Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Панкратов, И. Д. Чуешов, Усреднение аттракторов нелинейных гиперболических уравнений с асимптотически вырождающимися коэффициентами, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 9, 99–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:44:33

УДК 517.953

Л. С. Панкратов, И. Д. Чуешов

Усреднение аттракторов нелинейных гиперболических уравнений с асимптотически вырождающимися коэффициентами

В ограниченной области Ω рассматривается нелинейная начально-краевая задача для гиперболического уравнения с диссипацией:

$$u_{tt}^\varepsilon + \delta u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(a^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) + f(u^\varepsilon) = h^\varepsilon(x),$$

где $\delta > 0$, а коэффициент $a^\varepsilon(x)$ имеет порядок $\varepsilon^{3+\gamma}$ ($0 \leq \gamma < 1$) на объединении сферических оболочек толщины $d_\varepsilon = d\varepsilon^{2+\gamma}$. Оболочки периодически с периодом ε расположены в области Ω . Вне указанного множества $a^\varepsilon(x) \equiv 1$. Изучено асимптотическое поведение решений задачи и ее глобального аттрактора при $\varepsilon \rightarrow 0$. Показано, что усреднение задачи на любом конечном интервале времени приводит к системе двух уравнений: нелинейного гиперболического уравнения и связанного с ним обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Установлено, что глобальный аттрактор допредельной задачи в определенном смысле стремится к слабому глобальному аттрактору усредненной задачи.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Введение

Рассматривается нелинейная начально-краевая задача для гиперболического уравнения с диссипацией

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - L_\varepsilon u^\varepsilon + f(u^\varepsilon) = h^\varepsilon(x), & x \in \Omega, \quad t > 0; \\ u^\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0; \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x), \quad u_t^\varepsilon(x, 0) = u_1^\varepsilon(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

где δ – положительный параметр, а L_ε – дифференциальный оператор второго порядка с переменными коэффициентами вида

$$L_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Предполагается, что функция $a^\varepsilon(x)$ зависит от параметра ε и имеет порядок $\varepsilon^{3+\gamma}$ ($0 \leq \gamma < 1$) на объединении Θ_ε сферических оболочек G_ε^α толщины $d_\varepsilon = d\varepsilon^{2+\gamma}$.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Министерства науки Украины и фонда INTAS (грант № 96-1061).

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке Министерства науки Украины и Международной научно-образовательной программы (ISEP) (грант QSU081221).

Оболочки периодически с периодом ε расположены в ограниченной области Ω . На множестве $\Omega \setminus \Theta_\varepsilon$ функция $a^\varepsilon(x)$ постоянна и равна единице. При каждом $\varepsilon > 0$ эта функция строго положительна и ограничена. Задача (1.1) представляет собой простейшую модель нелинейных акустических колебаний в сильно неоднородной среде (ср. [1]). Области, окруженные оболочками G_ε^α , интерпретируются как ловушки.

Целью данной работы является изучение асимптотического поведения решений задачи (1.1) и ее глобального аттрактора $\mathcal{A}_\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а также влияния предельного перехода к усредненной модели на динамику при больших значениях времени.

В работе показано, что усреднение задачи (1.1) на любом конечном интервале времени приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} - b_0 \Delta u + b_1(u - v) + f(u) = h_1(x), & x \in \Omega, \quad t > 0; \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial v}{\partial t} + b_2(v - u) + f(v) = h_2(x), & x \in \Omega, \quad t > 0; \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

где коэффициенты b_k ($k = 0, 1, 2$) вычисляются через решения ячеечных задач и параметры структуры. Для достаточно больших $\delta > 0$ установлено также существование у задачи (1.2) глобального аттрактора $\mathcal{A}$ (определения и основные факты см., например, в [2]–[5]) и показано, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon$ допредельной задачи (1.1) в определенном смысле стремится к $\mathcal{A}$. Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ наблюдается усреднение не только решений задачи (1.1) на конечных временах, но и глобальных аттракторов – объектов, описывающих предельную (при $t \rightarrow +\infty$) динамику системы.

Впервые задача усреднения глобальных аттракторов нелинейных эволюционных уравнений была рассмотрена в работе [6] для случая полулинейных параболических уравнений на римановых многообразиях усложняющейся структуры. В работе [6] был развит подход, позволяющий, во-первых, улавливать эффект асимптотического расщепления решения на два компонента, а во-вторых, получить равномерные оценки допредельных аттракторов. Эти оценки, в свою очередь, дали возможность воспользоваться некоторыми идеями, относящимися к проблеме асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений (см., например, [2], [7]), и доказать усредняемость глобальных аттракторов. Впоследствии этот подход был применен в [8] для изучения задачи усреднения полулинейных параболических асимптотически вырождающихся уравнений. Однако подход, представленный в [6] (см. также [8]), весьма существенным образом использует свойство параболическости исходных уравнений и не применим к диссипативным возмущениям, подобным (1.1), волнового уравнения. Доказательство свойства усредняемости аттракторов для задачи (1.1) потребовало развития иных подходов. Эти подходы носят достаточно общий характер и применимы к другим классам нелинейных диссипативных гиперболических уравнений в сильно неоднородных средах. Например, можно было бы рассмотреть соответствующие гиперболические аналоги параболических уравнений, исследованных в [6], [8]. Кроме того, условие Дирихле на внешней части границы может быть заменено условием Неймана

либо третьим краевым условием. Здесь мы сосредотачиваемся на задаче (1.1) в основном ради определенности и некоторых упрощений при построении тестовых функций (см. §5).

Заметим, что усреднение краевых задач для эволюционных уравнений с невырождающимся эллиптическим оператором изучалось многими авторами (см., например, [1], [9]–[11], где содержится обширная библиография). Укажем также на работу [12] и лекцию [13], в которых обсуждаются некоторые линейные параболические задачи усреднения, приводящие фактически к асимптотическому расщеплению уравнений. Методы, представленные в [12], [13], существенно опираются на технику преобразования Лапласа и не применимы в нелинейном случае.

§ 2. Формулировка основных результатов

Пусть Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) с достаточно гладкой границей. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} G_\varepsilon^\alpha &= \{x \in \Omega : r_\varepsilon - d_\varepsilon < |x - x^\alpha| < r_\varepsilon\}, \\ B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon) &= \{x \in \Omega : |x - x^\alpha| < r_\varepsilon - d_\varepsilon\}, \\ \Theta_\varepsilon &= \bigcup_{\alpha \in N_\varepsilon} G_\varepsilon^\alpha, \quad \Xi_\varepsilon = \bigcup_{\alpha \in N_\varepsilon} B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon), \quad \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\Theta_\varepsilon \cup \Xi_\varepsilon), \end{aligned}$$

где $x^\alpha = \alpha\varepsilon$ ($\alpha \in \mathbb{Z}^n$) и N_ε – множество мультииндексов таких, что G_ε^α входит в Ω вместе с содержащими их ячейками со стороны ε ; $r_\varepsilon = r\varepsilon$ ($r < 1/4$); $d_\varepsilon = d\varepsilon^{2+\gamma}$ ($0 \leq \gamma < 1$).

В области Ω рассматривается начально-краевая задача (1.1). Коэффициент $a^\varepsilon(x)$ в операторе L_ε определяется следующим образом:

$$a^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \setminus \Theta_\varepsilon; \\ a_\varepsilon \equiv a\varepsilon^{3+\gamma} \ (a > 0), & x \in \Theta_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.1)$$

Предположим, что функция $f(u) \in C^2(\mathbb{R})$ обладает свойствами:

$$B_0 \equiv \sup\{|f'(u)| : u \in \mathbb{R}\} < \infty \quad (2.2)$$

и существуют положительные постоянные B_1, B_2 такие, что

$$uf(u) \geq B_1 u^2 - B_2, \quad (2.3)$$

$$F(u) \equiv \int_0^u f(\xi) d\xi \geq B_1 u^2 - B_2. \quad (2.4)$$

Определим основные функциональные пространства. Пусть $H^s(O)$ – соболевское пространство порядка s на области O . Ниже $\|\cdot\|_{s,O}$ – норма в $H^s(O)$. Обозначим через $H_0^1(\Omega)$ подпространство в $H^1(\Omega)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$, и через $H^2(\varepsilon, \Omega)$ пространство, содержащее функции $u(x) \in H_0^1(\Omega)$,

которые принадлежат пространствам $H^2(\Omega_\varepsilon)$, $H^2(\Theta_\varepsilon)$, $H^2(\Xi_\varepsilon)$ и обладают свойствами:

$$\begin{cases} (u)^+ = (u)^-, & x \in \partial B_\alpha(r_\varepsilon); \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ = a_\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^-, & x \in \partial B_\alpha(r_\varepsilon); \\ (u)^+ = (u)^-, & x \in \partial B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon); \\ a_\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^-, & x \in \partial B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon), \end{cases}$$

где $\alpha \in N_\varepsilon$ и через “ $\pm$ ” мы обозначаем значения функций $u(x)$ и их нормальных производных на внешней (внутренней) поверхности $\partial B_\alpha(r_\varepsilon)$ (или $\partial B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)$). Заметим, что $H^2(\varepsilon, \Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением, порождаемым нормой

$$\langle u \rangle_{\varepsilon, \Omega}^2 = \|u\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u, u) + \|L_\varepsilon u\|_\Omega^2, \quad (2.5a)$$

где

$$a_\varepsilon(u, u) = \frac{1}{2} \{ \|\nabla u\|_{\Omega_\varepsilon}^2 + a_\varepsilon \|\nabla u\|_{\Theta_\varepsilon}^2 + \|\nabla u\|_{\Xi_\varepsilon}^2 \}. \quad (2.5b)$$

Здесь и далее $(\cdot, \cdot)_O$ и $\|\cdot\|_O$ – скалярное произведение и норма в пространстве $L^2(O)$, где O – некоторая область в $\mathbb{R}^n$. Для описания свойств двухкомпонентных функций привлекаются также следующие пространства:

$$\begin{aligned} E_0 &= L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), & E &= H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ E_1 &= H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), & E_2(\varepsilon) &= H^2(\varepsilon, \Omega) \times H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Использование стандартной схемы (см., например, [14; гл. 1]), опирающейся на принцип компактности и метод Галёркина, позволяет получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. i) Пусть $h^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$ и $y_0^\varepsilon(x) = (u_0^\varepsilon(x), u_1^\varepsilon(x)) \in E$. Тогда для каждого конечного интервала $[0, T]$ задача (1.1) имеет единственное решение $u^\varepsilon(x, t)$ такое, что $y^\varepsilon(x, t) = (u^\varepsilon(x, t), u_t^\varepsilon(x, t)) \in C(0, T; E)$. Здесь и ниже $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.

ii) Пусть $h^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$ и $y_0^\varepsilon(x) = (u_0^\varepsilon(x), u_1^\varepsilon(x)) \in E_2(\varepsilon)$. Тогда решение $u^\varepsilon(x, t)$ обладает свойствами $y^\varepsilon(x, t) = (u^\varepsilon(x, t), u_t^\varepsilon(x, t)) \in C(0, T; E_2(\varepsilon))$, $u_{tt}^\varepsilon(x, t) \in C(0, T; L^2(\Omega))$.

Теорема 2.1 позволяет, в частности, определить эволюционный оператор S_t^ε в пространстве E по формуле $S_t^\varepsilon y_0^\varepsilon = y^\varepsilon(t)$, где $y^\varepsilon(t) = (u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t))$, $u^\varepsilon(x, t)$ – решение задачи (1.1), $y_0^\varepsilon(x) = (u_0^\varepsilon(x), u_1^\varepsilon(x))$.

Следующее утверждение описывает поведение при больших значениях времени динамической системы (S_t^ε, E) , порождаемой оператором S_t^ε в пространстве E .

ТЕОРЕМА 2.2. Динамическая система (S_t^ε, E) для любого $\varepsilon > 0$ обладает компактным глобальным аттрактором, т.е. существует компактное множество $\mathcal{A}_\varepsilon$ в пространстве E такое, что $S_t^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon$ при $t \geq 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \{ \text{dist}_E(S_t^\varepsilon v, \mathcal{A}_\varepsilon) : v \in B \} = 0$$

для любого ограниченного множества $B \subset E$. Аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет конечную хаусдорфову размерность и принадлежит пространству $E_2(\varepsilon)$. При условии $\sup_{\varepsilon > 0} \|h^\varepsilon\|_\Omega < +\infty$ для полных траекторий $\{y^\varepsilon(t) = (u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t)), t \in \mathbb{R}\}$, лежащих на аттракторе $\mathcal{A}_\varepsilon$, справедлива оценка

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{\varepsilon, \Omega}^2 + \|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_t^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t)) + \|u_{tt}^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq C, \quad (2.6)$$

где $-\infty < t < \infty$, а постоянная C не зависит от ε .

