Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Э. Шноль, Е. В. Николаев, О бифуркациях симметричных положений равновесия, отвечающих двукратным собственным значениям, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 9, 127–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:13:07

УДК 517.9

Э. Э. Шноль, Е. В. Николаев

О бифуркациях симметричных положений равновесия, отвечающих двукратным собственным значениям

Рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающие конечной группой симметрий. Изучаются однопараметрические локальные бифуркации симметричных положений равновесия, отвечающие двукратной паре чисто мнимых собственных значений.

Показано, что в одном случае из равновесия рождается двумерный тор. На торе имеются предельные циклы; их число не зависит от значений параметра. Траектории системы, не покидающие некоторой фиксированной области, могут стремиться только к изучаемому равновесию, или к 2-тору, или к одному из двух (отдельно лежащих) предельных циклов.

Во всех остальных случаях из равновесия рождается инвариантная поверхность, диффеоморфная трехмерной сфере. Поведение траекторий на этой поверхности зависит от группы симметрии и в статье не изучается.

В дополнении приведены сведения о бифуркациях коразмерности 1, отвечающих двукратным нулевым собственным значениям.

Библиография: 19 названий.

Введение

Как известно, в общих системах дифференциальных уравнений имеются только два типа локальных бифуркаций положений равновесия, отвечающих коразмерности 1, т.е. происходящих неустрашимым образом при изменении одного параметра α . Первая – слияние изучаемого равновесия $x(\alpha)$ с другим и их последующая аннигиляция (fold bifurcation). Вторая – бифуркация рождения цикла или бифуркация Андронова–Хопфа. Первая бифуркация отвечает обращению в нуль одного собственного значения λ оператора линеаризации, вторая – появлению пары чисто мнимых λ . Более сложные локальные бифуркации отвечают коразмерности два или выше [1]–[4].

Хорошо известно, что в симметричных системах дело обстоит совсем не так. Популярный пример – появление в коразмерности 1 бифуркации типа “вилка”: при обращении λ в нуль исследуемое положение равновесия не исчезает, но от него ответвляются два других. Такая бифуркация возможна уже при простейшей, инволютивной симметрии (например тогда, когда правые части уравнений – нечетные функции). Здесь, однако, еще не проявляется главная особенность бифуркаций в симметричных системах. Если группа симметрии уравнений Γ *некоммутативна*, то собственные значения оператора линеаризации могут быть кратными при

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00954).

всех значениях параметров. Поэтому при изменении одного параметра могут возникать кратные нулевые или чисто мнимые λ .

При изучении бифуркаций в симметричных системах обычно предполагается, что группа Γ состоит из линейных преобразований, и мы будем придерживаться этого предположения.

При кратных чисто мнимых λ из равновесия могут “одновременно” рождаться несколько семейств периодических решений, имеющих разную собственную симметрию. На эту тему в книге [5] есть важная теорема, применимая к задачам с любым значением кратности ν ; авторы называют ее “Equivariant Hopf Theorem”. В отличие от теорем об однопараметрических бифуркациях в общих системах (см. [1], [2]) эта теорема не дает полного описания локального фазового портрета и не гарантирует предсказания всех рождающихся циклов. Это, конечно, неудивительно: для получения полной бифуркационной картины нужно, как минимум, детально исследовать модельную систему дифференциальных уравнений, имеющую здесь размерность 2ν .

Далее, при $\nu \geq 2$ из равновесия могут (в качестве бифуркации коразмерности 1) рождаться инвариантные торы размерности два или больше, а также инвариантные сферы [6], [7]. Наконец, опубликованы исследования конкретных задач, показывающие, что при $\nu \geq 3$ из равновесия могут возникать сложные, “хаотические” решения (в виде колебаний малой амплитуды; см., например, [8], [9]).

Как и в общих системах, для рассмотрения бифуркаций при наличии симметрии возможны два подхода.

1. Изучение отдельных важных деталей бифуркационной картины, скажем, возникновения периодических или “хаотических” решений из положения равновесия.

2. Полное описание бифуркационных событий (достижимое, по-видимому, лишь для простейших задач).

В настоящей статье рассматриваются однопараметрические бифуркации положений равновесия, отвечающие двукратным мнимым собственным значениям, мы старались при этом следовать второму подходу.

Бифуркационные события определяются *бифуркационной группой* G_{bif} . Эта группа возникает при ограничении действия элементов группы Γ на инвариантное для нее (четырехмерное) собственное подпространство E оператора линеаризации, отвечающее чисто мнимым собственным значениям. Такое ограничение порождает, очевидно, гомоморфизм $\Gamma \mapsto G_{\text{bif}}$. В дальнейшем мы будем для краткости говорить об ограничении Γ на соответствующее (Γ -инвариантное) подпространство.

Первая часть статьи (§§ 2–7) посвящена задаче, в которой группа G_{bif} изоморфна группе D_m – полной группе симметрий правильного m -угольника. Задача эта обсуждается в главе 18 книги [5]. Авторы интересовались лишь рождением из равновесия периодических решений и применяли упомянутую выше “Equivariant Hopf Theorem”. (Трудный случай $m = 4$ обсуждается также в [10], [11].)

Бифуркационная картина в этой задаче такова.

Из равновесия могут рождаться инвариантный двумерный тор Tor_α и еще два отдельно лежащих предельных цикла. При фиксированном значении параметра α , близком к бифуркационному α_* , любая траектория из некоторой не зависящей от α области U_* либо стремится к равновесию x_α , или к одному из циклов, или к тору

Тог_α , либо покидает U_* за конечное время. Все эти утверждения (при выполнении некоторых условий на коэффициенты) легко доказываются для модельной системы, полученной посредством нормализации уравнений до 3-го порядка и отбрасывания ненормализованных слагаемых.¹ Доказательства того, что та же картина имеет место для полной системы, уже не столь просты (см. §§ 3–5 ниже). В них существенно используется одна теорема Рюэлля [12; теорема 3.2] и то, что модельная система имеет (глобальную) функцию Ляпунова. Эти доказательства справедливы при любом $m \neq 4$, а также для группы G_{bif} , изоморфной полной ортогональной группе $O(2)$.

Траектории на Тог_α не бывают всюду плотными: из симметрии легко следует наличие на торе некоторого числа замкнутых траекторий, делящих его на инвариантные области. Полное выяснение картины траекторий на инвариантном торе требует использования тейлоровских слагаемых высокого порядка – тем более высокого, чем больше m . А именно на торе Тог_α (при всех α , близких к α_*) имеется ровно m предельных циклов при четном m и $2m$ предельных циклов при нечетном m . Доказательство этого факта мы приводить не будем (см. обсуждение в [13]). Заметим, что в поставленной задаче “Equivariant Hopf Theorem” предсказывает *все* рождающиеся периодические решения (но это не вытекает из сказанного в книге [5]).

Во второй части статьи (§§ 8, 9) мы рассмотрим другие бифуркационные задачи, отвечающие двукратной паре мнимых λ . В таких задачах из равновесия рождается трехмерная инвариантная поверхность S , диффеоморфная сфере. Справедливость этого утверждения также определяется тейлоровскими слагаемыми не выше третьей степени и не зависит от деталей устройства бифуркационной группы. Поведение траекторий на поверхности S определяется членами более высокого порядка и зависит от группы G_{bif} . Исследование этого поведения для важных в приложениях групп симметрии Γ – интересная задача для будущего.

В дополнении приведены сведения о бифуркациях коразмерности 1, отвечающих двукратному $\lambda = 0$. Возникающие в этом случае модельные (двумерные) дифференциальные уравнения – такие же, как уравнения, используемые в общей теории при изучении бифуркаций периодических решений [1; §§ 34 и 35]. Как и в общей теории, здесь есть исключительные случаи, связанные с поворотной симметрией 3-го или 4-го порядка. Исследование и результаты при этом сильно упрощаются, поскольку здесь меняется лишь один параметр, а коэффициенты модельных уравнений вещественны.

Преимущественно нас будут интересовать случаи, в которых группа Γ симметрии уравнений конечна. Случай непрерывных групп в некоторых отношениях проще (см., в частности, замечания в § 6). Однако если группа симметрии изучаемого равновесия есть собственная часть непрерывной группы Γ , то равновесие обычно не изолировано. Эту весьма интересную ситуацию мы здесь рассматривать не будем.

¹В общей, несимметричной теории ситуация совсем другая. Для бифуркаций, возникающих при двух парах мнимых λ (и отвечающих коразмерности 2), исследование модельной системы уже оказывается трудной задачей (см. [2; гл. 1, § 4] и [4; § 8.6]).

§1. Предварительные сведения

1.1. Традиционная постановка задачи. Пусть однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений (1.1) инвариантно относительно действия конечной (или компактной) группы Γ отображений фазового пространства, являющихся линейными преобразованиями:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1a)$$

$$f(gx, \alpha) = gf(x, \alpha) \quad \text{при } g \in \Gamma. \quad (1.1b)$$

Без ограничения общности можно считать, что элементы группы Γ – ортогональные преобразования в смысле некоего скалярного произведения.

Обычно предполагается, что точка $x = 0$ является положением равновесия при всех значениях параметра: $f(0, \alpha) \equiv 0$. Тем самым это равновесие имеет максимальную симметрию – инвариантно относительно всей группы Γ . Рождающиеся при бифуркациях новые инвариантные множества (равновесия, циклы, торы и т. д.) имеют обычно меньшую симметрию.

Система (1.1) может, конечно, иметь положения равновесия, не обладающие симметрией или имеющие меньшую группу симметрии.

1.2. Редукция к традиционной постановке для конечных групп. Пусть при $\alpha = \alpha_*$ имеется положение равновесия $x = x_*$, инвариантное относительно подгруппы $H \subseteq \Gamma$: $h(x_*) = x_*$ для $h \in H$. Преобразования g , не входящие в H , сдвигают x_* на расстояния $\geq d > 0$, и потому существует такая окрестность $U(x_*)$, что для этих g образы $g(U)$ не пересекаются с U . Для локальных бифуркаций (событий, происходящих в окрестности x_*) такие элементы группы Γ несущественны, и можно считать, что $H = \Gamma$. Сделав замену переменных $y = x - x_*$, получим систему, имеющую в нуле положение равновесия. Поскольку $g(x_*) = x_*$ для всех g из Γ , отображения g останутся линейными. В дальнейшем мы считаем, что в “бифуркационный момент” $\alpha_* = 0$ и $x_* = 0$. Если оператор линеаризации $L_0 = f'_x(0, 0)$ невырожден (а это именно так для наших основных задач), то при малых α существуют близкие к нулю положения равновесия x_α . Легко убедиться, что они будут также инвариантны относительно группы Γ . Сделав (зависящую от α) замену $y = x - x_\alpha$, мы сохраним линейность отображений g и получим, оставив прежние обозначения: $f(0, \alpha) \equiv 0$.

