Общероссийский математический портал

А. Н. Бобров, В. Е. Подольский, Сходимость регуляризованных следов степени оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^n , *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 10, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:18:03

УДК 517.956.227

А. Н. Бобров, В. Е. Подольский

Сходимость регуляризованных следов степени оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^n

Для оператора Лапласа–Бельтрами $-\Delta$, возмущенного оператором умножения на бесконечно дифференцируемую комплекснозначную функцию q на сфере S^n , исследована сходимость регуляризованных следов без скобок

$$\sum_k \left(\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha - \sum_j \chi_j(\alpha) \lambda_k^{k_j(\alpha)} \right),$$

где μ_k, λ_k – собственные числа операторов $-\Delta + q, -\Delta$ соответственно, и получена точная оценка α в случаях абсолютной и условной сходимости. Также получены явные выражения для коэффициентов χ_j в случае нечетного потенциала q .

Библиография: 17 названий.

1. Рассмотрим Δ_0 – оператор Лапласа–Бельтрами на единичной сфере S^n из $\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через $\Delta = \Delta_0 - (n-1)^2/4$ нормализованный оператор Лапласа–Бельтрами, а через q – оператор умножения на комплекснозначную бесконечно дифференцируемую функцию на S^n . Пусть $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ и $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ – собственные числа операторов $-\Delta$ и $-\Delta + q$ соответственно, занумерованные с учетом кратности в порядке возрастания их действительных частей. Спектр оператора $-\Delta$ на S^n хорошо известен [1]: это точки

$$\lambda_{ki} = \left(k + \frac{n-1}{2} \right)^2, \quad (1)$$

$k = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, N_k$, с кратностью

$$N_k = \binom{n+k}{n} - \binom{n+k-2}{n} \sim \frac{2}{(n-1)!} k^{n-1}. \quad (2)$$

Для собственных чисел оператора $-\Delta + q$ мы также будем использовать двойную нумерацию μ_{ki} , согласованную с нумерацией λ_{ki} .

В работах [2]–[5] В. Гийемин детально изучил спектр оператора $-\Delta + q$ на M , где M – симметрическое пространство ранга 1 (приведем полный список многообразий M [6]: $S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n, \mathbb{C}aP^2$) и $q \in C^\infty(M)$, и показал, в частности, что оценка

$$|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O(1), \quad i = 1, \dots, N_k, \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96049).

получаемая методами теории возмущений [7], не может быть улучшена для вещественнозначной $q \neq \text{const}$ для всех M , за исключением сферы S^n . Кроме того, в [4] для всех $n \neq 2$, а в [8] для $n = 2$ показано, что для сферы S^n эта оценка может быть улучшена лишь для нечетных q (т.е. $q(\tau x) = -q(x)$ для каждого $x \in S^n$, где τ — антиподальное отображение) до

$$|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad i = 1, \dots, N_k, \quad (4)$$

и O в (4) можно заменить на o только для $q \equiv 0$. Более того, в [3] показано, что для всех M множество предельных точек последовательности $(\mu_{ki} - \lambda_{ki})$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, N_k$, есть отрезок $[\min \hat{q}, \max \hat{q}]$ вещественной оси, а $\hat{q}$ — преобразование Радона на M :

$$\hat{q}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} q(s) ds,$$

где γ — замкнутая геодезическая на M .

Таким образом, относительно асимптотического распределения собственных чисел оператора $-\Delta + q$ получены окончательные результаты, и дальнейшее исследование расположения спектра возможно только “в среднем”. Стандартным аппаратом для этого являются различные формулы регуляризованных следов.

Один из подходов — суммирование со скобками — был впервые реализован в работе [9] В. А. Садовничим и В. В. Дубровским, где для сферы S^2 и нечетного потенциала q была получена следующая формула:

$$\mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{2n} \mu_{ni} - n(n+1)(2n+1) - \frac{c}{n} \right] = -\frac{1}{24\pi} \int_{S^2} [\Delta(q) + 3q^2] dS + \frac{\gamma c}{2}, \quad (5)$$

γ — постоянная Эйлера, а для c в [9] предложена формула, выражающая ее через потенциал q . Позже в статье [10] было доказано, что константа c в (5) равна нулю и ряд в (5) сходится без скобок.

