечно дифференцируема при $\theta \neq 0$; $P_k(x)$ — q -однородный полином порядка $m(k+1) - |q|$, равный нулю при $m(k+1) < |q|$; $Q_k(x)$ — полином q -порядка, меньшего $m(k+1) - |q|$, равный нулю при $m(k+1) \leq |q|$.

Из этой теоремы и упомянутых выше свойств функций W , P и Q непосредственно вытекают неравенства

$$|D^\beta G_k(x)| \leq \begin{cases} C_{k\beta} (r^{m(k+1)-|q|-\beta q} \ln r + 1), & m(k+1) \geq |q| + \beta q; \\ C_{k\beta} r^{m(k+1)-|q|-\beta q}, & m(k+1) < |q| + \beta q. \end{cases} \quad (8)$$

Константы $C_{k\beta}$ зависят только от n , m , q , k , β , а также от наименьшего и наибольшего значений $|L(i\zeta)|$ на единичной сфере.

§ 2. Потенциалы

Рассмотрим неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L(D)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

где L — квазиэллиптический оператор вида (1), f — заданная, а u — искомая функция с комплексными значениями. Нас будут интересовать оценки гёльдеровских норм решений этого уравнения через соответствующие нормы его правой части. Точные и законченные результаты в этом направлении получены пока только для эллиптических и параболических операторов. В квазиэллиптическом случае все известные автору оценки имеют предварительный характер: они либо неточны ввиду неизбежных зазоров, возникающих из-за применения теорем вложения (см. [8]), либо неполны, так как оцениваемые нормы не содержат смешанных производных (см. [9]). В этом параграфе с помощью квазиэллиптических объемных потенциалов будут установлены точные оценки анизотропных гёльдеровских норм решений уравнения (9), объединяющие известные результаты для эллиптических и параболических уравнений.

Пусть $G(x)$ — фундаментальное решение, отвечающее оператору L в силу теоремы 1. Если обобщенная функция u удовлетворяет уравнению (9) и существует свертка $(G * u)$, то свертка $(G * f)$ также определена, причем $u = (G * f)$. Обратно, если свертка $u = (G * f)$ существует, то она является решением уравнения (9) в смысле теории обобщенных функций [7].

На основании (8) фундаментальное решение $G(x)$ локально суммируемо, поэтому для всякой непрерывной финитной функции $f(x)$ свертка $(G * f)$ существует и представляется интегралом

$$u(x) = (G * f) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y) f(y) dy. \quad (10)$$

Если $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $u(x)$ будет бесконечно дифференцируемым решением (9). Выясним, при каких условиях равенство (10) определяет классическое решение уравнения (9) для функций f конечной гладкости.

Сначала выведем необходимые формулы для производных потенциала (10). Производные $D^\alpha G$ порядка $\alpha q < t$ локально суммируемы. Значит, при всех таких α и любых непрерывных финитных f справедливо соотношение $D^\alpha u = (D^\alpha G * f)$, где свертка понимается в обычном смысле. Для отыскания производных q -порядка t потребуются более тонкие рассуждения.

ЛЕММА 1. Пусть $y = (y', y_k)$, $y' = (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)$, а непрерывная финитная функция $f(y)$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной y_k с показателем σ . Если индекс j и мультииндекс α таковы, что $j \neq k$, $0 < \sigma q_k - \alpha q < q_j$, $\alpha_j < m_j$, $\alpha_k > 0$, то

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{-\infty}^{\infty} D^\alpha G(x - y) \cdot [f(y', y_k) - f(y', x_k)] dy_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\alpha_j \leq m_j - 1$, то мультииндекс α можно разложить в сумму $\alpha = \alpha' + \alpha''$, где $\alpha' q < m$, $\alpha''_j = 0$. Положим $v(x) = D^{\alpha'} u(x) = (D^{\alpha'} G * f)$ и представим $v(x)$ как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ интегралов

$$v_\varepsilon(x) = \int_{|x_j - y_j| > \varepsilon} dy_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D^{\alpha'} G(x - y) \cdot f(y'', y_j, y_k) dy'' dy_k, \quad (y'', y_j) = y'.$$

Функция $G(x - y)$ бесконечно дифференцируема при $|x_j - y_j| > \varepsilon$, поэтому

$$\begin{aligned} D^{\alpha''} v_\varepsilon(x) &= \int_{|x_j - y_j| > \varepsilon} dy_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D^\alpha G(x - y) \cdot f(y'', y_j, y_k) dy'' dy_k \\ &= \int_{|x_j - y_j| > \varepsilon} dy_j \int_{\mathbb{R}^{n-2}} dy'' \int_{-\infty}^{\infty} D^\alpha G(x - y) \cdot [f(y', y_k) - f(y', x_k)] dy_k. \end{aligned}$$

Слагаемое $f(y', x_k)$ не меняет величины данного выражения. В самом деле, условие $\alpha_k \neq 0$ означает, что $D^\alpha G = D_k D^\beta G$, причем

$$m - |q| - \beta q = m - |q| - \alpha q + q_k = -(q_j + \alpha q - m - \sigma q_k) - (|q| - q_j - q_k) - \sigma q_k < 0.$$

Но тогда в силу (8)

$$|D^\beta G(x)| \leq C_{0\beta} r^{m-|q|-\beta q} (|\ln r| + 1) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty).$$

Отсюда и из формулы Ньютона–Лейбница вытекает

$$\int_{-\infty}^{\infty} D^\alpha G(x - y) \cdot f(y', x_k) dy_k = f(y', x_k) \int_{-\infty}^{\infty} D_k D^\beta G(x - y) dy_k = 0.$$