1.3. Редукция на центральное многообразие. Для малых α центральное многообразие $\mathbf{M}_\alpha$ ² можно выбрать инвариантным относительно группы Γ (см., например, [12]). Многообразие $\mathbf{M}_0$ касается подпространства E , отвечающего “критическим” собственным значениям λ оператора L_0 – тем, для которых $\text{Re}(\lambda) = 0$. Ортогонально спроектировав $\mathbf{M}_\alpha$ на E , можно использовать декартовы координаты на E в качестве координат на $\mathbf{M}_\alpha$. Действие элементов Γ в таких координатах задается ортогональными матрицами.

²Расширенная система $x' = f(x, \alpha)$, $\alpha' = 0$ имеет положение равновесия ($x = 0, \alpha = 0$). По определению $\mathbf{M}_\alpha$ есть сечение плоскостью $\alpha = \text{const}$ центрального многообразия $\mathbf{M}$ для этого равновесия.

1.4. Инвариантная нормализация. Для приведения уравнений на центральном многообразии к нормальной форме можно использовать преобразования, перестановочные с преобразованиями симметрии (см., например, [12] и [5; гл. 16, §5]). Действие элементов Γ в таких нормализующих переменных задается теми же линейными формулами. В дальнейшем мы предполагаем, что производится именно такая, “инвариантная” нормализация. Как и всегда при рассмотрении семейств уравнений, нормализовать нужно расширенную систему.

1.5. Двукратные собственные числа в бифуркациях коразмерности 1 [5], [14]. Разложим фазовое пространство $\mathbb{R}^n$ на инвариантные для Γ минимальные подпространства: $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$. Пусть Γ_k – ограничение Γ на E_k ; гомоморфизм $\Gamma \mapsto \Gamma_k$ есть *неприводимое* представление. Двукратное нулевое λ появляется при изменении одного параметра, если хотя бы одно из пространств E_k двумерно и притом представление $\Gamma \mapsto \Gamma_k$ *абсолютно* неприводимо (не распадается при комплексификации). При бифуркационном значении параметра $\alpha = 0$ такое подпространство E состоит из собственных векторов оператора L_0 , отвечающих $\lambda = 0$.

Двукратная пара чисто мнимых λ появляется в двух случаях.

1. Имеется четырехмерное подпространство E_k и неприводимое представление $\Gamma \mapsto \Gamma_k$ не является абсолютно неприводимым (при выходе в комплексную область распадается на два неприводимых). Здесь $E = E_k$. Этот случай рассмотрен во второй части статьи.

2. Имеются два двумерных подпространства E_j и E_k такие, что представления $\Gamma \mapsto \Gamma_j$ и $\Gamma \mapsto \Gamma_k$ изоморфны и абсолютно неприводимы. Здесь $E = E_j \oplus E_k$. Эта задача составляет содержание первой части статьи.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Утверждения, аналогичные приведенным в п. 1.5 для $\nu = 2$, справедливы и при кратности собственных значений больше двух.

2) При рассмотрении бифуркаций коразмерности 1 жордановы клетки не появляются: ν -кратному $\lambda = 0$ (или $\lambda = i\omega$) отвечает ν -мерное собственное подпространство оператора L_0 .

3) Напомним, что двукратные λ могут появляться в бифуркациях коразмерности 1 только при некоммукативной группе Γ .

§ 2. Уравнения на центральном многообразии при двукратных мнимых λ в случае 2 (главные члены)

Пусть в уравнении (1.1) $f(0, \alpha) \equiv 0$ и оператор $L_\alpha = f'_x(0, \alpha)$ имеет при $\alpha = 0$ двукратную пару собственных значений $\lambda(0) = i\omega(0)$ и $\lambda^*(0)$. Пусть E – соответствующее инвариантное подпространство³. По предположению (см. п. 1.5) E распадается в сумму двумерных подпространств E_1 и E_2 , инвариантных для группы Γ . Группы Γ_j – ограничения Γ на E_j – есть подгруппы $O(2)$.

По условию представления $\Gamma \mapsto \Gamma_j$ изоморфны и абсолютно неприводимы. Отсюда для конечной группы Γ : Γ_1 и Γ_2 изоморфны D_m (полной группе симметрии правильного m -угольника) при $m \geq 3$. Тем самым бифуркационная группа $G_{\text{биф}}$

³ E – оверхествление двумерного комплексного пространства, состоящего из собственных векторов оператора L_0 .

– ограничение группы Γ на E – также изоморфна D_m . Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – образующие этой группы: $\mathbf{a}^m = \mathbf{e}$, $\mathbf{b}^2 = \mathbf{e}$, $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}^{-1}$ ($\mathbf{a}$ отвечает повороту на угол $2\pi/m$, $\mathbf{b}$ – отражению относительно какой-то оси симметрии m -угольника). Значение $m = 4$ – особый случай, и в дальнейшем мы предполагаем, что $m \neq 4$.

Введем в E комплексные координаты $z = (z_1, z_2)$, гладко зависящие от α , так, чтобы линейные операторы L_α , $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ записывались следующим образом (см. примечания):

$$L_\alpha(z_1, z_2) = (\lambda(\alpha)z_1, \lambda(\alpha)z_2); \quad (2.1)$$

$$\mathbf{a}(z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_1, e^{-i\theta}z_2), \quad \theta = 2\pi/m; \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{b}(z_1, z_2) = (z_2, z_1); \quad (2.2b)$$

$$\lambda(\alpha) = i\omega(\alpha) + \alpha\gamma(\alpha). \quad (2.3)$$

Тогда ограничение уравнений (1.1) на центральное многообразие $\mathbf{M}_\alpha$ запишется в виде

$$\frac{dz_k}{dt} = F_k(z, \alpha), \quad F_k(z, \alpha) = \lambda(\alpha)z_k + \dots, \quad k = 1, 2. \quad (2.4)$$

Инвариантность этих уравнений относительно группы G_{bif} означает:

$$F_1(e^{i\theta}z_1, e^{-i\theta}z_2, \alpha) = e^{i\theta}F_1(z_1, z_2, \alpha),$$

$$F_2(e^{i\theta}z_1, e^{-i\theta}z_2, \alpha) = e^{-i\theta}F_2(z_1, z_2, \alpha), \quad (2.5a)$$

$$F_2(z_1, z_2, \alpha) = F_1(z_2, z_1, \alpha). \quad (2.5b)$$

Теперь нормализуем уравнения (2.4) до четвертого порядка включительно. Это можно сделать, сохранив формулы (2.2) для действия группы G_{bif} и, тем самым, формулы (2.5). Оставив те же обозначения для нормализующих переменных, получим:

$$z'_1 = \lambda(\alpha)z_1 + z_1(A_1(\alpha)r_1^2 + A_2(\alpha)r_2^2) + O(r^5), \quad (2.6a)$$

$$z'_2 = \lambda(\alpha)z_2 + z_2(A_2(\alpha)r_1^2 + A_1(\alpha)r_2^2) + O(r^5), \quad (2.6b)$$

$r_k = |z_k|$, $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. Действительно, нормализованные кубичные члены в F_k могут быть шести типов: $z_1|z_1|^2$, $|z_1|^2z_2$, $z_1^2z_2^*$, $z_1|z_2|^2$, $z_1^*z_2^2$, $z_2|z_2|^2$. Из них только первый и четвертый удовлетворяют условию (2.5a) для F_1 при $m \neq 4$.

Как обычно, мы предположим, что $\text{Re } \lambda'(0) \neq 0$, т.е. (см. (2.3))

$$\gamma = \gamma(0) \neq 0. \quad (2.7)$$

§3. Инвариантный двумерный тор

Для некоторого упрощения формул в §§3–5 мы предположим, что $\gamma(0) = 1$ (см. (2.7)), и будем рассматривать только значения $\alpha > 0$. Выпишем явно главные члены (при малых z и α) в уравнениях (2.6). Получим⁴

$$\begin{aligned} z'_1 &= (i\omega(\alpha) + \alpha)z_1 + z_1(A_1r_1^2 + A_2r_2^2) + O(\alpha^2r + r^5), \\ z'_2 &= (i\omega(\alpha) + \alpha)z_2 + z_2(A_2r_1^2 + A_1r_2^2) + O(\alpha^2r + r^5), \\ A_k &= A_k(0). \end{aligned} \quad (3.1)$$

⁴В уравнениях (3.1) можно, конечно, заменить $\omega(\alpha)$ на $\omega_0 + \omega_1\alpha$. Мы не будем это использовать.

Отбрасывание остаточных членов в (3.1) дает систему, которая легко исследуется:

$$z'_1 = (i\omega(\alpha) + \alpha)z_1 + z_1(A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2), \quad (3.2a)$$

$$z'_2 = (i\omega(\alpha) + \alpha)z_2 + z_2(A_2 r_1^2 + A_1 r_2^2). \quad (3.2b)$$

Положив $z_k = r_k \exp(i\varphi_k)$, получим⁵

$$r'_1 = \alpha r_1 + r_1(a_1 r_1^2 + a_2 r_2^2), \quad a_k = \operatorname{Re} A_k, \quad (3.3a)$$

$$r'_2 = \alpha r_2 + r_2(a_2 r_1^2 + a_1 r_2^2), \quad (3.3b)$$

$$\varphi'_1 = \Phi(r_1, r_2), \quad \varphi'_2 = \Phi(r_2, r_1). \quad (3.4)$$

Двумерная система (3.3) при $\alpha > 0$ может иметь кроме тривиального еще следующие положения равновесия:

- (а) два равновесия на осях при $a_1 < 0$ ($r_1^2 = \alpha/|a_1|$, $r_2 = 0$ и $r_2^2 = \alpha/|a_1|$, $r_1 = 0$);
- (б) “внутреннее” равновесие $r_1^2 = r_2^2 = \alpha/|a|$ при $a = a_1 + a_2 < 0$.

Равновесия гиперболически (не имеют собственных значений на мнимой оси), если $a_1 \neq a_2$.

В четырехмерной системе (3.2) равновесиям на осях отвечают предельные циклы, а внутреннему равновесию – инвариантный двумерный тор, расслоенный на конгруэнтные замкнутые траектории (окружности). При $a_1 \neq a_2$ эти инвариантные множества будут гиперболическими: циклы – в обычном смысле (нет мультипликаторов на единичной окружности), а тор – в смысле [15]⁶.