Следующее продвижение в этом направлении было сделано в работе [11], где для любого симметрического пространства M ранга 1 и оператора $-\Delta + q$ с бесконечно дифференцируемым потенциалом q была доказана формула суммирования со скобками следа произвольного порядка.

Другой подход — суммирование по Абелю — в общем случае был реализован в работе [12] В. А. Любишкиным и В. Е. Подольским для эллиптических дифференциальных операторов порядка m на римановых многообразиях размерности n . Существенным ограничением работы [12] было условие $m/n > 1$, не выполненное для оператора $-\Delta + q$ на сфере S^n , $n \geq 2$. Позднее в работе [11] была получена формула суммирования методом Абеля первого регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами $-\Delta + q$ с бесконечно дифференцируемым потенциалом q на симметрическом пространстве ранга 1, а в работе [13] были доказаны формулы суммирования методом Абеля следа произвольного порядка оператора $-\Delta + q$ на рассматриваемых пространствах.

Все перечисленные результаты (за исключением работы [10]) относились к обобщенным методам суммирования следов, а обычная сходимость ряда в [10] была доказана с помощью тауберовой теоремы Литтлвуда исходя из суммируемости данного ряда по Абелю.

В настоящей работе¹ детально изучается вопрос о сходимости (абсолютной и условной) регуляризованных следов степеней собственных чисел оператора $-\Delta + q$ на S^n . Сразу подчеркнем, что неулучшаемость оценок (3) и (4) не позволяет пойти по пути, предложенному в [10].

2. Рассмотрим регуляризованный след порядка α оператора $-\Delta + q$ на сфере S^n вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha - \sum_j \chi_j(\alpha) \lambda_k^{k_j(\alpha)} \right). \quad (6)$$

При $\alpha = 0$ ряд (6) становится тривиальным и в дальнейшем не рассматривается.

ТЕОРЕМА 1. Пусть комплекснозначный потенциал q является нечетным. Тогда имеются следующие возможности:

1. при $(4 - n)/2 \leq \alpha < (5 - n)/2$ и $n \neq 5$ существуют константы $\chi_1(\alpha)$, $\chi_2(\alpha)$, задаваемые формулой (29), такие, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha - \chi_1(\alpha) \lambda_k^{-2+\alpha} - \chi_2(\alpha) \lambda_k^{-5/2+\alpha}) \quad (7)$$

условно сходится, а в случае сферы S^5 при любом $1/2 \geq \delta > 0$ существуют константы $\chi_1(\alpha, \delta)$, $\chi_2(\alpha, \delta)$ такие, что регуляризованный след

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha - \chi_1(\alpha, \delta) \lambda_k^{-2+\alpha} - \chi_2(\alpha, \delta) \lambda_k^{-5/2+\alpha}) \quad (8)$$

условно сходится при $-1/2 \leq \alpha < -\delta$;

2. при $\alpha < (4 - n)/2$ регуляризованный след (6) сходится абсолютно, т.е. сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha|. \quad (9)$$

Более того, для вещественнозначного нечетного потенциала q верны следующие утверждения:

3. при $\alpha \geq (5 - n)/2$ не существует регуляризации по собственным числам невозмущенного оператора $-\Delta$, т.е. для любого набора констант $\chi_j(\alpha)$ и степеней $k_j(\alpha)$ ряд (6) расходится;
4. при $\alpha \geq (4 - n)/2$ регуляризованный след (6) не может сходиться абсолютно, т.е. для любого набора констант $\chi_j(\alpha)$ и степеней $k_j(\alpha)$ ряд, составленный из модулей членов ряда (6), расходится.

Доказательство теоремы мы разобьем на несколько лемм, представляющих также и самостоятельный интерес в исследовании спектра рассматриваемого оператора.

¹Результаты работы анонсированы в [14].

