Общероссийский математический портал

Е. И. Яковлев, Почти главные расслоения, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 9, 151–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:40:03

УДК 515.16+515.14

Е. И. Яковлев

Почти главные расслоения

Исследуется класс A расслоений, обладающих следующими свойствами: каждое расслоение из A представляет собой композицию регулярного накрытия и некоторого главного расслоения (над накрываемым пространством) с абелевой структурной группой; стандартный слой G этого разложимого расслоения является группой Ли; расслоение обладает атласом с многозначными функциями перехода со значениями в группе G . Класс эквивалентности такого атласа мы называем структурой почти главного расслоения. В работе вычислены группа классов эквивалентности почти главных расслоений с фиксированной базой B и фиксированной структурной группой G , ее подгруппа классов эквивалентности главных G -расслоений над B , а также группы классов эквивалентности этих расслоений относительно морфизмов категории разложимых расслоений $\mathcal{C}$. Найдены база и инвариант почти главного расслоения, не изоморфного главному расслоению даже в категории $\mathcal{C}$. Рассмотрены приложения к вариационной задаче с закрепленными концами для многозначных функционалов.

Библиография: 6 названий.

Введение

Пусть Δ – дискретная группа, $T^k = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$ и $T = T^k \times \mathbb{R}^l$. Любое главное расслоение со структурной группой $G = \Delta \times T$ представляет собой композицию главных Δ - и T -расслоений. Обратное неверно. Выберем регулярное накрытие $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$, проекцию $q: E \rightarrow \tilde{B}$ некоторого главного T -расслоения и положим $p = \pi \circ q$. Тогда π – проекция главного расслоения со структурной группой $\Delta = \Pi/\Lambda$, где $\Lambda = \pi_*(\pi_1(\tilde{B}, \tilde{b})) \subset \Pi = \pi_1(B, b)$, $b = \pi(\tilde{b})$, а $\psi = (E, p, B, G)$ – локально тривиальное расслоение со слоем $G = \Delta \times T$, которое мы будем называть Λ -разложимым. Каждая карта $\psi_U: U \times G \rightarrow E_U$ расслоения ψ порождает действие группы Δ на E_U . Однако на пересечениях $E_V \cap E_U$ эти локальные действия могут не совпадать. Поэтому, вообще говоря, ψ не является главным G -расслоением.

В вариационном исчислении оказались полезными разложимые расслоения, обладающие T -связностями с проектируемыми на базу формами кривизны. Как показано ниже, такая связность на E обязана быть инвариантной относительно всех локальных действий группы Δ , индуцированных каким-либо атласом расслоения ψ . Этот атлас, в свою очередь, должен иметь многозначные функции перехода со значениями в группе G . Последнее означает, что для любых его карт ψ_U и ψ_V с

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00395).

$V \cap U \neq \emptyset$ справедливо равенство $\psi_U(a, \alpha, t) = \psi_V(a, \nu_{VU}(a) + \alpha, \psi_{VU}^\alpha(a) + t)$, причем $d\psi_{VU}^\alpha = d\psi_{VU}$ для всех $\alpha \in \Delta$. Таким образом, многозначная функция перехода ставит в соответствие точке $a \in V \cap U$ не один элемент группы G , а семейство $\{(\nu_{VU}(a), \psi_{VU}^\alpha(a)), \alpha \in \Delta\} \subset G$. В то же время, ее дифференциал является однозначно определенной 1-формой на $V \cap U$. Класс эквивалентности такого атласа мы называем $\mathcal{APB}$ -структурой, а Λ -разложимое расслоение с $\mathcal{APB}$ -структурой – почти главным $G | \Lambda$ -расслоением. Цель настоящей работы – классификация почти главных $G | \Lambda$ -расслоений над фиксированной базой. Отметим, что главные и ассоциированные с ними векторные расслоения со структурной группой T^1 изучены в [1], [2].

Рассмотрим почти главные расслоения ρ и ρ' со структурной группой $G = \Delta \times T$ и проекциями $p: E \rightarrow B$ и $p': E' \rightarrow B$ и гладкое отображение $f: E \rightarrow E'$. Если $p = p' \circ f$ и $f(v \cdot t) = f(v) \cdot t$ для всех $v \in E$ и $t \in T$, то мы называем f *слабым морфизмом* почти главных расслоений. Слабый морфизм f называем *морфизмом*, если карты ψ_U и ψ'_U расслоений ρ и ρ' с $V \cap U \neq \emptyset$ также связаны многозначными функциями перехода, т.е. $f \circ \psi_U(a, \alpha, t) = \psi'_U(a, \mu_{VU}(a) + \alpha, \varphi_{VU}^\alpha(a) + t)$ и $d\varphi_{VU}^\alpha = d\varphi_{VU}$.

При фиксированном нормальном делителе $\Lambda \subset \Pi$ классы эквивалентности почти главных $G | \Lambda$ -расслоений над B образуют абелеву группу $\mathcal{APB}(B | \Lambda, G)$, а классы эквивалентности главных $G | \Lambda$ -расслоений – ее подгруппу $\mathcal{PB}(B | \Lambda, G)$. Символами $\mathcal{APB}_1(B | \Lambda, G)$ и $\mathcal{PB}_1(B | \Lambda, G)$ обозначим группы классов эквивалентности тех же расслоений относительно слабых морфизмов.

Сингулярный квадрат $s: I^2 \rightarrow B$, $I = [0, 1]$, назовем Λ -квадратом, если все его вершины совпадают с точкой b , а гомотопические классы сторон принадлежат Λ . Сингулярные цепи, состоящие из Λ -квадратов, будем считать Λ -цепями. Возникают группы Λ -циклов, Λ -границ и Λ -гомологий $H_2(B | \Lambda)$. отождествим $\mathbb{Z}^k$ с $\mathbb{Z}^k \times 0 \subset \mathbb{R}^{k+l}$. Положим $m = k + l$, $\Lambda_0 = \Lambda / [\Lambda, \Lambda]$ и

$$\text{Hom}(H_2(B), H_2(B | \Lambda); \mathbb{R}^m, \mathbb{Z}^k) = \{h \in \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{R}^m) : h(H_2(B | \Lambda)) \subset \mathbb{Z}^k\}.$$

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 3.6. $\mathcal{APB}(B | \Lambda, G) \cong \text{Hom}(H_2(B), H_2(B | \Lambda); \mathbb{R}^m, \mathbb{Z}^k) \oplus \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k)$.

ТЕОРЕМА 4.5. $\mathcal{PB}(B | \Lambda, G) \cong \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}^k) \oplus \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k)$.

ТЕОРЕМА 5.2. $\mathcal{APB}_1(B | \Lambda, G) \cong \text{Hom}(H_2(B | \Lambda), \mathbb{Z}^k)$.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть гомоморфизмы

$$\begin{aligned} i_* &: \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}^k) \rightarrow \text{Hom}(H_2(B | \Lambda), \mathbb{Z}^k), \\ j_* &: \text{Ext}(H_2(B) / H_2(B | \Lambda), \mathbb{Z}^k) \rightarrow \text{Ext}(H_2(B), \mathbb{Z}^k) \end{aligned}$$

индуцированы короткой точной последовательностью

$$0 \rightarrow H_2(B | \Lambda) \xrightarrow{i} H_2(B) \xrightarrow{j} H_2(B) / H_2(B | \Lambda) \rightarrow 0.$$

Тогда $\mathcal{PB}_1(B | \Lambda, G) \cong \text{im } i_*$ и $\mathcal{APB}_1(B | \Lambda, G) / \mathcal{PB}_1(B | \Lambda, G) \cong \ker j_*$.

С помощью последней формулы доказано существование разложимых расслоений с базой $B = (\mathbb{K}^2 \times S^1) \# (\mathbb{K}^2 \times S^1)$, обладающих $\mathcal{APB}$ -структурами, но не допускающих структур главных G -расслоений. В §7 рассмотрены приложения почти главных расслоений к вариационным задачам для многозначных функционалов.

Для предложений и теорем используется общая нумерация.

§1. Разложимые расслоения и $\mathcal{APB}$ -структуры

Мы будем пользоваться следующим набором терминов и обозначений. Пусть $\psi = (E, p, B, G)$ – гладкое локально тривиальное расслоение с проекцией $p: E \rightarrow B$ и стандартным слоем G , $\mathcal{U}$ – открытое покрытие базы B . Предположим, что ассоциированный с $\mathcal{U}$ атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ расслоения ψ обладает функциями перехода $\psi_{VU}: V \cap U \rightarrow G$ от карт ψ_U к картам ψ_V с $V \cap U \neq \emptyset$. Тогда $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – $\mathcal{PB}$ -атлас. Его класс эквивалентности $\mathcal{A}$ представляет собой $\mathcal{PB}$ -структуру. При этом $\xi = (E, p, B, \mathcal{A})$ – главное G -расслоение.

Пусть $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$ – гладкое регулярное накрытие, $\Pi = \pi_1(B, b)$, $\Lambda = \pi_*(\pi_1(\tilde{B}, \tilde{b}))$ и $\Delta = \Pi/\Lambda$. Тогда $\nu = (\tilde{B}, \pi, B)$ – главное Δ -расслоение. Класс эквивалентности расслоения ν однозначно определяется нормальным делителем $\Lambda \subset \Pi$. Поэтому мы будем называть его Λ -накрытием. Группы Π , Λ и Δ договоримся считать аддитивными.

Для сокращения обозначений отождествим касательные пространства к группе $T = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k \times \mathbb{R}^l$ в точках $t \in T$ с пространством $\mathbb{R}^m$, $m = k + l$, по изоморфизмам, индуцированным левыми сдвигами $L_{-t}: T \rightarrow T$ и каноническим изоморфизмом $T_0T \rightarrow \mathbb{R}^m$. Это позволяет считать $\mathbb{R}^m$ -значными 1-формами дифференциалы гладких отображений в T . Определим отображение $e: \mathbb{R}^m \rightarrow T$ формулой $e(r) = (r_1 + l_1\mathbb{Z}, \dots, r_m + l_m\mathbb{Z})$, где $l_i = 1$ при $i \leq k$ и $l_i = 0$ при $i > k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Локально тривиальное расслоение $\psi = (E, p, B, G)$ со стандартным слоем $G = \Delta \times T$ назовем Λ -разложимым, если найдутся Λ -накрытие $\nu = (\tilde{B}, \pi, B)$ и главное T -расслоение $\xi = (E, q, \tilde{B}, \overline{\mathcal{A}})$, для которых $p = \pi \circ q$.

Выберем карты $\nu_U: U \times \Delta \rightarrow \tilde{B}_U$ и $\xi_U: \tilde{B}_U \times T \rightarrow E_U$ расслоений ν и ξ и положим

$$\psi_U(a, \alpha, t) = \xi_U(\nu_U(a, \alpha), t). \quad (1.1)$$

Этим определена карта $\psi_U: U \times G \rightarrow E_U$ расслоения ψ – композиция карт ν_U и ξ_U . Предположим, что ψ_V – композиция карт ν_V и ξ_V и $V \cap U \neq \emptyset$. Рассмотрим функции перехода $\nu_{VU}: V \cap U \rightarrow \Delta$ и $\xi_{VU}: \tilde{B}_V \cap \tilde{B}_U \rightarrow T$. Положив

$$\psi_{VU}^\alpha(a) = \xi_{VU}(\nu_U(a, \alpha)), \quad (1.2)$$

определим гладкие отображения $\psi_{VU}^\alpha: V \cap U \rightarrow T$. По построению

$$\psi_U(a, \alpha, t) = \psi_V(a, \nu_{VU}(a) + \alpha, \psi_{VU}^\alpha(a) + t). \quad (1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – атлас локально тривиального расслоения $\psi = (E, p, B, G)$ со слоем $G = \Delta \times T$, $\psi_U, \psi_V \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $V \cap U \neq \emptyset$. Набор отображений $\{(\nu_{VU}, \psi_{VU}^\alpha): V \cap U \rightarrow G, \alpha \in \Delta\}$, удовлетворяющих равенству (1.3) при всех $a \in V \cap U$, $\alpha \in \Delta$ и $t \in T$, мы будем называть *псевдофункцией перехода* от карты ψ_U к карте ψ_V .

Итак, Λ -разложимое расслоение обладает атласом с системой псевдофункций перехода. Верно и обратное. Если $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – атлас расслоения ψ с псевдофункциями перехода $\{(\nu_{VU}, \psi_{VU}^\alpha)\}$, то в силу (1.3) набор $\{\nu_{VU}\}$ является коциклом. Поэтому существует главное Δ -расслоение $\nu = (\tilde{B}, \pi, B)$ с атласом $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ и функциями перехода $\{\nu_{VU}\}$. Для карт $\psi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\nu_U \in \tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ положим $q(\psi_U(a, \alpha, t)) = \nu_U(a, \alpha)$. Этим корректно определено гладкое отображение $q: E \rightarrow \tilde{B}$, причем $p = \pi \circ q$. Формула (1.1) определяет карту $\xi_U: \tilde{B}_U \times T \rightarrow E_U$. При $U, V \in \mathcal{U}$ и $V \cap U \neq \emptyset$ формулой (1.2) определена функция перехода ξ_{VU} от карты ξ_U к карте ξ_V . Это значит, что $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{U}) = \{\xi_U, U \in \mathcal{U}\}$ – атлас главного T -расслоения $\xi = (E, q, \tilde{B}, \overline{\mathcal{A}})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $\psi = (E, p, B, G)$ – Λ -разложимое расслоение, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – его атлас, $\psi_U, \psi_V \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\{(\nu_{VU}, \psi_{VU}^\alpha), \alpha \in \Delta\}$ – псевдофункция перехода. Если дифференциалы $d\psi_{VU}^\alpha$ не зависят от α , то мы будем полагать $d\psi_{VU} = d\psi_{VU}^\alpha$. При этом набор $\{(\nu_{VU}, \psi_{VU}^\alpha)\}$ будем называть *многозначной функцией перехода* от карты ψ_U к карте ψ_V , а $d\psi_{VU}$ – *формой перехода*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Допустим, что $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – атлас Λ -разложимого расслоения и для любых пар карт $\psi_U, \psi_V \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ с $V \cap U \neq \emptyset$ существует форма перехода $d\psi_{VU}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – $\mathcal{APB}$ -атлас. Два $\mathcal{APB}$ -атласа мы считаем эквивалентными, если их объединение также является $\mathcal{APB}$ -атласом. Класс эквивалентности $\mathcal{APB}$ -атласа называем $\mathcal{APB}$ -структурой. Если Λ -разложимое расслоение $\psi = (E, p, B, G)$ обладает $\mathcal{APB}$ -структурой $\mathcal{A}$, то $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ – *почти главное $G| \Lambda$ -расслоение*.