Система (3.3) – градиентная: ее правые части есть частные производные функции

$$\Lambda = \Lambda_\alpha(r_1, r_2) = \frac{1}{2}\alpha(r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{4}a_1(r_1^4 + r_2^4) + \frac{1}{2}a_2 r_1^2 r_2^2. \quad (3.5)$$

Производная Λ в силу уравнений (3.3) неотрицательна и обращается в нуль только в положениях равновесия этой системы. Поэтому любая траектория системы (3.3) либо стремится к одному из равновесий, либо уходит в бесконечность. Соответственно либо любая траектория системы (3.2) стремится к равновесию $z = 0$, или к одному из предельных циклов (существующих при $a_1 < 0$), или к 2-тору (существующему при $a < 0$), либо на траектории $|z| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Функция Λ , рассматриваемая как функция от z_1 и z_2 , является глобальной (не дефинитной) функцией Ляпунова для системы (3.2).

Убедимся, что в полной системе (3.1) имеются инвариантные множества, близкие к инвариантным множествам укороченной системы (3.2). Проще всего это сделать, сославшись на теорему Рюэлля (см. [12; теорема 3.2] и примечания ниже), которая, в свою очередь, основана на НПС-теореме [15] о сохранении гиперболических инвариантных многообразий при малом возмущении уравнений. Мы формулируем выводы из теоремы Рюэлля (точнее, из ее доказательства) в виде леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть вещественная система четырех дифференциальных уравнений в комплексных координатах z_1 и z_2 имеет вид (3.1). Предположим, что выполнено условие $a_1 \neq a_2$, $a_k = \operatorname{Re} A_k$. Тогда при $0 < \alpha < \varepsilon_1$:

⁵ Уравнения (3.3) имеют смысл при всех z , а уравнения (3.4) – при $z_1 \neq 0$ и $z_2 \neq 0$.

⁶ Более точно, тор будет нормально s -гиперболическим при любом натуральном s .

1) Если $a_1 < 0$, то система имеет предельные циклы $I_{1\alpha}$ и $I_{2\alpha}$, близкие к окружностям. Более точно, “растянутый” цикл $\alpha^{-1/2}I_{1\alpha}$ близок к окружности I_1 : $|z_1|^2 = -1/a_1$, $z_2 = 0$, а кривая $\alpha^{-1/2}I_{2\alpha}$ близка к окружности I_2 : $|z_2|^2 = -1/a_1$, $z_1 = 0$.

2) Если $a = a_1 + a_2 < 0$, то система имеет инвариантный двумерный тор $I_{3\alpha}$. При этом поверхность $\alpha^{-1/2}I_{3\alpha}$ близка к тору I_3 : $|z_1|^2 = |z_2|^2 = -1/a$.

3) Существуют окрестности $U_{k\alpha}$ множеств $I_{k\alpha}$ с размерами порядка $\alpha^{1/2}$, не содержащие других множеств, инвариантных для системы (3.1). Более точно, любое инвариантное множество, целиком лежащее в окрестности $U_{k\alpha}$ (k и α фиксированы), является подмножеством $I_{k\alpha}$. Здесь $U_{k\alpha} = \alpha^{1/2}U_k$ и U_k — некая (не зависящая от α) окрестность I_k , $k = 1, 2, 3$.

ЗАМЕЧАНИЯ 3.2. 1) I_k — инвариантные множества системы, получающейся из (3.2) масштабированием: $z = \alpha^{1/2}\zeta$, $t = \alpha^{-1}\tau$. Через I_0 мы будем обозначать равновесие $z = 0$, а через $U_{0\alpha}$ — шар $|z| \leq C_0\alpha^{1/2}$, в котором нет других инвариантных множеств системы (3.1)⁷.

2) Для циклов достаточны более простые средства, чем теорема Рюэлля. После масштабирования укороченной системы (3.2) получим (при $a_1 < 0$) цикл, не зависящий от α . Остаточные члены будут малым возмущением, и сохранение гиперболического цикла следует из теоремы о неявной функции.

3) Области U_k предписываются теоремой Рюэлля (точнее, НПС-теоремой). Вместо U_k можно, конечно, выбрать любую меньшую область, содержащую I_k . При этом можно считать область U_k инвариантной относительно произвольных сдвигов фаз (φ_1 и φ_2) и задавать ее неравенствами на $|z_1|$ и $|z_2|$.

§ 4. Оценка производной функции Ляпунова

Выпишем сначала производную Λ в силу укороченной системы (3.2):

$$\Lambda'|_{(3.3)} = (r'_1)^2 + (r'_2)^2.$$

Соответственно

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda_\alpha}{dt}\Big|_{(3.2)} &= Q_\alpha(p_1, p_2), \quad p_k = r_k^2 = |z_k|^2, \\ Q_\alpha &= p_1(\alpha + a_1p_1 + a_2p_2)^2 + p_2(\alpha + a_1p_2 + a_2p_1)^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Рассматривая Λ_α как функцию вещественных переменных u и v ($z_k = u_k + iv_k$), имеем: $|\text{grad } \Lambda_\alpha| \leq Cr(\alpha + r^2)$. Для производной Λ в силу полной системы (3.1) получим:

$$\Lambda'|_{(3.1)} \geq \Lambda'|_{(3.2)} - |\text{grad } \Lambda| \cdot O(\alpha^2 r + r^5).$$

Пусть остаточные члены в (3.1) удовлетворяют оценке

$$|O(\dots)| \leq K_0 r(\alpha^2 + r^4) \quad \text{при } r \leq R_0 \text{ и } |\alpha| \leq \varepsilon_0. \quad (4.2)$$

⁷ Например такой, в котором $r' > \alpha r/2$ в силу (3.1).

Обозначив $p = p_1 + p_2$, получим

$$\Lambda' \equiv \frac{d\Lambda_\alpha}{dt} \Big|_{(3.1)} \geq Q_\alpha(p_1, p_2) - K_1 p(\alpha + p)^3. \quad (4.3)$$

ЛЕММА 4.1. Пусть $a_1 \neq 0$ и $a_1 \neq a_2$. Пусть $V_{k\alpha} = \alpha^{1/2} V_k$ — окрестности инвариантных множеств $I_{k\alpha}$ системы (3.2) ($\alpha > 0$). Существует такой шар $r \leq R_*$, что во всех его точках, кроме точек областей $V_{k\alpha}$, производная функции Ляпунова Λ_α в силу системы (3.1) положительна при каждом α из интервала $0 < \alpha < \varepsilon_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) *Дальняя зона:* $p = |z|^2 \geq N\alpha$. Перепишем $Q_\alpha = Q_0 + \alpha O(p^2) + \alpha^2 p$. Однородный многочлен $Q_0(r_1^2, r_2^2)$ положителен при $r \neq 0$ и, значит, $Q_0 \geq Kp^3$ ($K > 0$). Так как $\alpha \leq p/N$, то существует положительное N_* такое, что $Q_\alpha(p_1, p_2) \geq \frac{1}{2}Kp^3$ при $N \geq N_*$. Теперь из (4.3) имеем: $\Lambda' \geq \frac{1}{4}Kp^3$ при $N_*\alpha \leq p \leq p_*$; N_* и p_* не зависят от α ($p_* \leq R_0^2$).

2) *Ближняя зона:* $p = |z|^2 \leq N\alpha$. Выберем $N \geq N_*$ так, чтобы в шаре $|z|^2 \leq N\alpha$ содержались все инвариантные множества $\alpha^{1/2} I_k$ укороченной системы (3.2). (Достаточно, чтобы было $N > 2 \max(|a_1|^{-1}, |a|^{-1})$). Уменьшая, если нужно, окрестности $V_{k\alpha}$, можно считать, что они также содержатся в этом шаре. Функция Q_α удовлетворяет вне областей $V_{k\alpha}$ неравенству $Q_\alpha \geq C\alpha^3$. Действительно, если положить $z_j = \alpha^{1/2} \zeta_j$, то $Q_\alpha(|z_1|^2, |z_2|^2) = \alpha^3 Q_1(|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2)$ и функция Q_1 положительна вне V_k : $Q_1 \geq C > 0$. Вычитаемое в формуле (4.3) не больше $K_2 \alpha^4$. Отсюда $\Lambda' \geq \frac{1}{2}C\alpha^3$ при $\alpha < \varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_* = \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ и $R_* = p_*^{1/2}$. При этих значениях утверждение леммы выполняется.

ЗАМЕЧАНИЕ. Значение ε_* зависит от выбора областей V_k , точнее, от постоянной C . При уменьшении V_k (или увеличении N) значение ε_* , вообще говоря, уменьшается.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Не существует полутраектории $l_+ = \{z(t), t \geq t_0\}$ системы (3.1), расположенной в шаре $|z| \leq R_*$, но вне всех областей $V_{k\alpha}$.

Действительно, на l_+ функция Λ должна была бы неограниченно возрастать.

§ 5. Предельное поведение траекторий в шаре B_*

5.0. Вводные замечания и построения. Пусть $l_+ = \{z(t), t \geq t_0\}$ — полутраектория системы (3.1), начинающаяся в шаре $B_* = \{|z| \leq R_*\}$ (см. лемму 4.1). Приведенные выше леммы проясняют поведение $z(t)$ в двух случаях.

1) Пусть при $t = t_0$ траектория попадает и далее остается в одной из областей Рюэлля $U_{j\alpha}$ (см. лемму 3.1). Тогда при $t \rightarrow \infty$ она стремится к множеству $I_{j\alpha}$. Более точно, ее ω -предельное множество l_∞ совпадает с $I_{j\alpha}$ или является его подмножеством.⁸

⁸ ω -предельное множество l_∞ есть совокупность предельных точек в всех возможных последовательностях $z(t_k)$ при $t_k \rightarrow \infty$. Множество l_∞ (замкнуто и) инвариантно для системы. При $t > t_0$ решение $z(t)$ ограничено. Поэтому для любого $\delta > 0$ существует $T(\delta)$ такое, что полутраектория $\{z(t), t \geq T(\delta)\}$ лежит в δ -окрестности l_∞ .

2) Выберем области $V_{j\alpha}$ так, чтобы они были подмножествами областей $U_{j\alpha}$. Если теперь при $t \geq t_0$ $z(t)$ находится вне всех $U_{j\alpha}$, то в силу леммы 4.1 траектория покидает шар B_* .