ЛЕММА 1. *Имеет место следующее асимптотическое поведение частичных сумм R_N регуляризованного следа порядка $(5-n)/2$ оператора $-\Delta + q$ с бесконечно дифференцируемым комплекснозначным нечетным потенциалом q на сфере S^n :*

$$R_N = \sum_{k=0}^N (\mu_k^{\frac{5-n}{2}} - \lambda_k^{\frac{5-n}{2}} - \chi_1 \lambda_k^{\frac{1-n}{2}} - \chi_2 \lambda_k^{-\frac{n}{2}}) = O(1)$$

при $N \rightarrow \infty$. Здесь коэффициенты χ_j задаются формулой (26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное натуральное N . Введем следующие обозначения: $P_N = \lfloor \sqrt[n]{\frac{1}{2} n! N} \rfloor - 1$ (здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть x , а $\{x\} = x - [x]$) и $S_N = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + P_N^{n-1} \sim P_N^n/n$. Оценим сумму $\sum_{k=0}^N (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha)$. Используя введенные обозначения, ее можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha) &= \sum_{k=0}^{S_N-1} (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha) + \sum_{k=S_N}^N (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha) \\ &= \sum_{k=0}^{P_N} \sum_{i=1}^{N_k} (\mu_{ki}^\alpha - \lambda_{ki}^\alpha) + \sum_{k=S_N}^N (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha). \end{aligned}$$

Оценим сумму $\sum_{k=S_N}^N (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha)$:

$$\left| \sum_{k=S_N}^N (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha) \right| \leq \sum_{i=1}^{N_{P_N+1}} |\mu_{P_N+1,i}^\alpha - \lambda_{P_N+1,i}^\alpha|,$$

где N_{P_N+1} — кратность $\lambda_{P_N+1,i}$. Положим $\xi_{ki} = \mu_{ki} - \lambda_{ki}$. Тогда в силу (4) $|\xi_{P_N+1,i}| = O(1/P_N^2)$ и из (1) $\lambda_{P_N+1,i} \sim P_N^2$, а значит,

$$\begin{aligned} |\mu_{P_N+1,i}^\alpha - \lambda_{P_N+1,i}^\alpha| &= |(\lambda_{P_N+1,i} + \xi_{P_N+1,i})^\alpha - \lambda_{P_N+1,i}^\alpha| \\ &= |\lambda_{P_N+1,i}^\alpha (1 + \xi_{P_N+1,i} \lambda_{P_N+1,i}^{-1})^\alpha - \lambda_{P_N+1,i}^\alpha| \\ &= \left| \alpha \xi_{P_N+1,i} \lambda_{P_N+1,i}^{\alpha-1} + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) \xi_{P_N+1,i}^2 (\lambda_{P_N+1,i} + \theta_{P_N+1,i} \xi_{P_N+1,i})^{\alpha-2} \right| \\ &= O(P_N^{2\alpha-4}), \end{aligned} \tag{10}$$

где $0 < \theta_{P_N+1,i} < 1$. Здесь мы воспользовались разложением по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа функции $(1+x)^\alpha$ для $x = \xi_{P_N+1,i} \lambda_{P_N+1,i}^{-1}$, допустимым для всех N , больших некоторого N_0 . Поскольку из (2) $N_{P_N+1} = O(P_N^{n-1})$, то

$$\left| \sum_{k=S_N}^N (\mu_{ki}^\alpha - \lambda_{ki}^\alpha) \right| = O(P_N^{2\alpha+n-5})$$

и при $\alpha = \alpha_0 = (5-n)/2$ получаем оценку $O(1)$ при $N \rightarrow \infty$.