Теперь достаточно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ производная $D^{\alpha''} v_\varepsilon(x)$ равномерно сходится к повторному интегралу, фигурирующему в условии леммы. На основании условия Гёльдера и неравенства (8) заключаем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(x) &= \left| D^{\alpha''} v_\varepsilon(x) - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{-\infty}^{\infty} D^\alpha G(x - y) \cdot [f(y', y_k) - f(y', x_k)] dy_k \right| \\ &\leq C_1 \int_{|x_j - y_j| < \varepsilon} dy_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D^\alpha G(x - y)| \cdot |y_k - x_k|^\sigma dy'' dy_k \\ &\leq C_2 \int_0^\varepsilon d\xi_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\xi_k|^\sigma d\xi'' d\xi_k}{r^{\alpha q + |q| - m}}, \end{aligned}$$

где r – обобщенный полярный радиус точки $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если через ρ обозначить обобщенный полярный радиус точки (ξ'', ξ_k) в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ и заметить, что величина r эквивалентна сумме $\rho + |\xi_j|^{1/q_j}$, то получится

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(x) &\leq C_3 \int_0^\varepsilon d\xi_j \int_0^\infty \frac{\rho^{|q| + \sigma q_k - q_j - 1} d\rho}{(\xi_j^{1/q_j} + \rho)^{|q| + \alpha q - m}} \\ &= C_3 \int_0^\varepsilon \xi_j^{-1 + (m + \sigma q_k - \alpha q)/q_j} d\xi_j \int_0^\infty \frac{t^{|q| + \sigma q_k - q_j - 1} dt}{(1 + t)^{|q| + \alpha q - m}}. \end{aligned}$$

В силу условий леммы правая часть последнего равенства стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Нам понадобится еще одно вспомогательное утверждение о структуре мультииндексов, удовлетворяющих неравенствам специального вида. Приведем необходимые для этого определения. Будем говорить, что число l является q -целым, если существует мультииндекс α (с целыми компонентами), для которого $l = \alpha q$. Множество всех q -целых чисел обозначим через $\mathbb{Z}_q$. Если α и β — два мультииндекса, то неравенство $\alpha \leq \beta$ эквивалентно совокупности n скалярных неравенств $\alpha_j \leq \beta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Неравенство $\alpha < \beta$ означает, что $\alpha \leq \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Символом e^k обозначим единичный вектор, направленный вдоль оси x_k ; компонента e_j^k вектора e^k равна единице при $j = k$ и нулю в противном случае.

ЛЕММА 2. Пусть l — положительное q -нецелое число, а мультииндекс α и индекс j таковы, что $0 < l + m - \alpha q < q_j$, $\alpha_j \leq m_j - 1$. Тогда α можно разложить в сумму $\alpha' + \alpha''$ двух мультииндексов, для которых при некотором $k \neq j$ выполнены неравенства $\alpha'_k > 0$, $0 < l - \alpha''q < q_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\beta = \alpha - \alpha_j e^j$. Мультииндекс β отличается от α тем, что его j -я компонента равна нулю, причем в силу условий леммы

$$\beta q = \alpha q - \alpha_j q_j \geq \alpha q - (m_j - 1)q_j = \alpha q - m + q_j > l.$$

Среди мультииндексов γ , удовлетворяющих неравенствам $\gamma q < l$, $\gamma \leq \beta$, выберем тот, для которого значение γq максимально. Его и обозначим через α'' . Такой мультииндекс существует, но может не быть единственным. Для α'' справедливо неравенство $0 < l - \alpha''q$.

Так как $\beta q > l$, то $\alpha'' < \beta$ и найдется такое k , что $\alpha'' + e^k \leq \beta$. Ввиду условия $\beta_j = 0$ индекс k не может быть равен j . Кроме того, $(\alpha'' + e^k)q \geq l$. Равенство здесь невозможно, поскольку $l \notin \mathbb{Z}_q$. Следовательно,

$$(\alpha'' + e^k)q = \alpha''q + q_k > l, \quad \text{или} \quad l - \alpha''q < q_k.$$

Обозначив разность $\alpha - \alpha''$ через α' , получим искомое разложение. Лемма доказана.

Введем необходимые далее специальные гёльдеровские пространства. Пусть $l \geq 0$, а функция $u(x)$ определена и непрерывна в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ вместе с производными $D^\alpha u(x)$ порядков $\alpha q \leq l$. Для всякого неотрицательного q -целого числа $k \leq l$ положим

$$|u|_k^\Omega = \sup |D^\alpha u(x)|,$$

где супремум берется по всем $x \in \Omega$ и всем таким α , что $\alpha q = k$. Определим теперь полунорму

$$[u]_l^\Omega = |u|_l^\Omega + \sup \frac{|D^\alpha u(x + te^j) - D^\alpha u(x)|}{|t|^{(l-\alpha q)/q_j}}.$$

В случае $l \notin \mathbb{Z}_q$ слагаемое $|u|_l^\Omega$ не имеет смысла и его нужно вообще опустить. Во втором слагаемом верхняя грань вычисляется по всевозможным α и j , для которых

$0 < l - \alpha q < q_j$, и всем таким x, t , что точки x и $x + te^j$ лежат в области Ω . Если множество соответствующих значений α окажется пустым (например при $l = 0$), то последнее слагаемое также следует опустить. Для краткости мы не будем указывать на зависимость полунорм от области Ω , когда это не приводит к недоразумениям.

Возьмем число $l \geq 0$ и вектор ν с компонентами $\nu_j = 1/q_j$. Символом $C^{l\nu}(\Omega)$ будем обозначать пространство всех функций $u(x)$, имеющих в Ω непрерывные производные $D^\alpha u$ порядков $\alpha q \leq l$ и конечную норму

$$\|u\|_l^\Omega = [u]_l^\Omega + \sum_{k < l} |u|_k^\Omega.$$

Суммирование производится здесь по всем $k \in \mathbb{Z}_q, 0 \leq k < l$. Эти пространства являются обобщением анизотропных гёльдеровских классов $C_{x,t}^{l, l/(2b)}$, применяемых при изучении $2b$ -параболических уравнений и систем ([4], [10] и др.).