Однако леммы 3.1 и 4.1 не запрещают следующего поведения решений системы (3.1) при заданном (малом) α . На некотором интервале изменения t траектория l решения $z(t)$ находится вне всех областей $U_{j\alpha}$ и $\Lambda(t) = \Lambda_\alpha(z(t))$ возрастает. Затем l попадает в одну из областей $U_{j\alpha}$ (точнее, в $V_{j\alpha} \subset U_{j\alpha}$) и $\Lambda(t)$ убывает. Далее l выходит из $U_{j\alpha}$ и $\Lambda(t)$ возрастает и т.д. – бесконечное число раз. (В частности, из доказанного не вытекает отсутствие замкнутых траекторий, расположенных частично внутри и частично вне областей $U_{j\alpha}$.)

Оказывается, если области V_k достаточно малы, то такое поведение траекторий невозможно: рост $\Lambda(t)$ во внешних частях областей $U_{k\alpha}$, не зависящих от выбора V_k , компенсирует (возможное) убывание внутри $V_{k\alpha}$. Аккуратной реализации этой простой идеи посвящены пп. 5.1 и 5.2. В оценках будет достаточно рассмотреть “ближнюю зону” – шар $|z|^2 \leq N\alpha$, выбрав N так, чтобы области Рюэля $U_{k\alpha}$ лежали в этом шаре.

5.1. Конструирование областей U_k и V_k . Введем переменные $\zeta_j = \alpha^{-1/2} z_j$ и $\tau = \alpha t$. После этого (см. (3.5))

$$\Lambda_\alpha(r_1, r_2) = \alpha^2 \Lambda_1(\rho_1, \rho_2), \quad \rho_j = |\zeta_j|. \quad (5.1)$$

Для ρ_j имеем в ближней зоне уравнения в силу системы (3.1)

$$\begin{aligned} \rho'_1 &= \rho_1 + \rho_1(a_1\rho_1^2 + a_2\rho_2^2) + O(\alpha), \\ \rho'_2 &= \rho_2 + \rho_2(a_2\rho_1^2 + a_1\rho_2^2) + O(\alpha) \end{aligned} \quad \left(\rho'_j \equiv \frac{d\rho_j}{d\tau} \right). \quad (5.2)$$

Здесь остаточные члены зависят, конечно, от ζ_1 и ζ_2 (а не только от $|\zeta_j|$). Из системы (3.2) следует:

$$\begin{aligned} \rho'_1 &= \rho_1(1 + a_1\rho_1^2 + a_2\rho_2^2), \\ \rho'_2 &= \rho_2(1 + a_2\rho_1^2 + a_1\rho_2^2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Правые части системы (5.3) – производные функции Λ_1 .

Далее, в силу (5.2) имеем при $\rho_1^2 + \rho_2^2 \leq N$ (см. (4.3))

$$\Lambda'_1 = Q_1(\rho_1^2, \rho_2^2) + O(\alpha). \quad (5.4)$$

Определим области U_k ($k = 0, 1, 2, 3$), задавая множества D_k на плоскости (ρ_1, ρ_2) : $(z_1, z_2) \in U_k$, если $(\rho_1, \rho_2) \in D_k$ (см. замечания 3.2). Для простоты, выбрав подходящее c , положим $D_k = D_k(c)$, где $D_k(c)$ задается неравенствами $(\rho_1 - \rho_{1k})^2 + (\rho_2 - \rho_{2k})^2 < c^2$, $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$. Здесь (ρ_{1k}, ρ_{2k}) – положение равновесия системы (5.3). Обозначим через U_k^{in} область, отвечающую $D_k^{\text{in}} = D_k(c/2)$, через D_k^{ex} – “кольцо”, дополняющее D_k^{in} до D_k , и через U_k^{ex} – внешнюю часть U_k , отвечающую D_k^{ex} . Граница U_k^{ex} состоит из двух частей – “внутренней” и “внешней”. Им отвечают окружности (или дуги окружностей) на границе множества D_k^{ex} .

Как и раньше, будем считать, что при заданном k области $V_{k\alpha}$ подобны: $V_{k\alpha} = \alpha^{1/2} V_k$. Четырехмерные области V_k будем строить, задавая области $\Delta_k \subset D_k^{\text{in}}$ на плоскости (ρ_1, ρ_2) так, что Δ_k содержит соответствующее положение равновесия системы (5.3). Например, можно положить $\Delta_k = D_k(\delta)$, где $\delta < c/2$.

“Проекция” траектории l системы (3.1) на плоскость (ρ_1, ρ_2) , т.е. кривая $l_\rho = (\rho_1(\tau), \rho_2(\tau))$, будет определять попадание l в области $V_{j\alpha}$ или $U_{j\alpha}$ и выход из этих областей.

Будем говорить, что (параметризованная) траектория l решения $z(t)$ системы (3.1) *пересекает* область $U_{k\alpha}$, если:

- 1) $z(t) \in U_{k\alpha}$ при $t_{\text{in}} < t < t_{\text{out}}$, здесь $z(t_{\text{in}})$ и $z(t_{\text{out}})$ принадлежат границе $U_{k\alpha}$;
- 2) $z(t_0) \in V_{k\alpha}$ при некотором t_0 ($t_{\text{in}} < t_0 < t_{\text{out}}$).

При этом кривая l_ρ пересекает множество D_k в следующем смысле:

$$\rho(\tau) \in D_k \text{ при всех } \tau \in (\tau_{\text{in}}, \tau_{\text{out}}), \quad (5.5a)$$

$$\rho(\tau_0) \in \Delta_k \text{ для некоторого } \tau_0 \in (\tau_{\text{in}}, \tau_{\text{out}}). \quad (5.5b)$$

Здесь точки кривой l_ρ , отвечающие $\tau = \tau_{\text{in}}$ и $\tau = \tau_{\text{out}}$, лежат на окружности (дуге окружности), составляющей границу D_k (или часть этой границы), см. рис. 1.

РИС. 1. Пояснения к рисунку приведены в доказательстве леммы 5.1. Здесь $\rho = (\rho_1, \rho_2)$

5.2. ЛЕММА 5.1. Пусть для системы (3.1) $a_1 \neq 0$ и $a_1 \neq a_2$ ($a_j = \text{Re } A_j$). Тогда можно выбрать окрестности $V_{k\alpha} = \alpha^{1/2} V_k$ инвариантных множеств $I_{k\alpha}$ этой системы (точки, циклов или 2-тора) так, что при достаточно малом α будет выполняться следующее условие: всякая траектория $z(t)$ системы (3.1), пересекающая область $U_{j\alpha}$ и не покидающая шар $B_* = \{|z| \leq R_*\}$, с ростом t не попадает вторично в область $V_{j\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Фиксируем j , и пусть $z(t)$ пересекает область $U_{j\alpha}$. Тогда кривая l_ρ пересекает D_j . Поскольку по построению $\Delta_j \subset D_j^{\text{in}}$, то l_ρ пересечет внешнюю часть D_j — множество D_j^{ex} . Это множество не содержит нулей полинома

$Q_1(\rho_1^2, \rho_2^2)$ (см. (4.1)), и потому при $\alpha < \varepsilon_2$ в точках этого множества $\Lambda'_1 \geq K > 0$ в силу формулы (5.4). (Постоянную K выберем одинаковой для всех j .)

2) Пусть множеству D_j^{ex} принадлежит участок кривой l_ρ , отвечающий интервалу $\tau_1 < \tau < \tau_2$: точки, отвечающие τ_1 и τ_2 , принадлежат границе D_j^{ex} и лежат на разных окружностях, так что расстояние между ними не меньше $c/2$. Правые части системы (5.2) ограничены, и потому $\tau_2 - \tau_1 \geq C > 0$. Поскольку Λ_1 зависит только от ρ_j , то $\Lambda_1(\tau_2) - \Lambda_1(\tau_1) > K_1 = KC$ (K_1 тоже можно считать не зависящим от j).

3) Рассмотрим участок l_ρ внутри Δ_j . Пусть τ — момент первого вхождения l_ρ в $\overline{\Delta}$ (замыкание множества Δ), а τ_+ — момент последнего выхода из $\overline{\Delta}$. Очевидно, $|\Lambda_1(\tau_+) - \Lambda_1(\tau_-)|$ не превосходит $M_j - m_j$. Здесь M_j и m_j — соответственно верхняя и нижняя грань функции Λ_1 в множестве Δ_j . Выберем теперь Δ_j столь малым, чтобы $M_j - m_j$ не превосходило $K_1/2$.

4) При входе в Δ_j и при выходе из Δ_j кривая l_ρ пересекает D_j^{ex} , поэтому из 2) и 3) вытекают следующие неравенства (см. (5.5)):

$$\Lambda_1(\tau_{\text{out}}) > \Lambda_1(\tau_{\text{in}}) + \frac{3}{2}K_1, \quad (5.6a)$$

$$\Lambda_1(\tau_{\text{out}}) > \Lambda_1(\tau_+) + K_1 \geq M_j + \frac{1}{2}K_1. \quad (5.6b)$$

5) Рассмотрим теперь кривую l_ρ для $\tau > \tau_{\text{out}}$. На участках этой кривой, расположенных вне всех Δ_k , $\Lambda_1(\tau)$ монотонно растёт (точнее, $\Lambda'_1(\tau) > C_1 > 0$). При каждом пересечении какой-либо из областей D_k значение Λ_1 на выходе больше, чем на входе, в силу (5.6a). Следовательно, для всех τ , кроме тех, которые отвечают попаданию в другие множества Δ_k ($k \neq j$), $\Lambda_1(\tau) > \Lambda_1(\tau_{\text{out}})$ или $\Lambda_1(\tau) > M_j$ в силу (5.6b).

Из последнего неравенства вытекает справедливость леммы.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть траектория $l = \{z(t)\}$ системы (3.1) ($\alpha \leq \alpha_*$) не покидает шар V_* при $t > t_0$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ траектория l стремится к одному из циклов $I_{1\alpha}$, $I_{2\alpha}$ или к тору $I_{3\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 5.1 траектория l может пересечь каждую из областей $U_{k\alpha}$ (попадая в $V_{k\alpha}$!) не более одного раза. Пусть при $t \geq t_1$ кривая l не пересекает ни одну из областей $U_{k\alpha}$. Рассмотрим следующие варианты.

1) При $t \geq t_1$ траектория все время находится в некой области $U_{j\alpha}$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ траектория l стремится к $I_{j\alpha}$ (см. лемму 3.1).