Перейдем к исследованию сумм $\sum_{k=0}^{P_N} \sum_{i=1}^{N_k} (\mu_{ki}^\alpha - \lambda_{ki}^\alpha)$. После разложения в ряд Тейлора функции $(1+x)^\alpha$ при $x = \xi_{ki}/\lambda_{ki}$ имеем

$$\mu_{ki}^\alpha - \lambda_{ki}^\alpha = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p+1)}{p!} \xi_{ki}^p \lambda_{ki}^{\alpha-p}, \quad (11)$$

причем ряд в (11) сходится абсолютно ввиду оценок $|\xi_{ki}| = O(1/k^2)$ (см. (2)) и $\lambda_{ki} \sim k^2$ (см. (1)). Так как λ_{ki} имеет вид (1) при $i = 1, \dots, N_k$, то

$$\sum_{i=1}^{N_k} (\mu_{ki}^\alpha - \lambda_{ki}^\alpha) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p+1)}{p!} \left(k + \frac{n-1}{2}\right)^{2(\alpha-p)} \sum_{i=1}^{N_k} \xi_{ki}^p.$$

Теперь воспользуемся следующим результатом В. Гийемина и А. Уриба [15]: для любого симметрического пространства ранга 1 и для любой функции $f(z)$, аналитической в некоторой области, содержащей последовательности $\{\mu_{ki} - \lambda_{ki}\}_{k=0, i=1}^{\infty, N_k}$, при $k \rightarrow \infty$ верно асимптотическое разложение

$$\sum_{i=1}^{N_k} f(\mu_{ki} - \lambda_{ki}) \sim k^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(f) k^{-j}, \quad (12)$$

причем в указанной работе предложен метод вычисления коэффициентов $\beta_j(f)$ (в дальнейшем нам также понадобится этот результат в следующей формулировке, см. [5]: для любого симметрического пространства M ранга 1 и для любой вещественнозначной функции $f(x)$, бесконечно дифференцируемой в некотором интервале, содержащем последовательность $\{\mu_{ki} - \lambda_{ki}\}_{k=0, i=1}^{\infty, N_k}$, где μ_{ki} – собственные числа оператора $-\Delta + Q$, Q – псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на M такой, что оператор $-\Delta + Q$ является самосопряженным, при $k \rightarrow \infty$ верно асимптотическое разложение (12)). Тогда после соответствующего переразложения имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_k} (\mu_{ki}^\alpha - \lambda_{ki}^\alpha) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p)(\alpha-p-1/2) \cdots (\alpha-p-(s-1)/2)}{p! s!} \\ & \quad \times \beta_j(p) (n-1)^s k^{2\alpha+n-1-2p-j-s}, \end{aligned}$$

где $\beta_j(p)$ – коэффициенты асимптотики (12) для $f(z) = z^p$. И далее

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{P_N} \sum_{i=1}^{N_k} (\mu_{ki}^\alpha - \lambda_{ki}^\alpha) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p)(\alpha-p-1/2) \cdots (\alpha-p-(s-1)/2)}{p! s!} \\ & \quad \times \beta_j(p) (n-1)^s \sum_{k=1}^{P_N} k^{2\alpha+n-1-2p-j-s}. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае нечетного потенциала q коэффициенты $\beta_0(1)$, $\beta_1(1)$ и $\beta_0(2)$ равны нулю, так как преобразование Радона для нечетной функции есть тождественный нуль (см., например, [16]), а значит,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{P_N} \sum_{i=1}^{N_k} (\mu_{ki}^\alpha - \lambda_{ki}^\alpha) &= \vartheta_1 P_N^{2\alpha+n-4} + \vartheta_2 P_N^{2\alpha+n-5} \\ &+ \cdots + \vartheta_{2[\alpha]+n-3} P_N^{2\{\alpha\}} + \vartheta \ln P_N + O(1) \end{aligned} \quad (13)$$

при $N \rightarrow \infty$. Коэффициенты ϑ_r , ϑ эффективно вычисляются через потенциал q и числа Бернулли B_{2l} .