ТЕОРЕМА 2. *Для каждой финитной функции $f(x)$, принадлежащей пространству $C^{l\nu}(\mathbb{R}^n)$ с q -нецелым l , потенциал $u(x) = (G * f)$ является классическим решением уравнения (9). При этом справедлива оценка*

$$[u]_{l+m} \leq C_l [f]_l, \quad (11)$$

где полунормы вычисляются во всем $\mathbb{R}^n$, а C_l зависит только от n, m, q, l , минимального и максимального значений функции $|L(i\omega)|$ на сфере $\|\omega\| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда функция $u(x) = (G * f)$ будет бесконечно дифференцируемым решением уравнения (9), для производных которого справедлива формула $D^\gamma u(x) = (G * D^\gamma f)$. Проверим неравенство (11).

Возьмем такие значения α и j , чтобы $0 < l + m - \alpha q < q_j$, и рассмотрим производную $D^\alpha u(x)$. Не уменьшая общности, будем предполагать, что $\alpha_j < m_j$. В противном случае воспользуемся уравнением (9), с помощью которого $D_j^{\alpha_j} u$ можно свести к линейной комбинации производных от f и выражений вида $D^\nu u$, $\nu_j < m_j$.

По лемме 2 существует разложение $\alpha = \beta + \gamma$, где $0 < l - \gamma q < q_k, \beta_k > 0, k \neq j$. В соответствии с этим разложением $D^\alpha u = D^\beta (G * D^\gamma f)$. Обозначим $(l - \gamma q)/q_k$ через σ и положим $g = D^\gamma f$. Для производной $D^\beta (G * g)$ выполняется условие $0 < m + \sigma q_k - \beta q < q_j$ леммы 1, в силу которой

$$\begin{aligned} D^\alpha u(x + te^j) - D^\alpha u(x) &= D^\beta (G * g)(x + te^j) - D^\beta (G * g)(x) \\ &= \int_{|x_j - y_j| < 2|t|} dy_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D^\beta G(x + te^j - y) [g(y', y_k) - g(y', x_k)] dy'' \\ &\quad - \int_{|x_j - y_j| < 2|t|} dy_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D^\beta G(x - y) [g(y', y_k) - g(y', x_k)] dy'' \\ &\quad + \int_{|x_j - y_j| > 2|t|} dy_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [D^\beta G(x + te^j - y) - D^\beta G(x - y)] \\ &\quad \times [g(y', y_k) - g(y', x_k)] dy'' \stackrel{\text{def}}{=} J_1 - J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Символы y' и y'' означают соответственно дополнения к y_k и y_j до полного набора всех координат: $(y', y_k) = (y'', y_j) = y$.

Оценим интеграл J_1 . Через C будем обозначать все константы, зависящие только от указанных в условии теоремы величин, и точные значения которых нас не интересуют. Пусть ρ – обобщенный полярный радиус точки $x'' - y''$ в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. Применяя неравенство (8), находим

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \int_{x_j-2|t|}^{x_j+2|t|} dy_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{C [g]_\sigma |x_k - y_k|^\sigma dy''}{(|x_j - y_j + t|^{1/q_j} + \rho)^{\beta q + |q| - m}} \\ &\leq C [g]_\sigma \int_{-2|t|}^{2|t|} d\tau \int_0^\infty \frac{\rho^{\sigma q_k + |q| - q_j - 1} d\rho}{(|\tau + t|^{1/q_j} + \rho)^{\beta q + |q| - m}} \\ &\leq C [g]_\sigma \int_0^{3|t|} \theta^{-1 + (m + \sigma q_k - \beta q)/q_j} d\theta \int_0^\infty \frac{z^{\sigma q_k + |q| - q_j - 1} dz}{(1 + z)^{\beta q + |q| - m}}. \end{aligned}$$

Показатели степеней у θ и z таковы, что оба последних интеграла сходятся. Если интеграл по z заменить константой, а интеграл по θ вычислить в явном виде, то получится

$$|J_1| \leq C [g]_\sigma \int_0^{3|t|} \theta^{-1 + (m + \sigma q_k - \beta q)/q_j} d\theta \leq C [f]_l |t|^{(m + l - \alpha q)/q_j}.$$

Выражение J_2 оценивается точно так же. Рассмотрим J_3 . Заметим, что если $|x_j - y_j| > 2|t|$, то на отрезке с концами $x - y$ и $x + te^j - y$ нет особенностей фундаментального решения G . Обобщенный полярный радиус любой точки этого отрезка не меньше величины $C(|x_j - y_j|^{1/q_j} + \rho)$, где ρ – полярный радиус точки $x'' - y''$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |D^\beta G(x + te^j - y) - D^\beta G(x - y)| &= \left| \int_0^t D_j D^\beta G(x + \tau e^j - y) d\tau \right| \\ &\leq \frac{C |t|}{(|x_j - y_j|^{1/q_j} + \rho)^{\beta q + q_j + |q| - m}}. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \int_{|x_j - y_j| > 2|t|} dy_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{C |t| [g]_\sigma |x_k - y_k|^\sigma dy''}{(|x_j - y_j|^{1/q_j} + \rho)^{\beta q + q_j + |q| - m}} \\ &\leq \int_{2|t|}^\infty \frac{|t| d\theta}{\theta^{2 + (\beta q - m - \sigma q_k)/q_j}} \int_0^\infty \frac{C [g]_\sigma z^{\sigma q_k + |q| - q_j - 1} dz}{(1 + z)^{\beta q + q_j + |q| - m}} \\ &= C [f]_l |t|^{(m + l - \alpha q)/q_j}. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (11) доказано для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Возьмем теперь финитную функцию f с конечной полунормой $[f]_l$ и приблизим ее стандартными усреднениями

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} w\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) f(y) dy,$$

где $w(x)$ – неотрицательная функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, интеграл от которой равен единице. Легко показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ все производные $D^\alpha f_\varepsilon$ порядка $\alpha q < l$ равномерно сходятся к соответствующим производным функции f , причем $[f_\varepsilon]_r \leq [f]_r$ для всякого $r \leq l$. Применяя к f_ε оценку (11) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем утверждение теоремы.