Зафиксируем нормальный делитель $\Lambda \subset \Pi$, Λ -накрытие $\nu = (\tilde{B}, \pi, B)$, простое покрытие $\mathcal{U}$ базы B , а также атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ накрытия ν с функциями перехода $\{\nu_{VU}\}$. Тогда $\nu_{VU} \equiv \text{const}$, любое почти главное $G| \Lambda$ -расслоение над B представимо в виде композиции данного накрытия ν и некоторого главного T -расслоения над $\tilde{B}$, а соответствующая $\mathcal{APB}$ -структура содержит атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ с многозначными функциями перехода вида $\{(\nu_{VU}, \psi_{VU}^\alpha)\}$. В тех случаях, когда набор $\{\nu_{VU}\}$ явно не используется, мы будем сокращать обозначение этой функции до символа $\{\psi_{VU}^\alpha\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Рассмотрим Λ -разложимые расслоения $\psi = (E, p, B, G)$, $\psi' = (E', p', B, G)$ и гладкое отображение $f: E \rightarrow E'$. По определению на E и E' определены правые действия группы T . Если $p' \circ f = p$ и $f(v \cdot t) = f(v) \cdot t$ для всех $v \in E$ и $t \in T$, то мы будем говорить, что $f: \psi \rightarrow \psi'$ – *морфизм Λ -разложимых расслоений* (над B). Если расслоения ψ и ψ' обладают $\mathcal{APB}$ -структурами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$, то f будет называться *слабым морфизмом почти главных $G| \Lambda$ -расслоений* $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ и $\rho' = (E', p', B, \mathcal{A}')$.

Заметим, что упомянутые морфизмы всегда являются изоморфизмами [3; гл. 4, теорема 3.2]. Согласно замечанию после определения 1.4 можно считать, что $p = \pi \circ q$ и $p' = \pi \circ q'$, где $\xi = (E, q, \tilde{B}, \overline{\mathcal{A}})$ и $\xi' = (E', q', \tilde{B}, \overline{\mathcal{A}'})$ – главные T -расслоения, а слабый морфизм представляет собой морфизм главных расслоений $f: \xi \rightarrow \xi'$ над $\tilde{B}$. Выберем атласы $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$. Карты $\psi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\psi'_U \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$ являются композициями карт ν_U и ν_V накрытия ν и карт ξ_U и ξ'_U расслоений ξ и ξ' . Для последних имеются функции перехода $\zeta_{VU}: \tilde{B}_V \cap \tilde{B}_U \rightarrow T$. Положим $\varphi_{VU}^\alpha(a) = \zeta_{VU}(\nu_U(a, \alpha))$. Отображение $\varphi_{VU}^\alpha: V \cap U \rightarrow T$ удовлетворяет равенству

$$f \circ \psi_U(a, \alpha, t) = \psi'_U(a, \nu_{VU} + \alpha, \varphi_{VU}^\alpha(a) + t). \quad (1.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Набор $\{\varphi_{VU}^\alpha, \alpha \in \Delta\}$ удовлетворяющих равенству (1.4) отображений $\varphi_{VU}^\alpha: V \cap U \rightarrow T$ далее будет называться *псевдофункцией перехода* от карты ψ_U к карте ψ'_U при морфизме f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Слабый морфизм $f: \rho \rightarrow \rho'$ назовем *морфизмом почти главных $G| \Lambda$ -расслоений* $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ и $\rho' = (E', p', B, \mathcal{A}')$, если псевдофункции перехода (при морфизме f) от карт атласов $\mathcal{APB}$ -структуры $\mathcal{A}$ к картам атласов $\mathcal{APB}$ -структуры $\mathcal{A}'$ являются многозначными функциями перехода, т.е. корректно определяют формы перехода $d\varphi_{VU} = d\varphi'_{VU}$.

Нетрудно показать, что слабый морфизм $f: \rho \rightarrow \rho'$ почти главных $G| \Lambda$ -расслоений является морфизмом тогда и только тогда, когда они обладают такими $\mathcal{APB}$ -атласами $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$, что для любых карт $\psi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\psi'_U \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$ справедливо равенство $f \circ \psi_U = \psi'_U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Пусть $\psi_U: U \times G \rightarrow E_U$ – карта Λ -разложимого расслоения $\psi = (E, p, B, G)$. Для точки $a \in U$ и элементов $\alpha, \gamma \in \Delta$ и $t \in T$ положим $\delta_U(\psi_U(a, \alpha, t), \gamma) = \psi_U(a, \alpha + \gamma, t)$. Этим определено правое действие $\delta_U: E_U \times \Delta \rightarrow E_U$. Его будем называть *локальным действием* группы Δ на E , индуцированным картой ψ_U .

Рассмотрим Λ -разложимые расслоения $\psi = (E, p, B, G)$ и $\psi' = (E', p', B, G)$ и морфизм $f: \psi \rightarrow \psi'$. Тогда в силу (1.4) для любых карт $\psi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\psi'_U \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$ с псевдофункцией перехода $\{\varphi_{VU}^\alpha, \alpha \in \Delta\}$ при морфизме f индуцированные ими локальные действия $\delta_U: E_U \times \Delta \rightarrow E_U$ и $\delta'_U: E'_U \times \Delta \rightarrow E'_U$ удовлетворяют равенству

$$f \circ \delta_U(v, \gamma) = \delta'_U(f(v), \gamma) \cdot (\varphi_{VU}^{\alpha+\gamma} - \varphi_{VU}^\alpha)(a), \quad (1.5)$$

где $v = \psi_U(a, \alpha, t)$ и $\gamma \in \Delta$. При этом $\{\varphi_{VU}^\alpha\}$ – многозначная функция перехода тогда и только тогда, когда для каждой компоненты связности K пересечения $V \cap U$ существует такой элемент $\theta_K^\alpha(\gamma) \in T$, что $f \circ \delta_U(v, \gamma) = \delta'_U(f(v), \gamma) \cdot \theta_K^\alpha(\gamma)$ при всех $v \in E_K$.

Согласно сказанному определения $\mathcal{APB}$ -атласа, $\mathcal{APB}$ -структуры и морфизма почти главных $G| \Lambda$ -расслоений очевидным образом переформулируются в терминах локальных действий группы Δ . В частности, слабый морфизм $f: \rho \rightarrow \rho'$ почти главных $G| \Lambda$ -расслоений является морфизмом тогда и только тогда, когда он эквивариантен относительно локальных действий группы Δ , индуцированных некоторыми атласами расслоений ρ и ρ' .

§ 2. Связности

Рассмотрим морфизм $f: \psi \rightarrow \psi'$ Λ -разложимых расслоений $\psi = (E, p, B, G)$ и $\psi' = (E', p', B, G)$ и T -связности H на E и H' на E' , связанные формулой $H'_{f(v)} = df(H_v)$. Выберем карты ψ_U и ψ'_V расслоений ψ и ψ' соответственно и индуцированные ими локальные действия δ_U и δ'_V группы Δ . Предположим, что $V \cap U \neq \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если связность H инвариантна относительно действия δ_U , то H' инвариантна на $E'_{V \cap U}$ относительно δ'_V тогда и только тогда, когда существует форма перехода $d\varphi_{VU}$ от карты ψ_U к карте ψ'_V при морфизме f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что связность H' инвариантна на $E'_{V \cap U}$ относительно действия δ'_V . Выберем элементы $\alpha, \gamma \in \Delta$, точки $a_0, a_1 \in V \cap U$ и путь $x: I \rightarrow V \cap U$ с началом $x(0) = a_0$ и концом $x(1) = a_1$. Для некоторого $t_0 \in T$ положим $v_0 = \psi_U(a_0, \alpha, t_0)$. Рассмотрим горизонтальный относительно связности H лифт y пути x с начальной точкой $y(0) = v_0$. Тогда найдется такое $t_1 \in T$, что $y(1) = v_1 = \psi_U(a_1, \alpha, t_1)$. Положим $y_U(s) = f(\delta_U(y(s), \gamma))$ и $y_V(s) = \delta'_V(f(y(s)), \gamma)$ для $s \in I$. Пути $y_U: I \rightarrow E'$ и $y_V: I \rightarrow E'$ горизонтальны относительно связности H' . Кроме того, $p' \circ y_U = p' \circ y_V$. Поэтому существует элемент $\theta \in T$, при всех $s \in I$ удовлетворяющий равенству $y_U(s) = y_V(s) \cdot \theta$. В частности, $f(\delta_U(v_i, \gamma)) = \delta'_V(f(v_i), \gamma) \cdot \theta$, $i = 0, 1$. Отсюда и из (1.5) следует, что $(\varphi_{VU}^{\alpha+\gamma} - \varphi_{VU}^\alpha)(a_i) = \theta$.

Допустим далее, что для $i = 0, 1$ и произвольных $\alpha, \gamma \in \Delta$ верно предыдущее равенство. Положим $r = -\theta$ и $R_r(v') = v' \cdot r$ для $v' \in E'$. Тогда согласно (1.5) $R_r \circ f \circ (\delta_U)_\gamma = (\delta'_V)_\gamma \circ f$ на $E_{V \cap U}$. Для доказательства инвариантности H' относительно δ'_V осталось продифференцировать последнее равенство и воспользоваться инвариантностью H относительно δ_U и инвариантностью H' относительно действия группы T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Для того чтобы на пространстве Λ -разложимого расслоения $\psi = (E, p, B, G)$ существовала T -связность, инвариантная относительно всех локальных действий группы Δ , индуцированных атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, необходимо и достаточно, чтобы последний был $\mathcal{APB}$ -атласом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T -связность H на E инвариантна относительно действий δ_U , индуцированных картами $\psi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$. Из предложения 2.1 при $\psi' = \psi$, $H' = H$ и $f = \text{id}$ следует, что $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — $\mathcal{APB}$ -атлас.

С другой стороны, для $\mathcal{APB}$ -атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и каждого $U \in \mathcal{U}$ сужение $p_U: E_U \rightarrow U$ является главным расслоением со структурной группой $G = \Delta \times T$. Выберем G -связность на E_U с формой связности ω^U . Символом $\hat{\omega}^U$ обозначим продолжение последней на E . На B рассмотрим разбиение единицы $\{\chi^U, U \in \mathcal{U}\}$ с носителями $\text{supp } \chi^U \subset U$. Положим $\hat{\chi}^U = \chi^U \circ p$ и $\omega = \sum_{U \in \mathcal{U}} \hat{\chi}^U \hat{\omega}^U$. Этим на E определена форма ω некоторой T -связности H . По построению и по предложению 2.1 каждая форма $\hat{\omega}^U$ инвариантна относительно всех действий δ_V , $V \in \mathcal{U}$. Следовательно, форма ω и связность H инвариантны относительно локальных действий группы Δ , индуцированных атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\psi = (E, p, B, G)$ – Λ -разложимое расслоение и H – T -связность на E , инвариантная относительно локальных действий группы Δ , индуцированных некоторым атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Согласно предложению 2.2 атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ является $\mathcal{APB}$ -атласом. Если H инвариантна относительно локальных действий группы Δ , индуцированных другим $\mathcal{APB}$ -атласом, то по предложению 2.1 последний эквивалентен атласу $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Поэтому H будет называться G -связностью относительно содержащей этот атлас $\mathcal{APB}$ -структуры $\mathcal{A}$ или G -связностью на пространстве почти главного $G \mid \Lambda$ -расслоения $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$.

Рассмотрим почти главные $G \mid \Lambda$ -расслоения $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ и $\rho' = (E', p', B, \mathcal{A}')$, G -связность H на E и слабый морфизм $f: \rho \rightarrow \rho'$. Для каждой точки $v' \in E'$ положим $H'_{v'} = df(H_{f^{-1}(v')})$. Этим определена T -связность H' на E' . В силу предложения 2.1 она является G -связностью тогда и только тогда, когда $f: \rho \rightarrow \rho'$ – морфизм почти главных расслоений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть Ω – форма кривизны T -связности H на пространстве Λ -разложимого расслоения $\psi = (E, p, B, G)$. Мы будем говорить, что она *проектируема* на базу B , если существует замкнутая 2-форма Φ со значениями в $\mathbb{R}^m$, для которой $\Omega = p^*\Phi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Форма кривизны Ω некоторой T -связности H на пространстве Λ -разложимого расслоения $\psi = (E, p, B, G)$ проектируема на базу B в том и только том случае, если существует $\mathcal{APB}$ -структура $\mathcal{A}$, относительно которой H является G -связностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ расслоения ψ , индуцированное картой $\psi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ локальное действие $\delta_U: E_U \times \Delta \rightarrow E_U$ и индуцированное структурой накрытия ν действие $\delta: \tilde{B} \times \Delta \rightarrow \tilde{B}$. В силу (1.1) для всех γ имеет место равенство $q \circ (\delta_U)_\gamma = \delta_\gamma \circ q$.

Предположим, что H – G -связность относительно $\mathcal{APB}$ -структуры $\mathcal{A}$. На $\tilde{B}$ существует замкнутая $\mathbb{R}^m$ -значная 2-форма $\tilde{\Phi}$, удовлетворяющая равенству $\Omega = q^*\tilde{\Phi}$. Согласно предыдущему равенству $q^*(\delta_\gamma^*\tilde{\Phi}) = (\delta_U)_\gamma^*\Omega = \Omega = q^*\tilde{\Phi}$. При этом $\delta_\gamma^*\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}$ и потому найдется замкнутая 2-форма Φ на B , для которой $\tilde{\Phi} = \pi^*\Phi$. В результате: $\Omega = q^*(\pi^*\Phi) = p^*\Phi$.