Таким образом, полагая $\alpha = \alpha_0$, имеем

$$\sum_{k=1}^{P_N} \sum_{i=1}^{N_k} (\mu_{ki}^{\frac{5-n}{2}} - \lambda_{ki}^{\frac{5-n}{2}}) = \vartheta_1 P_N + \vartheta \ln P_N + O(1). \quad (14)$$

Исследуем далее сумму $\sum_{k=1}^N 1/\lambda_k^\beta$ при $\beta > 0$. Аналогично предыдущему случаю разобьем ее на две части

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k^\beta} = \sum_{k=1}^{P_N} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{1}{\lambda_{ki}^\beta} + \sum_{k=S_N}^N \frac{1}{\lambda_k^\beta}. \quad (15)$$

Поскольку из (1) и (2) $\lambda_{ki} = (k + (n-1)/2)^2$ при $i = 1, \dots, N_k$ и $N_k = (n+k-2)! \times (2nk + n^2 - n)/(n! k!)$, то

$$\sum_{k=1}^{P_N} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{1}{\lambda_{ki}^\beta} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{P_N} \frac{(n+k-2)! (2nk + n^2 - n)}{k! (k + (n-1)/2)^{2\beta}}.$$

Используя элементарные методы суммирования, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{P_N} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{1}{\lambda_{ki}^\beta} &= \gamma_1 P_N^{n-2\beta} + \gamma_2 P_N^{n-2\beta-1} \\ &+ \cdots + \gamma_{n-2[\beta]+1} P_N^{-2\{\beta\}} + \gamma \ln P_N + O(1) \end{aligned} \quad (16)$$

при $N \rightarrow \infty$. Заметим, что все коэффициенты в разложении (16) явно вычисляются через числа Бернулли B_{2l} .

Для второй суммы из правой части (15), используя (1) и (2), получаем оценку

$$\sum_{k=S_N}^N \frac{1}{\lambda_k^\beta} \leq \sum_{i=1}^{N_{P_N+1}} \frac{1}{\lambda_i^\beta} = \frac{N_{P_N}}{(P_N + (n+1)/2)^{2\beta}} \leq C \cdot P_N^{n-1-2\beta}. \quad (17)$$

Таким образом, ввиду (16) и (17) из (15) при $N \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k^\beta} &= \theta_1 P_N^{n-2\beta} + \theta_2 P_N^{n-2\beta-1} \\ &+ \cdots + \theta_{n-2[\beta]+1} P_N^{-2\{\beta\}} + \theta \ln P_N + O(1) \end{aligned} \quad (18)$$

при $N \rightarrow \infty$.

Далее, положим $\beta = (n-1)/2, n/2$ и определим числа χ_1, χ_2 из условия

$$\sum_{k=0}^N (\mu_k^{\frac{5-n}{2}} - \lambda_k^{\frac{5-n}{2}} - \chi_1 \lambda_k^{\frac{1-n}{2}} - \chi_2 \lambda_k^{-\frac{n}{2}}) = O(1) \quad (19)$$

при $N \rightarrow \infty$. Из (14) и (18) видно, что для определения чисел χ_j возникает линейная треугольная система с ненулевым определителем.

Для получения явного вида коэффициентов χ_j используем следующее рассуждение. Так как известно, что $\sqrt{\lambda_{ki}} = k + (n-1)/2$ (см. (1)), то

$$\exp(-2\pi i(-\Delta)^{\frac{1}{2}}) = (-1)^{n-1} I,$$

и если определить оператор $T: L_2(S^n) \rightarrow L_2(S^n)$ так, что $T\varphi_{ki} = \psi_{ki}$, где $\{\varphi_{ki}\}$ и $\{\psi_{ki}\}$ – собственные функции операторов $-\Delta$ и $-\Delta + q$ соответственно, то верно

$$\exp(-2\pi i T(-\Delta)^{\frac{1}{2}} T^{-1}) = (-1)^{n-1} I. \quad (20)$$

Введем оператор

$$Q = (-\Delta + q)^{\frac{1}{2}} - T(-\Delta)^{\frac{1}{2}} T^{-1}. \quad (21)$$

Очевидно, что Q коммутирует с $-\Delta + q$ и его собственные числа равны $\sqrt{\mu_{ki}} - \sqrt{\lambda_{ki}}$.