§3. Шаудеровские оценки

В эллиптическом или параболическом случаях неравенство (11) превращается в классическую оценку шаудеровского типа для уравнений с постоянными коэффициентами во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Подобные оценки хорошо известны также для эллиптических и параболических уравнений с переменными коэффициентами в произвольных областях. В более общем квазиэллиптическом случае аналогичные результаты установлены пока при завышенных требованиях к гладкости коэффициентов [11]. Настоящий параграф посвящен доказательству точных внутренних оценок шаудеровского типа при оптимальных предположениях о гладкости коэффициентов.

Нам понадобятся весовые гёльдеровские пространства, элементы которых могут иметь особенности на границах рассматриваемых областей. Чтобы сформулировать соответствующее определение, введем в $\mathbb{R}^n$ специальную метрику

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^{\nu_j}; \quad \nu_j q_j = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Если Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с непустой границей $\partial\Omega$, то через d_ξ будем обозначать расстояние от этой границы до точки $\xi \in \Omega$ в смысле метрики d . Для всякого $\xi \in \Omega$ положим

$$P_\xi = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\xi_j - x_j|^{\nu_j} < \frac{d_\xi}{2n}, \quad j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Понятно, что P_ξ — прямоугольный параллелепипед с центром в точке ξ . Всякая точка $x \in P_\xi$ отстоит от ξ по метрике d менее чем на $d_\xi/2$, поэтому весь параллелепипед P_ξ целиком лежит в Ω .

Возьмем пару неотрицательных чисел r и l , а также q -целое $k \leq l$. Предположим, что некоторая функция $u(x)$ принадлежит $C^{l\nu}(P_\xi)$ при любом $\xi \in \Omega$. Определим для нее весовые полунормы

$$[u]_{r,l}^\Omega = \sup_{\xi \in \Omega} \{ d_\xi^{r+l} [u]_l^{P_\xi} \}, \quad |u|_{r,k}^\Omega = \sup_{\xi \in \Omega} \{ d_\xi^{r+k} |u|_k^{P_\xi} \}$$

и норму

$$\|u\|_{r,l}^\Omega = [u]_{r,l}^\Omega + \sum_{k < l} |u|_{r,k}^\Omega.$$

Множество всех функций $u(x)$, непрерывных в Ω вместе с производными $D^\alpha u$ порядка $\alpha q \leq l$ и имеющих конечную норму $\|u\|_{r,l}^\Omega$, назовем пространством $C_r^{l\nu}(\Omega)$. Похожие весовые пространства используются при доказательстве внутренних оценок решений эллиптических и параболических уравнений (см. [3], [10] и др.).

Перечислим необходимые далее свойства полунорм $[u]_l$ и $[u]_{r,l}$. Обозначим через P открытый прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, ребра которого параллельны осям координат, а их длины равны d_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Для полунорм $[u]_l^P$ выполняется так называемое интерполяционное неравенство

$$[u]_p^P \leq C \{ \varepsilon^{l-p} [u]_l^P + \varepsilon^{s-p} [u]_s^P + [u]_s^P (d_1^{-\nu_1} + \dots + d_n^{-\nu_n})^{p-s} \}. \quad (12)$$

Здесь $0 \leq s < p < l$, ε – любое положительное число, а C не зависит от u , ε и d_j . Подобные утверждения имеются, например, в [10], [12] и многих других работах, поэтому доказательство мы для краткости опускаем.

Аналогичное неравенство справедливо и для весовых полунорм. Если $0 \leq s < p < l$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$[u]_{r,p}^\Omega \leq C \{ \varepsilon^{l-p} [u]_{r,l}^\Omega + \varepsilon^{s-p} [u]_{r,s}^\Omega + (2n)^{p-s} [u]_{r,s}^\Omega (2^{-\nu_1} + \dots + 2^{-\nu_n})^{p-s} \}, \quad (13)$$

где C – та же константа, что и в (12). Для доказательства достаточно применить к $d_\xi^{r+p} [u]_p^{P_\xi}$ оценку (12), взяв вместо ε величину εd_ξ , и перейти к супремуму по ξ .

ЛЕММА 3. Возьмем произвольную область $Q \subset \Omega$ и обозначим через δ расстояние от Q до $\partial\Omega$ по метрике d . Если $\delta > 0$, $u \in C_r^{l\nu}(\Omega)$, то имеет место неравенство $\delta^{r+l} [u]_l^Q \leq C \|u\|_{r,l}^\Omega$, в котором C зависит только от n и l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $l \in \mathbb{Z}_q$. Выберем $\alpha q = l$, $\xi \in Q$. Учитывая очевидное соотношение $\delta \leq d_\xi$, находим

$$\delta^{r+l} |D^\alpha u(\xi)| \leq d_\xi^{r+l} |u|_l^{P_\xi} \leq |u|_{r,l}^\Omega.$$

Переходя к супремуму по $\xi \in Q$ и α , получаем оценку $\delta^{r+l} |u|_l^Q \leq |u|_{r,l}^\Omega$.