Пусть далее дано, что $\Omega = p^*\Phi$. Тогда из равенства $p \circ (\delta_U)_\gamma = p$ следует, что $(\delta_U)_\gamma^*\Omega = \Omega$. Для произвольного $\alpha \in \Delta$ положим

$$\sigma_U^\alpha(a) = \psi_U(a, \alpha, 0), \quad \omega_U^\alpha = (\sigma_U^\alpha)^*\omega. \quad (2.1)$$

Так как $\sigma_U^{\gamma'} = (\delta_U)_{\gamma'} \circ \sigma_U^0$, то

$$\omega_U^{\gamma'} = (\sigma_U^0)^*(\delta_U)_{\gamma'}^*\omega. \quad (2.2)$$

Поэтому $d(\omega_U^{\gamma'} - \omega_U^0) = 0$, откуда в силу простоты покрытия $\mathcal{U}$ следует существование гладкой функции $f_U^{\gamma'}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющей равенству

$\omega_U^{\gamma'} = \omega_U^0 + df_U^{\gamma'}$. Но тогда $\omega_U^{\alpha+\gamma} - \omega_U^\alpha = df_U^{\alpha+\gamma} - df_U^\alpha$. С другой стороны, в силу (2.1) $\omega_U^{\alpha+\gamma} - \omega_U^\alpha = (\sigma_U^\alpha)^*((\delta_U)_\gamma^*\omega - \omega)$. Таким образом,

$$((\delta_U)_\gamma^*\omega - \omega) \circ d\sigma_U^\alpha = df_U^{\alpha+\gamma} - df_U^\alpha. \quad (2.3)$$

Формула $\hat{\psi}_U(a, \alpha, t) = \psi_U(a, \alpha, t - e \circ f_U^\alpha(a))$ определяет карту $\hat{\psi}_U: U \times G \rightarrow E_U$ расслоения ψ . Индуцированное ею действие $\hat{\delta}_U: E_U \times \Delta \rightarrow E_U$ связано с действием δ_U формулой

$$(\delta_U)_\gamma(v) = (\hat{\delta}_U)_\gamma(v) \cdot e \circ (f_U^{\alpha+\gamma} - f_U^\alpha) \circ p(v).$$

Поэтому

$$\omega \circ d(\delta_U)_\gamma = \omega \circ d(\hat{\delta}_U)_\gamma + (df_U^{\alpha+\gamma} - df_U^\alpha) \circ dp$$

и, следовательно, $((\delta_U)_\gamma^*\omega - (\hat{\delta}_U)_\gamma^*\omega) \circ d\sigma_U^\alpha = df_U^{\alpha+\gamma} - df_U^\alpha$. В силу (2.3) отсюда вытекает, что $((\hat{\delta}_U)_\gamma^*\omega - \omega) \circ d\sigma_U^\alpha = 0$.

Рассмотрим точку $v \in E_U^\alpha$ и вектор $X \in T_v E$. Положим $X_0 = d\sigma_U^\alpha \circ dp(X)$ и $X_1 = X - X_0$. Тогда по доказанному $((\hat{\delta}_U)_\gamma^*\omega - \omega)(X_0) = 0$. Так как вектор X_1 вертикален, то найдется элемент $r \in \mathbb{R}^m$, для которого $X_1 = \frac{d}{ds}(v \cdot e(sr)) \Big|_{s=0}$. При этом $\omega(X_1) = r$. По определению дифференциала гладкого отображения

$$d(\hat{\delta}_U)_\gamma(X_1) = \frac{d}{ds}(\hat{\delta}_U(v \cdot e(sr), \gamma)) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(\hat{\delta}_U(v, \gamma) \cdot e(sr)) \Big|_{s=0}.$$

Но тогда $\omega(d(\hat{\delta}_U)_\gamma(X_1)) = r$ и, следовательно, $((\hat{\delta}_U)_\gamma^*\omega - \omega)(X_1) = r - r = 0$. Этим доказано, что $((\hat{\delta}_U)_\gamma^*\omega - \omega)(X) = 0$ для произвольного $X \in T_v E$. Следовательно, форма ω , а вместе с нею и связность H инвариантны относительно локальных действий группы Δ , индуцированных атласом $\hat{\mathcal{A}}(\mathcal{U}) = \{\hat{\psi}_U, U \in \mathcal{U}\}$. Согласно предложению 2.2 $\hat{\mathcal{A}}(\mathcal{U}) - \mathcal{A}\mathcal{PB}$ -атлас, а $H - G$ -связность относительно содержащей построенный атлас $\mathcal{A}\mathcal{PB}$ -структуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ — почти главное $G|A$ -расслоение и ω — форма G -связности H на E . Выберем атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и карту $\psi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$. Формулами (2.1) определим локальные сечения $\sigma_U^\alpha: U \rightarrow E$ расслоения ρ и 1-формы ω_U^α на U . В силу (2.2) и инвариантности H относительно действия δ_U эти формы одинаковы при всех $\alpha \in \Delta$. Поэтому мы будем полагать $\omega_U = \omega_U^\alpha$ и называть ω_U *локальной формой связности H* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ и $\rho' = (E', p', B, \mathcal{A}')$ — почти главные $G|A$ -расслоения, являющиеся композициями накрытия ν и главных T -расслоений $\xi = (E, q, \tilde{B}, \tilde{\mathcal{A}})$ и $\xi' = (E', q', \tilde{B}, \tilde{\mathcal{A}}')$, ω и ω' — формы G -связностей H и H' на E и E' соответственно и $f: \rho \rightarrow \rho'$ — слабый морфизм. Тогда существует такая 1-форма $\tilde{A}$ на $\tilde{B}$, что $f^*\omega' = \omega + q^*\tilde{A}$. При этом $\tilde{f}$ — морфизм почти главных расслоений в том и только том случае, если $\tilde{A} = \pi^*A$, где A — 1-форма на B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из того, что f – морфизм главных T -расслоений ξ и ξ' над $\tilde{B}$. Предположим, что f – морфизм почти главных расслоений ρ и ρ' . Тогда согласно замечанию после определения 1.7 найдутся такие атласы $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$, что $f \circ \psi_U = \psi'_U$ для всех карт $\psi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\psi'_U \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$. Формы перехода $\{d\psi_{VU}\}$ и $\{d\psi'_{VU}\}$ атласов $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$ совпадают. Поэтому локальные формы $\{\omega_U\}$ и $\{\omega'_U\}$ связностей H и H' удовлетворяют равенствам $\omega_V - \omega_U = d\psi_{UV} = \omega'_V - \omega'_U$. Таким образом, $\omega'_V - \omega_V = \omega'_U - \omega_U$ и, следовательно, существует 1-форма A на B , для которой $A|_U = \omega'_U - \omega_U$. При этом $f^*\omega' - \omega = p^*A$ и $q^*\tilde{A} = p^*A$. Последнее равносильно равенству $\tilde{A} = \pi^*A$.

§ 3. Групповая структура и характеристические классы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ и $\rho' = (E', p', B, \mathcal{A}')$ – почти главные $G| \Lambda$ -расслоения. Рассмотрим атласы $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$ и их многозначные функции перехода $\{\psi_{VU}^\alpha\}$ и $\{\psi'_{VU}^\alpha\}$. Положим

$$\psi''_{VU}^\alpha = \psi_{VU}^\alpha + \psi'_{VU}^\alpha, \quad \rho'' = \rho + \rho' \quad \text{и} \quad [\rho''] = [\rho] + [\rho'], \quad (3.1)$$

где $\rho'' = (E'', p'', B, \mathcal{A}'')$ – почти главное $G| \Lambda$ -расслоение с атласом $\mathcal{A}''(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}''$, имеющим многозначные функции перехода $\{\psi''_{VU}^\alpha\}$, а $[\rho]$, $[\rho']$ и $[\rho'']$ – классы эквивалентности соответствующих почти главных расслоений. Формулы (3.1) определяют алгебраическую операцию, превращающую множество $\mathcal{APB}(B| \Lambda, G)$ классов эквивалентности почти главных $G| \Lambda$ -расслоений над B в абелеву группу.

Рассмотрим произведение $E_0 = \tilde{B} \times T$, естественную проекцию $q_0: E_0 \rightarrow \tilde{B}$ и композицию $p_0 = \pi \circ q_0$. Выбрав карту $\nu_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$, положим $\psi_{0U}(a, \alpha, t) = (\nu_U(a, \alpha), t)$. Этим определены карта $\psi_{0U}: U \times G \rightarrow \tilde{B}_U \times T$ разложимого расслоения $\psi_0 = (E_0, p_0, B, G)$ и его $\mathcal{APB}$ -атлас $\mathcal{A}_0(\mathcal{U}) = \{\psi_{0U}, U \in \mathcal{U}\}$. Если $\mathcal{A}_0$ – содержащая построенный атлас $\mathcal{APB}$ -структура, то класс эквивалентности $[\rho_0]$ расслоения $\rho_0 = (E_0, p_0, B, \mathcal{A}_0)$ является нейтральным элементом группы $\mathcal{APB}(B| \Lambda, G)$. Для расслоения $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ найдется почти главное $G| \Lambda$ -расслоение $\hat{\rho} = (\tilde{E}, \hat{p}, B, \hat{\mathcal{A}})$ с атласом $\hat{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$, имеющим многозначные функции перехода $\{\hat{\psi}_{VU}^\alpha = \psi_{UV}^\alpha\}$. При этом $[\hat{\rho}] = -[\rho]$.

Пусть H и H' – G -связности на пространствах расслоений ρ и ρ' , $\{\omega_U\}$ и $\{\omega'_U\}$ – их локальные формы связности относительно атласов $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$, $\rho'' = \rho + \rho'$ и $\mathcal{A}''(\mathcal{U})$ – атлас расслоения ρ'' из определения 3.1. Тогда существует G -связность H'' на E'' с набором локальных форм связности $\{\omega''_U = \omega_U + \omega'_U\}$ относительно $\mathcal{A}''(\mathcal{U})$.

Предположим, что $f: \rho \rightarrow \rho'$ – морфизм почти главных $G| \Lambda$ -расслоений ρ и ρ' , H и H' – G -связности на E и E' , ω и ω' – их формы связности, $d\omega = p^*\Phi$ и $d\omega' = p'^*\Phi'$. Тогда согласно предложению 2.4 существует 1-форма A на B , удовлетворяющая равенству $p^*A = f^*\omega' - \omega$. При этом $dA = \Phi' - \Phi$. Следовательно, элемент $[\Phi] \in H^2(B, \mathbb{R}^m)$ не зависит от выбора связности H и не меняется при замене ρ изоморфным ему почти главным $G| \Lambda$ -расслоением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ – почти главное $G| \Lambda$ -расслоение и H – G -связность на E . Когомологический класс $[\Phi] \in H^2(B, \mathbb{R}^m)$ проекции на

базу B формы кривизны связности H мы будем называть *характеристическим I -классом* расслоения ρ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Петлю $x \in \Omega_{bb}$ назовем *одномерным Λ -циклом*, если ее гомотопический класс принадлежит подгруппе $\Lambda \subset \Pi = \pi_1(B, b)$. Сингулярный квадрат $c: I^2 \rightarrow B$ назовем *Λ -квадратом*, если $c(0, 0) = c(0, 1) = c(1, 0) = c(1, 1) = b$ и каждая его сторона является одномерным Λ -циклом. Сингулярная цепь, составленная из Λ -квадратов, будет считаться *двумерной Λ -цепью*. Группы n -мерных (нормализованных) Λ -циклов и Λ -границ обозначим символами $\mathcal{X}_n(B | \Lambda)$ и $\mathcal{B}_n(B | \Lambda)$, $n = 1, 2$. Положим $\Lambda_0 = \Lambda / [\Lambda, \Lambda]$ и $H_n(B | \Lambda) = \mathcal{X}_n(B | \Lambda) / \mathcal{B}_n(B | \Lambda)$.

Отметим, что $H_1(B | \Lambda) = \Lambda_0$ и $H_2(B | \Lambda) = \pi_*(H_2(\tilde{B}))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Для замкнутой $\mathbb{R}^m$ -значной 2-формы Φ на B определим гомоморфизм $I_{[\Phi]}: H_2(B) \rightarrow \mathbb{R}^m$ формулой $I_{[\Phi]}([c]) = \int_c \Phi$. Символом $J_{[\Phi]}$ обозначим его сужение на подгруппу $H_2(B | \Lambda)$. Для произвольной подгруппы $P \subset \mathbb{R}^m$ положим

$$H^2(B | \Lambda, \mathbb{R}^m | P) = \{[\Phi] \in H^2(B, \mathbb{R}^m) : \text{im } J_{[\Phi]} \subset P\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Характеристический I -класс любого почти главного $G | \Lambda$ -расслоения принадлежит группе $H^2(B | \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k)$. Отображение $\eta: \mathcal{APB}(B | \Lambda, G) \rightarrow H^2(B | \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k)$, ставящее в соответствие классу $[\rho] \in \mathcal{APB}(B | \Lambda, G)$ общий характеристический I -класс входящих в него почти главных расслоений, является групповым гомоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению ρ является композицией накрытия ν и главного T -расслоения ξ над $\tilde{B}$. Если Φ — проекция на B формы кривизны G -связности H , то $[\pi^* \Phi]$ — характеристический класс расслоения ξ . Отсюда и из равенства $H_2(B | \Lambda) = \pi_*(H_2(\tilde{B}))$ вытекает первое утверждение. Второе утверждение следует из отмеченных в начале параграфа свойств локальных форм связности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Для гомоморфизма η из предложения 3.1 существует правый обратный гомоморфизм $\hat{\eta}: H^2(B | \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k) \rightarrow \mathcal{APB}(B | \Lambda, G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замкнутую 2-форму Φ на B и предположим, что $[\Phi] \in H^2(B | \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k)$. Для элементов $U \in \mathcal{U}$, $a \in U$ и $\alpha \in \Delta$ выберем точку $a_U \in U$, 1-форму ω_U на U , удовлетворяющую равенству $d\omega_U = \Phi|_U$, произвольный путь $x_U: I \rightarrow B$ с началом $x_U(0) = b$ и концом $x_U(1) = a_U$ и такие пути $y_U^a: I \rightarrow U$ и $x_U^\alpha: I \rightarrow B$, что $y_U^a(0) = a_U$, $y_U^a(1) = a$, $x_U^\alpha(0) = b$, $x_U^\alpha(1) = a_U$ и гомотопический класс петли $x_U - x_U^\alpha$ принадлежит α . Допустим, что $U, V \in \mathcal{U}$ и $V \cap U \neq \emptyset$. Зафиксируем точку $a_{VU} \in V \cap U$ и положим $y_U^a = y_{UV}$ и $y_V^a = y_{VU}$ при $a = a_{VU}$. Символом ν_{VU} обозначим элемент группы Δ , содержащий гомотопический класс петли $x_{VU} = x_V + y_{VU} - y_{UV} - x_U$.