2) Для некоторого $t_2 > t_1$ точка $z(t_2)$ находится вне всех $U_{k\alpha}$. Находиться неограниченно долго вне всех $V_{k\alpha}$ траектория не может (см. следствие 4.2). Поэтому при некотором $t_3 > t_2$ l попадает в одну из областей $V_{j\alpha}$ и выйти из области $U_{j\alpha}$ она уже не может: в противном случае l пересекала бы $U_{j\alpha}$, что при $t \geq t_1$ невозможно; ω -предельное множество траектории l есть, следовательно, подмножество $I_{j\alpha}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичное утверждение справедливо для предельного поведения траекторий при убывании t . Единственное изменение: траектория, не покидающая шар V_* , может стремиться при $t \rightarrow -\infty$ также к положению равновесия $z = 0$.⁹

⁹Эта асимметрия, конечно, исчезает, если рассматривать положительные и отрицательные значения параметра.

§6. Основные детали фазового портрета

Объединяя сказанное в пп. 1.2–1.4 и §§2–5, получаем следующую теорему о бифуркации при двукратных мнимых λ в случае 2 (см. п. 1.5). В ее формулировке повторены все сделанные ранее существенные предположения.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть n -мерная система $x' = f(x, \alpha)$, зависящая от параметра α , инвариантна относительно конечной группы Γ линейных преобразований и имеет при $\alpha = 0$ положение равновесия $x = 0$. Предположим, что оператор $L_0 = f'_x(0, 0)$ имеет двукратную пару чисто мнимых собственных значений $\lambda = \pm i\omega$ (остальные λ лежат вне мнимой оси), и пусть E – соответствующее четырехмерное подпространство. Предположим, что бифуркационная группа G_{bif} (ограничение Γ на E) изоморфна D_m , где

$$m \geq 3, \quad m \neq 4. \quad (6.1)$$

Точнее, пусть представление $\Gamma \mapsto G_{\text{bif}}$ распадается в сумму двух изоморфных двумерных представлений $\Gamma \mapsto D_m$.¹⁰ Тогда

- {1} в подходящих комплексных координатах ограничение системы на центральное многообразие M_α имеет вид

$$\begin{aligned} z'_1 &= (i\omega(\alpha) + \gamma\alpha)z_1 + z_1(A_1r_1^2 + A_2r_2^2) + O(\alpha^2r + r^5), \\ z'_2 &= (i\omega(\alpha) + \gamma\alpha)z_2 + z_2(A_2r_1^2 + A_1r_2^2) + O(\alpha^2r + r^5). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь $r_k = |z_k|$, $r^2 = |z|^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Предположим далее, что выполнены условия

$$\gamma \neq 0, \quad a_1 \neq a_2, \quad a_1 \neq 0, \quad a_j = \text{Re}(A_j). \quad (6.3)$$

Тогда:

- {2} при малых α ($\text{sign } \alpha = -\text{sign}(\gamma a_1)$) система имеет конгруэнтные предельные циклы $I_{1\alpha}$ и $I_{2\alpha}$ с диаметром порядка $|\alpha|^{1/2}$;
- {3} при малых α ($\text{sign } \alpha = -\text{sign}(\gamma a)$) система имеет инвариантный двумерный тор $I_{3\alpha}$, диаметр которого также имеет порядок $|\alpha|^{1/2}$ (здесь $a = a_1 + a_2$);
- {4} существуют число $\varepsilon > 0$ и окрестность U_* точки $x = 0$ со следующими свойствами: пусть $x(t)$ – решение системы для некоторого α из участка $|\alpha| \leq \varepsilon$ и $x(0) \in U_*$, тогда его траектория либо неограниченно приближается при $t \rightarrow \infty$ к равновесию x_α или к одному из инвариантных множеств $I_{j\alpha}$ (если они существуют при этом α), либо покидает U_* за конечное время.

Основные части доказательства теоремы содержатся в §§2–5, и нам осталось сделать лишь несколько замечаний.

¹⁰Напомним, что это и есть одна из двух возможностей появления двукратных чисто мнимых λ в задаче коразмерности 1, см. п. 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. 1) Утверждение {1} при выполнении условия (6.1) следует из сказанного в §§ 1 и 2. Подходящие координаты – это координаты, нормализующие систему на $\mathbf{M}_\alpha$ до порядка 4 включительно.

2) Утверждения {2} и {3} при выполнении условий (6.3) следуют из леммы 3.1, т.е. в наиболее существенной части – из теоремы Рюэлля [12; теорема 3.2]. Любое преобразование из группы Γ , переходящее при гомоморфизме $\Gamma \mapsto G_{\text{bif}}$ в элемент $\mathbf{b}$ (см. (2.2)), переставляет циклы $I_{1\alpha}$ и $I_{2\alpha}$, которые являются конгруэнтными кривыми.

3) В силу свойств центрального многообразия основное, четвертое утверждение теоремы достаточно доказать для ограничения (6.2) системы на многообразие $\mathbf{M}_\alpha$. Справедливость его для уравнений (6.2) следует из леммы 5.1 (см. следствие 5.2). Поясним это несколько подробнее.

4) Пусть U – (любая) окрестность точки $x = 0$, в которой при $|\alpha| < \varepsilon_0$ справедливы утверждения теоремы Шошитайшвили [1; §32]. Любая полутраектория $l_+ = \{x(t), t \geq t_0\}$, не покидающая U , при $t \rightarrow \infty$ стремится к $\mathbf{M}_\alpha$: ее ω -предельное множество l_∞ лежит на $\mathbf{M}_\alpha$. При этом существует полутраектория $\tilde{l}_+ \subset \mathbf{M}_\alpha$ (“проекция” l_+ на $\mathbf{M}_\alpha$), имеющая то же самое ω -предельное множество: $l_\infty = \tilde{l}_\infty$.

5) Выберем теперь в качестве U_* столь малую область U , чтобы при каждом α ($|\alpha| < \varepsilon$) пересечение $U \cap \mathbf{M}_\alpha$ содержалось в шаре $B_* = \{|z| \leq R_*\}$, фигурирующем в леммах 4.1 и 5.1. (Можно взять $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_*, \varepsilon_2\}$, см. леммы 3.1, 4.1 и 5.1). Пусть l_+ – полутраектория, не покидающая U_* . Для нее $l_\infty = \tilde{l}_\infty$, а $\tilde{l}_\infty$ совпадает с одним из множеств $I_{j\alpha}$ (или является его частью) в силу следствия 5.2. При выбранных ε и U_* утверждение {4} справедливо и тем самым теорема доказана.

Замечания о случае круговой симметрии. Если группа симметрии Γ дифференциальных уравнений непрерывна¹¹, то одна из возможных бифуркаций коразмерности 1 также описывается теоремой 6.1. Нужно лишь разрешить в ее формулировке замену дискретной группы D_m на ее “предельный случай” – непрерывную группу $O(2)$. При этом отпадает вторая половина работы – изучение поведения траекторий на инвариантном 2-торе: при бифуркационной группе, изоморфной $O(2)$, тор расслоен на циклы (состоит из конгруэнтных замкнутых траекторий системы).

Задача с такой симметрией рассматривается в работах [16] и [17]. При этом в [17] вопрос о полной бифуркационной картине не обсуждается. В работе [16] используется функция Ляпунова (3.5) и сформулировано утверждение, аналогичное теореме 6.1 (но его доказательство неполно).

Этой задаче посвящена также глава 17 в книге [5], где имеются многочисленные ссылки на работы других авторов.

§ 7. Замкнутые траектории, возникающие из-за симметрии

Убедимся, что на двумерном торе Tor_α , указанном в теореме 6.1, всегда имеются замкнутые траектории. Для простоты выберем следующие знаки коэффициентов (см. (2.3) и (2.6)):

$$\gamma = \text{Re } \lambda'(0) > 0, \quad a = \text{Re}(A_1 + A_2) < 0, \quad A_k = A_k(0).$$

¹¹И имеет двумерные вещественные представления, которые абсолютно неприводимы.

Тогда 2-тор Тог_α существует при (малых) $\alpha > 0$.

В силу равенства (2.5b) двумерная плоскость $\Pi_0 = \{z_1 = z_2\}$ инвариантна для системы уравнений (2.4) (или (2.6)) на центральном многообразии. На этой плоскости система сводится к одному уравнению:

$$z_1' = (i\omega(\alpha) + \gamma\alpha)z_1 + Az_1r_1^2 + O(\alpha^2r_1 + r_1^5). \quad (7.1)$$

Здесь $A = A_1 + A_2$. При $a < 0$ уравнение (7.1) имеет для малых $\alpha > 0$ предельный цикл $C_\alpha^{(0)}$. Этот цикл заведомо отличен от двух циклов (существующих при $\text{Re } A_1 < 0$), близких к плоскостям $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$. Значит, в силу утверждения {4} теоремы 6.1 цикл $C_\alpha^{(0)}$ лежит на Тог_α . Заметим теперь, что все плоскости $\Pi_k = \{z_1 = e^{ik\theta}z_2\}$ (здесь $m\theta = 2\pi$) инвариантны для системы (2.4). Действительно, при $z_1 = e^{ik\theta}w$, $z_2 = w$ имеем в силу (2.5):

$$F_1(e^{ik\theta}w, w, \alpha) = F_2(w, e^{ik\theta}w, \alpha) = e^{ik\theta}F_2(e^{ik\theta}w, w, \alpha).$$

В каждой из плоскостей Π_k система сводится к уравнению (7.1) и имеет там предельный цикл. Таким образом, на Тог_α имеется не менее m замкнутых траекторий.

При четном m (если выполнено некое дополнительное неравенство) на Тог_α лежит ровно m изолированных циклов – никаких других, кроме указанных, нет. При нечетном m имеется m “дополнительных” циклов и общее число предельных циклов на торе равно $2m$. Чтобы доказать эти утверждения, нужно в уравнениях на центральном многообразии (2.4) учесть тейлоровские слагаемые до высокого порядка – тем более высокого, чем больше m ¹². Эти доказательства мы опустим (см. дополнение 2 и [13]).