Для простоты будем предполагать, что $0 \in \Omega$. Пусть K — куб в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \frac{1}{2r}, i = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad 0 < r < \frac{1}{4},$$

а $B = \{x \in K : |x| < 1\}$ — единичный шар в кубе K . В области $P = K \setminus B$ определим функции $v_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), которые являются решениями следующих ячеечных задач:

$$\begin{cases} \Delta v_i = 0, & x \in P = K \setminus \overline{B}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial \nu} = \nu_i, & x \in \partial B; \\ v_i(x), Dv_i(x) & \text{— } K\text{-периодические,} \end{cases} \quad (2.7)$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — вектор внешней нормали к B . Известно, что эта задача имеет единственное решение $v_i(x)$ (с точностью до произвольной постоянной), лежащее в $H^2(P)$ и дважды непрерывно дифференцируемое в P вплоть до внутренней границы ∂B (см., например, [11]).

Пусть $\{x^\alpha = \alpha\varepsilon, \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$ — периодическая решетка в пространстве $\mathbb{R}^n$, а Q_ε — линейный интерполяционный оператор, определенный следующим образом. Мы полагаем

$$(Q_\varepsilon u)(x^\alpha) = \frac{1}{m_\varepsilon} \int_{B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon) \cap \Omega} u(x) dx, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n,$$

где m_ε — объем шара $B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)$ радиуса $(r_\varepsilon - d_\varepsilon)$ с центром в точке x^α . В целом $Q_\varepsilon u$ представляет собой полилинейный сплайн

$$(Q_\varepsilon u)(x) = \sum_{\alpha} (Q_\varepsilon u)(x^\alpha) \prod_{j=1}^n \chi\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - \alpha_j\right),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\chi(\tau) = 0$ при $|\tau| > 1$ и $\chi(\tau) = 1 - |\tau|$, когда $|\tau| \leq 1$. Ясно, что при каждом $\varepsilon > 0$ Q_ε — линейный ограниченный оператор из $L^2(\Omega)$ в $H^1(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\|Q_\varepsilon u\|_{\mathbb{R}^n} \leq C \|u\|_\Omega, \quad u \in L^2(\Omega), \quad (2.8)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от ε .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что семейство $\{w^\varepsilon(x)\} \in L^2(\Omega)$ сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к двухкомпонентной функции $w(x) = (w_1(x), w_2(x)) \in E_0$ в пространстве $L^2(\Omega_\varepsilon, \Xi_\varepsilon)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|w^\varepsilon - w_1\|_{\Omega_\varepsilon} + \|w^\varepsilon - w_2\|_{\Xi_\varepsilon}) = 0.$$

Пусть $P_\varepsilon: H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\Omega)$ – линейный оператор продолжения из Ω_ε в Ω такой, что

$$\|P_\varepsilon u\|_\Omega \leq C\|u\|_{\Omega_\varepsilon}, \quad \|P_\varepsilon u\|_{1,\Omega} \leq C\|u\|_{1,\Omega_\varepsilon},$$

где постоянная C не зависит от ε и $P_\varepsilon u = u$ на Ω_ε для $u \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.

Структура области Ω_ε позволяет легко построить такой оператор продолжения.

Первым основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ – решение начально-краевой задачи (1.1). Предположим, что выполнены следующие условия:

- i) для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ $u_0^\varepsilon(x) \in H^2(\varepsilon, \Omega)$, $u_1^\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$, $h^\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \langle u_0^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, \Omega}^2 + \|u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon) + \|\nabla Q_\varepsilon u_0^\varepsilon\|_\Omega^2 \\ + \|\nabla Q_\varepsilon u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|h^\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 + \|\nabla Q_\varepsilon h^\varepsilon\|_\Omega^2 \leq C, \end{aligned}$$

где C обозначает некоторую постоянную, которая не зависит от ε ;

- ii) существуют двухкомпонентные функции $U_i(x) = (u_i, v_i)$ ($i = 0, 1$) и $H(x) = (h_1, h_2)$, принадлежащие пространству E_0 , причем $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, такие, что функции $u_i^\varepsilon(x)$ ($i = 0, 1$) и $h^\varepsilon(x)$ сходятся к ним в пространстве $L^2(\Omega_\varepsilon, \Xi_\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тогда на любом отрезке $[0, T]$ решение задачи (1.1) $u^\varepsilon(x, t)$ сходится к слабому (см. теорему 2.4) решению $\{u(t), v(t)\}$ задачи (1.2) в следующем смысле:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{[0, T]} \{ \|P_\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon(t) - u(t)\|_\Omega + \|P_\varepsilon \tilde{u}_t^\varepsilon(t) - u_t(t)\|_\Omega \} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{[0, T]} \{ \|Q_\varepsilon u^\varepsilon(t) - v(t)\|_\Omega + \|Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(t) - v_t(t)\|_\Omega \} &= 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{w}$ – сужение функции w на область Ω_ε . Коэффициенты b_k ($k = 0, 1, 2$) в системе (1.2) вычисляются через решения ячеечных задач (2.7) и параметры структуры:

$$b_0 = 1 - \frac{r^n}{1 - \mu} \|\nabla v_1\|_P^2, \quad b_1 = \frac{b_2 \mu}{1 - \mu}, \quad \mu = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2 + 1)}, \quad b_2 = \frac{an}{rd},$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

Следующая теорема является теоремой существования и единственности слабого решения системы (1.2). Ее доказательство, как и в случае начально-краевой задачи (1.1), опирается на принцип компактности и метод Галёркина.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть выполнены условия (2.2)–(2.4) и $Y_0 = (y_0, z_0) \in E \times E_0$, где $y_0 = (u_0, u_1)$, $z_0 = (v_0, v_1)$. Тогда система уравнений (1.2) имеет единственное решение $\{u(x, t), v(x, t)\}$ такое, что вектор-функция $Y(t) = (y(t); z(t))$, где $y(t) = (u(t), u_t(t))$, $z(t) = (v(t), v_t(t))$, принадлежит пространству $C(\mathbb{R}_+, E \times E_0)$. Если $Y_0 = (y_0; z_0) \in E \times E_1$, то $Y(t) \in C(\mathbb{R}_+, E \times E_1)$.

Эта теорема позволяет определить эволюционный оператор S_t в пространстве $E \times E_1$ по формуле $S_t Y_0 = Y(t)$, где $Y(t) = (y(t); z(t))$ – решение задачи (1.2), $y(t) = (u(t), u_t(t))$, $z(t) = (v(t), v_t(t))$ и $Y_0 = (y_0; z_0)$, $y_0 = (u_0, u_1)$, $z_0 = (v_0, v_1)$. Имеет место следующее утверждение о существовании глобального аттрактора полугруппы S_t в пространстве $E \times E_1$.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть выполнены условия (2.2)–(2.4), $h_1(x) \in L^2(\Omega)$, $h_2(x) \in H^1(\Omega)$ и

$$b_2 + \inf_u \left\{ f'(u) - \frac{4}{\delta^2} |f'(u)|^2 \right\} > 0. \quad (2.9)$$

Тогда динамическая система $(S_t, E \times E_1)$, порождаемая задачей (1.2), обладает слабым глобальным аттрактором $\mathcal{A}$.

Напомним (см. [2], [4]), что слабый глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы (S_t, H) , где H – гильбертово пространство, является ограниченным слабо замкнутым множеством в пространстве H таким, что (i) $S_t \mathcal{A} = \mathcal{A}$ для любого $t > 0$ и (ii) для любой слабой окрестности O множества $\mathcal{A}$ и для любого ограниченного множества $B \subset H$ имеет место $S_t B \subset O$, когда $t \geq t_0(B, O)$.

Отметим, что условие (2.9) выполняется для достаточно больших $\delta > 0$, если $b_2 + \inf_u f'(u) > 0$. Подобное условие возникает и в параболическом случае (см. [6]) при доказательстве существования глобального аттрактора.

Наконец, используя теоремы 2.2, 2.3 и 2.5, мы докажем второй основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть выполнены условия теоремы 2.5 и предположения теоремы 2.3, относящиеся к $h^\varepsilon(x)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{y^\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \left\{ \inf_{(y, z) \in \mathcal{A}} (\|P_\varepsilon \tilde{y}^\varepsilon - y\|_{E_0}^2 + \|Q_\varepsilon y^\varepsilon - z\|_{E_0}^2) \right\} = 0,$$

где “ $\sim$ ” обозначает операцию сужения на Ω_ε .

Эта теорема означает, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon$ задачи (1.1) стремится к слабому глобальному аттрактору $\mathcal{A}$ усредненной модели (1.2).

§3. Доказательство теоремы 2.2

Задача (1.1) в пространстве $H = L^2(\Omega)$ может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} u^\varepsilon + \delta \frac{d}{dt} u^\varepsilon + \Lambda_\varepsilon u^\varepsilon + B(u^\varepsilon) = h^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon, \quad \frac{d}{dt} u^\varepsilon|_{t=0} = u_1^\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь Λ_ε – самосопряженный положительный оператор с дискретным спектром, определяемый соотношениями

$$D(\Lambda_\varepsilon) = H^2(\varepsilon, \Omega), \quad \Lambda_\varepsilon u = -L_\varepsilon u + \frac{B_1}{2}u,$$

где B_1 – постоянная, фигурирующая в (2.3) и (2.4). Нелинейное отображение $B(u)$ задается формулой

$$B(u) = f(u) - \frac{B_1}{2}u.$$

Оно является производной Фреше функционала

$$G(u) = (F(u), 1)_H - \frac{B_1}{4}\|u\|_H^2.$$

При этом справедливы оценки (ср. (2.2)–(2.4)):

$$\begin{aligned} \|B(u_1) - B(u_2)\|_H &\leq C_1\|u_1 - u_2\|_H, \\ G(u) &\geq C_2\|u\|_H^2 - C_3, \quad (B(u), u)_H \geq C_2\|u\|_H^2 - C_3, \end{aligned}$$

где все константы C_i положительны. Эти свойства позволяют гарантировать существование и конечномерность глобального аттрактора $\mathcal{A}_\varepsilon$ в пространстве E (см., например, [2]–[5]). Что касается принадлежности $\mathcal{A}_\varepsilon$ пространству $E_2(\varepsilon) = D(\Lambda_\varepsilon) \times D(\Lambda_\varepsilon^{1/2})$, то для того чтобы это доказать, можно воспользоваться либо методом, представленным в [2], либо подходом, развитым в [15].

Установим теперь равномерную оценку (2.6) для траекторий, лежащих в $\mathcal{A}_\varepsilon$. Для этого нам понадобятся приведенные ниже леммы. Их доказательства носят формальный характер, однако все рассуждения можно сделать строгими, если воспользоваться галёркинскими аппроксимациями, отвечающими базису собственных функций оператора, задаваемого дифференциальным выражением L_ε на области определения $H^2(\varepsilon, \Omega)$.