Гомотопический класс произвольной петли $x \in \mathcal{B}_1(B | \Lambda)$ лежит в коммутанте $[\Lambda, \Lambda]$. Поэтому найдутся такие петли $x_1, x_2 \in \mathcal{X}_1(B | \Lambda)$, что пути $x_1 + x_2 - x_1 - x_2$ и x гомотопны. Рассмотрим связывающую их гомотопию $X: I^2 \rightarrow B$ и положим

$h_{[\Phi]}(x) = e\left(\int_X \Phi\right)$. Если X' – другая гомотопия, связывающая те же пути, то $X' - X \in \mathcal{X}_2(B | \Lambda)$. По условию $e\left(\int_{X'-X} \Phi\right) = e(I_{[\Phi]}([X' - X])) = 0$. Это значит, что нами корректно определен гомоморфизм $h_{[\Phi]}: \mathcal{B}_1(B | \Lambda) \rightarrow T$. Так как $\text{Ext}(\Lambda_0, T) = 0$, то гомоморфизм $h_{[\Phi]}$ имеет продолжение $h: \mathcal{X}_1(B | \Lambda) \rightarrow T$.

Пусть $\alpha \in \Delta$, $\beta = \nu_{VU} + \alpha$ и $a \in V \cap U$. Тогда $x_{VU}^{\alpha\alpha} = x_V^\beta + y_V^a - y_U^a - x_U^\alpha - \Lambda$ -цикл. Определим отображение $\psi_{VU}^\alpha: V \cap U \rightarrow T$ формулой

$$\psi_{VU}^\alpha(a) = h(x_{VU}^{\alpha\alpha}) - e\left(\int_{y_V^a} \omega_V\right) + e\left(\int_{y_U^a} \omega_U\right). \quad (3.2)$$

Рассмотрим произвольный путь $z: I \rightarrow V \cap U$ с началом $z(0) = a_{VU}$ и концом $z(1) = a$. Положим $x_{VU}^{\alpha\alpha} = x_{VU}^{a'\alpha}$ при $a' = a_{VU}$ и $z_U^{\alpha\alpha} = x_U^\alpha + y_U + z - y_U^a - x_U^\alpha$. Тогда $x_{VU}^{\alpha\alpha} = -z_V^{a\beta} + x_{VU}^\alpha + z_U^{\alpha\alpha}$ и, следовательно, $h(x_{VU}^{\alpha\alpha}) = -h(z_V^{a\beta}) + h(x_{VU}^\alpha) + h(z_U^{\alpha\alpha})$. Выберем гомотопию $Y_U^{\alpha\alpha}: I^2 \rightarrow U$, связывающую пути y_U^a и $y_U + z$. Определим отображение $X_U^\alpha: I^2 \rightarrow B$, полагая $X_U^\alpha(s, \tau) = x_U^\alpha(s)$ для всех $s, \tau \in I$. Тогда гомотопия $Z_U^{\alpha\alpha} = X_U^\alpha + Y_U^{\alpha\alpha}$ связывает пути $x_U^\alpha + y_U^a$ и $x_U^\alpha + y_U + z$. Аналогично построим гомотопию $Z_V^{a\beta} = X_V^\beta + Y_V^{a\beta}$, связывающую пути $x_V^\beta + y_V^a$ и $x_V^\beta + y_V + z$. Так как $z_U^{\alpha\alpha} = \partial Z_U^{\alpha\alpha}$ и $z_V^{a\beta} = \partial Z_V^{a\beta} - \Lambda$ -границы, то $h(z_U^{\alpha\alpha}) = e\left(\int_{Z_U^{\alpha\alpha}} \Phi\right)$ и $h(z_V^{a\beta}) = e\left(\int_{Z_V^{a\beta}} \Phi\right)$. По построению интегралы от формы Φ по X_U^α и X_V^β равны нулю, а по $Y_U^{\alpha\alpha}$ и $Y_V^{a\beta}$ – совпадают с интегралами от форм ω_U и ω_V по циклам $y_U + z - y_U^a$ и $y_V + z - y_V^a$ соответственно. Таким образом,

$$h(x_{VU}^{\alpha\alpha}) - h(x_{VU}^\alpha) = e\left(\int_{y_U + z - y_U^a} \omega_U - \int_{y_V + z - y_V^a} \omega_V\right).$$

Отсюда и из (3.2) получим:

$$\psi_{VU}^\alpha(a) - \psi_{VU}^\alpha(a_{VU}) = e\left(\int_z (\omega_U - \omega_V)\right).$$

Это значит, что отображение $\psi_{VU}^\alpha: V \cap U \rightarrow T$ дифференцируемо и

$$d\psi_{VU}^\alpha = d\psi_{VU} = \omega_U - \omega_V. \quad (3.3)$$

Если $U, V, W \in \mathcal{U}$ и $W \cap V \cap U \neq \emptyset$, то $\nu_{UW} + \nu_{WV} + \nu_{VU} = 0$. Для произвольного $\alpha \in \Delta$ положим $\beta = \nu_{VU} + \alpha$ и $\gamma = \nu_{WV} + \beta$. Тогда $\alpha = \nu_{UW} + \gamma$. При этом согласно (3.2) $(\psi_{UW}^\gamma + \psi_{WV}^\beta + \psi_{VU}^\alpha)(a) = h(x_{UW}^{a\gamma} + x_{WV}^{a\beta} + x_{VU}^{a\alpha}) = 0$. Отсюда следует существование Λ -разложимого расслоения $\psi = (E, p, B, G)$ с атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и псевдофункциями перехода $\{(\nu_{VU}, \psi_{VU}^\alpha)\}$. Согласно (3.3) $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – $\mathcal{APB}$ -атлас. Символом $\mathcal{A}$ обозначим его класс эквивалентности. Положим

$\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ и $\hat{\eta}[\Phi] = [\rho]$. Докажем, что этим корректно определено отображение $\hat{\eta}: H^2(B | \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k) \rightarrow \mathcal{APB}(B | \Lambda, G)$.

Для этого в предыдущих построениях заменим форму Φ формой $\Phi' = \Phi + dA$. Получим почти главное G -расслоение $\rho' = (E', p', B, \mathcal{A}')$ с $\mathcal{APB}$ -атласом $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$ и многозначными функциями перехода $\{(\nu_{VU}, \psi'_{VU})\}$. Соответствующий гомоморфизм $h': \mathcal{X}_1(B | \Lambda) \rightarrow T$ будет удовлетворять равенству $h'(x) = h(x) + e\left(\int_x A\right)$. Формы ω_U заменятся формами $\omega'_U = \omega_U + A|_U$. Поэтому $\psi'^\alpha_{VU}(a) - \psi^\alpha_{VU}(a) = e\left(\int_{x_V^\beta} A - \int_{x_U^\alpha} A\right)$. Элементы $\varphi_U^\alpha = e\left(\int_{x_U^\alpha} A\right)$ группы T будем считать постоянными отображениями $\varphi_U^\alpha: U \rightarrow T$. Согласно предыдущему $\psi'^\alpha_{VU} = \varphi_V^\beta + \psi^\alpha_{VU} - \varphi_U^\alpha$ для всех $U, V \in \mathcal{U}$, $\alpha \in \Delta$ и $\beta = \nu_{VU} + \alpha$. Это значит, что почти главные расслоения ρ и ρ' изоморфны и, следовательно, отображение $\hat{\eta}$ определено корректно.

Рассмотрим далее произвольные элементы $[\Phi]$ и $[\Phi']$ группы $H^2(B | \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k)$ и положим $[\Phi''] = [\Phi] + [\Phi']$. Как и выше, посредством формулы (3.2) определим отображения $\psi^\alpha_{VU}, \psi'^\alpha_{VU}, \psi''^\alpha_{VU}: U \cap V \rightarrow T, U, V \in \mathcal{U}, \alpha \in \Delta$, и соответствующие им почти главные G -расслоения ρ, ρ' и ρ'' . Тогда справедливы равенства (3.1), и потому $\hat{\eta}$ – гомоморфизм.

Из (3.3) вытекает существование G -связности H на E с набором локальных форм связности $\{\omega_U, U \in \mathcal{U}\}$. По построению Φ – проекция на B формы кривизны связности H . Таким образом, $\eta[\rho] = [\Phi]$ и, следовательно, $\eta \circ \hat{\eta} = \text{id}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ – почти главное $G | \Lambda$ -расслоение с нулевым характеристическим I -классом. Тогда существует G -связность H на E с формой кривизны $\Omega = 0$. Она называется плоской связностью. При этом ρ мы будем называть *плоским $G | \Lambda$ -расслоением*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ – плоское почти главное $G | \Lambda$ -расслоение и H – плоская G -связность на E . Тогда существует гомоморфизм $\tau_H \in \text{Hom}(\Lambda_0, T)$, удовлетворяющий равенству $\bar{x}(1) = \bar{x}(0) \cdot \tau_H([x])$ для произвольной петли $x \in \mathcal{X}_1(B | \Lambda)$ и ее горизонтального лифта $\bar{x}$ относительно H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ω – форма связности H , то $d\omega = \Omega = 0$. Рассмотрим петлю $x \in \mathcal{X}_1(B | \Lambda)$ и ее горизонтальный лифт $\bar{x}$ относительно связности H . Тогда точки $\bar{x}(0)$ и $\bar{x}(1)$ лежат в одной компоненте связности слоя $p^{-1}(b)$, и потому найдется элемент $\tau_H(x) \in T$, удовлетворяющий равенству $\bar{x}(1) = \bar{x}(0) \cdot \tau_H(x)$. Выберем другую петлю $y \in \mathcal{X}_1(B | \Lambda)$. Если $\bar{y}$ – ее горизонтальный лифт с началом $\bar{y}(0) = \bar{x}(1)$, то $\bar{x} + \bar{y}$ – горизонтальный лифт петли $x + y$. Поэтому $\bar{y}(1) = \bar{y}(0) \cdot \tau_H(y)$ и $\bar{y}(1) = \bar{x}(0) \cdot \tau_H(x + y)$. Отсюда следует, что

$$\tau_H(x + y) = \tau_H(x) + \tau_H(y). \quad (3.4)$$

В частности, $\tau_H(-x) = -\tau_H(x)$. Предположим далее, что циклы x и y гомологичны. Тогда найдутся такие петли $z_1, z_2 \in \mathcal{X}_1(B | \Lambda)$, что петля $z = x - y - z_1 - z_2 + z_1 + z_2$ гомотопна нулю. Пусть $c: I^2 \rightarrow B$ – кусочно гладкая гомотопия, удовлетворяющая равенствам $c(s, 0) = c(0, r) = c(1, r) = b$ и $c(s, 1) = z(s)$ при всех $s, r \in I$, а

$\bar{z}$ -горизонтальный лифт петли z . Рассмотрим гомотопию $\bar{c}: I^2 \rightarrow E$, для которой $p \circ \bar{c} = c$, $\bar{c}(s, 1) = \bar{z}(s)$, $\bar{c}(0, r) = \bar{z}(0)$ и $\bar{c}(1, r) = \bar{z}(1)$. Положим $\bar{z}_0(s) = \bar{c}(s, 0)$ для $s \in I$. Тогда $\partial \bar{c} = \bar{z} - \bar{z}_0$ и потому $\int_{\bar{z}-\bar{z}_0} \omega = \int_{\partial \bar{c}} \omega = \int_{\bar{c}} d\omega = 0$. Так как $\omega\left(\frac{d\bar{z}}{ds}\right) \equiv 0$, то из предыдущего следует равенство $\int_{\bar{z}_0} \omega = 0$. В силу вертикальности пути $\bar{z}_0$ последнее возможно только при $\bar{z}_0(1) = \bar{z}_0(0)$. Но тогда $\bar{z}(1) = \bar{z}(0)$ и потому $\tau_H(z) = 0$. Отсюда в силу (3.4) и определения петли z следует равенство $\tau_H(x) = \tau_H(y)$. Таким образом, формула $\tau_H([x]) = \tau_H(x)$ корректно определяет гомоморфизм $\tau_H: \Lambda_0 \rightarrow T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ – почти главное $G| \Lambda$ -расслоение, H – плоская G -связность на E и гомоморфизм $\tau_H \in \text{Hom}(\Lambda_0, T)$ удовлетворяет равенству $\bar{x}(1) = \bar{x}(0) \cdot \tau_H([x])$ для петель $x \in \mathcal{X}_1(B| \Lambda)$ и их горизонтальных лифтов $\bar{x}$ относительно H . Тогда τ_H будет называться *гомоморфизмом голономии* связности H .

Рассмотрим гомоморфизм голономии $\tau_H: \Lambda_0 \rightarrow T$ плоской G -связности H на пространстве почти главного $G| \Lambda$ -расслоения $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ и гомоморфизм $e_*: \text{Hom}(\Lambda_0, \mathbb{R}^m) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda_0, T)$, индуцированный отображением $e: \mathbb{R}^m \rightarrow T$. Тогда смежный класс $\tau_H + \text{im } e_*$ принадлежит группе $\text{Hom}(\Lambda_0, T)/\text{im } e_* = \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k)$ и является препятствием для существования гомоморфизма $\bar{\tau}_H: \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющего равенству $e \circ \bar{\tau}_H = \tau_H$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Препятствие $\tau_H + \text{im } e_*$ не зависит от выбора расслоения ρ из класса эквивалентности $[\rho] \in \mathcal{APB}(B| \Lambda, G)$ и от выбора плоской G -связности H на его тотальном пространстве E . Поэтому формула $\varepsilon([\rho]) = \tau_H + \text{im } e_*$ корректно определяет отображение $\varepsilon: \text{ker } \eta \rightarrow \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим почти главное расслоение $\rho' = (E', p', B, \mathcal{A}')$, плоскую G -связность H' на его пространстве E' и морфизм $f: \rho \rightarrow \rho'$. Если ω' – форма связности H' , то $\omega^* = f^*\omega'$ – форма некоторой G -связности H^* на E . Согласно предложению 2.4 существует 1-форма A на B , для которой $p^*A = \omega^* - \omega$. При этом $dA = \Phi' - \Phi = 0$ и, следовательно, форма A замкнута.