§ 8. О других бифуркациях, отвечающих двукратным мнимым λ

8.1. О бифуркационной группе. Пусть система $x' = f(x, \alpha)$ имеет при $\alpha = 0$ положение равновесия $x = 0$. Предположим, что оператор $L_0 = f'_x(0, 0)$ имеет двукратную пару чисто мнимых собственных значений $\lambda = \pm i\omega$, все остальные λ лежат вне мнимой оси, и пусть E – соответствующее четырехмерное подпространство (инвариантное относительно Γ). А priori, бифуркационная группа G_{bif} , ограничение Γ на E , есть подгруппа ортогональной группы $O(4)$. В нашем случае G_{bif} изоморфна подгруппе группы унитарных преобразований (двумерного комплексного пространства) $U(2)$ ¹³. В самом деле, при комплексификации $E \mapsto E_C$; E_C есть прямая сумма двумерных подпространств W и W^* , состоящих из собственных векторов. Поскольку по условию W содержит все собственные векторы L_0 , отвечающие $\lambda = i\omega$, это подпространство инвариантно относительно (продолженного) действия G_{bif} . Обозначим через G_W ограничение G_{bif} на W . Очевидно, G_{bif} изоморфна G_W и, следовательно, G_{bif} с точностью до изоморфизма есть подгруппа $U(2)$. Выбрав в W ортогональный базис, можно использовать координаты z_1 и z_2 в этом базисе в качестве координат на E . Элементы G_{bif} будут тогда задаваться двумерными унитарными матрицами.

¹²Напомним, что в предельном случае, когда бифуркационная группа изоморфна (полной) ортогональной группе $O(2)$, изолированных циклов на 2-торе нет и картина вполне определяется кубичными членами.

¹³Следуя традиции, мы обозначаем одинаково группу унитарных преобразований комплексного евклидова пространства и (изоморфную ей) группу комплексных унитарных матриц. Из контекста каждый раз ясно, о чем идет речь. То же относится к бифуркационной группе.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) В интересующих нас случаях бифуркационная группа G_{bif} некоммукативна. Действительно, в случае 1 (см. п. 1.5) G_{bif} действует на четырехмерном пространстве E неприводимо, что невозможно для коммутативной группы. В случае 2 G_{bif} изоморфна D_m .

2) До тех пор пока не фиксирована (конечная или компактная) группа Γ или некий класс таких групп, роль бифуркационной группы может играть *любая* подгруппа $U(2)$, действующая в $\mathbb{C}^2$ неприводимо.

8.2. Симметрия нормализованных уравнений. Рассмотрим снова уравнения $z' = F(z, \alpha)$, $z = (z_1, z_2)$, на четырехмерных центральных многообразиях M_α , выбранных так, чтобы они были инвариантными относительно действия группы Γ . Предположим, что эти уравнения нормализованы до некоторого порядка с сохранением инвариантности относительно действия всех (линейных унитарных) преобразований, входящих в G_{bif} . Отбросим остаточные (ненормализованные) члены. Полученные полиномиальные уравнения, как всегда при нормализации, будут инвариантны относительно однопараметрической группы линейных операторов $\exp(sL)$, $L = F'_z(0, 0)$. В нашем случае это есть группа $SO(2)$, действующая так: $\hat{s}(z) = (e^{is}z_1, e^{is}z_2)$. Таким образом, нормализованные уравнения инвариантны относительно более широкой подгруппы G группы $U(2)$: $G = G_{\text{bif}} \cdot SO(2)$ ¹⁴.

Теперь заметим, что для всякого $g \in U(2)$ существуют два таких s , что $\tilde{g} = g\hat{s} \in SU(2)$ (т.е. $\det(g\hat{s}) = 1$). Когда g пробегает группу G_{bif} , $\tilde{g}$ пробегает некую группу Ω , также “порождающую” G : $G = \Omega \cdot SO(2)$. Рассматривая нормализованную систему, мы можем считать, что она инвариантна относительно конечной подгруппы Ω группы $SU(2)$, и будем называть Ω *приведенной бифуркационной группой*.

Матричная группа Ω некоммукативна (см. замечание выше) и вместе с каждым элементом g содержит $-g$. При стандартном гомоморфизме $SU(2) \mapsto SO(3)$ (ядро равно $\{e, -e\}$) $\Omega \mapsto \Omega'$ и обратно: Ω однозначно восстанавливается по Ω' (см., например, [18; §15]).

Итак: до тех пор пока рассматриваются нормализованные системы, каждой бифуркационной задаче с двукратными мнимыми λ отвечает подгруппа Ω' трехмерной группы вращений $SO(3)$. Обратно, подгруппе Ω' отвечает некая бифуркация коразмерности 1 с двукратными мнимыми λ , если соответствующая группа Ω действует в $\mathbb{C}^2$ неприводимо. Все конечные подгруппы $SO(3)$ можно перечислить — они отвечают симметриям правильных многоугольников и правильных многогранников (см. [18; §13] и [19; гл. 12]). В результате получится полное перечисление всех возможных бифуркаций коразмерности 1, отвечающих двукратным мнимым λ , в *предположении*, что бифуркационная картина определяется системой на центральном многообразии, нормализованной до *какого-нибудь* порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ. Переход от G_{bif} к Ω' может быть осуществлен “за один шаг”: Ω' есть образ G_{bif} при гомоморфизме $U(2) \mapsto SO(3)$ (ядро есть подгруппа матриц, кратных единичной).

8.3. Пример — задача, рассмотренная в первой части статьи. Пусть бифуркационная группа $G_{\text{bif}} \subset U(2)$ изоморфна D_m . Пусть снова $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — образу-

¹⁴Здесь и ниже точка обозначает произведение подгрупп, т.е. совокупность произведений $g_1 g_2$ (g_1 — из первой подгруппы, g_2 — из второй).

ющие этой группы:

$$\mathbf{a}^m = \mathbf{e}, \quad \mathbf{b}^2 = \mathbf{e}, \quad \mathbf{ab} = \mathbf{ba}^{-1}. \quad (8.1)$$

Выберем в качестве (ортонормированного) базиса в W собственные векторы оператора $\mathbf{a}$. Из соотношений (8.1) следует, что матрицы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ приобретут вид:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Заменяя, если нужно, оператор $\mathbf{a}$ на некую его степень, можно считать, что $a = \exp(i\theta)$, $\theta = 2\pi/m$. Умножив один из базисных векторов на число, можно добиться, что $b = 1$.

Таким образом, группа G_{bif} состоит здесь из матриц двух типов:

$$(a) \quad \mathbf{a}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & a^{-k} \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \mathbf{a}^k \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & a^k \\ a^{-k} & 0 \end{pmatrix},$$

$k = 1, \dots, m$. В приведенную бифуркационную группу Ω войдут:

- 1) матрицы $\mathbf{a}^k$ и $-\mathbf{a}^k$; при четном m это не увеличивает числа таких матриц, а при нечетном m — удваивает;
- 2) матрицы $\pm i(\mathbf{a}^k \mathbf{b})$.

Полученная группа Ω может быть задана двумя образующими и следующими соотношениями:

$$\mathbf{c}^{2q} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{cd} = \mathbf{dc}^{-1}, \quad \mathbf{d}^2 = \mathbf{c}^q. \quad (8.2)$$

Здесь при четном m : $q = m/2$ и можно взять $\mathbf{c} = \mathbf{a}$. При нечетном m : $q = m$ и $\mathbf{c}$ получается из $\mathbf{a}$ заменой θ на $\theta/2$. В обоих случаях можно положить $\mathbf{d} = \mathbf{bi}$.

Обозначим через D'_{2q} группу (из $4q$ элементов) с двумя образующими и определяющими соотношениями (8.2).

При реализации D'_{2q} как подгруппы $SU(2)$ будет выполняться равенство $\mathbf{c}^q = -\mathbf{e}$, и при гомоморфизме $SU(2) \mapsto SO(3)$ формулы (8.2) перейдут в соотношения группы D_q . Итак, если бифуркационная группа G_{bif} изоморфна D_m , то соответствующая подгруппа Ω' группы $SO(3)$ изоморфна D_q . Здесь $q = m/2$ при четном m и $q = m$ при нечетном m .

8.4. Об обратном соответствии. Выше отмечено, что подгруппе Ω группы $SU(2)$, изоморфной D'_{2q} , соответствует $\Omega' \subset SO(3)$, изоморфная D_q . Легко убедиться, что верно и обратное: если конечная подгруппа $SO(3)$ изоморфна D_q , то ее полный прообраз при гомоморфизме $SU(2) \mapsto SO(3)$ изоморфен D'_{2q} . Мы воспользуемся этим замечанием в §10.

§9. О других бифуркациях, отвечающих двукратным мнимым λ (продолжение)

9.1. Вид кубичных членов нормализованной системы — начало. Предположим, что приведенная бифуркационная группа Ω содержит элемент g , порядок которого не равен 2 и 4. Выбрав в качестве (ортогонального) базиса в W собственные векторы оператора g , получим

$$g(z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{-i\theta} z_2), \quad \theta \neq \pi, \frac{\pi}{2}.$$

Потребовав инвариантности уравнений относительно преобразования g , получим (точно так же, как в конце §2), что из возможных кубичных слагаемых в каждом уравнении могут присутствовать лишь два, так что уравнения имеют вид:

$$z'_1 = \lambda(\alpha)z_1 + z_1(A_1(\alpha)r_1^2 + A_2(\alpha)r_2^2) + O(r^5), \quad (9.1a)$$

$$z'_2 = \lambda(\alpha)z_2 + z_2(A_3(\alpha)r_1^2 + A_4(\alpha)r_2^2) + O(r^5). \quad (9.1b)$$

9.2. ЛЕММА 9.1. *Пусть система (9.1) инвариантна относительно унитарного линейного преобразования с “заполненной” матрицей:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad ab \neq 0.$$

Тогда все коэффициенты $A_j(\alpha)$ равны между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совершим в системе (9.1) преобразование переменных $z \rightarrow w$: $w_1 = az_1 + bz_2$, $w_2 = -b^*z_1 + a^*z_2$ и потребуем, чтобы получились те же уравнения. Приравняем к нулю в уравнении для w_1 коэффициенты при $w_2|w_1|^2$, $w_2|w_2|^2$, $w_1^2w_2^*$ и $w_2^2w_1^*$. Получим (использовав условие $ab \neq 0$) следующую систему линейных уравнений для коэффициентов A_j :

$$\begin{aligned} -A_1|a|^2 - A_2|b|^2 + A_3|a|^2 + A_4|b|^2 &= 0, \\ -A_1|b|^2 - A_2|a|^2 + A_3|b|^2 + A_4|a|^2 &= 0, \\ -A_1|a|^2 + A_2|a|^2 - A_3|b|^2 + A_4|b|^2 &= 0, \\ A_1 - A_2 - A_3 + A_4 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет очевидное решение: все $A_j = A$. Она не имеет других решений, поскольку ранг ее матрицы равен трем.