Для завершения доказательства осталось оценить выражение

$$M = \delta^{r+l} |D^\alpha u(\xi + te^j) - D^\alpha u(\xi)| \cdot |t|^{(\alpha q - l)/q_j},$$

где l – любое положительное число, ξ и $\xi + te^j$ – точки области Q , $0 < l - \alpha q < q_j$. Положим $k = \alpha q$ и пусть $2n|t|^{\nu_j} \geq \delta$, тогда

$$M \leq 2(2n)^{l-k} \delta^{r+k} |u|_k^Q \leq 2(2n)^{l-k} |u|_{r,k}^\Omega \leq 2(2n)^{l-k} \|u\|_{r,l}^\Omega.$$

Если же $2n|t|^{\nu_j} < \delta \leq d_\xi$, то $\xi + te^j \in P_\xi$ и $M \leq d_\xi^{r+l} [u]_l^{P_\xi} \leq [u]_{r,l}^\Omega$. Лемма доказана.

Отметим, наконец, еще одно полезное свойство, непосредственно вытекающее из правила дифференцирования произведения:

$$[uv]_l^\Omega \leq C_l \sum_{k \leq l} ([u]_{l-k}^\Omega |v|_k^\Omega + |u|_k^\Omega [v]_{l-k}^\Omega), \quad (14)$$

$$[uv]_{r+s,l}^\Omega \leq C_l \sum_{k \leq l} ([u]_{r,l-k}^\Omega |v|_{s,k}^\Omega + |u|_{r,k}^\Omega [v]_{s,l-k}^\Omega). \quad (15)$$

Здесь в первом случае $u, v \in C^{l\nu}(\Omega)$, а во втором – $u \in C_r^{l\nu}(\Omega)$, $v \in C_s^{l\nu}(\Omega)$. Суммирование производится по всем q -целым k из промежутка $0 \leq k \leq l$.

Распространим теперь теорему 2 на случай любых областей в $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $L(D)$ – квазиэллиптический оператор вида (1), а $u(x)$ – решение уравнения $Lu = f$, принадлежащее $C_r^{m\nu}$ в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Если $f \in C_{r+m}^{l\nu}(\Omega)$ с q -нецелым l , то $u \in C_r^{(l+m)\nu}(\Omega)$ и

$$\|u\|_{r,l+m}^\Omega \leq C(\|f\|_{r+m,l}^\Omega + \|u\|_{r,0}^\Omega), \quad (16)$$

где C не зависит от u , f и Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим дробную часть l через σ и заметим, что при любом целом $k \geq 0$ число $k + \sigma$ является q -нецелым. В силу принципа индукции достаточно показать, что если $u \in C_r^{(k+m)\nu}(\Omega)$, $f \in C_{r+m}^{(k+1+\sigma)\nu}(\Omega)$, то $u \in C_r^{(k+1+\sigma+m)\nu}(\Omega)$, причем

$$\|u\|_{r,k+1+\sigma+m}^\Omega \leq C(\|f\|_{r+m,k+1+\sigma}^\Omega + \|u\|_{r,0}^\Omega). \quad (17)$$

Здесь и далее через C будем обозначать положительные константы, не зависящие от u , f и Ω .

Возьмем произвольную точку $\xi \in \Omega$ и рассмотрим прямоугольный параллелепипед $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |\xi_j - x_j|^{\nu_j} < 3d_\xi/(4n) \forall j\}$. Понятно, что $P_\xi \subset Q \subset \Omega$, а расстояние δ от Q до границы Ω по метрике d подчинено условию $d_\xi/4 \leq \delta \leq d_\xi/2$. Пусть $\zeta(x)$ – функция класса $C_0^\infty(Q)$, равная единице в P_ξ . Эту функцию всегда можно выбрать так, чтобы для любого $s \geq 0$ равномерно по $\xi \in \Omega$ выполнялась оценка $[\zeta]_s^Q \leq C_s \delta^{-s}$.

Положим $v = \zeta u$, тогда v будет финитным решением во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ для уравнения вида

$$L(D)v = \zeta f + \sum_{\beta q + \gamma q = m, \gamma > 0} b_{\beta\gamma} D^\beta u \cdot D^\gamma \zeta. \quad (18)$$

Правая часть этого уравнения содержит лишь производные $D^\beta u$ порядков $\beta q \leq m - \min q_j = m - 1$, поэтому в силу индуктивного предположения она принадлежит пространству $C^{(k+1)\nu}(\mathbb{R}^n) \subset C^{(k+\sigma)\nu}(\mathbb{R}^n)$. По теореме 2 $v \in C^{(k+\sigma+m)\nu}(Q)$. Этому же пространству принадлежит и функция u в параллелепипеде P_ξ , так как там u и v совпадают. На основании (11) и финитности ζ имеем

$$[u]_{k+\sigma+m}^{P_\xi} \leq [v]_{k+\sigma+m}^Q \leq C \left([\zeta f]_{k+\sigma}^Q + \sum_{\beta q + \gamma q = m, \gamma > 0} [D^\beta u \cdot D^\gamma \zeta]_{k+\sigma}^Q \right).$$

Используя свойства ζ и оценку (14), легко показать, что правая часть этого неравенства не превосходит величины

$$C \sum_{i < k+\sigma} \left\{ \delta^{-i} [f]_{k+\sigma-i}^Q + \delta^{i-k-\sigma} |f|_i^Q + \sum_{j \leq m-1} \left(\delta^{j-i-m} [u]_{k+\sigma-i+j}^Q + \delta^{i+j-k-\sigma-m} |u|_{i+j}^Q \right) \right\},$$