Пусть далее $x \in \mathcal{X}_1(B| \Lambda)$, $\bar{x}$, $\bar{x}'$ и $\bar{x}^*$ – его горизонтальные лифты относительно связностей H , H' и H^* соответственно и $\bar{x}(0) = \bar{x}^*(0)$. Найдется путь $r: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющий равенствам $r(0) = 0$ и $\bar{x}^*(s) = \bar{x}(s) \cdot e(r(s))$, $s \in I$. Дифференцируя последнее и пользуясь горизонтальностью путей $\bar{x}$ и $\bar{x}^*$, получаем: $\frac{dr}{ds} + A\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0$. Положив $I_{[A]}([x]) = -\int_x A$, определим гомоморфизм $I_{[A]} \in \text{Hom}(\Lambda_0, \mathbb{R}^m)$. Тогда $r(1) = I_{[A]}([x])$. По построению путей $\bar{x}$, $\bar{x}'$ и $\bar{x}^*$ и определению гомоморфизмов τ_H и $\tau_{H'}$ имеют место равенства: $\bar{x}'(s) = f \circ \bar{x}^*(s)$ для $s \in I$, $\bar{x}(1) = \bar{x}(0) \cdot \tau_H([x])$ и $\bar{x}'(1) = \bar{x}'(0) \cdot \tau_{H'}([x])$. Согласно доказанному выше отсюда следует, что $f \circ \bar{x}(0) \cdot \tau_{H'}([x]) = f \circ \bar{x}(0) \cdot \tau_H([x]) + e \circ I_{[A]}([x])$. Таким образом, $\tau_{H'} - \tau_H = e \circ I_{[A]}$ и потому смежные классы $\tau_H + \text{im } e_*$ и $\tau_{H'} + \text{im } e_*$ совпадают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ – почти главное $G | \Lambda$ -расслоение, H – плоская G -связность на E , $\tau_H: \Lambda_0 \rightarrow T$ – ее гомоморфизм голономии и $e_*: \text{Hom}(\Lambda_0, \mathbb{R}^m) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda_0, T)$ – гомоморфизм, индуцированный отображением $e: \mathbb{R}^m \rightarrow T$. Тогда смежный класс $\tau_H + \text{im } e_* \in \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k)$, являющийся инвариантом плоского почти главного $G | \Lambda$ -расслоения ρ , мы будем называть его *характеристическим ε -классом*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Отображение $\varepsilon: \ker \eta \rightarrow \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k)$, ставящее в соответствие классу эквивалентности плоского почти главного $G | \Lambda$ -расслоения его характеристический ε -класс, является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ – плоское почти главное $G | \Lambda$ -расслоение, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – его атлас, ассоциированный с простым покрытием $\mathcal{U}$ базы B . Рассмотрим плоскую G -связность H на E и ее локальные формы связности $\{\omega_U\}$. Если $\{\nu_{VU}, \psi_{VU}^\alpha\}$ – многозначные функции перехода атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, то $\nu_{VU} \equiv \text{const}$. Выберем петлю $x \in \mathcal{X}_1(B | \Lambda)$, покроем ее множествами $U_1, \dots, U_l \in \mathcal{U}$ и разобьем отрезок I числами $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_l = 1$ так, чтобы $x([s_{i-1}, s_i]) \subset U_i$, $i = 1, \dots, l$. Положим $x_i = x|_{[s_{i-1}, s_i]}$. Символом $\bar{x}$ обозначим горизонтальный лифт петли x относительно H . Допустим, что $\bar{x}(0) = \psi_{U_1}(x(0), \alpha_1, t_1)$. Тогда

$$\bar{x}(s_i) = \psi_{U_{i+1}}(x(s_i), \alpha_{i+1}, t_{i+1}),$$

где $U_{l+1} = U_1$, $\alpha_{i+1} = \nu_{U_{i+1}U_i} + \alpha_i$ и $t_{i+1} = \psi_{U_{i+1}U_i}^{\alpha_i}(x(s_i)) - \int_{x_i} \omega_{U_i} + t_i$, $i = 1, \dots, l$. Таким образом,

$$\tau_H([x]) = \sum_{i=1}^l \psi_{U_{i+1}U_i}^{\alpha_i}(x(s_i)) - \sum_{i=1}^l \int_{x_i} \omega_{U_i}. \quad (3.5)$$

Из (3.5), (3.1) и замечания после определения 3.1 следует, что $\tau_H([x]) + \tau_{H'}([x]) = \tau_{H''}([x])$. Поэтому ε – гомоморфизм.

Выберем элемент $\lambda \in \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k)$ и рассмотрим гомоморфизм $\tau \in \text{Hom}(\Lambda_0, T)$, удовлетворяющий равенству $\lambda = \tau + \text{im } e_*$. Точно так, как в предложении 3.2, для $U, V \in \mathcal{U}$, $a \in V \cap U$ и $\alpha \in \Delta$ построим элемент ν_{VU} и петлю $x_{VU}^{a\alpha} \in \mathcal{X}_1(B | \Lambda)$. Положим $\psi_{VU}^\alpha(a) = \tau([x_{VU}^{a\alpha}])$. Привсех $a, a' \in V \cap U$ циклы $x_{VU}^{a\alpha}$ и $x_{VU}^{a'\alpha}$ гомологичны. Поэтому $\psi_{VU}^\alpha \equiv \text{const}$. Для множеств $W, V, U \in \mathcal{U}$ и элементов $\alpha \in \Delta$, $\beta = \nu_{VU} + \alpha$ и $\gamma = \nu_{WV} + \beta$ имеем:

$$\psi_{UW}^\gamma + \psi_{WV}^\beta + \psi_{VU}^\alpha \equiv \tau([x_{UW}^{a\gamma} + x_{WV}^{a\beta} + x_{VU}^{a\alpha}]) = 0.$$

Отсюда следует существование почти главного $G | \Lambda$ -расслоения $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ с атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и многозначными функциями перехода $\{\nu_{VU}, \psi_{VU}^\alpha\}$.

В силу тождеств $\psi_{VU}^\alpha \equiv \text{const}$ на пространстве расслоения ρ определена G -связность H с локальными формами связности $\{\omega_U \equiv 0\}$. Рассмотрим горизонтальный лифт $\bar{x}$ петли $x \in \mathcal{X}_1(B | \Lambda)$ относительно H . Снова покроем x множествами

$U_1, \dots, U_l \in \mathcal{U}$ и разобьем отрезок I числами $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_l = 1$ так, чтобы $x([s_{i-1}, s_i]) \subset U_i$, $i = 1, \dots, l$. Тогда согласно (3.5)

$$\tau_H([x]) = \psi_{U_1 U_l}^{\alpha_l} + \psi_{U_l U_{l-1}}^{\alpha_{l-1}} + \dots + \psi_{U_2 U_1}^{\alpha_1} = \tau([x_{U_1 U_l}^{\alpha_l} + x_{U_l U_{l-1}}^{\alpha_{l-1}} + \dots + x_{U_2 U_1}^{\alpha_1}]) = \tau([x]).$$

Поэтому $\varepsilon([\rho]) = \lambda$ и ε — эпиморфизм.

Предположим, что почти главное $G \mid \Lambda$ -расслоение $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ является композицией накрытия ν и главного T -расслоения $\xi = (E, q, \tilde{B}, \tilde{\mathcal{A}})$, H — плоская G -связность на E и гомоморфизм голономии $\tau_H \in \text{Hom}(\Lambda_0, T)$ допускает поднятие до гомоморфизма $\tau \in \text{Hom}(\Lambda_0, \mathbb{R}^m)$, $\tau_H = e \circ \tau$. Рассмотрим продолжение $\bar{\tau} \in \text{Hom}(H_1(B), \mathbb{R}^m)$ гомоморфизма τ и замкнутую 1-форму A на B , для которой $I_{[A]} = \bar{\tau}$. Для формы ω связности H положим $\hat{\omega} = \omega + p^* A$. Тогда $\hat{\omega}$ — форма некоторой G -связности $\hat{H}$ на E .

Предположим, что $x \in \mathcal{X}_1(B \mid \Lambda)$, $\bar{x}$ и $\hat{x}$ — горизонтальные лифты петли x относительно H и $\hat{H}$, $\bar{x}(0) = \hat{x}(0)$. Тогда имеется такой путь $r: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $r(0) = 0$ и $\hat{x}(s) = \bar{x}(s) \cdot e(r(s))$ для $s \in I$. При этом

$$\hat{\omega}\left(\frac{d\hat{x}}{ds}\right) = \omega\left(\frac{d\bar{x}}{ds}\right) + \frac{dr}{ds} + A\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

и, следовательно, $\hat{x}(1) = \bar{x}(1) \cdot e(-I_{[A]}([x]))$. Отсюда в силу равенств $\bar{x}(1) = \bar{x}(0) \cdot \tau_H([x])$ и $\tau_H([x]) = e(I_{[A]}([x]))$ вытекает, что $\hat{x}(1) = \bar{x}(1)$. Таким образом, $\tau_{\hat{H}} = 0 \in \text{Hom}(H_1(B \mid \Lambda), T)$ и $\hat{H}$ — T -связность с тривиальной группой голономии.

Пусть $\rho_0 = (E_0, p_0, B, \mathcal{A}_0)$ — почти главное расслоение, класс эквивалентности которого является нейтральным элементом группы $\mathcal{APB}(B \mid \Lambda, G)$, H_0 — G -связность на E_0 , ω_0 — ее форма связности. Согласно доказанному в предыдущем абзаце существует слабый морфизм $f: \rho_0 \rightarrow \rho$. Так как $d\hat{\omega} = d\omega_0 = 0$, то найдется замкнутая 1-форма $\tilde{A}$ на $\tilde{B}$, удовлетворяющая равенству $f^*\hat{\omega} = \omega_0 + q_0^* \tilde{A}$.

Рассмотрим произвольную петлю $\tilde{x}: I \rightarrow \tilde{B}$, для которой $\tilde{x}(0) = \tilde{x}(1) = \tilde{b}$. Тогда $x = \pi \circ \tilde{x}$ — Λ -цикл. Выберем его горизонтальные лифты $\hat{x}$ и $\bar{x}_0$ относительно связностей $\hat{H}$ и H_0 так, чтобы $f(\bar{x}_0(0)) = \hat{x}(0)$. Определим путь $\hat{x}^*: I \rightarrow E$ формулой $\hat{x}^*(s) = f^{-1}(\hat{x}(s))$. Тогда в силу равенств $\tau_{H_0} = \tau_{\hat{H}} = 0$ имеем: $\hat{x}^*(1) = \hat{x}^*(0)$. Поэтому существует такой путь $r^*: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $\hat{x}^*(s) = \bar{x}_0(s) \cdot e(r^*(s))$ для $s \in I$ и $r^*(0) = r^*(1) = 0$. При этом $\frac{dr^*}{ds} + \tilde{A}\left(\frac{d\tilde{x}}{ds}\right) = 0$ и $I_{[\tilde{A}]}([\tilde{x}]) = r^*(0) - r^*(1) = 0$.

Итак, $I_{[\tilde{A}]} = 0 \in \text{Hom}(H_1(\tilde{B}), \mathbb{R}^m)$. Следовательно, найдется гладкое отображение $\mu: \tilde{B} \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее равенству $d\mu = \tilde{A}$. Для $\alpha \in \Delta$ и $U \in \mathcal{U}$ рассмотрим сечение $s_U^\alpha: U \rightarrow \tilde{B}$, $s_U^\alpha(a) = \nu_U(a, \alpha)$, и положим $\mu_U^\alpha = \mu \circ s_U^\alpha$. Для карты $\psi_{0U} \in \mathcal{A}_0(\mathcal{U})$ положим $\psi'_{0U}(a, \alpha, t') = \psi_{0U}(a, \alpha, t' - e \circ \mu_U^\alpha(a))$. Этим определены карта $\psi'_{0U}: U \times G \rightarrow E_{0U}$ Λ -разложимого расслоения $\psi_0 = (E_0, p_0, B, G)$, атлас $\mathcal{A}'_0(\mathcal{U}) = \{\psi'_{0U}, U \in \mathcal{U}\}$, содержащая его $\mathcal{APB}$ -структура $\mathcal{A}'_0$ и главное $G \mid \Lambda$ -расслоение $\rho'_0 = (E_0, p_0, B, \mathcal{A}'_0)$. Поскольку атласы $\mathcal{A}_0(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'_0(\mathcal{U})$ имеют нулевые функции перехода, то формула $f' \circ \psi_{0U}(a, \alpha, t) = \psi'_{0U}(a, \alpha, t + e \circ \mu_U^\alpha(a))$ определяет морфизм $f': \rho_0 \rightarrow \rho'_0$.

Индуктированные картами ψ_{0U} и ψ'_{0U} локальные действия группы Δ на E удовлетворяют равенству $(\delta'_{0U})_\gamma = (\delta_{0U})_\gamma \circ e \circ (\mu_U^\alpha - \mu_U^{\alpha+\gamma}) \circ p_0$, $\alpha, \gamma \in \Delta$. Поэтому форма $\omega'_0 = \omega_0 + q_0^* D$ инвариантна относительно δ'_{0U} и, следовательно, является формой некоторой G -связности H'_0 на пространстве расслоения ρ'_0 . Так как $f^* \hat{\omega} = \omega'_0$, то $f: \rho'_0 \rightarrow \rho$ — морфизм. Следовательно, композиция $f \circ f'$ является морфизмом расслоений ρ_0 и ρ . Этим доказано, что $\ker \varepsilon = [\rho_0] = 0$ в $\mathcal{APB}(B | \Lambda, G)$.

Пусть $\iota: \ker \eta \rightarrow \mathcal{APB}(B | \Lambda, G)$ — включение, $\zeta = \iota \circ \varepsilon^{-1}$ и

$$\text{Hom}(H_2(B), H_2(B | \Lambda); \mathbb{R}^m, \mathbb{Z}^k) = \{h \in \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{R}^m) : h(H_2(B | \Lambda)) \subset \mathbb{Z}^k\}.$$

Из предложений 3.1–3.5 следует основной результат параграфа.