9.3. Альтернатива. Пусть для группы Ω условия леммы 9.1 не выполняются, т.е. в выбранном (или любом другом!) базисе все элементы Ω имеют матрицы одной из двух форм:

$$(c) \quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^* \end{pmatrix}, \quad (d) \quad \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы типа (c) образуют циклическую подгруппу: $c = \exp(ik\theta)$, $\theta = 2\pi/m$. Здесь $m = 2q$ – четное, поскольку в Ω есть элемент с $c = -1$ (независимо от определения группы Ω это следует из того, что квадрат любого элемента типа (d) равен $-\mathbf{e}$). Образующую с циклической подгруппы примем за первую образующую группы Ω . В качестве второй образующей $\mathbf{d}$ можно взять любой элемент типа (d): произведение двух элементов типа (d) имеет тип (c). Поскольку $\mathbf{c}^q = -\mathbf{e}$ и $\mathbf{d}^2 = -\mathbf{e}$, то выполнены соотношения (8.2): в этом случае группа Ω изоморфна D'_{2q} .

9.4. Когда справедлива теорема 6.1? Из сказанного выше вытекает следующее утверждение.

Если все элементы конечной некоммутативной подгруппы Ω группы унитарных преобразований $SU(2)$ в некотором базисе имеют “незаполненные” (содержащие нули) матрицы, то эта группа изоморфна D'_{2q} , $q \geq 2$.

Если Ω – приведенная бифуркационная группа нормализованной системы, то полная группа симметрии G этой системы (см. п. 8.2) будет такой же, как если бы бифуркационная группа G_{bif} была изоморфна D_{2q} . В качестве образующих D_{2q} можно взять $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{id}$. При доказательстве теоремы 6.1 использовались лишь свойства симметрии нормализованной (до четвертого порядка) системы.

Итак: если приведенная бифуркационная группа Ω изоморфна D'_{2q} , то для такой бифуркации справедлива теорема 6.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенная бифуркационная группа Ω может быть изоморфна D'_{2q} и тогда, когда бифуркационная группа G_{bif} не изоморфна D_m . В этом случае исходная группа симметрии Γ действует на E неприводимо, т.е. имеет место первый случай альтернативы п. 1.5, но теорема 6.1 и сказанное в § 7 остаются в силе.

§ 10. Существование трехмерной инвариантной сферы

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть n -мерная система $x' = f(x, \alpha)$, зависящая от параметра α , инвариантна относительно конечной группы Γ линейных преобразований и имеет при $\alpha = 0$ положение равновесия $x = 0$. Предположим, что оператор $L_0 = f'_x(0, 0)$ имеет двукратную пару чисто мнимых собственных значений $\lambda = \pm i\omega$, все остальные λ лежат вне мнимой оси, и пусть E – соответствующее четырехмерное подпространство (инвариантное относительно Γ). Предположим, что приведенная бифуркационная группа Ω не изоморфна D'_{2q} .¹⁵ Тогда

- 1) в подходящих комплексных координатах ограничение системы на центральное многообразие M_α имеет вид

$$\begin{aligned} z'_j &= \lambda(\alpha)z_j + A(\alpha)z_j r^2 + O(r^5), & j &= 1, 2, \\ r^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Положим $\lambda(\alpha) = i\omega(\alpha) + \alpha\gamma(\alpha)$ и обозначим $A = A(0)$, $\gamma = \gamma(0)$. Предположим далее, что выполнены условия $\gamma \neq 0$ и $a = \operatorname{Re} A \neq 0$. Тогда:

- 2) при малых α ($\operatorname{sign} \alpha = -\operatorname{sign}(\gamma a)$) существует инвариантное трехмерное многообразие S_α , диффеоморфное сфере, диаметр которого имеет порядок $|\alpha|^{1/2}$;
- 3) существуют число $\varepsilon > 0$ и окрестность U_* точки $x = 0$ со следующими свойствами: пусть $x(t)$ – решение системы для некоторого α из участка $|\alpha| \leq \varepsilon$ и $x(0) \in U_*$, тогда его траектория либо неограниченно приближается при $t \rightarrow \infty$ к равновесию x_α или к многообразию S_α (если оно существует при этом α), либо покидает U_* за конечное время.

¹⁵См. определения в пп. 8.2 и 8.3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 10.1 ничего не говорит о поведении траекторий на трехмерной сфере S_α . Это поведение зависит от бифуркационной группы G_{bif} или от приведенной группы Ω , если оно определяется нормализованными уравнениями. Его исследование значительно труднее, чем доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10.1. 1) По условию группа Ω не изоморфна D'_{2q} . Поэтому (см. п. 8.4) группа Ω' – образ Ω при гомоморфизме $SU(2) \mapsto SO(3)$ – изоморфна одной из групп вращений правильных многогранников: тетраэдра, октаэдра или икосаэдра. В любой из этих групп есть элементы, порядок которых равен 3 (у многогранников есть оси симметрии 3-го порядка). Поэтому в группе Ω существует элемент g , имеющий порядок 3 или 6. Выберем собственные векторы g в качестве базиса на E . Затем нормализуем систему до 4-го порядка включительно так, чтобы действие элементов Ω задавалось теми же матрицами из $SU(2)$ (см. п. 1.4). Получим (см. ш. 8.1 и 9.1), что система на центральном многообразии имеет вид (9.1).

2) В выбранном базисе некий элемент группы Ω имеет матрицу, все элементы которой отличны от нуля (в противном случае Ω изоморфна D'_{2q} , см. п. 9.4). Теперь применима лемма 9.1 и уравнения на центральном многообразии имеют вид (10.1).

3) Пусть для определенности $\gamma > 0$ и $a < 0$ (другие комбинации знаков сводятся к этой с помощью замены знака времени или параметра). Рассмотрим наряду с системой (10.1) следующую систему

$$z'_j = \gamma z_j + A z_j r^2, \quad j = 1, 2. \quad (10.2)$$

Эта система имеет (экспоненциально) притягивающее инвариантное многообразие – трехмерную сферу S : $r = R$, $R = (-\gamma/a)^{1/2}$. На S уравнения (10.2) имеют вид $z'_k = -i\tilde{\omega} z_k$, $\tilde{\omega} = \gamma \operatorname{Im} A/a$. Таким образом, выполнены условия теоремы Рюэлля (см. [12; теорема 3.2]). Из нее вытекает: система (10.1) при $\alpha > 0$ имеет притягивающее инвариантное многообразие S_α , диффеоморфное S , на котором $r = R\alpha^{1/2} + o(\alpha^{1/2})$. При этом существует область U_α : $R_1\alpha^{1/2} < r < R_2\alpha^{1/2}$ (содержащая S_α), из которой любая траектория притягивается к S_α .

4) В силу системы (10.1) имеем: $r' = \alpha\gamma r + ar^3 + O(\alpha^2 r + r^5)$. При отброшенном остаточном члене $r' > 0$ для $r < R\alpha^{1/2}$ и $r' < 0$ для $r > R\alpha^{1/2}$. При учете остаточного члена существуют такие $r_{\max}$ и $c > 0$, что $r' > 0$ для $r < R\alpha^{1/2} - c\alpha$ и $r' < 0$ при $R\alpha^{1/2} + c\alpha < r < r_{\max}$. При достаточно малом $\alpha > 0$ получим $r' > 0$ для $r \leq R_1\alpha^{1/2}$ и $r' < 0$ при $R_2\alpha^{1/2} \leq r < r_{\max}$. Отсюда: любая траектория системы (10.1), начинающаяся при $r < r_{\max}$, при $t \rightarrow +\infty$ попадает в область U_α и, следовательно, стремится к S_α . При $t \rightarrow -\infty$ такая траектория или стремится к $z = 0$, или покидает область $r < r_{\max}$.

5) Переход от системы на центральном многообразии к исходной n -мерной системе стандартен (см. конец доказательства теоремы 6.1).

Примечания

К § 2: вид линейных операторов. При выходе в комплексную область E переходит в E_C (и естественно продолжается действие линейных операторов). В четырехмерном пространстве E_C есть двумерное собственное подпространство W оператора L_0 , отвечающее собственному значению λ_0 ; W инвариантно относительно (продолженного) действия G_{bif} . Пусть e_1 – собственный вектор оператора $\mathbf{a}$, отвечающий собственному значению $\exp(i\theta)$, $\theta = 2\pi/m$. Положим $e_2 = \mathbf{b}e_1$ и

примем e_1 и e_2 за базис в W . В соответствующих координатах z_1 и z_2 справедливы формулы (2.1) и (2.2) для $\alpha = 0$. Заметим теперь, что $\operatorname{Re} z_j$ и $\operatorname{Im} z_j$ могут служить координатами на E (и на центральном многообразии M_0); формулы (2.1), (2.2) приобретают тогда смысл сокращенной комплексной записи вещественных соотношений.

Для малых α , отправляясь от инвариантного подпространства $E(\alpha)$, аналогично вводятся координаты на многообразиях M_α . Переменные z_1, z_2 и α могут служить координатами на центральном многообразии M расширенной системы, если $e_1(\alpha)$ (как вектор $\mathbb{C}^n$) гладко зависит от α . Этого, очевидно, можно добиться. В таких координатах коэффициенты уравнений (2.4) будут гладкими функциями от α .

К п. 5 доказательства теоремы 6.1. В силу теоремы Шопитайшвили фазовый портрет исходной системы в окрестности $x = 0$ получается применением гомеоморфизма χ к распавшейся системе: $z' = f(z, \alpha)$, $\xi' = \xi$, $\eta' = -\eta$ ($\dim \xi + \dim \eta = n - 4$). Пусть $V = \{|z| \leq \delta, |\xi| \leq \delta, |\eta| \leq \delta\}$. Нужная нам окрестность U_* есть $\chi(V)$ при достаточно малом δ .

Дополнение 1

О бифуркациях симметричных положений равновесия, отвечающих двукратному $\lambda = 0$ и коразмерности 1. Пусть x_0 — положение равновесия Γ -инвариантной системы $x' = f(x, 0)$ и $g(x_0) = x_0$ для всех элементов g группы Γ ($\alpha = 0$ — бифуркационное значение параметра). Покажем, что такое положение равновесия не исчезает при бифуркации, отвечающей кратному $\lambda = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Д.1. Пусть уравнение $f(x, 0) = 0$ имеет Γ -инвариантное решение x_0 . Предположим, что оператор $L_0 = f'_x(x_0, 0)$ имеет ν -кратное нулевое собственное значение ($\nu > 1$) и группа Γ действует на (инвариантном для нее) собственном подпространстве E неприводимо. Тогда уравнение $f(x, \alpha) = 0$ имеет при малых α (любого знака) Γ -инвариантное решение x_α ; x_α гладко зависит от α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F = \operatorname{Fix}(\Gamma)$ — совокупность общих неподвижных точек всех преобразований $g \in \Gamma$. Подпространство F инвариантно для отображения $f(x, \alpha)$: если $x \in F$, то $f(x, \alpha) \in F$, так как $gf(x, \alpha) = f(gx, \alpha) = f(x, \alpha)$. Подпространство E имеет с F только тривиальное пересечение, так как в F любое одномерное подпространство инвариантно для Γ . Значит, ограничение L_0 на F невырождено и уравнение $f(x, \alpha) = 0$ имеет при малых α в F решение x_α , гладко зависящее от α (по теореме о неявной функции).