где индексы суммирования i и j — неотрицательные q -целые числа. Умножая неравенство на $d_\xi^{k+\sigma+m+r}$, принимая во внимание лемму 3 и соотношение $d_\xi \leq 4\delta$, получаем

$$d_\xi^{k+\sigma+m+r} [u]_{k+\sigma+m}^{P_\xi} \leq C \sum_{i < k+\sigma} \left(\|f\|_{r+m, k+\sigma-i}^\Omega + \|u\|_{r, k+\sigma-i+m-1}^\Omega \right).$$

Переходя, наконец, к супремуму по $\xi \in \Omega$ и применяя интерполяционное неравенство (13), заключаем

$$\|u\|_{r, k+\sigma+m}^\Omega \leq C (\|f\|_{r+m, k+\sigma}^\Omega + \|u\|_{r, 0}^\Omega).$$

Следовательно, $u \in C_r^{(k+\sigma+m)\nu}(\Omega)$.

Вновь обратимся к уравнению (18). С учетом уже доказанного замечаем, что его правая часть принадлежит пространству $C^{(k+1+\sigma)\nu}(Q)$. Но тогда по теореме 2 $v \in C^{(k+1+\sigma+m)\nu}(Q)$. Этому же пространству принадлежит и функция u в параллелепипеде P_ξ . Повторив далее еще раз приведенную выше выкладку с точностью до замены k на $k+1$, придем к оценке (17). Теорема доказана.

Прежде чем перейти к уравнениям с переменными коэффициентами, сформулируем еще одно вспомогательное утверждение, легко получающееся прямо из введенных выше определений.

ЛЕММА 4. *Значение $[u]_{r,l}^\Omega$ равно супремуму полунорм $[u]_{r,l}^Q$ по всевозможным подобластям $Q \subset \Omega$, при этом подобласти можно считать ограниченными и содержащимися в Ω вместе с замыканиями.*

Теперь рассмотрим уравнение общего вида

$$L(x, D)u \equiv \sum_{\alpha q \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \quad (19)$$

с переменными коэффициентами в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Выделим в L главную часть L_0 , т.е. сумму слагаемых q -порядка m , и предположим, что для всех $\xi \in \Omega$ операторы $L_0(\xi, D_x)$ с фиксированными в точке ξ постоянными коэффициентами квазиэллиптичны. Более того, будем считать, что значения $|L_0(\xi, i\omega)|$ на сфере $\|\omega\| = 1$ равномерно ограничены сверху и снизу положительными константами, не зависящими от ξ . Это свойство оператора L назовем равномерной квазиэллиптичностью.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть L равномерно квазиэллиптичен в Ω , l — положительное q -нечетное число, $r \geq 0$, $a_\alpha \in C_{m-\alpha q}^{lv}(\Omega)$, $f \in C_{r+m}^{lv}(\Omega)$. Тогда для всякого решения уравнения (19) из класса $C_r^{(l+m)\nu}(\Omega)$ справедлива оценка (16), константа C в которой по-прежнему не зависит от u , f и Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся стандартным методом локализации, принципиальная схема которого известна очень давно (см., например, [3; теорема 7.2]), и нам остается лишь приспособить ее к данному конкретному случаю.

В силу (13) достаточно оценить только полунорму $[u]_{r,l+m}^\Omega$. По определению найдутся точки ξ и ξ' , индекс j , мультииндекс γ и число t такие, что $\xi \in \Omega$, $\xi' \in P_\xi$, $\xi' + te^j \in P_\xi$, $0 < l + m - \gamma q < q_j$ и

$$[u]_{r,l+m}^\Omega \leq 2d_\xi^{l+m+r} |D^\gamma u(\xi' + te^j) - D^\gamma u(\xi')| \cdot |t|^{(\gamma q - l - m)/q_j} \stackrel{\text{def}}{=} M.$$

Возьмем положительное число $\lambda < 1/2$, точная величина которого будет указана позже, и рассмотрим множество $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \xi') < \lambda d_\xi\}$. Понятно, что Q — шар радиуса λd_ξ относительно метрики d с центром в точке ξ' . Так как $d(\xi', \partial\Omega) > d_\xi/2$, то $Q \subset \Omega$. Исследуем далее две возможности:

- (i) $|t|^{\nu_j} < \lambda d_\xi/(2n)$ и
- (ii) $|t|^{\nu_j} \geq \lambda d_\xi/(2n)$.

В случае (i) точка $\xi' + te^j$ принадлежит прямоугольному параллелепипеду $P = \{x \in \mathbb{R}^n : |\xi'_i - x_i|^{\nu_i} < \lambda d_\xi/(2n) \forall i\}$, причем

$$M \leq 2\lambda^{-l-m-r} (\lambda d_\xi)^{l+m+r} [u]_{l+m}^P \leq 2\lambda^{-l-m-r} [u]_{r,l+m}^Q. \quad (20)$$

Оценим полунорму $[u]_{r,l+m}^Q$. Для этого положим $L_1 = L - L_0$ и перепишем уравнение (19) в виде

$$\begin{aligned} L_0(\xi', D_x)u(x) &= [L_0(\xi', D_x) - L_0(x, D_x)]u(x) - L_1(x, D_x)u(x) + f(x) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} f_0(x) - f_1(x) + f(x). \end{aligned}$$

Считая правую часть $f_0 - f_1 + f$ известной функцией в области Q , применяем к этому уравнению теорему 3:

$$[u]_{r,l+m}^Q \leq C (\|f_0\|_{r+m,l}^Q + \|f_1\|_{r+m,l}^Q + \|f\|_{r+m,l}^Q + |u|_{r,0}^Q).$$

Как и выше, буквой C обозначаем положительные константы, не зависящие от u , f и Ω .