ЛЕММА 3.1. *Существует число $R_\varepsilon > 0$ такое, что для любого ограниченного множества $B_\varepsilon \subset E$ имеем $\|S_t^\varepsilon y_0^\varepsilon\|_{\varepsilon, E} \leq R_\varepsilon$ для всех $y_0^\varepsilon \in B_\varepsilon$, $t \geq t_0(B_\varepsilon)$. Здесь $\|\cdot\|_{\varepsilon, E}$ – норма в пространстве $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, определяемая равенством*

$$\|(u, p)\|_{\varepsilon, E} = \|u\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u, u) + \|p\|_\Omega^2,$$

где $a_\varepsilon(u, u)$ имеет вид (2.5b). Радиус диссипативности R_ε равномерно ограничен по ε , если $\|h^\varepsilon\|_\Omega \leq C$ с константой C , не зависящей от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.1) следует, что

$$(u_t^\varepsilon, u_{tt}^\varepsilon)_\Omega + \delta \|u_t^\varepsilon\|_\Omega^2 - (u_t^\varepsilon, L_\varepsilon u^\varepsilon)_\Omega + (u_t^\varepsilon, f(u^\varepsilon) - h^\varepsilon)_\Omega = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{d}{dt} E_\varepsilon(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) + \delta \|u_t^\varepsilon\|_\Omega^2 = 0, \tag{3.1}$$

где $E_\varepsilon(u, p)$ – энергия системы, задаваемая равенством

$$E_\varepsilon(u, p) = \frac{1}{2}\|p\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}a_\varepsilon(u, u) + (F(u), 1)_\Omega - (h^\varepsilon, u)_\Omega.$$

Из (3.1) имеем

$$E_\varepsilon(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) + \delta \int_0^t \|u_t^\varepsilon(\tau)\|_\Omega^2 d\tau = E_\varepsilon(u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon). \quad (3.2)$$

Используя свойства функции $f(u)$, получаем оценку для функции $E_\varepsilon(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))) + C_1\|u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 - C_2 &\leq E_\varepsilon(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) \\ &\leq \frac{1}{2}(\|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))) + C_3\|u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + C_4, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где постоянные C_2 и C_4 зависят от оценок величины $\|h^\varepsilon\|_\Omega^2$. Введем в рассмотрение функцию

$$V_\varepsilon(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) = E_\varepsilon(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) + \frac{\delta}{2}\{(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon)_\Omega + \frac{\delta}{2}\|u^\varepsilon\|_\Omega^2\}. \quad (3.4)$$

Нетрудно заметить, что

$$-\frac{1}{2\delta}\|u_t^\varepsilon\|_\Omega^2 \leq (u^\varepsilon, u_t^\varepsilon)_\Omega + \frac{\delta}{2}\|u^\varepsilon\|_\Omega^2 \leq \frac{1}{2\delta}\|u_t^\varepsilon\|_\Omega^2 + \delta\|u^\varepsilon\|_\Omega^2,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}a_\varepsilon(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + C_1\|u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 - C_2 &\leq V_\varepsilon(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) \\ &\leq \|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}a_\varepsilon(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + (C_3 + \delta^2)\|u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + C_4. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Рассмотрим теперь производную функции $V_\varepsilon(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon)$ по переменной t . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{dV_\varepsilon}{dt} &= \frac{dE_\varepsilon}{dt} + \frac{\delta}{2}\|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \frac{\delta}{2}(u^\varepsilon(t), u_{tt}^\varepsilon(t) + \delta u_t^\varepsilon(t))_\Omega \\ &= -\frac{\delta}{2}\|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 - \frac{\delta}{2}a_\varepsilon(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) - \frac{\delta}{2}(f(u^\varepsilon), u^\varepsilon)_\Omega + \frac{\delta}{2}(h^\varepsilon, u^\varepsilon)_\Omega. \end{aligned}$$

Из этого неравенства в силу свойств функции $f(u)$ и неравенства Коши получаем

$$\frac{dV_\varepsilon}{dt} \leq -\frac{\delta}{2}\|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 - \frac{\delta}{2}a_\varepsilon(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) - \frac{\delta B_1}{4}\|u^\varepsilon\|_\Omega^2 + \frac{\delta}{2}B_2|\Omega| + \frac{B_1\delta}{4}\|h^\varepsilon\|_\Omega^2,$$

где $|\Omega|$ — мера области Ω . В силу (3.5) существует такое ω_0 , не зависящее от ε , что выполняется неравенство

$$\frac{dV_\varepsilon}{dt} + \omega_0 V_\varepsilon \leq D, \quad (3.6)$$

где постоянная D в случае, когда $\|h^\varepsilon\|_\Omega$ допускает равномерную по ε оценку, не зависит от ε . Из (3.5), (3.6) следует, что

$$\|u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \leq D_1\{\|u_0^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon)\}e^{-\omega_0 t} + D_2, \quad (3.7)$$

где постоянные D_1 и D_2 не зависят от ε при условии, что $\|h^\varepsilon\|_\Omega < C$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\|h^\varepsilon\|_\Omega \leq C$, где C не зависит от ε . Тогда существует такое $D > 0$, не зависящее от ε , что для любого ограниченного множества $B_\varepsilon \subset E_2(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\|S_t^\varepsilon y_0^\varepsilon\|_{E_2(\varepsilon)} \leq D$ для всех $y_0^\varepsilon \in B_\varepsilon$, $t \geq t_0(B_\varepsilon)$. Здесь $\|\cdot\|_{E_2(\varepsilon)}$ — норма в пространстве $E_2(\varepsilon)$, определяемая равенством

$$\|(u, p)\|_{E_2(\varepsilon)} = \langle u \rangle_{\varepsilon, \Omega}^2 + \|p\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(p, p), \quad (3.8)$$

где $\langle \cdot \rangle_{\varepsilon, \Omega}^2$ имеет вид (2.5а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.1 вытекает, что функция $w^\varepsilon(t) = u_t(t)$ является слабым решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} - L_\varepsilon w^\varepsilon + f'(u^\varepsilon)w^\varepsilon = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0; \\ w^\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0; \\ w^\varepsilon(x, 0) = u_1^\varepsilon(x), \quad w_t^\varepsilon(x, 0) = -\delta u_1^\varepsilon + L_\varepsilon u_0^\varepsilon - f(u_0^\varepsilon) + h^\varepsilon \equiv w_1^\varepsilon(x), \\ & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.9)$$

При этом справедливо равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|w_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(w^\varepsilon, w^\varepsilon) \} + \delta \|w_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + (f'(u^\varepsilon)w^\varepsilon(t), w_t^\varepsilon(t))_\Omega = 0.$$

Отсюда в силу свойства (2.2) функции $f(u)$ имеем, что

$$\frac{d}{dt} \{ \|w_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(w^\varepsilon, w^\varepsilon) \} + \delta \|w_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq \frac{B_0^2}{\delta} \|w^\varepsilon(t)\|_\Omega^2. \quad (3.10)$$

Пусть

$$\begin{aligned} V_\varepsilon^1(w^\varepsilon, w_t^\varepsilon) &= \frac{1}{2} \{ \|w_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(w^\varepsilon(t), w^\varepsilon(t)) + \|w^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \} \\ &\quad + \kappa_1 \left\{ (w^\varepsilon, w_t^\varepsilon)_\Omega + \frac{\delta}{2} (w^\varepsilon, w^\varepsilon)_\Omega \right\}, \end{aligned}$$

где κ_1 — некоторый положительный параметр, который будет выбран ниже. Как и при доказательстве леммы 3.1, легко видеть, что для функции $V_\varepsilon^1(w^\varepsilon, w_t^\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa_1}{2\delta} \right) \|w_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} a_\varepsilon(w^\varepsilon(t), w^\varepsilon(t)) + \frac{1}{2} \|w^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq V_\varepsilon^1(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa_1}{2\delta} \right) \|w_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} a_\varepsilon(w^\varepsilon(t), w^\varepsilon(t)) + \left(\frac{1}{2} + \delta\kappa_1 \right) \|w^\varepsilon(t)\|_\Omega^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

С помощью (3.9) и (3.10) находим, что

$$\frac{dV_\varepsilon^1}{dt} \leq - \left(\frac{\delta}{4} - \kappa_1 \right) \|w_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \left(\frac{B_0^2}{2\delta} + \frac{1}{\delta} + B_0\kappa_1 \right) \|w^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 - \kappa_1 a_\varepsilon(w^\varepsilon, w^\varepsilon).$$

Из этого неравенства и (3.11) следует существование положительных констант κ_1, κ_2, C_0 , не зависящих от ε и таких, что

$$\frac{dV_\varepsilon^1}{dt} + \kappa_2 V_\varepsilon^1 \leq C_0 \|w^\varepsilon\|_\Omega^2. \quad (3.12)$$

Поэтому

$$V_\varepsilon^1(w^\varepsilon, w_t^\varepsilon) \leq V_\varepsilon^1(w^\varepsilon(0), w_t^\varepsilon(0))e^{-\kappa_2 t} + C_0 \int_0^t e^{-\kappa_2(t-\tau)} \|w^\varepsilon(\tau)\|_\Omega^2 d\tau. \quad (3.13)$$

Отсюда и из неравенства (3.7) получаем

$$\|u_{tt}^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) \leq V_\varepsilon^1(u_1^\varepsilon, w_1^\varepsilon)e^{-\kappa_2 t} + C_1(\|u_0^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon))e^{-\kappa_3 t} + C_2, \quad (3.14)$$

где положительные постоянные $C_1, C_2, \kappa_2, \kappa_3$ не зависят от ε . Поскольку из (1.1) следует, что

$$\|L_\varepsilon u^\varepsilon\|_\Omega \leq \|u_{tt}^\varepsilon\|_\Omega + \delta \|u_t^\varepsilon\|_\Omega + \|h^\varepsilon\|_\Omega + B_0 \|u^\varepsilon\|_\Omega + |f(0)| |\Omega|,$$

мы получаем окончательно

$$\begin{aligned} & \|u_{tt}^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \langle u^\varepsilon(t) \rangle_{\varepsilon, \Omega}^2 + \|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_t^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t)) \\ & \leq D_1(\langle u_0^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, \Omega}^2 + \|u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon))e^{-\omega_1 t} + D_2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где положительные константы D_1, D_2, ω_1 не зависят от ε . Отсюда вытекает утверждение леммы 3.2.

Лемма 3.2 и соотношение (3.15) позволяют получить оценку (2.6) и завершить доказательство теоремы 2.2.

§ 4. Дополнительные равномерные оценки

В этом параграфе установлены некоторые дополнительные оценки решений задачи (1.1), играющие важную роль при доказательстве предельного расщепления исходного уравнения.

Пусть P_ε – линейный оператор продолжения из Ω_ε в Ω , определенный в § 2. Предположим также, что условия (i)–(ii) теоремы 2.3 выполнены. Тогда из (3.15) следует, что решение $u^\varepsilon(x, t)$ задачи (1.1) удовлетворяет оценке

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{\Omega_\varepsilon}^2 + \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{\Omega_\varepsilon}^2 + \|u_t^\varepsilon(t)\|_{\Omega_\varepsilon}^2 + \|\nabla u_t^\varepsilon(t)\|_{\Omega_\varepsilon}^2 + \|u_{tt}^\varepsilon(t)\|_{\Omega_\varepsilon}^2 \leq C_1, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

где постоянная C_1 не зависит от ε . Поэтому имеем

$$\|P_\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla P_\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|P_\varepsilon \tilde{u}_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla P_\varepsilon \tilde{u}_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|P_\varepsilon \tilde{u}_{tt}^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq C_2, \quad (4.2)$$

где, как и в теореме 2.3, волна означает операцию сужения функции на область Ω_ε . Оценки (4.1) и (2.8) позволяют также утверждать, что для всех $t > 0$

$$\|Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|Q_\varepsilon u_{tt}^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq C_3. \quad (4.3)$$

Основным результатом этого параграфа является теорема 4.1, дающая равномерную оценку величины $\|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon\|_\Omega + \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon\|_\Omega$. Эта теорема и оценки (4.2), (4.3) позволят извлечь из $\{P_\varepsilon u^\varepsilon\}$ и $\{Q_\varepsilon u^\varepsilon\}$ сходящиеся подпоследовательности и совершить предельный переход в соотношениях (1.1).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &= \{x \in \Omega : r_\varepsilon - d_\varepsilon < |x| < r_\varepsilon\}; \quad B(r_\varepsilon - d_\varepsilon) = \{x \in \Omega : |x| < r_\varepsilon - d_\varepsilon\}; \\ B(2r_\varepsilon) &= \{x \in \Omega : |x| < 2r_\varepsilon\}; \quad \Pi_\varepsilon = \{x \in \Omega : r_\varepsilon < |x| < 2r_\varepsilon\}; \\ u_\alpha^\varepsilon(x, t) &= u^\varepsilon(x^\alpha + x, t), \quad u_{j,\alpha}^\varepsilon(x) = u_j^\varepsilon(x^\alpha + x), \\ x^\alpha &= \alpha\varepsilon, \quad \alpha \in N_\varepsilon, \quad x \in B(2r_\varepsilon), \quad j = 0, 1; \\ u_\alpha^{\varepsilon, \text{in}}(t) &= \frac{1}{\text{Vol}(B(r_\varepsilon - d_\varepsilon))} \int_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} u_\alpha^\varepsilon(x, t) dx; \\ u_{j,\alpha}^{\varepsilon, \text{in}} &= \frac{1}{\text{Vol}(B(r_\varepsilon - d_\varepsilon))} \int_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} u_{j,\alpha}^\varepsilon(x) dx; \\ u_\alpha^{\varepsilon, \text{ex}}(t) &= \frac{1}{\text{Vol}(\Pi_\varepsilon)} \int_{\Pi_\varepsilon} u_\alpha^\varepsilon(x, t) dx; \quad u_{j,\alpha}^{\varepsilon, \text{ex}} = \frac{1}{\text{Vol}(\Pi_\varepsilon)} \int_{\Pi_\varepsilon} u_{j,\alpha}^\varepsilon(x) dx, \end{aligned}$$

где $u^\varepsilon(x, t)$ – решение задачи (1.1). Мы также используем обозначения:

$$\begin{aligned} w^\varepsilon &\equiv w_{\alpha\beta}^\varepsilon(x, t) = u_\alpha^\varepsilon(x, t) - u_\beta^\varepsilon(x, t), \\ w_j^\varepsilon &\equiv w_{j,\alpha\beta}^\varepsilon(x) = u_{j,\alpha}^\varepsilon(x) - u_{j,\beta}^\varepsilon(x), \quad x \in B(2r_\varepsilon), \quad \alpha, \beta \in N_\varepsilon; \\ w^\# &= w_{\alpha\beta}^\#(t) = u_\alpha^{\varepsilon, \#}(t) - u_\beta^{\varepsilon, \#}(t), \\ w_j^\# &= w_{j,\alpha\beta}^\# = u_{j,\alpha}^{\varepsilon, \#} - u_{j,\beta}^{\varepsilon, \#}, \quad \alpha, \beta \in N_\varepsilon, \quad j = 0, 1, \end{aligned}$$

где $\#$ или “in”, или “ex”.