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Для интересующих нас задач о бифуркациях коразмерности 1 действие Γ на E абсолютно неприводимо (см. п. 1.5).

2) Предложение Д. 1 позволяет привести к стандартной постановке задачи о бифуркациях коразмерности 1 для конечных групп симметрии в случаях, отвечающих $\lambda = 0$ (см. пп. 1.1 и 1.2).

3) К точке x_0 могут подходить другие ветви решений уравнения $f(x, \alpha) = 0$ (существующие при малых α), но в F лежит только ветвь x_α : остальные имеют меньшую симметрию.

Возможные бифуркации при $\nu = 2$. Модельные уравнения получаются так. Система $x' = f(x, \alpha)$ ограничивается на центральное многообразие, и в полученных уравнениях оставляются только существенные слагаемые. Там, где это возможно, берутся значения коэффициентов для $\alpha = 0$. Как и раньше, G_{bif} есть ограничение Γ на (двумерное) собственное подпространство E оператора L_0 , отвечающее $\lambda = 0$.

1) G_{bif} изоморфна D_m , $m > 4$. Модельное уравнение:

$$z' = \alpha\gamma z + az|z|^2 + b(z^*)^{m-1},$$

γ, a и b вещественны. Пусть γ, a и b отличны от нуля. Тогда при малых α ($\text{sign}(\alpha) = -\text{sign}(\gamma a)$) имеется замкнутая инвариантная кривая с диаметром порядка $|\alpha|^{1/2}$. На ней лежит $2m$ положений равновесия.

2) G_{bif} изоморфна $O(2)$. Модельное уравнение:

$$z' = \alpha\gamma z + az|z|^2,$$

γ и a вещественны. При γ и a , отличных от нуля, рождается инвариантная кривая, сплошь состоящая из положений равновесия.

В обоих случаях любая траектория из некоторого шара $|x| \leq R$ либо стремится к x_α или к одному из рождающихся равновесий, либо покидает этот шар. Доказательства легко следуют из сказанного в книге [1; §§ 33Б, 33В и 35Е, Ж].

ЗАМЕЧАНИЕ. Если G_{bif} – конечная группа, то выделяются два особых случая: $m = 3$ и $m = 4$. Информацию о них тоже можно извлечь из книги [1]. Но проще разобрать эти случаи независимо. В обоих случаях модельные системы в вещественной записи – *градиентные*. Никаких бифуркационных событий, кроме слияния и расщепления положений равновесия, здесь не происходит.

Дополнение 2

Нормализованные уравнения при G_{bif} , изоморфной D_m . Предположим, что уравнения на центральном многообразии $z'_j = F_j(z, \alpha)$ (2.4) приведены к нормальной форме до некоторого порядка так, что соотношения (2.5) сохранились (см. п. 1.4). Выясним, какие члены тейлоровского разложения могут содержаться в F_j .

Пусть $c(z_1)^{k_1}(z_1^*)^{l_1}(z_2)^{k_2}(z_2^*)^{l_2}$ – слагаемые в нормальной форме F_1 . Тогда должно выполняться равенство $k_1 - l_1 + k_2 - l_2 = 1$. Условие (2.5а) дает $k_1 - l_1 - k_2 + l_2 = 1 \pmod{m}$. Отсюда можно найти $\Delta_1 = k_1 - l_1$ и $\Delta_2 = k_2 - l_2$: $\Delta_1 = 1 + sq$, $\Delta_2 = -sq$; s – целое, $q = m$ при нечетном m и $q = m/2$ при четном m . При $s = 0$ получим “тривиальные” слагаемые вида $cz_1|z_1|^{2l_1}|z_2|^{2l_2}$. Они могут присутствовать при любом m и иметь любую нечетную степень (кубичные члены такого вида мы использовали в §§ 3–6). При группе G_{bif} , изоморфной $O(2)$, в нормальной форме имеются только такие слагаемые. При каждом $s \neq 0$ слагаемое наименьшей степени получится, когда два из показателей равны нулю. При $s = 1$ оно имеет вид $c(z_1)^{q+1}(z_2^*)^q$. При $s = -1$ наименьшую степень имеет слагаемое вида $c(z_1^*)^{q-1}(z_2)^q$. Учтя (2.5b), получим систему

$$\begin{aligned} z'_1 &= \lambda(\alpha)z_1 + z_1A(r_1^2, r_2^2, \alpha) + B(\alpha)(z_1^*)^{q-1}z_2^q + \dots, \\ z'_2 &= \lambda(\alpha)z_2 + z_2A(r_2^2, r_1^2, \alpha) + B(\alpha)z_1^q(z_2^*)^{q-1} + \dots. \end{aligned}$$

Здесь $r_j = |z_j|$, $q = m$ при нечетном m , $q = m/2$ при четном m ; $A(p_1, p_2, \alpha)$ — многочлен от p_1 и p_2 степени не более $q - 1$.

Если выполнено условие $\operatorname{Re}[(A_1 - A_2)B^*] \neq 0$, то на 2-торе $\operatorname{Tot}_\alpha$ имеется $2q$ предельных циклов. Однако стремление к ним при малых α происходит медленно: характерное время этого стремления $t_m = |\alpha|^{1-q}$. (Напомним, что характерное время стремления траекторий к $\operatorname{Tot}_\alpha$ имеет порядок $|\alpha|^{-1}$.) Таким образом, отличие дискретной симметрии (группы D_m) от непрерывной (группы $O(2)$) проявляется лишь на больших промежутках времени. Замечательно, что в этой задаче симметрия правильных многоугольников с нечетным числом сторон “ближе” к непрерывной: $t_5 = |\alpha|^{-4}$, а $t_6 = |\alpha|^{-2}$.

Дополнение 3: о теореме Рюэля

Приведем (не вполне скрупулезную) формулировку нужной нам теоремы 3.2 из работы Рюэля [12].

Пусть система $2n$ дифференциальных уравнений, зависящая от параметра α , в комплексной записи имеет вид

$$z' = (i\omega(\alpha) + \gamma\alpha)z + P(z) + O(\alpha^2|z| + |z|^5), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (\text{ДЗ.1})$$

Здесь $\gamma > 0$, компоненты $P(z)$ — полиномы третьей степени от z и z^* , линейные по z_k^* . Рассмотрим наряду с (ДЗ.1) систему

$$z' = \gamma z + P(z). \quad (\text{ДЗ.2})$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. Система (ДЗ.2) имеет инвариантное многообразие S со следующими свойствами:

- (а) S инвариантно относительно преобразований $z \rightarrow ze^{i\sigma}$ (при любом вещественном σ);
- (б) поток, порождаемый уравнением (ДЗ.2) на S , изотричен (сохраняет расстояния между точками);
- (в) многообразие S нормально гиперболично в смысле [15].

УТВЕРЖДЕНИЯ. 1) При малых $\alpha > 0$ система (ДЗ.1) имеет инвариантное многообразие S_α , диффеоморфное S .

2) S_α имеет диаметр порядка $\alpha^{1/2}$ и (в понятных обозначениях) близко к $\alpha^{1/2}S$. Точнее, $\alpha^{1/2}S_\alpha \rightarrow S$ при $\alpha \rightarrow 0$.

3) Существует окрестность U многообразия S такая, что при достаточно малых α в области $\alpha^{1/2}U$ нет других множеств, инвариантных для (ДЗ.1), кроме S_α . (Более точно: любое такое множество есть подмножество S_α .)

4) Если G — группа унитарных преобразований, относительно которой инвариантны уравнения (ДЗ.1) и многообразие S , то $g(S_\alpha) = S_\alpha$ для любого $g \in G$.

Список литературы

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Арнольд В. И., Абрамович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техн. Динамические системы. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–218.
3. Guckenheimer J., Holmes Ph. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. New York: Springer-Verlag, 1986.
4. Kuznetsov Yu. A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer-Verlag, 1995.
5. Golubitsky M., Stewart I., Schaeffer D. Singularities and groups in bifurcation theory. V. II. New York: Springer-Verlag, 1988.
6. Field M. Equivariant bifurcation theory and symmetry breaking // J. Dynam. Differential Equations. 1989. V. 1. № 4. P. 369–421.
7. Field M., Swift J. W. Hopf bifurcation and the Hopf fibration // Nonlinearity. 1994. V. 7. P. 385–402.
8. Swift J., Barany E. Chaos in the Hopf bifurcation with tetrahedral symmetry: convection in a rotating fluid with low Prandtl number // European J. Mech. B Fluids. 1991. V. 10. № 2, suppl. P. 99–104.
9. Guckenheimer J., Worfolk P. Instant chaos // Nonlinearity. 1992. V. 5. P. 1211–1222.
10. Swift J. W. Hopf bifurcation with the symmetry of the square // Nonlinearity. 1988. V. 1. P. 333–377.
11. Van Gils S. A., Silber M. On the uniqueness of invariant tori in $D_4 \times S^1$ symmetric systems // Nonlinearity. 1995. V. 8. № 4. P. 615–628.
12. Ruelle D. Bifurcations in the presence of a symmetry group // Arch. Rational Mech. Anal. 1973. V. 51. P. 136–152.
13. Шноль Э. Э., Николаев Е. В. О бифуркациях положений равновесия в системах дифференциальных уравнений, обладающих конечной группой симметрий // Препринт ИМПБ РАН. Пушкино: ОНТИ ПНЦ, 1997.
14. Werner B. Eigenvalue problems with the symmetry of a group and bifurcations // Continuation and bifurcations: numerical techniques and applications / ed. D. Roose et al. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. P. 71–88.
15. Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M. Invariant manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
16. Кузнецов Ю. А. Бифуркация Андронова–Хопфа в четырехмерной системе с круговой симметрией // Препринт НИВЦ АН СССР. Пушкино: ОНТИ НЦБИ, 1984.
17. Моршнева И. В., Юдович В. И. Об ответвлении циклов от равновесий инверсионно-и вращательно-симметричных динамических систем // Сиб. матем. журн. 1985. Т. 26. № 1. С. 124–133.
18. Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры // Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1986.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.