На основании (13) и (15) имеем

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{r+m,l}^Q &\leq C \sum_{\alpha q = m} \left\{ |a_\alpha(\xi') - a_\alpha(x)|_{0,0}^Q ([D^\alpha u]_{r,l}^Q + |D^\alpha u|_{r,0}^Q) \right. \\ &\quad + \sum_{0 < i < l} |a_\alpha(\xi') - a_\alpha(x)|_{0,i}^Q [D^\alpha u]_{r,l-i}^Q \\ &\quad \left. + \sum_{0 \leq i < l} [a_\alpha(\xi') - a_\alpha(x)]_{0,l-i}^Q |D^\alpha u|_{r,i}^Q \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma = \min\{l - i : i \in \mathbb{Z}_q, 0 \leq i < l\}$, $\delta = d(\partial\Omega, \partial Q)$. Понятно, что $\delta \geq d(\partial\Omega, \xi') - d(\xi', \partial Q) \geq (1/2 - \lambda)d_\xi$. Учитывая лемму 3, заключаем

$$\begin{aligned} |a_\alpha(\xi') - a_\alpha(x)|_{0,0}^Q &\leq C \sup_{x \in Q} d^\sigma(\xi', x) [a_\alpha]_\sigma^Q \leq C (\lambda d_\xi)^\sigma [a_\alpha]_\sigma^Q \\ &\leq C \left(\frac{\lambda d_\xi}{\delta} \right)^\sigma \|a_\alpha\|_{0,\sigma}^\Omega \leq C \left(\frac{2\lambda}{1-2\lambda} \right)^\sigma \|a_\alpha\|_{0,\sigma}^\Omega. \end{aligned}$$

Полунормы $|a_\alpha(\xi') - a_\alpha(x)|_{0,i}^Q$ при $0 < i < l$ и $[a_\alpha(\xi') - a_\alpha(x)]_{0,l-i}^Q$ при $0 \leq i < l$ мажорируются величиной $C \|a_\alpha\|_{0,l}^\Omega$. Следовательно,

$$\|f_0\|_{r+m,l}^Q \leq C (\varphi(\lambda) [u]_{r,l+m}^Q + [u]_{r,l+m-\sigma}^Q + |u|_{r,0}^Q), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) = 0.$$

Действуя аналогично, находим

$$\|f_1\|_{r+m,l}^Q \leq C ([u]_{r,l+m-\sigma}^Q + |u|_{r,0}^Q).$$

Таким образом,

$$[u]_{r,l+m}^Q \leq C (\varphi(\lambda) [u]_{r,l+m}^Q + [u]_{r,l+m-\sigma}^Q + |u|_{r,0}^Q + \|f\|_{r+m,l}^Q).$$

Выберем λ так, чтобы $C\varphi(\lambda) < 1/2$, а полунорму $[u]_{r,l+m-\sigma}$ оценим через $[u]_{r,l+m}$ и $|u|_{r,0}$ при помощи интерполяционного неравенства с достаточно малым ε . В итоге получим

$$[u]_{r,l+m}^Q \leq C (\|f\|_{r+m,l}^Q + |u|_{r,0}^Q).$$

Подставляя эту оценку в (20), приходим к выводу:

$$M \leq C(\lambda) (\|f\|_{r+m,l}^\Omega + |u|_{r,0}^\Omega).$$

В случае (ii) очевидно выполнено неравенство

$$\begin{aligned} M &\leq C d_\xi^{l+m+r} (\lambda d_\xi)^{\gamma q - l - m} |D^\gamma u(\xi' + te^j) - D^\gamma u(\xi')| \\ &\leq C \lambda^{\gamma q - l - m} d_\xi^{\gamma q + r} |D^\gamma u|_0^{P_\xi} \leq C(\lambda) |u|_{r,\gamma q}^\Omega. \end{aligned}$$

Сопоставив оба случая, получим, что всегда

$$[u]_{r,l+m}^\Omega \leq C(\lambda) (|u|_{r,\gamma q}^\Omega + \|f\|_{r+m,l}^\Omega + |u|_{r,0}^\Omega).$$

Доказательство легко завершается применением (13) к полунорме $|u|_{r,\gamma q}$, поскольку $\gamma q < l + m$. Теорема доказана.

Для полного соответствия с теориями эллиптических и параболических уравнений остается доказать теорему о локальном повышении гладкости решений при улучшении дифференциальных свойств коэффициентов и правой части уравнения (19).

ТЕОРЕМА 5. Пусть уравнение (19) равномерно квазиэллиптически в Ω , l – положительное q -нецелое число, а β – такой мультииндекс, что все производные $D^\gamma a_\alpha$ и $D^\gamma f$ порядков $\gamma \leq \beta$ принадлежат соответственно пространствам $C_{m-\alpha q+\gamma q}^{l\nu}(\Omega)$ и $C_{r+m+\gamma q}^{l\nu}(\Omega)$ с некоторым $r \geq 0$. Если $u(x)$ – решение (19) из класса $C_r^{(l+m)\nu}(\Omega)$, то существуют производные $D^\gamma u$ порядков $\gamma \leq \beta$, принадлежащие $C_{r+\gamma q}^{(l+m)\nu}(\Omega)$ и удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{\gamma \leq \beta} \|D^\gamma u\|_{r+\gamma q, l+m}^\Omega \leq C \left\{ \sum_{\gamma \leq \beta} \|D^\gamma f\|_{r+m+\gamma q, l}^\Omega + \|u\|_{r, 0}^\Omega \right\},$$

константа C в котором не зависит от u , f и Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по β . При $\beta = 0$ данная теорема сводится к предыдущей. Предположим, что утверждение теоремы верно при всех $\beta < \mu$ ($\mu > 0$), и установим его справедливость для $\beta = \mu$.