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.3. Тогда для любого $T > 0$ справедлива оценка*

$$\|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq C \quad (4.4)$$

при $t \in [0, T]$, где постоянная $C = C_T$ не зависит от ε . Если при этом выполнено условие (2.9), то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ для любой траектории $y^\varepsilon(t) = (u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t))$, лежащей в аттракторе $\mathcal{A}_\varepsilon$ задачи (1.1), оценка (4.4) имеет место для всех $-\infty < t < \infty$ с константой C , не зависящей от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $v^\varepsilon(x)$, определенную на множестве $B(2r_\varepsilon)$ посредством следующего соотношения

$$v^\varepsilon(x) = \begin{cases} \lambda_1^\varepsilon \rho^2, & x \in \Pi_\varepsilon; \\ l_1^\varepsilon \rho^{2-n} + l_2^\varepsilon, & x \in G_\varepsilon; \\ 1 + \lambda_2^\varepsilon \rho^2, & x \in B(r_\varepsilon - d_\varepsilon), \end{cases} \quad (4.5)$$

где $\rho = |x|$. Коэффициенты λ_i^ε и l_i^ε ($i = 1, 2$) в (4.5) выберем из следующих условий

$$\begin{cases} (v^\varepsilon)^+ = (v^\varepsilon)^-, & \rho = r_\varepsilon; \\ \left(\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \rho}\right)^+ = a_\varepsilon \left(\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \rho}\right)^-, & \rho = r_\varepsilon; \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} (v^\varepsilon)^+ = (v^\varepsilon)^-, & \rho = r_\varepsilon - d_\varepsilon; \\ a_\varepsilon \left(\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \rho}\right)^+ = \left(\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \rho}\right)^-, & \rho = r_\varepsilon - d_\varepsilon, \end{cases} \quad (4.7)$$

где через “+” обозначено значение функции $v^\varepsilon(x)$ и ее производной на внешней поверхности $\partial B(r_\varepsilon)$ (или $\partial B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)$), а через “-” — значение функции $v^\varepsilon(x)$ и ее производной на внутренней поверхности $\partial B(r_\varepsilon)$ (или $\partial B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)$). Ясно, что $\Delta v^\varepsilon(x) = 0$ при $x \in G_\varepsilon$. Функция $v^\varepsilon(x)$ является моделью поведения решения задачи (1.1) в окрестности множества G_ε . Вычислив коэффициенты в явном виде, легко проверить, что $|v^\varepsilon(x)| \leq 1$ в шаре $B(2r_\varepsilon)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_2^\varepsilon = -\frac{a}{2rd}. \quad (4.8)$$

Введем также функцию $V^\varepsilon(x)$, определенную на шаре $B(2r_\varepsilon)$ формулой

$$V^\varepsilon(x) = v^\varepsilon(x) - 4\lambda_1^\varepsilon r_\varepsilon^2. \quad (4.9)$$

Легко проверить, что из (1.1) следует равенство

$$\frac{d^2 k^\varepsilon}{dt^2}(t) + \delta \frac{dk^\varepsilon}{dt}(t) + (I_{\alpha\beta}^\varepsilon(t) - 2n\lambda_2^\varepsilon)k^\varepsilon(t) = \Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t), \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} k^\varepsilon(t) &\equiv k_{\alpha\beta}^\varepsilon(t) = \int_{B(2r_\varepsilon)} w^\varepsilon(x, t) V^\varepsilon(x) dx, \quad M_\varepsilon = \int_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} V^\varepsilon(x) dx, \\ I_{\alpha\beta}^\varepsilon(t) &= \frac{1}{M_\varepsilon} \int_0^1 d\xi \int_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} f'(u_\beta^\varepsilon(x, t) + \xi(u_\alpha^\varepsilon(x, t) - u_\beta^\varepsilon(x, t))) V^\varepsilon(x) dx, \\ \Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t) &= \left\{ \int_{B(2r_\varepsilon)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^\varepsilon(x) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i} \right) V^\varepsilon(x) dx - 2n\lambda_2^\varepsilon \int_{B(2r_\varepsilon)} w^\varepsilon(x, t) V^\varepsilon(x) dx \right\} \\ &+ \left\{ I_{\alpha\beta}^\varepsilon(t) \int_{B(2r_\varepsilon)} w^\varepsilon(x, t) V^\varepsilon(x) dx - \int_{B(2r_\varepsilon)} (f(u_\alpha^\varepsilon(x, t)) - f(u_\beta^\varepsilon(x, t))) V^\varepsilon(x) dx d\tau \right\} \\ &+ \int_{B(2r_\varepsilon)} h_{\alpha\beta}(t)^\varepsilon(x) V^\varepsilon(x) dx \equiv j_1^\varepsilon(t) + j_2^\varepsilon(t) + j_3^\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Дальнейшие рассуждения опираются на следующую лемму (аналогичное утверждение использовалось ранее в работах [6] и [8] для других типов “ловушек”).

ЛЕММА 4.1. Величина $\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)$ допускает оценку

$$|\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)| \leq B_1 \varepsilon^n (|w^{\text{ex}}(t)| + |h^{\varepsilon, \text{in}}| + |h^{\varepsilon, \text{ex}}|) \\ + B_2 \varepsilon^{n/2+1} \{ \|w^\varepsilon\|_{B(2r_\varepsilon)} + \|h_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{1, B(2r_\varepsilon)} + \alpha_\varepsilon(w^\varepsilon, w^\varepsilon) \},$$

где

$$\alpha_\varepsilon(w^\varepsilon, w^\varepsilon) = \|\nabla w^\varepsilon\|_{\Pi_\varepsilon} + d_\varepsilon^{1/2} \|\nabla w^\varepsilon\|_{G_\varepsilon} + \|\nabla w^\varepsilon\|_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)},$$

а постоянные B_i ($i = 1, 2$) не зависят от ε ; $h_{\alpha\beta}^\varepsilon(x)$, $h^{\varepsilon, \text{ex}}$ и $h^{\varepsilon, \text{in}}$ определяются так же, как и $w_{\alpha\beta}^\varepsilon(x, t)$, $w^{\varepsilon, \text{ex}}(t)$ и $w^{\varepsilon, \text{in}}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Укажем основные этапы рассуждений (ср. с доказательством леммы 4.3 из работы [6], где данная схема рассуждений подробно изложена для ситуации, близкой к рассматриваемой в данной работе). Рассмотрим первое слагаемое в (4.11). Ясно, что $V^\varepsilon(x) = 0$ при $x \in \partial B(2r_\varepsilon)$ и $\Delta V^\varepsilon(x) = 0$ при $x \in G_\varepsilon$. В силу свойств решения задачи (1.1), а также (4.6), (4.7) имеем

$$j_1^\varepsilon(t) = \int_{\Pi_\varepsilon} w^\varepsilon \Delta V^\varepsilon dx - 2n\lambda_2^\varepsilon \int_{\Pi_\varepsilon \cup G_\varepsilon} w^\varepsilon V^\varepsilon dx \\ + \int_{\partial B(2r_\varepsilon)} w^\varepsilon \frac{\partial V^\varepsilon}{\partial \nu} d\sigma + \int_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} w^\varepsilon \cdot (\Delta V^\varepsilon - 2n\lambda_2^\varepsilon V^\varepsilon) dx, \quad (4.12)$$

где ν — вектор нормали, направленный к центру шара $B(2r_\varepsilon)$. Нетрудно показать, что для произвольной функции $\phi(x)$ из $H^1(G_\varepsilon \cup \Pi_\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\|\phi\|_{G_\varepsilon}^2 \leq C \{ \varepsilon^{n+1+\gamma} |\phi^{\text{ex}}|^2 + \varepsilon^{3+\gamma} \|\nabla \phi\|_{\Pi_\varepsilon}^2 + \varepsilon^{4+2\gamma} \|\nabla \phi\|_{G_\varepsilon}^2 \}, \quad (4.13)$$

где постоянная C не зависит от ε . Поэтому из (4.12) для первого слагаемого в (4.11) получаем оценку

$$|j_1^\varepsilon(t)| \leq C_1 \varepsilon^n |w^{\text{ex}}(t)| + C_2 \varepsilon^{n/2+2} [\|w^\varepsilon\|_{\Pi_\varepsilon} + \|w^\varepsilon\|_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)}] \\ + C_3 \varepsilon^{n/2+1} [\|\nabla w^\varepsilon\|_{\Pi_\varepsilon} + \varepsilon^{3/2+3\gamma/2} \|\nabla w^\varepsilon\|_{G_\varepsilon}]. \quad (4.14)$$

Рассмотрим второе слагаемое в (4.11). Имеем

$$j_2^\varepsilon(t) = - \int_{\Pi_\varepsilon} (f(u_\alpha^\varepsilon) - f(u_\beta^\varepsilon)) V^\varepsilon(x) dx - \int_{G_\varepsilon} (f(u_\alpha^\varepsilon) - f(u_\beta^\varepsilon)) V^\varepsilon(x) dx \\ + \left\{ - \int_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} (f(u_\alpha^\varepsilon) - f(u_\beta^\varepsilon)) V^\varepsilon(x) dx + w^{\text{in}}(t) I_{\alpha\beta}^\varepsilon(t) \int_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} V^\varepsilon(x) dx \right\} \\ + I_{\alpha\beta}^\varepsilon(t) \left\{ - w^{\text{in}}(t) \int_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} V^\varepsilon(x) dx + \int_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} w^\varepsilon(x, t) V^\varepsilon(x) dx \right\}. \quad (4.15)$$

Заметим, что из положительности $V^\varepsilon(x)$ в шаре $B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$ следует равномерная по ε оценка для величины $I_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)$:

$$\inf_u f'(u) \leq I_{\alpha\beta}^\varepsilon(t) \leq \sup_u f'(u). \quad (4.16)$$

Поэтому в силу неравенств (2.2) и (4.13) из представления (4.15) имеем

$$|j_2^\varepsilon(t)| \leq C_4 \varepsilon^{n+1+\gamma} |w^{\text{ex}}| + C_5 \varepsilon^{n/2+2} \|w^\varepsilon\|_{\Pi_\varepsilon} + C_6 \varepsilon^{n/2+1} [\varepsilon^{1+\gamma} \|\nabla w^\varepsilon\|_{\Pi_\varepsilon} + \varepsilon^{3/2+3\gamma/2} \|\nabla w^\varepsilon\|_{G_\varepsilon} + \|\nabla w^\varepsilon\|_{2, B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)}]. \quad (4.17)$$

Аналогично для третьего слагаемого в (4.11) имеем

$$|j_3^\varepsilon(t)| \leq C_7 \varepsilon^n (\varepsilon^{1+\gamma} |h^{\varepsilon, \text{ex}}| + |h^{\varepsilon, \text{in}}|) + C_8 \varepsilon^{n/2+2} \|h_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{\Pi_\varepsilon} + C_9 \varepsilon^{n/2+1} [\varepsilon^{1+\gamma} \|\nabla h_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{\Pi_\varepsilon} + \varepsilon^{3/2+3\gamma/2} \|\nabla h_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{G_\varepsilon} + \|\nabla h_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)}]. \quad (4.18)$$

Теперь утверждение леммы следует из оценок (4.14), (4.17), (4.18). Лемма доказана.