ТЕОРЕМА 3.6. *Последовательность групп и гомоморфизмов*

$$0 \rightarrow \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k) \xrightarrow{\zeta} \mathcal{APB}(B | \Lambda, G) \xrightarrow{\eta} H^2(B | \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k) \rightarrow 0$$

точна и расщепляется. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{APB}(B | \Lambda, G) &\cong H^2(B | \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k) \oplus \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k) \\ &\cong \text{Hom}(H_2(B), H_2(B | \Lambda); \mathbb{R}^m, \mathbb{Z}^k) \oplus \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k). \end{aligned}$$

§ 4. Главные расслоения со структурной группой $G = \Delta \times T$

Символом $\mathcal{PB}(B | \Lambda, G)$ обозначим подгруппу группы $\mathcal{APB}(B | \Lambda, G)$, образованную классами эквивалентности главных $G | \Lambda$ -расслоений над B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ — главное $G | \Lambda$ -расслоение с характеристическим I -классом $[\Phi]$. Тогда существуют регулярные накрытия $\nu = (\tilde{B}, \pi, B)$ и $\nu' = (E, \pi', E')$ и главные T -расслоения $\xi = (E, q, \tilde{B}, \overline{\mathcal{A}})$ и $\xi' = (E', q', B, \mathcal{A}')$, обладающие свойствами:*

$$\pi \circ q = p = q' \circ \pi'; \quad (4.1)$$

$$\pi'(v \cdot t) = \pi'(v) \cdot t \quad (4.2)$$

для $v \in E$ и $t \in T$; $[\Phi]$ — характеристический I -класс расслоения ξ' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$. Он обладает функциями перехода $\{\psi_{VU}, \psi_{UV}\}$. Отсюда следует существование главных расслоений ν и ξ , для которых верна левая часть (4.1). Набор $\{\psi_{VU}\}$ порождает главное расслоение ξ' с атласом $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$, имеющим функции перехода $\{\psi_{VU}\}$. Для карт $\psi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\psi'_U \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$ и элементов $a \in U$, $\alpha \in \Delta$ и $t \in T$ положим $\pi'(\psi_U(a, \alpha, t)) = \psi'_U(a, t)$. Этим корректно определено гладкое отображение $\pi': E \rightarrow E'$, для которого верна правая часть (4.1). Формулы $E'_U = (q')^{-1}(U)$ и $\nu'_U(\psi'_U(a, t), \alpha) = \psi_U(a, \alpha, t)$ определяют карту $\nu'_U: E'_U \times \Delta \rightarrow E_U$, а формула $\nu'_{VU}(\psi'_U(a, t)) = \nu_{VU}(a)$ — функцию перехода $\nu'_{VU}: E'_U \cap E'_V \rightarrow \Delta$ от карты ν'_U к карте ν'_V . Таким образом,

$\nu' = (E, \pi', E')$ – регулярное накрытие. Из определения отображения π' следует (4.2).

Пусть далее H – G -связность на пространстве расслоения ρ , ω – форма связности H и $d\omega = p^*\Phi$. Рассмотрим естественную проекцию $j: G \rightarrow T$. В силу (4.2) пара (π', j) является морфизмом главных расслоений ρ и ξ' над B . Поэтому формула $H'_{\pi'(v)} = d\pi'(H_v)$, $v \in E$, определяет T -связность H' на E' . Ее форма связности ω' удовлетворяет равенству $\pi'^*\omega' = \omega$. При этом $p^*\Phi = d(\pi'^*\omega') = \pi'^*d\omega'$. С другой стороны, согласно (4.1) $\pi'^*(q'^*\Phi) = p^*\Phi$. В результате: $d\omega' = q'^*\Phi$, т.е. $[\Phi]$ – характеристический I -класс главного T -расслоения ξ' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\xi' = (E', q', B, \mathcal{A}')$ – главное T -расслоение и ω' – форма некоторой T -связности H' на E' . Тогда существуют регулярное накрытие $\nu' = (E, \pi', E')$, главное $G| \Lambda$ -расслоение $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ и G -связность H на E с формой связности $\omega = \pi'^*\omega'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим слой $T_b = (q')^{-1}(b)$ и точку $v' \in T_b$. Тогда точна последовательность $\pi_1(E', v') \xrightarrow{q'_*} \pi_1(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_0(T_b, v')$, в которой $\pi_0(T_b, v') = 0$. Поэтому q'_* – эпиморфизм. Прообраз $\Lambda' = (q'_*)^{-1}(\Lambda)$ является нормальным делителем группы $\pi_1(E', v')$. Следовательно, существует регулярное накрытие $\pi': E \rightarrow E'$, для которого индуцированный гомоморфизм $\pi'_*: \pi_1(E, v) \rightarrow \pi_1(E', v')$ имеет образ $\text{im } \pi'_* = \Lambda'$. При этом $\pi_1(E', v') / \text{im } \pi'_* \cong \Pi / \Lambda = \Delta$.

Выберем карту $\xi'_U: U \times T \rightarrow E'_U$ из атласа $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$, точку $v' \in E'_U$ и стандартный базис $e_1, \dots, e_m$ пространства $\mathbb{R}^m$. Гомотопические классы петель $y_i^{v'}(s) = v' \cdot e(se_i)$, $i = 1, \dots, k$, образуют базис фундаментальной группы $\pi_1(E'_U, v')$. Так как $[y_i^{v'}] \in \ker q'_*$, то образ индуцированного включением $i_U: E'_U \rightarrow E'$ гомоморфизма $(i_U)_*: \pi_1(E'_U, v') \rightarrow \pi_1(E', v')$ лежит в подгруппе $\text{im } \pi'_* = \Lambda' \supset \ker q'_*$. Поэтому накрытие π' тривиально над E'_U , т.е. обладает картой $\nu'_U: E'_U \times \Delta \rightarrow E_U$. Положим $p = q' \circ \pi'$ и определим отображение $\psi_U: U \times G \rightarrow E_U$ формулой $\psi_U(a, \alpha, t) = \nu'_U(\xi'_U(a, t), \alpha)$. Тогда $\mathcal{U}' = \{E'_U, U \in \mathcal{U}\}$ – покрытие многообразия E' , $\tilde{\mathcal{A}}'(\mathcal{U}') = \{\nu'_U, U \in \mathcal{U}\}$ – атлас накрытия $\nu' = (E, \pi', E')$, а $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \{\psi_U, U \in \mathcal{U}\}$ – атлас локально тривиального расслоения (E, p, B, G) .

Рассмотрим множества $U, V \in \mathcal{U}$, $V \cap U \neq \emptyset$, и функции перехода ξ'_{VU} и ν'_{VU} для карт атласов $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$ и $\tilde{\mathcal{A}}'(\mathcal{U}')$. Так как $E'_U \cap E'_V$ – связное подмножество многообразия E' , а группа Δ дискретна, то $\nu'_{VU}: E'_V \cap E'_U \rightarrow \Delta$ – постоянное отображение. Его можно отождествить с элементом группы Δ . При этом формула $\psi_{VU}(a) = (\nu'_{VU}, \xi'_{VU}(a))$ определяет функцию перехода $\psi_{VU}: V \cap U \rightarrow G$ от карты ψ_U к карте ψ_V . Следовательно, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ – $\mathcal{PB}$ -атлас, а его класс эквивалентности $\mathcal{A}$ является структурой главного расслоения.

Так как π' – накрытие, а Δ – группа его автоморфизмов, то $\omega = \pi'^*\omega'$ – форма некоторой G -связности H на E .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Имеет место включение $\ker \eta \subset \mathcal{PB}(B| \Lambda, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элементы $\lambda \in \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k)$ и $\tau \in \text{Hom}(\Lambda_0, T)$, для которых $\tau + \text{im } e_* = \lambda$. Так как $\text{Ext}(H_1(B)/\Lambda_0, T) = 0$, то существует продолжение $\tau' \in \text{Hom}(H_1(B), T)$ гомоморфизма τ . По предложению 3.5 ему соответ-

ствуют почти главное $G' \mid \Pi$ -расслоение $\xi' = (E', q', B, \mathcal{A}')$ и плоская G' -связность H' на E' с гомоморфизмом голономии $\tau_{H'} = \tau'$. При этом $\Delta' = \Pi/\Lambda' = 0$, $G' = T$ и, следовательно, ξ' – главное T -расслоение. Предположим, что ω' – форма связности H' . Тогда согласно предложению 4.2 найдутся главное G -расслоение $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$, регулярное накрытие $\pi': E \rightarrow E'$ и G -связность H на E с формой связности $\omega = \pi'^*\omega'$. Так как $d\omega = \pi'^*d\omega' = 0$, то H – плоская связность. Для любого элемента $[x] \in \Lambda_0$ верно равенство $\tau_H([x]) = \tau_{H'}([x]) = \tau([x])$. Следовательно, $\varepsilon([\rho]) = \lambda$. В силу предложения 3.5 этим утверждение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Почти главное $G \mid \Lambda$ -расслоение ρ с базой B и характеристическим I -классом $[\Phi]$ является главным расслоением со структурной группой G тогда и только тогда, когда $I_{[\Phi]} \in \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}^k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ρ – главное G -расслоение, то по предложению 4.1 существует главное T -расслоение с тем же характеристическим I -классом $[\Phi]$. Согласно предложению 3.1 $\text{im } I_{[\Phi]} \subset \mathbb{Z}^k$. Допустим далее, что $I_{[\Phi]} \in \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}^k)$. Тогда по предложению 3.2 найдется главное T -расслоение $\xi' = (E', q', B, \mathcal{A}')$ с характеристическим I -классом $[\Phi]$. Согласно предложению 4.2 существует главное $G \mid \Lambda$ -расслоение $\hat{\rho}$ с базой B и тем же характеристическим I -классом. При этом $[\rho] - [\hat{\rho}] \in \ker \eta$ и $[\hat{\rho}] \in \mathcal{PB}(B \mid \Lambda, G)$. Отсюда и из предложения 4.3 следует, что $[\rho] \in \mathcal{PB}(B \mid \Lambda, G)$, т.е. ρ – главное расслоение со структурной группой G .

Рассмотрим изоморфизм $h: H^2(B, \mathbb{R}^m) \rightarrow \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{R}^m)$, определенный формулой $h([\Phi]) = I_{[\Phi]}$. Положим $\eta_0 = h \circ \eta|_{\mathcal{PB}(B \mid \Lambda, G)}$. Из теоремы 3.6 и предложения 4.4 следует

ТЕОРЕМА 4.5. *Последовательность*

$$0 \rightarrow \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k) \xrightarrow{\zeta} \mathcal{PB}(B \mid \Lambda, G) \xrightarrow{\eta_0} \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}^k) \rightarrow 0$$

точна и расщепляется. Поэтому

$$\mathcal{PB}(B \mid \Lambda, G) \cong \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}^k) \oplus \text{Ext}(\Lambda_0, \mathbb{Z}^k).$$

§ 5. Классификация относительно слабых морфизмов

Рассмотрим подгруппу $H^2(B \mid \Lambda, \mathbb{R}^m \mid 0) \subset H^2(B \mid \Lambda, \mathbb{R}^m \mid \mathbb{Z}^k)$ и соответствующую факторгруппу $H_0^2(B \mid \Lambda, \mathbb{R}^m \mid \mathbb{Z}^k) = H^2(B \mid \Lambda, \mathbb{R}^m \mid \mathbb{Z}^k)/H^2(B \mid \Lambda, \mathbb{R}^m \mid 0)$. Для смежных классов $[[\Phi]] = [\Phi] + H^2(B \mid \Lambda, \mathbb{R}^m \mid 0)$ положим $h_1([[\Phi]]) = J_{[\Phi]}$. Этим определен изоморфизм $h_1: H_0^2(B \mid \Lambda, \mathbb{R}^m \mid \mathbb{Z}^k) \rightarrow \text{Hom}(H_2(B \mid \Lambda), \mathbb{Z}^k)$.

Обозначим символом $\mathcal{APB}_1(B \mid \Lambda, G)$ множество классов эквивалентности почти главных $G \mid \Lambda$ -расслоений над B относительно слабых морфизмов. Для классов $[\rho] \in \mathcal{APB}(B \mid \Lambda, G)$ и $[\rho]_1 \in \mathcal{APB}_1(B \mid \Lambda, G)$ имеет место включение $[\rho] \subset [\rho]_1$. Поэтому мы будем полагать $[\rho]_1 = [[\rho]]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Если $[\rho_0]$ является нейтральным элементом группы $\mathcal{APB}(B \mid \Lambda, G)$, то $[[\rho_0]]$ – ее подгруппа и*

$$\mathcal{APB}(B \mid \Lambda, G)/[[\rho_0]] = \mathcal{APB}_1(B \mid \Lambda, G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем почти главные расслоения ρ'_0 и ρ''_0 , для которых $[\rho'_0]$ и $[\rho''_0]$ принадлежат слабому классу $[[\rho_0]]$. По построению расслоения ρ_0 их $\mathcal{APB}$ -структуры содержат атласы с многозначными функциями перехода $\{\varphi'_V{}^\beta - \varphi'_U{}^\alpha\}$ и $\{\varphi''_V{}^\beta - \varphi''_U{}^\alpha\}$, где $\beta = \nu_{VU} + \alpha$ и $\varphi'_U{}^\alpha, \varphi''_U{}^\alpha: U \rightarrow T$ — гладкие отображения. Если $\bar{\rho}_0$ — почти главное $G| \Lambda$ -расслоение и некоторый его $\mathcal{APB}$ -атлас имеет многозначные функции перехода $\{\varphi'_V{}^\beta - \varphi''_V{}^\beta - \varphi'_U{}^\alpha + \varphi''_U{}^\alpha\}$, то $[\rho'_0] - [\rho''_0] = [\bar{\rho}_0] \in [[\rho_0]]$. Этим доказано, что $[[\rho_0]]$ — подгруппа группы $\mathcal{APB}(B| \Lambda, G)$.

Рассмотрим далее почти главное $G| \Lambda$ -расслоение $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ с атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и многозначными функциями перехода $\{\psi_V{}^\alpha\}$. Положим

$$\psi'_{VU}{}^\alpha = \varphi'_V{}^\beta + \psi_V{}^\alpha - \varphi'_U{}^\alpha. \quad (5.1)$$

Тогда определено почти главное расслоение ρ' с $\mathcal{APB}$ -атласом, имеющим многозначные функции перехода $\{\psi'_{VU}{}^\alpha\}$. Согласно (5.1) оно слабо изоморфно расслоению ρ и $[\rho] + [\rho'_0] = [\rho']$. Поэтому $[\rho] + [[\rho_0]] \subset [[\rho]]$.

С другой стороны, если почти главные $G| \Lambda$ -расслоения ρ и ρ' слабо изоморфны, то их $\mathcal{APB}$ -структуры обладают атласами с многозначными функциями перехода $\{\psi_V{}^\alpha\}$ и $\{\psi'_V{}^\alpha\}$, удовлетворяющими равенству (5.1). Так как $\{\varphi'_V{}^\beta - \varphi'_U{}^\alpha\}$ — многозначные функции перехода $\mathcal{APB}$ -атласа расслоения ρ'_0 , то отсюда следует, что $[\rho'] = [\rho] + [\rho'_0]$. Таким образом, $[[\rho]] \subset [\rho] + [[\rho_0]]$ и предложение доказано.

Согласно предложению 5.1 множество $\mathcal{APB}_1(B| \Lambda, G)$ является группой. В явном виде соответствующая алгебраическая операция может быть определена формулой $[[\rho]] + [[\rho']] = [[\rho] + [\rho']]$.

Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ и $\rho' = (E', p', B, \mathcal{A}')$ — почти главные $G| \Lambda$ -расслоения с характеристическими I -классами $[\Phi]$ и $[\Phi']$. Это значит, что на E и E' имеются G -связности с формами кривизны $p^*\Phi$ и $p'^*\Phi'$. Рассмотрим накрытие ν и главные T -расслоения $\xi = (E, q, \bar{B}, \bar{\mathcal{A}})$ и $\xi' = (E', q', \bar{B}, \bar{\mathcal{A}}')$, для которых $p = \pi \circ q$ и $p' = \pi \circ q'$. Тогда $[\pi^*\Phi]$ и $[\pi^*\Phi']$ — характеристические I -классы расслоений ξ и ξ' . Если почти главные расслоения ρ и ρ' слабо изоморфны, то изоморфны главные расслоения ξ и ξ' и потому $[\pi^*\Phi] = [\pi^*\Phi']$. Последнее эквивалентно равенству $[[\Phi]] = [[\Phi']]$. Таким образом, смежный класс $[[\Phi]] = [\Phi] + H^2(B| \Lambda, \mathbb{R}^m | 0)$ является инвариантом расслоения ρ относительно слабых морфизмов. То же самое справедливо для соответствующего ему гомоморфизма $J_{[\Phi]} \in \text{Hom}(H_2(B| \Lambda), \mathbb{Z}^k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ — почти главное $G| \Lambda$ -расслоение, Φ — проекция на базу B формы кривизны некоторой G -связности H на E и $[\Phi] \in H^2(B| \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k)$ — когомологический класс формы Φ . Тогда смежный класс $[[\Phi]] = [\Phi] + H^2(B| \Lambda, \mathbb{R}^m | 0)$ будет называться *характеристическим J -классом* расслоения ρ , а определенный формулой $J_{[\Phi]}([c]) = \int_c \Phi$ гомоморфизм $J_{[\Phi]} \in \text{Hom}(H_2(B| \Lambda), \mathbb{Z}^k)$ — его *характеристическим гомоморфизмом*.

ТЕОРЕМА 5.2. Отображения $\eta_1: \mathcal{APB}_1(B| \Lambda, G) \rightarrow H_0^2(B| \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k)$ и $\varkappa_1 = h_1 \circ \eta_1: \mathcal{APB}_1(B| \Lambda, G) \rightarrow \text{Hom}(H_2(B| \Lambda), \mathbb{Z}^k)$, ставящие в соответствие слабому классу эквивалентности $[[\rho]]$ почти главного $G| \Lambda$ -расслоения

ния ρ его характеристический J -класс $[[\Phi]]$ и характеристический гомоморфизм $J_{[\Phi]}$, являются изоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\eta_1([\rho]) = [\eta([\rho])]$, то η_1 — гомоморфизм. Из сюръективности η следует, что η_1 — эпиморфизм. Рассмотрим почти главные $G \mid \Lambda$ -расслоения ρ и ρ_0 с характеристическими I -классами $[\Phi]$ и $[\Phi_0] = 0$. Предположим, что $[[\Phi]] = 0$. Если ρ и ρ_0 — композиции накрытия ν и главных T -расслоений ξ и ξ_0 , то $[\pi^*\Phi] = [\pi^*\Phi_0] = 0$. Так как $H_1(\bar{B}) = 0$, то отсюда следует существование морфизма $f: \xi \rightarrow \xi_0$. При этом $f: \rho \rightarrow \rho_0$ — слабый морфизм почти главных расслоений. Таким образом, $[[\rho]] = [[\rho_0]] = 0$ в $\mathcal{APB}_1(B \mid \Lambda, G)$ и η_1 — мономорфизм. Из изоморфности η_1 следует изоморфность отображения $\varkappa_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Почти главное $G \mid \Lambda$ -расслоение ρ с базой B слабо изоморфно некоторому главному $G \mid \Lambda$ -расслоению над B тогда и только тогда, когда его характеристический гомоморфизм $J_{[\Phi]} \in \text{Hom}(H_2(B \mid \Lambda), \mathbb{Z}^k)$ может быть продолжен до гомоморфизма из группы $\text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}^k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ρ' — главное $G \mid \Lambda$ -расслоение с характеристическим I -классом $[\Phi']$ и $[[\rho]] = [[\rho']]$, то по предложению 4.4 $I_{[\Phi']} \in \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}^k)$, а по теореме 5.2 $J_{[\Phi]} = J_{[\Phi']}$. При этом $I_{[\Phi']}$ — продолжение гомоморфизма $J_{[\Phi']}$. Допустим далее, что гомоморфизм $J_{[\Phi]}$ имеет продолжение $\lambda \in \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}^k)$. Тогда согласно теореме 4.5 найдется главное $G \mid \Lambda$ -расслоение ρ' с характеристическим I -классом $[\Phi']$, для которого $I_{[\Phi']} = \lambda$. По построению $J_{[\Phi']} = J_{[\Phi]}$, откуда в силу той же теоремы 5.2 следует равенство $[[\rho']] = [[\rho]]$.

Подгруппу слабых классов $[[\rho]] \in \mathcal{APB}_1(B \mid \Lambda, G)$, содержащих главные $G \mid \Lambda$ -расслоения, обозначим символом $\mathcal{PB}_1(B \mid \Lambda, G)$.

ТЕОРЕМА 5.4. *Пусть гомоморфизмы*

$$\begin{aligned} i_*: \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z}^k) &\rightarrow \text{Hom}(H_2(B \mid \Lambda), \mathbb{Z}^k), \\ j_*: \text{Ext}(H_2(B)/H_2(B \mid \Lambda), \mathbb{Z}^k) &\rightarrow \text{Ext}(H_2(B), \mathbb{Z}^k) \end{aligned}$$

индуцированы короткой точной последовательностью

$$0 \rightarrow H_2(B \mid \Lambda) \xrightarrow{i} H_2(B) \xrightarrow{j} H_2(B)/H_2(B \mid \Lambda) \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Тогда $\mathcal{PB}_1(B \mid \Lambda, G) \cong \text{im } i_*$ и $\mathcal{APB}_1(B \mid \Lambda, G)/\mathcal{PB}_1(B \mid \Lambda, G) \cong \ker j_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый изоморфизм следует из теоремы 5.2 и предложения 5.3, а для вывода второго нужно воспользоваться точностью последовательности

$$\xrightarrow{i_*} \text{Hom}(H_2(B \mid \Lambda), \mathbb{Z}^k) \longrightarrow \text{Ext}(H_2(B)/H_2(B \mid \Lambda), \mathbb{Z}^k) \xrightarrow{j_*}.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если группа $H_2(B)/H_2(B \mid \Lambda)$ конечно порождена, то факторгруппа $\mathcal{APB}_1(B \mid \Lambda, G)/\mathcal{PB}_1(B \mid \Lambda, G)$ конечна.*

§6. Примеры

6.1. Пусть $B = \mathbb{R}P^2$. Тогда $\Pi \cong \mathbb{Z}_2$ и $H^2(B, \mathbb{R}) = 0$. При этом $H^2(B | \Lambda, \mathbb{R} | \mathbb{Z}) = 0$ для $\Lambda \subset \Pi$. Если $\Delta = \Pi/\Lambda$ и $G = \Delta \times T^1$, то по теореме 5.2 любое почтиглавное $G | \Lambda$ -расслоение $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ удовлетворяет равенству $[[\rho]] = 0$. В частности, $E \approx S^2 \times T^1$ при $\Lambda = 0$ и $E \approx \mathbb{R}P^2 \times T^1$ при $\Lambda = \Pi$. Отсюда следует, что композиция расслоения Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$ и стандартного накрытия $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ не допускает структуры почти главного и, тем более, главного $G | \Lambda$ -расслоения.

6.2. Предположим, что f_1 и f_2 — нормированные формы объема на S^2 и T^2 соответственно. При этом $\int_{S^2} f_1 = \int_{T^2} f_2 = 1$. Пользуясь проекциями $p_1: S^2 \times T^2 \rightarrow S^2$ и $p_2: S^2 \times T^2 \rightarrow T^2$, построим форму $\Phi = p_1^* f_1 + \sqrt{2} p_2^* f_2$ на $B = S^2 \times T^2$. Тогда $[\Phi] \in H^2(B | \Lambda, \mathbb{R} | \mathbb{Z})$ для $\Lambda = 0$ и по предложению 3.2 существует почти главное $G | \Lambda$ -расслоение $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ с характеристическим I -классом $[\Phi]$. Так как $I_{[\Phi]} \notin \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z})$, то согласно предложению 4.4 ρ не может быть главным $G | \Lambda$ -расслоением. Однако гомоморфизм $J_{[\Phi]} \in \text{Hom}(H_2(B | \Lambda), \mathbb{Z})$ имеет продолжение $I_{[\Phi']} \in \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z})$, где $\Phi' = p_1^* f_1 + p_2^* f_2$. Поэтому ρ слабо изоморфно главному $G | \Lambda$ -расслоению с характеристическим I -классом $[\Phi']$.

6.3. Стандартное клеточное разбиение бутылки Клейна $\mathbb{K}^2$ и окружности S^1 индуцирует клеточное разбиение связной суммы $B = (\mathbb{K}^2 \times S^1) \# (\mathbb{K}^2 \times S^1)$, состоящее из одной нульмерной, шести одномерных, семи двумерных и двух трехмерных клеток. При этом

$$\begin{aligned} \Pi = \pi_1(B) = \langle \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \mid [\alpha, \gamma], [\beta, \gamma], [\alpha', \gamma'], [\beta', \gamma'], \\ \alpha + \beta + \alpha - \beta, \alpha' + \beta' + \alpha' - \beta' \rangle, \end{aligned}$$

$$H_2(B) = \langle P \rangle \oplus \langle Q \rangle \oplus \langle Q' \rangle \oplus \langle P - P' \mid 2(P - P') \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим подгруппу $\Lambda \subset \Pi$, порожденную элементами $2\alpha, \alpha + \beta, \gamma, \alpha - \alpha', 2\alpha', \alpha' + \beta', \gamma'$. Тогда $\Delta = \Pi/\Lambda = \langle \alpha + \Lambda \mid 2(\alpha + \Lambda) \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. Соответствующая подгруппа $H_2(B | \Lambda) \subset H_2(B)$ имеет набор образующих $2P, P + Q, P - P', P' + Q'$. Поэтому

$$H_2(B)/H_2(B | \Lambda) = \langle P + H_2(B | \Lambda) \mid 2(P + H_2(B | \Lambda)) \rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

Последовательность (5.2) имеет вид

$$0 \rightarrow 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\text{Ext}(H_2(B), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ и $\text{Ext}(H_2(B)/H_2(B | \Lambda), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$, но гомоморфизм $j_*: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ тривиален. Согласно теореме 5.4 это означает, что для $G = \Delta \times T^1$ имеет место равенство $\mathcal{APB}_1(B | \Lambda, G)/\mathcal{PB}_1(B | \Lambda, G) \cong \mathbb{Z}_2$. Определим гомоморфизм $l \in \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{R})$, положив $l(P) = l(P') = 1/2$ и $l(Q) = l(Q') = -1/2$. Тогда $l(2P) = 1$ и $l(P + Q) = l(P' + Q') = l(P - P') = 0$, т.е. $l_\Lambda = l|_{H_2(B | \Lambda)} \in \text{Hom}(H_2(B | \Lambda), \mathbb{Z})$. Поэтому существует коомологический класс $[\Phi] \in H^2(B | \Lambda, \mathbb{R} | \mathbb{Z})$, удовлетворяющий равенству $I_{[\Phi]} = l$. По предложению 3.2 ему соответствует почти главное $G | \Lambda$ -расслоение $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ с характеристическим I -классом $[\Phi]$. Поскольку гомоморфизм $J_{[\Phi]} = l_\Lambda$ не имеет продолжения до гомоморфизма из $\text{Hom}(H_2(B), \mathbb{Z})$, то согласно предложению 5.3 ρ не может быть даже слабо изоморфно главному $G | \Lambda$ -расслоению над B .

§ 7. Приложения

На гладком многообразии B рассмотрим риманову или лоренцеву метрику h , замкнутую 2-форму F и гладкую функцию u . Четверка $\Gamma = (B, h, F, u)$ называется гироскопической системой. В механике B играет роль конфигурационного многообразия системы, $h/2$ – формы кинетической энергии, F – формы гироскопических сил, а u – потенциальной энергии. В общей теории относительности B – пространственно-временное многообразие, h – гравитационный потенциал, F – форма электромагнитного поля, $u \equiv \text{const}$.

Выберем точки $a, b \in B$, положительное число $\delta \in \mathbb{R}$ и обозначим буквой M_δ бесконечномерное многообразие кусочно гладких путей $x: [0, \delta] \rightarrow B$ с началом $x(0) = a$ и концом $x(\delta) = b$. Касательное пространство $T_x M_\delta$ состоит из векторных полей вдоль x , обращающихся в нуль в точках a и b . Пусть ∇ – оператор ковариантного дифференцирования в (B, h) , а $F^\#$ – линейный оператор, определенный формулой $h(F^\#(X), Y) = F(X, Y)$. Для $x \in M_\delta$ и $X \in T_x M_\delta$ положим

$$\sigma(X) = \int_0^\delta h \left(\frac{\nabla}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) + F^\# \left(\frac{dx}{dt} \right) + \text{grad } u, X \right) dt.$$

Этим определена замкнутая 1-форма σ на M_δ .