Разложим μ в сумму $\mu = \beta + e^j$ и, пользуясь индуктивным предположением, применим операцию D^β к обеим частям уравнения (19). Получится соотношение вида

$$\begin{aligned} L(x, D)D^\beta u &= D^\beta f(x) + \sum_{\gamma < \beta} \sum_{\alpha q \leq m} k_{\beta, \gamma} D^{\beta-\gamma} a_\alpha(x) \cdot D^\alpha D^\gamma u \\ &\stackrel{\text{def}}{=} D^\beta f(x) + \sum_{\gamma < \beta} L_{\beta, \gamma}(x, D)D^\gamma u. \end{aligned}$$

Возьмем произвольную ограниченную область Q , содержащуюся в Ω вместе с замыканием. Для каждой заданной в Ω функции $\varphi(x)$ имеет смысл разностное отношение

$$\varphi^h(x) = \frac{\varphi(x + he^j) - \varphi(x)}{h},$$

определенное в Q при всех достаточно малых $|h|$. В частности, $u^h(x)$ всюду в Q удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L(x, D)D^\beta u^h = D^\beta f^h - L^h(x, D)D^\beta u + \sum_{\gamma < \beta} (L_{\beta, \gamma}(x, D)D^\gamma u^h + L_{\beta, \gamma}^h(x, D)D^\gamma u).$$

Подобно тому, как это было сделано при доказательстве леммы 3, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \|D^\beta f^h\|_{r+m+\mu q, l}^Q &\leq C (\|D^\mu f\|_{r+m+\mu q, l}^\Omega + \|D^\beta f\|_{r+m+\beta q, l}^\Omega), \\ \|L^h D^\beta u\|_{r+m+\mu q, l}^Q &\leq C \|D^\beta u\|_{r+\beta q, l+m}^\Omega, \\ \|L_{\beta, \gamma} D^\gamma u^h\|_{r+m+\mu q, l}^Q &\leq C (\|D^\gamma D_j u\|_{r+\gamma q+q_j, l+m}^\Omega + \|D^\gamma u\|_{r+\gamma q, l+m}^\Omega), \\ \|L_{\beta, \gamma}^h D^\gamma u\|_{r+m+\mu q, l}^Q &\leq C \|D^\gamma u\|_{r+\gamma q, l+m}^\Omega. \end{aligned}$$

Константа C не зависит от Q и остается ограниченной при $h \rightarrow 0$. Применяя теорему 4 к уравнению для $D^\beta u^h$ и учитывая индуктивное предположение, получаем

$$\|D^\beta u^h\|_{r+\mu q, l+m}^Q \leq C \left\{ \sum_{\gamma \leq \mu} \|D^\gamma f\|_{r+m+\gamma q, l}^\Omega + |u|_{r, 0}^\Omega + |D^\beta u^h|_{r+\mu q, 0}^Q \right\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |D^\beta u^h|_{r+\mu q, 0}^Q &\leq C \{ |D^\beta D_j u|_{r+\mu q, 0}^\Omega + |D^\beta u|_{r+\mu q, 0}^\Omega \} \\ &\leq C \{ |D^\beta u|_{r+\mu q - q_j, q_j}^\Omega + |D^\beta u|_{r+\mu q, 0}^\Omega \} \leq C \|D^\beta u\|_{r+\beta q, l+m}^\Omega. \end{aligned}$$

Вновь обращаясь к индуктивному предположению, заключаем

$$\|D^\beta u^h\|_{r+\mu q, l+m}^Q \leq C \left\{ \sum_{\gamma \leq \mu} \|D^\gamma f\|_{r+m+\gamma q, l}^\Omega + \|u\|_{r, 0}^\Omega \right\}. \quad (21)$$

Таким образом, семейство функций $\{D^\beta u^h\}$ равномерно ограничено в пространстве $C_{r+\mu q}^{(l+m)\nu}(Q)$ и, следовательно, компактно в $C^{(\lambda+m)\nu}(G)$ для всякого $\lambda < l$ и любой подобласти G , содержащейся в Q вместе с замыканием. В силу известного свойства гёльдеровских пространств отсюда непосредственно вытекает существование производной $D^\beta D_j u = D^\mu u$, принадлежащей $C_{r+\mu q}^{(l+m)\nu}(Q)$ и удовлетворяющей тому же самому неравенству (21), что и $D^\beta u^h$. Подставим $D^\mu u$ в (21) и перейдем к супремуму по $Q \subset \Omega$. Учитывая лемму 4, получаем утверждение теоремы для $\beta = \mu$.

Список литературы

1. Волевич Л. Р. Об одном классе гипоеллиптических систем // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 6. С. 1275–1278.
2. Волевич Л. Р. Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Матем. сб. 1962. Т. 59 (доп). С. 3–52.
3. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. P. 623–727. Русский перевод: Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. М.: ИЛ, 1962.
4. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Труды МИАН. 1965. V. 83. P. 3–163.
5. Белоносов В. С. Внутренние оценки решений квазипараболических систем // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. № 1. С. 20–35.
6. Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators. I, II. Berlin: Springer-Verlag, 1983. Русский перевод: Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1, 2. М.: Мир, 1986.
7. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
8. Giusti E. Equazioni quasi ellittiche e spazi $\mathcal{L}^{p, \theta}(\Omega, \delta)$. I // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1967. V. 75. P. 313–353.
9. Успенский С. В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности // Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13. № 3. С. 665–678.

10. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964.
11. *Филатов П. С.* О локальных свойствах решений уравнений квазиэллиптического типа // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1986. С. 110–126.
12. *Miranda С.* Equazioni alle derivate parziali di tipo elliptico. Berlin: Springer-Verlag, 1955. Русский перевод: *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск

Поступила в редакцию
24.11.1998