Обозначим $b_{2,\varepsilon} = -2n\lambda_2^\varepsilon > 0$ и перепишем уравнение (4.10) в виде

$$\frac{d^2 k^\varepsilon}{dt^2}(t) + \delta \frac{dk^\varepsilon}{dt}(t) + b_{2,\varepsilon} k^\varepsilon(t) + I_{\alpha\beta}^\varepsilon(t) k^\varepsilon(t) = \Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t). \quad (4.19)$$

Рассмотрим функцию вида

$$H^\varepsilon(k^\varepsilon, k_t^\varepsilon) = \frac{1}{2} \{ (k_t^\varepsilon)^2 + b_{2,\varepsilon} (k^\varepsilon)^2 \} + \frac{\delta}{4} \left\{ k^\varepsilon k_t^\varepsilon + \frac{\delta}{2} (k^\varepsilon)^2 \right\}.$$

Она допускает двустороннюю оценку

$$\frac{1}{4} (k_t^\varepsilon)^2 + \frac{\delta^2}{16} (k^\varepsilon)^2 \leq H^\varepsilon(k^\varepsilon, k_t^\varepsilon) \leq \frac{3}{4} (k_t^\varepsilon)^2 + \frac{1}{2} \left(b_{2,\varepsilon} + \frac{3\delta^2}{8} \right) (k^\varepsilon)^2. \quad (4.20)$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве лемм 3.1 и 3.2, с помощью (4.19) легко получить, что

$$\begin{aligned} \frac{dH^\varepsilon}{dt} &\leq -\frac{\delta}{4} (k_t^\varepsilon)^2 - \frac{\delta}{4} \left(b_{2,\varepsilon} + I_{\alpha\beta}^\varepsilon(t) - \frac{4}{\delta^2} [I_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)]^2 - \frac{\theta}{2} \right) (k^\varepsilon)^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{8\theta} \right) (\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t))^2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где θ — любое положительное число. Поэтому в силу (4.20) существует такое число κ , что имеет место неравенство

$$\frac{dH^\varepsilon}{dt} + \kappa H^\varepsilon \leq C (\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t))^2, \quad (4.22)$$

где постоянная C не зависит от ε . При этом если выполнено условие (2.9), то из (4.21) и (4.16) вытекает, что параметр $\theta > 0$ можно выбрать так, чтобы величина κ была положительной. Из (4.22) с учетом (4.20) получаем, что

$$[k^\varepsilon(t)]^2 + [k_t^\varepsilon(t)]^2 \leq C_1 ([k^\varepsilon(0)]^2 + [k_t^\varepsilon(0)]^2) e^{-\kappa t} + C_2 \int_0^t e^{-\kappa(t-\tau)} (\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(\tau))^2 d\tau, \quad (4.23)$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от ε , причем $\kappa > 0$ при условии (2.9).

Для $k^\varepsilon(0)$ и $k_t^\varepsilon(0)$ справедливы оценки

$$|k^\varepsilon(0)| \leq C_3 \varepsilon^n (|w_0^{\text{ex}}| + |w_0^{\text{in}}|) + C_4 \varepsilon^{n/2+1} \{\|w_0^\varepsilon\|_{B(2r_\varepsilon)} + \alpha_\varepsilon(w_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)\}, \quad (4.24)$$

$$|k_t^\varepsilon(0)| \leq C_5 \varepsilon^n (|w_1^{\text{ex}}| + |w_1^{\text{in}}|) + C_6 \varepsilon^{n/2+1} \{\|w_1^\varepsilon\|_{B(2r_\varepsilon)} + \alpha_\varepsilon(w_1^\varepsilon, w_1^\varepsilon)\}. \quad (4.25)$$

Рассмотрим теперь $\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)$. Из леммы 4.1 следует, что

$$|\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)|^2 \leq C_7 \varepsilon^{2n} \{|w_{\alpha\beta}^{\text{ex}}(t)|^2 + |h_{\alpha\beta}^{\varepsilon, \text{in}}|^2 + |h_{\alpha\beta}^{\varepsilon, \text{ex}}|^2\} + C_8 \varepsilon^{n+2} (\Upsilon_\alpha^\varepsilon + \Upsilon_\beta^\varepsilon),$$

где

$$\Upsilon_j^\varepsilon = \|u^\varepsilon\|_{B_j(2r_\varepsilon)}^2 + \|\nabla u^\varepsilon\|_{\Pi_\varepsilon^j}^2 + \|\nabla u^\varepsilon\|_{B_j(r_\varepsilon - d_\varepsilon)}^2 + \varepsilon^{3+\gamma} \|\nabla u^\varepsilon\|_{G_\varepsilon^j}^2 + \|h^\varepsilon\|_{1, B_j(2r_\varepsilon)}^2.$$

Здесь $B_j(2r_\varepsilon) = j\varepsilon + B(2r_\varepsilon)$, $\Pi_\varepsilon^j = j\varepsilon + \Pi_\varepsilon$, $G_\varepsilon^j = j\varepsilon + G_\varepsilon$, $B_j(r_\varepsilon - d_\varepsilon) = j\varepsilon + B(r_\varepsilon - d_\varepsilon)$ и $j \in N_\varepsilon$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^{-n} [\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)]^2 &\leq C_9 \varepsilon^2 \{\|u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \|h^\varepsilon\|_{1, \Omega}^2\} \\ &+ C_{10} \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^n \{|u_\alpha^{\varepsilon, \text{ex}}(t) - u_\beta^{\varepsilon, \text{ex}}(t)|^2 + |h_\alpha^{\varepsilon, \text{ex}} - h_\beta^{\varepsilon, \text{ex}}|^2 + |h_\alpha^{\varepsilon, \text{in}} - u_\beta^{\varepsilon, \text{in}}|^2\}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $\sigma(\alpha) = \bar{\sigma}(\alpha) \cap N_\varepsilon$ и $\bar{\sigma}(\alpha)$ — множество в $\mathbb{Z}^n$ ближайших к α узлов. Нетрудно проверить, что

$$\sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^n |\phi_\alpha^{\varepsilon, \text{ex}} - \phi_\beta^{\varepsilon, \text{ex}}|^2 \leq C_{11} \varepsilon^2 \|\nabla \phi^\varepsilon\|_{\Omega_\varepsilon}^2, \quad (4.27)$$

$$C_{12} \varepsilon^2 \|\nabla Q_\varepsilon \phi^\varepsilon\|_\Omega^2 \leq \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^n |\phi_\alpha^{\varepsilon, \text{in}} - \phi_\beta^{\varepsilon, \text{in}}|^2 \leq C_{13} \varepsilon^2 \|\nabla Q_\varepsilon \phi^\varepsilon\|_\Omega^2, \quad (4.28)$$

где постоянные C_{11}, C_{12}, C_{13} не зависят от ε , а в качестве ϕ^ε можно брать функции $u^\varepsilon(x, t)$, $h^\varepsilon(x)$, $u_0^\varepsilon(x)$, $u_1^\varepsilon(x)$. Используя эти оценки, получаем, что

$$\sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^{-n} [\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)]^2 \leq C_{14} \varepsilon^2 \{\|u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \|h^\varepsilon\|_{1, \Omega}^2 + \|\nabla Q_\varepsilon h^\varepsilon\|_\Omega^2\}.$$

Поэтому из (3.7) вытекает, что

$$\sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^{-n} [\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)]^2 \leq C_{15} \varepsilon^2 \{(\|u_0^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon)) e^{-\omega_0 t} + 1\}. \quad (4.29)$$

Используя теперь (4.28) с функцией $u^\varepsilon(x, t)$, получаем неравенство

$$\varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon|^2 dx \leq C_{16} \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \frac{\varepsilon^n}{M_\varepsilon^2} \{(k_{\alpha\beta}^\varepsilon(t))^2 + (w_{\alpha\beta}^{\text{in}} M_\varepsilon - k_{\alpha\beta}^\varepsilon(t))^2\}. \quad (4.30)$$

Поскольку

$$|w^{\varepsilon, \text{in}}(t) M_\varepsilon - k^\varepsilon(t)|^2 \leq C_{17} \varepsilon^{2n} |w^{\varepsilon, \text{ex}}(t)|^2 + C_{18} \varepsilon^{n+2} \{\|w^\varepsilon(t)\|_{B(2r_\varepsilon)}^2 + a_\varepsilon(w^\varepsilon, w^\varepsilon)\},$$

мы имеем

$$\sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \frac{\varepsilon^n}{M_\varepsilon^2} |w_{\alpha\beta}^{\varepsilon, \text{in}}(t) M_\varepsilon - k_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)|^2 \leq C_{19} \varepsilon^2 \{ \|u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \}. \quad (4.31)$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\varepsilon^2 \|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq C_{20} \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^{-n} (k_{\alpha\beta}^\varepsilon(t))^2 + C_{21} \varepsilon^2 \{ \|u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \}.$$

Аналогично

$$\varepsilon^2 \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq C_{22} \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^{-n} [\partial_t k_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)]^2 + C_{23} \varepsilon^2 \{ \|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) \}.$$

Следовательно, используя (3.15), получаем, что

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 (\|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2) \\ & \leq C_{24} \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^{-n} \{ (k_{\alpha\beta}^\varepsilon(t))^2 + [\partial_t k_{\alpha\beta}^\varepsilon(t)]^2 \} \\ & \quad + C_{25} \varepsilon^2 [(\langle u_0^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, \Omega} + \|u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon)) e^{-\omega_1 t} + 1], \end{aligned}$$

где $\omega_1 > 0$. Поэтому (4.23) дает, что

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 (\|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2) \\ & \leq C_{26} \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^{-n} e^{-\kappa t} \{ (k_{\alpha\beta}^\varepsilon(0))^2 + [\partial_t k_{\alpha\beta}^\varepsilon(0)]^2 \} \\ & \quad + C_{27} \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \sum_{\beta \in \sigma(\alpha)} \varepsilon^{-n} \int_0^t e^{-\kappa(t-\tau)} [\Psi_{\alpha\beta}^\varepsilon(\tau)]^2 d\tau \\ & \quad + C_{28} \varepsilon^2 [(\langle u_0^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, \Omega} + \|u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon)) e^{-\omega_1 t} + 1]. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (4.24), (4.25), (4.28) и (4.29) находим, что

$$\begin{aligned} & \|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \\ & \leq D_1 e^{-\kappa t} \{ \langle u_0^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, \Omega} + \|u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon) + \|\nabla Q_\varepsilon u_0^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 \} \\ & \quad + D_2 \int_0^t e^{-\kappa(t-\tau)} \{ 1 + (\|u_0^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|u_1^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon)) e^{-\omega_0 \tau} \} d\tau + D_3, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $\kappa > 0$ при условии (2.9). Из (4.32) вытекает оценка (4.4).

Рассмотрим теперь траектории $u^\varepsilon(t)$, лежащие в аттракторе $\mathcal{A}_\varepsilon$ задачи (1.1). Так как при условии (2.9) $\kappa > 0$, то из оценок (4.32) и (2.6) следует, что для любой траектории $(u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t)) \in \mathcal{A}_\varepsilon$ мы имеем

$$\|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq D_4 + D_5 e^{-\kappa(t-s)} (1 + \|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon(s)\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(s)\|_\Omega^2) \quad (4.33)$$

для всех $t \geq s$. Согласно определению полилинейного сплайна Q_ε и (2.6) имеем

$$\begin{aligned}\|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon(s)\|_\Omega &\leq D_6(\varepsilon)\|u^\varepsilon(s)\|_\Omega \leq D_7(\varepsilon), \quad -\infty < s < \infty, \\ \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(s)\|_\Omega &\leq D_8(\varepsilon)\|u_t^\varepsilon(s)\|_\Omega \leq D_9(\varepsilon), \quad -\infty < s < \infty.\end{aligned}$$

Следовательно, устремляя s к $-\infty$ в неравенстве (4.33), получаем равномерную оценку (4.4) на аттракторе. Теорема 4.1 доказана.

Отметим, что теоремы 4.1 и 2.2 при условии (2.9) дают следующую равномерную оценку для траектории $\{y^\varepsilon(t) = (u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t)) : t \in \mathbb{R}\}$, лежащей на аттракторе $\mathcal{A}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\langle u^\varepsilon(t) \rangle_{\varepsilon, \Omega}^2 + \|u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u_t^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t)) + \|u_{tt}^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \\ + \|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|Q_\varepsilon u_{tt}^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq C,\end{aligned}\quad (4.34)$$

где $-\infty < t < \infty$, а постоянная C не зависит от ε .

§ 5. Доказательство теоремы 2.3

Пусть $U_\varepsilon(x, t) = P_\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon(x, t)$ и $V_\varepsilon(x, t) = Q_\varepsilon u^\varepsilon(x, t)$, где $u^\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (1.1). Тогда в условиях теоремы 2.3 из оценок (4.2)–(4.4) следует, что семейство $\{U_\varepsilon(x, t); V_\varepsilon(x, t)\}$ компактно при $\varepsilon \rightarrow 0$ в пространстве $C^1(0, T; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$. В этом параграфе мы докажем, что пара функций $(u(x, t); v(x, t)) \in C^1(0, T; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$, которая является предельной точкой $\{(U_\varepsilon(x, t); V_\varepsilon(x, t)) : \varepsilon \rightarrow 0\}$, есть решение задачи (1.2).

Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (1.1). Тогда для любой функции ϕ^ε вида $\phi^\varepsilon(x, t) = b(t)z_\varepsilon(x)$, где $b(t) \in C^1(0, T)$, $b(T) = 0$, $z_\varepsilon(x) \in H^2(\varepsilon, \Omega)$, выполняется следующее интегральное тождество

$$I_\varepsilon(u^\varepsilon; \phi^\varepsilon; \Omega_\varepsilon) + I_\varepsilon(u^\varepsilon; \phi^\varepsilon; \Xi_\varepsilon) + I_\varepsilon(u^\varepsilon; \phi^\varepsilon; \Theta_\varepsilon) = 0. \quad (5.1)$$

Здесь

$$I_\varepsilon(u^\varepsilon; \phi^\varepsilon; \Omega_\varepsilon) = i_\varepsilon(u^\varepsilon; \phi^\varepsilon; \Omega_\varepsilon) - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon(x, t) \Delta \phi^\varepsilon(x, t) dx dt, \quad (5.2)$$

$$I_\varepsilon(u^\varepsilon; \phi^\varepsilon; \Xi_\varepsilon) = i_\varepsilon(u^\varepsilon; \phi^\varepsilon; \Xi_\varepsilon) - \int_0^T \int_{\Xi_\varepsilon} u^\varepsilon(x, t) \Delta \phi^\varepsilon(x, t) dx dt, \quad (5.3)$$

$$I_\varepsilon(u^\varepsilon; \phi^\varepsilon; \Theta_\varepsilon) = i_\varepsilon(u^\varepsilon; \phi^\varepsilon; \Theta_\varepsilon) - a_\varepsilon \int_0^T \int_{\Theta_\varepsilon} u^\varepsilon(x, t) \Delta \phi^\varepsilon(x, t) dx dt, \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned}i_\varepsilon(u^\varepsilon; \phi^\varepsilon; O) &= - \int_O (u_1^\varepsilon(x) + \delta u_0^\varepsilon(x)) \phi^\varepsilon(x, 0) dx - \int_0^T \int_O u_t^\varepsilon(x, t) \phi_t^\varepsilon(x, t) dx dt \\ &\quad - \delta \int_0^T \int_O u^\varepsilon(x, t) \phi_t^\varepsilon(x, t) dx dt + \int_0^T \int_O (f(u^\varepsilon) - h^\varepsilon(x)) \phi^\varepsilon(x, t) dx dt.\end{aligned}$$

Покроем область Ω кубами $K_\alpha(\varepsilon + \kappa)$ с центрами в точках $x^\alpha \in \Omega$ и стороной $\varepsilon + \kappa$, $\kappa = o(\varepsilon)$, $\kappa > 0$, ориентированными вдоль координатных осей. Будем

предполагать, что шар $B_\alpha(r_\varepsilon)$ находится внутри $K_\alpha(\varepsilon + \kappa)$ и имеет тот же центр. Свяжем с этим покрытием разбиение единицы $\{\psi_\alpha(x)\}$: $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$; $\psi_\alpha(x) = 0$ при $x \notin K_\alpha(\varepsilon + \kappa)$; $\psi_\alpha(x) = 1$ при $x \in K_\alpha(\varepsilon + \kappa) \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta(\varepsilon + \kappa)$; $\sum_\alpha \psi_\alpha(x) = 1$ при $x \in \Omega$; $|\nabla \psi_\alpha(x)| \leq A\kappa^{-1}$.

Пусть $v_i(x)$ — функции из $C^2(K) \cap H_{\text{рег}}^2(K)$, являющиеся в области $P = K \setminus B$ решением ячеечной задачи (2.7). Рассмотрим функцию $v_{i\varepsilon}(x) = r_\varepsilon v_i(x/r_\varepsilon)$ в $r_\varepsilon K$ и продолжим ее периодически на все $\mathbb{R}^n$. Пусть $w_{i\varepsilon}^\alpha(x) = x_i - x_i^\alpha - v_{i\varepsilon}(x)$ и пусть $\omega(x) = \bar{\omega}(|x|)$ — функция из пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что: $0 \leq \omega(x) \leq 1$; $\bar{\omega}(\rho) = 1$ при $\rho \leq r$; $\bar{\omega}(\rho) = 0$ при $\rho \geq 2r$.

Функцию $z_\varepsilon(x)$ выберем в виде

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(x) = & \sum_\alpha \left\{ \zeta(x^\alpha) + \varphi_\varepsilon(x) \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}(x^\alpha) w_{i\varepsilon}^\alpha(x) \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_j}(x^\alpha) w_{i\varepsilon}^\alpha(x) w_{j\varepsilon}^\alpha(x) \left. \left. \right] \right\} \psi_\alpha(x) \\ & + \sum_\alpha (\eta(x^\alpha) - \zeta(x^\alpha)) v^\varepsilon(x - x^\alpha) \omega\left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь $\zeta(x)$ и $\eta(x)$ — гладкие финитные функции в области Ω , функция $v^\varepsilon(x)$ определена соотношением (4.5), а $\varphi_\varepsilon(x) \in C^2(\Omega)$ такова, что

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_\varepsilon; \\ 0, & x \in \Xi_\varepsilon = \bigcup_\alpha B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon), \end{cases}$$

и $|D^k \varphi_\varepsilon| < A d_\varepsilon^{-k}$ ($k = 1, 2$). Ясно, что $z_\varepsilon(x) \in H^2(\Omega, \varepsilon)$ и $\max_{x \in \Omega} |z_\varepsilon(x)| < C$, где C не зависит от ε . Рассмотрим другие свойства функции $z_\varepsilon(x)$.

ЛЕММА 5.1. *Функция $z_\varepsilon(x)$ такова, что*

$$\int_\Omega |L_\varepsilon z_\varepsilon(x)|^2 dx \leq C, \quad (5.6)$$

где постоянная C не зависит от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим интеграл в левой части (5.6) в виде

$$\begin{aligned} \int_\Omega |L_\varepsilon z_\varepsilon(x)|^2 dx = & \sum_{\alpha\beta} \int_{K_\alpha(\varepsilon+\kappa) \cap K_\beta(\varepsilon+\kappa) \cap \Omega} |L_\varepsilon z_\varepsilon(x)|^2 dx \\ & + \sum_\alpha \int_{K_\alpha(\varepsilon-\kappa) \cap \Omega} |L_\varepsilon z_\varepsilon(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Вначале мы получим оценку для первого члена в равенстве (5.7). Из определения функции $\omega(x)$ следует, что $z_\varepsilon(x)$ на $\bigcup_{\alpha,\beta} K_\alpha(\varepsilon + \kappa) \cap K_\beta(\varepsilon + \kappa)$ имеет вид

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(x) = & \sum_\alpha \left\{ \zeta^\alpha + \sum_{i=1}^n \zeta_{,i}^\alpha (x_i - x_i^\alpha - v_{i\varepsilon}(x)) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \zeta_{,ij}^\alpha (x_i - x_i^\alpha - v_{i\varepsilon}(x))(x_j - x_j^\alpha - v_{j\varepsilon}(x)) \right\} \psi_\alpha(x), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где

$$\zeta^\alpha = \zeta(x^\alpha), \quad \zeta_{,i}^\alpha = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}(x^\alpha), \quad \zeta_{,ij}^\alpha = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_j}(x^\alpha).$$

Пусть $\kappa = \varepsilon^{1+\theta}$. Тогда для любого $0 < \theta < 2/3$ получим, что для произвольно-го $K_\alpha(\varepsilon + \kappa) \cap K_\beta(\varepsilon + \kappa)$

$$\int_{K_\alpha(\varepsilon + \kappa) \cap K_\beta(\varepsilon + \kappa)} |\Delta z_\varepsilon(x)|^2 dx = o(\varepsilon^n). \quad (5.9)$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части (5.7) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Оценим второе слагаемое в (5.7). Рассмотрим множество $K_\alpha(\varepsilon - \kappa) \setminus B_\alpha(2r_\varepsilon)$. На этом множестве $\varpi(\rho) \equiv 0$ при достаточно малых ε . Тогда

$$z_\varepsilon(x) = \zeta^\alpha + \sum_{i=1}^n \zeta_{,i}^\alpha \cdot (x_i - x_i^\alpha - v_{i\varepsilon}(x)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \zeta_{,ij}^\alpha \cdot (x_i - x_i^\alpha - v_{i\varepsilon}(x))(x_j - x_j^\alpha - v_{j\varepsilon}(x))$$

и

$$\Delta z_\varepsilon(x) = \sum_{i,j=1}^n \zeta_{,ij}^\alpha \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - x_i^\alpha - v_{i\varepsilon}(x)) \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j - x_j^\alpha - v_{j\varepsilon}(x)) \right\}.$$

Поэтому структура функций $v_{i\varepsilon}(x)$ дает, что

$$\int_{K_\alpha(\varepsilon - \kappa) \setminus B_\alpha(2r_\varepsilon)} |\Delta z_\varepsilon(x)|^2 dx = O(\varepsilon^n). \quad (5.10)$$

Рассмотрим множество $\Pi_\varepsilon^\alpha = B_\alpha(2r_\varepsilon) \setminus \overline{B}_\alpha(r_\varepsilon)$. На этом множестве $z_\varepsilon(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(x) = & \left\{ \zeta^\alpha + \sum_{i=1}^n \zeta_{,i}^\alpha w_{i\varepsilon}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \zeta_{,ij}^\alpha w_{i\varepsilon}(x) w_{j\varepsilon}(x) \right\} \\ & + \left\{ (\eta^\alpha - \zeta^\alpha) v^\varepsilon(x - x^\alpha) \omega\left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}\right) \right\} \equiv p_1^\varepsilon(x) + p_2^\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\Delta p_1^\varepsilon(x) = \sum_{i,j=1}^n \zeta_{,ij}^\alpha \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - x_i^\alpha - v_{i\varepsilon}(x)) \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j - x_j^\alpha - v_{j\varepsilon}(x)) \right\}.$$

Следовательно, как и в случае (5.10), имеем

$$\int_{\Pi_\varepsilon^\alpha} |\Delta p_1^\varepsilon(x)|^2 dx = O(\varepsilon^n). \quad (5.11)$$

Из определений функций $v^\varepsilon(x)$ и $\omega(x)$ легко следует, что

$$\int_{\Pi_\varepsilon^\alpha} |\Delta p_2^\varepsilon(x)|^2 dx = O(\varepsilon^n). \quad (5.12)$$

Используя свойства функций $\varphi_\varepsilon(x)$ и $v^\varepsilon(x)$ и опираясь на аналогичные рассуждения, находим, что на множестве G_ε^α при $0 \leq \gamma < 1$ справедливо соотношение

$$\int_{G_\varepsilon^\alpha} |a_\varepsilon \Delta z_\varepsilon(x)|^2 dx = o(\varepsilon^n). \quad (5.13)$$

Наконец, в шаре $B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)$ имеем, что

$$\Delta z^\varepsilon = (\eta^\alpha - \zeta^\alpha) \cdot \Delta v^\varepsilon = 2n\lambda_2^\varepsilon(\eta^\alpha - \zeta^\alpha).$$

Поэтому

$$\int_{B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} |\Delta z_\varepsilon(x)|^2 dx = O(\varepsilon^n). \quad (5.14)$$

Утверждение леммы следует из (5.9)–(5.14).

Рассмотрим функции

$$\tilde{z}_\varepsilon(x) = \begin{cases} z_\varepsilon(x), & x \in \Omega_\varepsilon; \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon; \end{cases} \quad \tilde{Z}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \Delta z_\varepsilon(x), & x \in \Omega_\varepsilon; \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

ЛЕММА 5.2. *Функции $\tilde{z}_\varepsilon(x)$ и $\tilde{Z}_\varepsilon(x)$ обладают следующими свойствами сходимости:*

$$\tilde{z}_\varepsilon(x) \rightarrow (1 - \mu)\zeta(x) \quad \text{слабо в } L^2(\Omega), \quad (5.15)$$

и

$$\tilde{Z}_\varepsilon(x) \rightarrow (1 - \mu)b_0\Delta\zeta + b_2\mu(\eta(x) - \zeta(x)) \quad \text{слабо в } L^2(\Omega) \quad (5.16)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь

$$b_0 = 1 - \frac{r^n}{1 - \mu} \|\nabla v_1\|_P^2, \quad \mu = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2 + 1)}, \quad b_2 = \frac{an}{rd}$$

и $\zeta(x)$, $\eta(x)$ — функции, фигурирующие в (5.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (5.15) следует непосредственно из (5.5) и определения функции $v^\varepsilon(x)$.