Если $\Pi = \pi_1(B, b) \neq 0$, то многообразие M_δ несвязно. Выберем компоненту связности $D \in \pi_0(M_\delta)$ и зафиксируем “опорный” путь $x_D \in D$. Символом $\tilde{D}$ обозначим многообразие кусочно гладких гомотопий $c: [0, \delta] \times I \rightarrow B$, удовлетворяющих условиям $c(t, 0) = x_D(t)$, $c(0, \tau) \equiv a$ и $c(\delta, \tau) \equiv b$. Для каждого $\tau \in I$ положим $c_\tau(t) = c(t, \tau)$. Тогда $c_\tau \in D$ и $c_0 = x_D$. Две гомотопии $c, c' \in \tilde{D}$ будем считать эквивалентными при $c_1 = c'_1$ и $I_{[\sigma]}([c'] - [c]) = 0$. Соответствующее фактор-многообразие обозначим символом $\tilde{\tilde{D}}$. Определим регулярное накрытие $\mu: \tilde{\tilde{D}} \rightarrow D$ формулой $\mu([c]) = c_1$, где $[c]$ – класс эквивалентности гомотопии $c \in \tilde{D}$. Рассмотрим класс $[c] \in \tilde{\tilde{D}}$, путь $x = c_1$ и положим

$$S(x) = \int_0^\delta \left(\frac{h(dx/dt, dx/dt)}{2} + u(x) \right) dt + \int_c F.$$

Тогда $S: \tilde{\tilde{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция и $dS = \mu^* \sigma$. Согласно [4] S – многозначный функционал на D . Пусть $[c]$ – экстремум функции $S: \tilde{\tilde{D}} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда путь $x = c_1$ естественно называть экстремалью многозначного функционала S на D или соответствующей формы σ . В случае, когда h – риманова метрика, экстремали формы σ являются движениями натуральной гироскопической системы Γ из положения a в положение b за время δ . Если h – лоренцева метрика и $u \equiv 1/2$, то Γ – гироскопическая система релятивистского типа. Ее движениями мы считаем экстремали $x \in D$ формы σ , удовлетворяющие тождеству

$$h \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right) \equiv -1.$$

В теории относительности они интерпретируются как мировые линии заряженных пробных частиц в гравитационном поле с потенциалом h и электромагнитном поле с формой F .

Заметим, что при $[\sigma] \neq 0$ в $H^1(D, \mathbb{R})$ имеет место равенство $\text{im } S = \mathbb{R}$. Поэтому даже для вывода условий существования экстремалей многозначного функционала S стандартные методы вариационного исчисления неприменимы.

По построению $\tilde{D} \approx D$ в том и только том случае, если $I_{[\sigma]}([c' - c'']) = 0$ для любых гомотопий $c', c'' \in \hat{D}$ с $c'_1 = c''_1$. Последнее равносильно справедливости равенства $\int_c F = 0$ для произвольного двумерного сфероида c в B . С другой стороны, $[\sigma] = 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{D} \approx D$. Следовательно, препятствием к однозначности функционала S является факторгруппа $\text{im } \chi / \ker J_{[F]}$, где $\chi: \pi_2(B, b) \rightarrow H_2(B)$ – гомоморфизм Гуревича, а $J_{[F]}$ – сужение гомоморфизма $I_{[F]} \in \text{Hom}(H_2(B), \mathbb{R})$ на его образ $\text{im } \chi$.

Пусть Λ – нормальный делитель группы $\Pi = \pi_1(B, b)$. Рассмотрим неотрицательные целые числа k, l и $m = k + l$. Предположим, что форма F имеет представление

$$F = \theta \circ \Phi, \quad \theta \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}), \quad [\Phi] \in H^2(B | \Lambda, \mathbb{R}^m | \mathbb{Z}^k). \quad (7.1)$$

Отметим, что условие (7.1) заведомо выполнено в случае, когда подгруппа $H_2(B | \Lambda) \subset H_2(B)$ конечно порождена. В этой ситуации число k может быть выбрано не превышающим величины $\text{rank } H_2(B | \Lambda)$. Выбор числа l вообще произволен. Добавим, что наименьшее допустимое значение параметра m равно k при $l = 0$ и $\ker \theta \cap \mathbb{Z}^k = 0$.

Положим $\Delta = \Pi / \Lambda$, $T = T^k \times \mathbb{R}^l$ и $G = \Delta \times T$. Тогда согласно предложению 3.2 существует почти главное $G | \Lambda$ -расслоение $\rho = (E, p, B, \mathcal{A})$ с характеристическим I -классом $[\Phi]$. На пространстве E имеется G -связность H с формой связности ω и формой кривизны $d\omega = p^*\Phi$. Поэтому $p^*F = d(\theta \circ \omega)$.

Рассмотрим стандартный базис $e_1, \dots, e_m$ пространства $\mathbb{R}^m$ и дуальный к нему базис $e^1, \dots, e^m$ сопряженного пространства $(\mathbb{R}^m)^* = \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Формула $j(r_1 e^1 + \dots + r_m e^m) = r_1 e_1 + \dots + r_m e_m$ определяет изоморфизм $j: \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Положим $\theta^2 = \theta(j(\theta))$, $\mathcal{Q} = j(\theta)/\theta^2$ и $\gamma(r, s) = \theta^2(r_1 s_1 + \dots + r_m s_m)$ для $r, s \in \mathbb{R}^m$. Тогда $\gamma(\mathcal{Q}, r) = \theta(r)$ и $\gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}) = \theta(\mathcal{Q}) = 1$. Таким образом, $\mathcal{Q}$ – орт евклидова пространства $(\mathbb{R}^m, \gamma)$, ортогональный подпространству $\ker \theta$. Пусть $p_\theta(r) = r - \theta(r)\mathcal{Q}$ для $r \in \mathbb{R}^m$ и $\Theta = e(\ker \theta)$. Этим определены ортогональная проекция $p_\theta: \mathbb{R}^m \rightarrow \ker \theta$ и $(m-1)$ -мерная подгруппа Θ группы T .

Допустим, что $u > 0$. Положим $u^* = u \circ p$, $\gamma^u = \gamma/2u^*$, $\omega^u = \omega/2u^*$,

$$\mathcal{H}_v = \{X \in T_v E : p_\theta \circ \omega(X) = 0\}, \quad g(X, Y) = \gamma^u(\omega(X), \omega(Y)) + p^*h(X, Y)$$

для любых $v \in E$ и $X, Y \in T_v E$. Тогда ω^u – $\mathbb{R}^m$ -значная 1-формана E , $\mathcal{H}: v \rightarrow \mathcal{H}_v$ – гладкое распределение размерности $\dim B + 1$ и g – псевдориманова метрика на E . По построению метрика g инвариантна относительно действия группы T и локальных действий группы Δ и невырождена на слоях расслоения ρ . В такой ситуации мы называем (E, g) многообразием Калуцы–Клейна.

Подмногообразия $\mathcal{F}(v) = \{v \cdot t, t \in \Theta\}$, $v \in E$, образуют на E риманово слоение $\mathcal{F}$ коразмерности $\dim B + 1$. При этом g – метрика Рейнхарта, а $\mathcal{H}$ – ортогональная слоям связность Эресмана для $\mathcal{F}$.

Пусть $y: I \rightarrow E$ – кусочно гладкий путь. Положим $x = p \circ y$ и рассмотрим горизонтальный лифт y^0 пути x с началом $y^0(0) = y(0)$ относительно G -связности H . Поскольку $p \circ y = p \circ y^0$, то найдется, причем единственный, кусочно гладкий путь $z: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющий равенствам $z(0) = 0$ и $y(s) = y^0(s) \cdot e(z(s))$. Мы говорим, что путь y увеличивает форму $\theta \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, если $\theta(z(1)) > 0$.

Для числа $\delta \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, пути $x \in M_\delta$ и точки $v \in G_a$ существует единственный кусочно гладкий путь $y: I \rightarrow E$ с началом $y(0) = v$, горизонтальный относительно связности Эресмана $\mathcal{H}$ и удовлетворяющий равенствам $\theta \circ \omega^u \left(\frac{dy}{ds} \right) \equiv \delta$ и $p \circ y \left(\frac{t}{\delta} \right) = x(t)$. При этом мы полагаем $y = \lambda^v(x)$.

Пути $x \in M_\delta$ и $x^* \in M_{\delta^*}$ будем считать Λ -эквивалентными, если $[x_1 + x_1^*] \in \Lambda$ для путей $x_1(s) = x(s\delta)$ и $x_1^*(s) = x^*(s\delta^*)$, $s \in I = [0, 1]$. Каждому классу Λ -эквивалентности C из объединения $M = \bigcup_{\delta \in \mathbb{R}_+} M_\delta$ соответствует компонента связности T_C слоя $G_b = p^{-1}(b)$, содержащая концы путей $y = \lambda^v(x)$ для всех $x \in C$. Символом $\Omega(v, T_C)$ обозначим пространство кусочно гладких путей $y: I \rightarrow E$ с началом $y(0) = v$ и концом $y(1) \in T_C$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть h – риманова метрика. Тогда отображение $\lambda^v: C \rightarrow \Omega(v, T_C)$ устанавливает биективное соответствие между множеством принадлежащих Λ -классу C движений натуральной гироскопической системы Γ и множеством геодезических риманова многообразия Калуцы–Клейна (E, g) , принадлежащих пространству $\Omega(v, T_C)$, ортогональных слоям слоения $\mathcal{F}$ и увеличивающих форму θ . Если h – лоренцева метрика, то λ^v задает биекцию множества принадлежащих C движений гироскопической системы релятивистского типа на множество обладающих теми же свойствами изотропных геодезических лоренцева многообразия (E, g) .*

Формально теорема 7.1 является обобщением теоремы 1 из [5] и теоремы 2 из [6], в которых использованы почти главные расслоения с инвариантом $\Lambda = 0$. Однако ее обоснование, по существу, сводится к повторению доказательств обобщаемых теорем и потому здесь опускается.

Ортогональность геодезической $y: I \rightarrow E$ слоям риманова слоения $\mathcal{F}$ во всех точках равносильна ее ортогональности одному слою $L \in \mathcal{F}$, проходящему через концевую точку $y(1)$. Поэтому теорема 7.1 сводит изучение принадлежащих классу C движений гироскопической системы Γ к вариационной задаче для функционала длины псевдориманова многообразия Калуцы–Клейна (E, g) на пространствах вида $\Omega(v, L)$. Последняя является почти классической задачей с фиксированным началом и подвижным концом для однозначного и положительного функционала. Некоторая ее нестандартность состоит лишь в том, что концевые подмногообразия – слои слоения $\mathcal{F}$ – могут быть некомпактными и даже несобственными. Требование роста значений формы θ вдоль экстремалей модельной задачи накладывает ограничение на выбор лежащих в T_C концевых подмногообразий.

Так как $H_2(B | 0) \subset H_2(B | \Lambda) \subset H_2(B | \Pi) = H_2(B)$ для всех нормальных делителей $\Lambda \subset \Pi$, то при $\Lambda = \Pi$ условие (7.1) на форму гироскопических сил F оказывается наиболее обременительным, а допустимая размерность структурной группы

почти главного расслоения ρ максимальна. Кроме того, в рассматриваемой ситуации имеется единственный класс Λ -эквивалентности $C = M$. Ему соответствует единственная компонента связности $T_C = G_b$ слоя над точкой b . Поэтому редукция теоремы 7.1 не позволяет различать не гомотопные движения системы Γ из точки a в точку b . Таким образом, использование почти главных $G \mid \Pi$ -расслоений — главных расслоений со структурной группой T — в двухконцевой задаче для многозначных функционалов оказывается наименее выгодным.

Выбор инварианта Λ равным нулю оптимален по ряду причин. Во-первых, при этом мы имеем самое слабое ограничение на форму F и, следовательно, наибольшую область применимости обсуждаемого метода исследования динамики гироскопических систем. Во-вторых, оказывается минимальной размерность структурной группы используемого почти главного $G \mid \Lambda$ -расслоения, которая явным образом входит в формулировки полученных этим методом результатов [5], [6]. В-третьих, Λ -эквивалентные пути из M при $\Lambda = 0$ гомотопны. Поэтому с помощью редукции теоремы 7.1 могут быть получены теоремы существования движений гироскопической системы Γ , принадлежащих заданному гомотопическому классу идущих из a в b путей. Наконец, как мы отмечали выше, многозначность функционала S — действия системы Γ — связана с поведением формы гироскопических сил только на образе гомоморфизма Гуревича $\chi: \pi_2(B, a) \rightarrow H_2(B)$, а не на всей группе гомологий $H_2(B)$. Логично предположить, что и особенности вариационной задачи для многозначных функционалов определяются гомоморфизмом $J_{[F]} \in \text{Hom}(\text{im } \chi, \mathbb{R})$. Следовательно, для выявления таких особенностей целесообразно использование почти главных расслоений, инварианты которых связаны с подгруппой $\text{im } \chi \subset H_2(B)$. Осталось заметить, что $H_2(B \mid \Lambda) = \text{im } \chi$ тогда и только тогда, когда $\Lambda = 0$. Кстати, при $\Pi \neq 0$ почти главные $G \mid 0$ -расслоения наиболее сильно отличаются от главных T -расслоений.

Упомянутое в предыдущем абзаце предположение не только логично, но и основано на конкретных примерах. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве поверхности $B_1 = T^2$ и $B_2 = S^2$. Пусть h_i — индуцированные римановы метрики на B_i , F_i — их нормированные формы площади, $u_i \equiv \text{const}$, $i = 1, 2$. Тогда оба гомоморфизма $I_{[F_i]}: H_2(B_i) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют равенствам $\text{im } I_{[F_i]} = \mathbb{Z}$, т.е. поведение форм F_i на группах гомологий $H_2(B_i) \cong \mathbb{Z}$ одинаково. Однако если для любых точек $a_1, b_1 \in B_1$ в каждом гомотопическом классе идущих из a_1 в b_1 путей содержатся движения гироскопической системы $\Gamma_1 = (B_1, h_1, F_1, u_1)$, то для диаметрально противоположных точек a_2 и b_2 сферы B_2 ни одного движения системы $\Gamma_2 = (B_2, h_2, F_2, u_2)$ из a_2 в b_2 быть не может. Следовательно, между рассматриваемыми двумя системами должно существовать принципиальное различие. Для его обнаружения достаточно заметить, что гомоморфизм Гуревича $\chi_i: \pi_2(B_i, a_i) \rightarrow H_2(B_i)$ при $i = 1$ тривиален, а при $i = 2$ является изоморфизмом. Поэтому $J_{[F_1]} = 0$, а $\text{im } J_{[F_2]} = \text{im } I_{[F_2]} = \mathbb{Z}$.

Список литературы

1. Kobayashi S. Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group // Tôhoku Math. J. 1956. V. 8. P. 29–45.
2. Kodaira K., Spenser D. S. Groups of complex line bundles over compact Kähler manifolds // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1953. V. 39. P. 868–872.

3. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
4. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49.
5. Яковлев Е. И. Геодезическое моделирование и условия разрешимости двухконцевой задачи для многозначных функционалов // Функц. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 1. С. 89–92.
6. Яковлев Е. И. О существовании решений двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. № 2. С. 256–271.

Нижегородский государственный университет
E-mail: yakovlev@mm.unn.ac.ru

Поступила в редакцию
22.07.1998 и 08.06.1999