Докажем утверждение (5.16). Из леммы 5.1 следует, что семейство $\{\tilde{Z}_\varepsilon(x)\}$ ограничено в пространстве $L^2(\Omega)$. Поэтому для любой гладкой функции $\theta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ достаточно рассмотреть интеграл

$$\begin{aligned} \int_\Omega \tilde{Z}_\varepsilon(x) \theta(x) dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta z_\varepsilon(x) \theta(x) dx \\ &= \sum_\alpha \left\{ \int_{K_\alpha(\varepsilon) \setminus B_\alpha(r_\varepsilon)} \theta(x) \sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij}^\alpha \right. \\ &\quad \times \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - x_i^\alpha - v_{i\varepsilon}(x)) \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j - x_j^\alpha - v_{j\varepsilon}(x)) dx \\ &\quad \left. + \int_{\Pi_\varepsilon^\alpha} (\eta^\alpha - \zeta^\alpha) \Delta \left[v^\varepsilon(x - x^\alpha) \omega \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon} \right) \right] \theta(x) dx \right\} + o(1) \end{aligned} \quad (5.17)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Используя свойства решений ячеечной задачи (2.7), имеем

$$\begin{aligned} \int_{K_\alpha(\varepsilon) \setminus B_\alpha(r_\varepsilon)} \theta(x) \sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij}^\alpha \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - x_i^\alpha - v_{i\varepsilon}(x)) \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j - x_j^\alpha - v_{j\varepsilon}(x)) dx \\ = \varepsilon^n (1 - \mu) \theta(x^\alpha) b_0 \sum_{i=1}^n \zeta_{ii}^\alpha + o(\varepsilon^n). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Для второго слагаемого в (5.17) находим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\varepsilon} (\eta^\alpha - \zeta^\alpha) \Delta \left[v^\varepsilon(x - x^\alpha) \omega \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon} \right) \right] \theta(x) dx \\ = -\theta(x^\alpha) (\eta^\alpha - \zeta^\alpha) \int_{\partial B(r_\varepsilon)} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \rho} \cdot \omega \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) d\sigma + o(\varepsilon^n) \\ = b_2 \mu \varepsilon^n \theta(x^\alpha) (\eta^\alpha - \zeta^\alpha) + o(\varepsilon^n). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Утверждение леммы следует из (5.18), (5.19).

Выполним теперь предельный переход в (5.1). Пусть $(u; v)$ – предельная точка семейства $\{(U_\varepsilon(x, t); V_\varepsilon(x, t)) : \varepsilon \rightarrow 0\}$. Тогда существует подпоследовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$, такая, что

$$\max_{[0, T]} \{\|u(t) - U_{\varepsilon_k}(t)\|_\Omega + \|v(t) - V_{\varepsilon_k}(t)\|_\Omega\} \rightarrow 0, \quad (5.20a)$$

$$\max_{[0, T]} \{\|u_t(t) - \partial_t U_{\varepsilon_k}(t)\|_\Omega + \|v_t(t) - \partial_t V_{\varepsilon_k}(t)\|_\Omega\} \rightarrow 0 \quad (5.20b)$$

при $k \rightarrow \infty$. Лемма 5.2 позволяет утверждать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_k}(u^{\varepsilon_k}; z_{\varepsilon_k}(x)b(t); \Omega_{\varepsilon_k}) = (1 - \mu) J_1(u; \eta, \zeta), \quad (5.21)$$

где

$$\begin{aligned} J_1(u; \eta, \zeta) = & - \int_\Omega (u_1(x) + \delta u_0(x)) b(0) \zeta(x) dx \\ & - \int_0^T \int_\Omega (u_t(x, t) + \delta u(x, t)) \zeta(x) b'(t) dx dt \\ & - \int_0^T \int_\Omega u(x, t) \{b_0 \Delta \zeta(x) + b_1 \cdot (\eta(x) - \zeta(x))\} b(t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega (f(u(x, t)) - h_1(x)) \zeta(x) b(t) dt. \end{aligned}$$

Нетрудно также показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_k}(u^{\varepsilon_k}; z_{\varepsilon_k}(x)b(t); \Theta_{\varepsilon_k}) = 0. \quad (5.22)$$

Изучим теперь асимптотическое поведение величины $J_{\varepsilon_k}(u^{\varepsilon_k}; z_{\varepsilon_k}(x)b(t); \Xi_{\varepsilon_k})$. Так как

$$z_\varepsilon(x) = \lambda_2^\varepsilon |x - x_\alpha|^2 \zeta^\alpha + (1 + \lambda_2^\varepsilon |x - x_\alpha|^2) \eta^\alpha$$

при $x \in B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)$, то очевидно, что справедливы неравенства

$$\left| \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \left\{ \int_{B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} f(u^\varepsilon(x, t)) z_\varepsilon(x) dx - f(u_\alpha^{\varepsilon, \text{in}}(t)) \eta(x^\alpha) \text{Vol}(B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)) \right\} \right| \leq C_1 \varepsilon, \quad (5.23)$$

$$\left| \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \left\{ \int_{B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} u^\varepsilon(x, t) z_\varepsilon(x) dx - u_\alpha^{\varepsilon, \text{in}}(t) \eta^\alpha \text{Vol}(B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)) \right\} \right| \leq C_2 \varepsilon \quad (5.24)$$

для всех $t \in [0, T]$ и

$$\left| \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \left\{ \int_{B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} h^\varepsilon(x) z_\varepsilon(x) dx - h^\varepsilon(x^\alpha) \eta^\alpha \text{Vol}(B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)) \right\} \right| \leq C_3 \varepsilon. \quad (5.25)$$

Равенство $\Delta z_\varepsilon = 2n\lambda_2^\varepsilon(\eta^\alpha - \zeta^\alpha)$ при $x \in B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)$ дает также, что

$$\sum_{\alpha \in N_\varepsilon} \int_{B_\alpha(r_\varepsilon - d_\varepsilon)} u^\varepsilon(x, t) \Delta z_\varepsilon(x) dx = b_2 \mu \varepsilon^n \sum_{\alpha \in N_\varepsilon} u_\alpha^{\varepsilon, \text{in}}(t) (\zeta^\alpha - \eta^\alpha) + O(\varepsilon). \quad (5.26)$$

Поэтому из (5.23)–(5.26) в условиях теоремы 2.3 следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_k}(u^{\varepsilon_k}(x, t); b(t) z_{\varepsilon_k}(x); \Xi_\varepsilon) = \mu J_2(v; \eta, \zeta), \quad (5.27)$$

где

$$\begin{aligned} J_2(v; \eta, \zeta) = & - \int_{\Omega} (v_1(x) + \delta v_0(x)) b(0) \eta(x) dx \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} (v_t(x, t) + \delta v(x, t)) \eta(x) b'(t) dx dt \\ & - b_2 \int_0^T \int_{\Omega} v(x, t) (\zeta(x) - \eta(x)) b(t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (f(v(x, t)) - h_2(x)) \eta(x) b(t) dx dt. \end{aligned}$$

Таким образом, из (5.1), (5.21), (5.22) и (5.27) следует, что

$$(1 - \mu) J_1(u; \eta, \zeta) + \mu J_2(v; \eta, \zeta) = 0 \quad (5.28)$$

для любой предельной точки $(u(x, t); v(x, t))$ семейства $\{(U_\varepsilon(x, t); V_\varepsilon(x, t)) : \varepsilon \rightarrow 0\}$. Из (4.2)–(4.4) вытекает, что каждая предельная точка $(u; v)$ обладает свойством

$$(u, u_t; v, v_t) \in C(0, T; E \times E_0).$$

Поэтому (5.28) дает, что $(u; v)$ является слабым решением задачи (1.2). Следовательно, (5.20) и теорема 2.4 позволяют завершить доказательство теоремы 2.3.

§ 6. Слабый глобальный аттрактор усредненной системы

В этом параграфе мы докажем теоремы 2.4 и 2.5. Перепишем систему (1.2) в виде уравнения второго порядка в пространстве $E_0 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$:

$$\frac{d^2}{dt^2}U + \delta \frac{d}{dt}U + AU = B(U), \quad t > 0, \quad U|_{t=0} = U_0, \quad \frac{d}{dt}U \Big|_{t=0} = U_1, \quad (6.1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -b_0\Delta + b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad B(U) = \begin{pmatrix} b_1v - f(u) + h_1 \\ b_2u - f(v) + h_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь A задается на области определения $D(A) = (H^2 \cap H_0^1)(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Легко видеть, что A – положительный самосопряженный оператор в пространстве E_0 такой, что

$$(AU, U)_{E_0} \geq b_0 \|\nabla u\|_\Omega^2 + \lambda \|U\|_{E_0}^2, \quad U \in D(A), \quad (6.2)$$

где $\lambda = \min(b_1; b_2)$, и

$$\|B(U)\|_{E_0} \leq M_1(1 + \|U\|_{E_0}), \quad \|B(U_1) - B(U_2)\|_{E_0} \leq M_2\|U_1 - U_2\|_{E_0}. \quad (6.3)$$

Соотношения (6.2) и (6.3) позволяют воспользоваться методом компактности (см., например, [14]) и доказать существование и единственность решения $U(t)$ уравнения (6.1) такого, что $(u(t), u_t(t); v(t), v_t(t)) \in C(0, T; E \times E_0)$ для любого $T > 0$. Для того чтобы установить дополнительную гладкость этого решения при условии $(u_0, u_1; v_0, v_1) \in E \times E_1$, следует рассмотреть задачу, получающуюся из (1.2) формальным дифференцированием уравнения и начальных условий для функции $v(x, t)$ по одной из пространственных переменных. После этого для завершения доказательства теоремы 2.4 можно применить стандартную схему метода компактности (близкие рассуждения приводятся ниже при доказательстве леммы 6.2).

Доказательство теоремы 2.5 основано на следующем утверждении (см. [2] или [4]).

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть динамическая система (S_t, H) диссипативна, а эволюционный оператор S_t слабо замкнут, т.е. для любого $t > 0$ из условий: $u_n \rightarrow u$ и $S_t u_n \rightarrow v$ слабо в H при $n \rightarrow \infty$ следует, что $v = S_t u$. Тогда эта система обладает слабым глобальным аттрактором.

Напомним, что динамическая система (S_t, H) называется диссипативной, если она обладает ограниченным поглощающим множеством. Множество B_0 называется поглощающим, если для любого ограниченного B из H найдется $t_0 = t_0(B)$ такое, что $S_t B \subset B_0$ при $t > t_0$.

Для того чтобы воспользоваться теоремой 6.1 в случае динамической системы, отвечающей начально-краевой задаче (1.2), нам понадобятся следующие леммы.

Пусть S_t – эволюционная полугруппа, заданная соотношением $S_t Y_0 = Y(t)$, где $Y_0 = (y_0; z_0)$, $y_0 = (u_0, u_1)$, $z_0 = (v_0, v_1)$ и $Y(t) = (u(t), u_t(t); v(t), v_t(t))$. Здесь $(u(t); v(t))$ – решение задачи (1.2).

ЛЕММА 6.1. Полугруппа S_t диссипативна в пространстве $E \times E_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $H(y; z)$, где $y = (u, u_t)$, $z = (v, v_t)$, функцию вида

$$H(y; z) = \frac{1}{2} [b_2 \|u_t\|_\Omega^2 + b_1 \|v_t\|_\Omega^2 + b_1 b_2 \|u - v\|_\Omega^2 + 2b_2 (F(u), 1)_\Omega + 2b_1 (F(v), 1)_\Omega + b_2 b_0 \|\nabla u\|_\Omega^2 - 2(b_2 (h_1, u)_\Omega + b_1 (h_2, v)_\Omega)].$$

Тогда нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{d}{dt} H(y; z) + \delta (b_2 \|u_t\|_\Omega^2 + b_1 \|v_t\|_\Omega^2) d\tau = 0. \quad (6.4)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$W(y; z) = H(y; z) + \frac{\delta}{2} \left\{ b_2 (u, u_t)_\Omega + b_1 (v, v_t)_\Omega + \frac{\delta}{2} (b_2 \|u\|_\Omega^2 + b_1 \|v\|_\Omega^2) \right\}.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3.1, и используя (6.4) и (1.2), легко обнаружить, что существует такая постоянная $\theta > 0$, что выполняется неравенство

$$\frac{dW}{dt}(y; z) + \theta W(y; z) \leq C_1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|u_t\|_\Omega^2 + \|v_t\|_\Omega^2 + \|u\|_{1,\Omega}^2 + \|v\|_\Omega^2 \leq C_2 \{ \|u_0\|_{1,\Omega}^2 + \|v_0\|_\Omega^2 + \|u_1\|_\Omega^2 + \|v_1\|_\Omega^2 \} e^{-\theta t} + C_3. \quad (6.5)$$

Последнее неравенство влечет диссипативность рассматриваемой динамической системы в пространстве $E \times E_0$. Лемма 6.1 доказана.

ЛЕММА 6.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.5. Тогда полугруппа S_t диссипативна в пространстве $E \times E_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать диссипативность S_t только в направлении $z = (v, v_t)$. Пусть $w = \partial v / \partial x_k$ — одна из частных производных функции v . Тогда для w справедливо равенство

$$w_{tt} + \delta w_t + b_2 w + f'(v)w = U_k(x, t) \equiv b_2 \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial h_2}{\partial x_k}.$$

Рассмотрим функцию

$$P(w, w_t) = \frac{1}{2} \{ \|w_t\|_\Omega^2 + b_2 \|w\|_\Omega^2 \} + \frac{\delta}{4} \left\{ (w, w_t) + \frac{\delta}{2} \|w\|_\Omega^2 \right\}.$$

Очевидно, что

$$\frac{3}{8} \|w_t\|_\Omega^2 + \frac{b_2}{2} \|w\|_\Omega^2 \leq P(w, w_t) \leq \frac{5}{8} \|w_t\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \left(b_2 + \frac{\delta^2}{2} \right) \|w\|_\Omega^2. \quad (6.6)$$

Нетрудно также показать, что

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt}(w, w_t) &\leq -\frac{\delta}{4} \|w_t\|_\Omega^2 - \frac{\delta}{4} \left(b_2 + \inf_v \left\{ f'(v) - \frac{4}{\delta^2} |f'(v)|^2 \right\} - \frac{\kappa_1}{2} \right) \|w\|_\Omega^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{8\kappa_1} \right) \|U_k\|_\Omega^2, \end{aligned}$$

где κ_1 – произвольное положительное число. Таким образом, соотношения (2.9), (6.6) позволяют подобрать $\kappa_1 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{dP}{dt}(w, w_t) + \kappa_2 P(w, w_t) \leq C_1 (1 + \|\nabla u(t)\|_\Omega^2),$$

где $\kappa_2 > 0$. Поэтому

$$P(w, w_t) \leq P(w(0), w_t(0))e^{-\kappa_2 t} + C_2 \left(1 + \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_\Omega^2 e^{-\kappa_2(t-\tau)} d\tau \right). \quad (6.7)$$

Неравенства (6.6), (6.7) и лемма 6.1 позволяют завершить доказательство леммы 6.2.

ЛЕММА 6.3. *Полугруппа S_t слабо замкнута в пространстве $E \times E_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y_{0N} \rightarrow Y_0$ и $S_{t_1} Y_{0N} \rightarrow W$ слабо в пространстве $E \times E_1$ при $N \rightarrow +\infty$, где $Y_{0N} = (y_{0N}; z_{0N})$, $Y_0 = (y_0; z_0)$. Пусть $Y_N(t) = (y_N; z_N) = (u_N, (u_N)_t; v_N, (v_N)_t)$, где u_N, v_N – решение (1.2) с начальными данными Y_{0N} . Пусть $[0, T]$ – интервал, содержащий t_1 . Из леммы 6.2 следует, что $\{Y_N(t)\}$ – ограниченная последовательность в пространстве $C(0, T; E \times E_1)$. Поэтому с помощью стандартных рассуждений из (1.2) можно извлечь равномерные оценки

$$\|\partial_t^2 u_N(t)\|_{-1, \Omega} \leq C, \quad \|\partial_t^2 v_N(t)\|_{1, \Omega} \leq C.$$

Следовательно, теорема Дубинского дает, что последовательность $\{Y_N(t)\}$ компактна в пространстве $L = C(0, T; L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$. Легко убедиться в том, что любая предельная точка $Y(t) = (u(t), u_t(t); v(t), v_t(t))$ в пространстве L последовательности $\{Y_N(t)\}$ дает обобщенное решение задачи (1.2). При этом очевидно, что $Y(0) = Y_0$ и $Y(t_1) = W$. Ясно также, что $Y(t) = L^\infty(0, T; E \times E_1)$. Поэтому можно воспользоваться теоремой единственности для задачи (1.2) и утверждать, что $Y(t) = S_t Y_0$, $t \in [0, T]$. В частности имеем, что $W = Y(t_1) = S_{t_1} Y_0$. Лемма 6.3 доказана.

Таким образом, существование слабого глобального аттрактора $\mathcal{A}$ следует из теоремы 6.1.

§ 7. Полунепрерывность сверху семейства $\{\mathcal{A}_\varepsilon\}$

Докажем теперь теорему 2.6 о полунепрерывности сверху семейства $\{\mathcal{A}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ аттракторов задачи (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из (4.34) следует, что для любой траектории

$$\{y^\varepsilon(t) = (u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t)) : -\infty < t < \infty\},$$

принадлежащей аттрактору $\mathcal{A}_\varepsilon$, справедливы равномерные оценки

$$\|P_\varepsilon \tilde{u}_{tt}^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|P_\varepsilon \tilde{u}_t^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|\nabla P_\varepsilon \tilde{u}_t^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|\nabla P_\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|P_\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq C_1 \quad (7.1)$$

и

$$\|Q_\varepsilon u_{tt}^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|Q_\varepsilon u_t^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u_t^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 + \|Q_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_\Omega^2 \leq C_2 \quad (7.2)$$

для всех $t \in (-\infty, \infty)$ и достаточно малых ε (операторы P_ε и Q_ε , а также операция “ $\sim$ ” определены в §2). Пусть

$$\overline{\mathcal{A}}_\varepsilon = \{(\overline{y}_\varepsilon; \overline{z}_\varepsilon) \equiv (P_\varepsilon \tilde{y}^\varepsilon; Q_\varepsilon y^\varepsilon), y^\varepsilon = (u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon) \in \mathcal{A}_\varepsilon\},$$

и предположим, что теорема 2.6 неверна. Это означает, что существует последовательность $\{y_0^\varepsilon, \varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0\}$ такая, что $y_0^\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$ и

$$\text{dist}_{E_0 \times E_0} \{(P_\varepsilon \tilde{y}_0^\varepsilon; Q_\varepsilon y_0^\varepsilon), \mathcal{A}\} \geq \delta > 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_n. \quad (7.3)$$

Пусть $\gamma_\varepsilon(t) = \{y^\varepsilon(t) = (u^\varepsilon(t), u_t^\varepsilon(t)) : -\infty < t < \infty\}$ – траектория системы (S_t^ε, E) такая, что $y^\varepsilon(0) = y_0^\varepsilon$. Рассмотрим произвольный интервал $[a, b]$, тогда $u^\varepsilon(t)$ – решение задачи (1.1) на этом интервале такое, что $(u^\varepsilon(a), u_t^\varepsilon(a)) = y^\varepsilon(a) \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Из (4.34) следует, что существует подпоследовательность $\varepsilon = \varepsilon_n$ такая, что справедливо (7.3) и начальные данные $y^\varepsilon(a)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.3. Применяя указанную теорему, получим, что для любого отрезка $[a, b]$ $(P_\varepsilon \tilde{y}^\varepsilon; Q_\varepsilon y^\varepsilon)$ сходится в пространстве $C(a, b; E_0 \times E_0)$ к вектор-функции $(y(t); z(t))$, где $y(t) = (u(t), u_t(t))$, $z(t) = (v(t), v_t(t))$, а пара $(u(t); v(t))$ является решением задачи (1.2). Таким образом, имеем, что

$$\max_{[a, b]} (\|\overline{y}_\varepsilon(t) - y(t)\|_{E_0} + \|\overline{z}_\varepsilon(t) - z(t)\|_{E_0}) \rightarrow 0 \quad (7.4)$$

при $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$. Для решения $(u(t); v(t))$ из (7.1), (7.2) вытекают оценки

$$\|u_t\|_\Omega^2 + \|\nabla u\|_\Omega^2 + \|u\|_\Omega^2 \leq C_1$$

и

$$\|\nabla v_t\|_\Omega^2 + \|v_t\|_\Omega^2 + \|\nabla v\|_\Omega^2 + \|v\|_\Omega^2 \leq C_2$$

для всех $-\infty < t < \infty$. Следовательно, $(y(t); z(t))$ принадлежит слабому глобальному аттрактору $\mathcal{A}$. В частности, $(y(0); z(0)) \in \mathcal{A}$. При этом из (7.4) следует, что $P_\varepsilon y^\varepsilon(0) \rightarrow y(0)$, $Q_\varepsilon y^\varepsilon(0) \rightarrow z(0)$ при $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$. Этот факт противоречит (7.3), и теорема 2.6 доказана.

Имеет место

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть $\sup_{\varepsilon > 0} \|h^\varepsilon\|_\Omega < \infty$ и пусть $u^\varepsilon(x)$ – стационарное решение задачи (1.1). Тогда $u^\varepsilon \in H^2(\varepsilon, \Omega)$ и справедлива оценка

$$\|u^\varepsilon\|_\Omega^2 + a_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \|Q_\varepsilon u^\varepsilon\|_\Omega^2 + \|\nabla Q_\varepsilon u^\varepsilon\|_\Omega^2 + \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \right\|_\Omega^2 \leq C, \quad (7.5)$$

где постоянная C не зависит от ε . Причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u^\varepsilon \in Z_\varepsilon} \left\{ \inf_{(y; z) \in Z} (\|P_\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon - y\|_\Omega^2 + \|Q_\varepsilon u^\varepsilon - z\|_\Omega^2) \right\} = 0. \quad (7.6)$$

Здесь Z_ε (соответственно Z) – множество стационарных решений задачи (1.1) (соответственно задачи (1.2)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для каждого стационарного решения u^ε вектор $(u^\varepsilon, 0)$ принадлежит аттрактору $\mathcal{A}_\varepsilon$, из (4.34) вытекает оценка (7.5). Пусть $Y = (y; z)$ — некоторая предельная точка семейства $\{(P_\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon; Q_\varepsilon u^\varepsilon)\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из (7.5) и компактности вложения пространства $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ имеем, что

$$\|P_\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon - y\|_\Omega^2 + \|Q_\varepsilon u^\varepsilon - z\|_\Omega^2 \rightarrow 0 \quad (7.7)$$

по некоторой подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2.6, можно показать, что существует ограниченная в пространстве $E \times E_1$ траектория $Y(t)$ такая, что $Y(0) = Y = (y, 0; z, 0)$. Она принадлежит $\mathcal{A}$. Поскольку $(u^\varepsilon, 0)$ — стационарная точка полугруппы S_t^ε , то легко убедиться, что $Y(t)$ не зависит от t , т.е. $Y = (y, 0; z, 0)$ есть стационарная точка динамической системы $(S_t, E \times E_1)$, отвечающей задаче (1.2). Поэтому имеет место (7.6).

В заключение авторы выражают глубокую признательность Е. Я. Хруслову за полезные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы

1. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
2. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
3. Ладыженская О. А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 25–60.
4. Чуешов И. Д. Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики // УМН. 1993. Т. 48. № 3. С. 135–162.
5. Temam R. Infinite-dimensional systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1988.
6. Boutet de Monvel L., Chueshov I. D., Khruslov E. Ya. Homogenization of attractors for semilinear parabolic equations on manifolds with complicated microstructure // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1997. V. 162. P. 297–322.
7. Капитанский Л. В., Костин И. Н. Аттракторы нелинейных эволюционных уравнений и их аппроксимаций // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 1. С. 114–140.
8. Bourgeat A., Pankratov L. S. Homogenization of semilinear parabolic equations in domains with spherical traps // Appl. Anal. 1997. V. 64. № 3–4. P. 303–317.
9. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
10. Батталов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
11. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
12. Boutet de Monvel L., Khruslov E. Ya. Homogenization on Riemannian manifolds // Proc. of the second workshop on composite media and homogenization theory. Singapore: World Scientific, 1995.
13. Khruslov E. Ya. Homogenized models of strongly inhomogeneous media // International congress of mathematicians (August 3–11, 1994, Zürich, Switzerland). V. 2. Basel: Birkhäuser, 1995. P. 1270–1278.
14. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
15. Ghidaglia J. M., Temam R. Regularity of the solutions of second order evolution equations and their attractors // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1987. V. 14. P. 485–511.

Физико-технический институт
низких температур им. Б. И. Веркина, г. Харьков;
Харьковский университет

Поступила в редакцию
05.10.1998

E-mail: pankratov@ilt.kharkov.ua, chueshov@ilt.kharkov.ua