Далее введем оператор W равенством

$$\begin{aligned} I + W &= \exp(2\pi i Q) = \exp(2\pi i ((-\Delta + q)^{\frac{1}{2}} - T(-\Delta)^{\frac{1}{2}} T^{-1})) \\ &= \exp(2\pi i (-\Delta + q)^{\frac{1}{2}}) \cdot \exp(-2\pi i T(-\Delta)^{\frac{1}{2}} T^{-1}), \end{aligned} \quad (22)$$

или в силу (20)

$$I + W = (-1)^{n-1} \exp(2\pi i (-\Delta + q)^{\frac{1}{2}}). \quad (23)$$

В силу (4) оператор Q компактный и, следовательно, компактен и оператор W . Это обстоятельство и формула (23) позволяют найти главный символ оператора Q (21) без изучения оператора T . Действительно, из (22) и (23) следует, что

$$2\pi i Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} R(z) \ln(1+z) dz + \sum_{e^{2\pi i \sqrt{\mu_k}} - 1 \notin K} (\mu_k^{\frac{1}{2}} - \lambda_k^{\frac{1}{2}}) \psi_k(\cdot, \psi_k), \quad (24)$$

где K – круг в комплексной плоскости с центром в нуле радиуса строго меньше 1, граница которого не содержит чисел $e^{2\pi i \sqrt{\mu_k}} - 1$ (собственных чисел оператора W), $R(z) = (W - zI)^{-1}$ – резольвента оператора W , $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k$.

В силу компактности оператора W сумма в (24) конечна и, следовательно, с точностью до конечномерного оператора

$$2\pi i Q = \ln(1+W) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} W^k.$$

Отсюда следует, что главный символ оператора $2\pi iQ$ совпадает с главным символом оператора W , найденным в [4] (для $n > 2$):

$$\sigma(x, \xi) = \frac{i}{8|\xi|^3} \left(\int_0^{2\pi} (\exp t\Xi)^* q^2 dt - |\xi| \int_0^{2\pi} dt \int_0^t \{ (\exp t\Xi)^* q, (\exp s\Xi)^* q \} ds \right), \quad (25)$$

где Ξ – гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $T^*S^n \setminus \{0\}$, определяемое римановой структурой на S^n ; $q(x, \xi)$ – функция на $T^*S^n \setminus \{0\}$, связанная с потенциалом по формуле: $q(x, \xi) = q(x)$ для любого x , а $\{\cdot, \cdot\}$ – скобка Пуассона.

Знание главного символа Q позволяет явно предъявить (аналогично (12)) главный член асимптотического разложения сумм $\sum_{i=1}^{N_k} (\sqrt{\mu_{ki}} - \sqrt{\lambda_{ki}})$, а с другой стороны, несложные вычисления показывают, что

$$\sum_{i=1}^{N_k} (\mu_{ki} - \lambda_{ki}) \sim 2k \sum_{i=1}^{N_k} (\sqrt{\mu_{ki}} - \sqrt{\lambda_{ki}}),$$

и мы находим, что старший ненулевой коэффициент в (12) равен

$$\beta_2(1) = \frac{1}{\pi i} \int_{S^*S^n} \sigma(x, \xi) d\xi dx,$$

где интегрирование ведется по расслоению единичных косфер

$$S^*S^n = \{(x, \xi) \in T^*S^n : |\xi| = 1\}.$$

В заключение используем нашу треугольную систему (19) и получаем:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{(5-n)(n-1)!(2\pi)^n}{4} \int_{S^*S^n} \sigma(x, \xi) d\xi dx, \\ \chi_2 &= \frac{(n^3 - 9n^2 + 23n - 15)(n-1)!(2\pi)^n}{8} \int_{S^*S^n} \sigma(x, \xi) d\xi dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Для вычисления явного вида коэффициентов χ_j для сферы S^2 см. [8]. Тем самым лемма доказана.²

ЛЕММА 2. *Регуляризованный след порядка α оператора $-\Delta + q$ с бесконечно дифференцируемым комплекснозначным нечетным потенциалом q на сфере S^n*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha - \chi_1(\alpha) \lambda_k^{-2+\alpha} - \chi_2(\alpha) \lambda_k^{-\frac{5}{2}+\alpha}),$$

где коэффициенты $\chi_j(\alpha)$ задаются формулой (29), в случае $n \neq 5$ сходится при $\alpha < (5-n)/2$, а в случае $n = 5$ сходится при $\alpha < -\delta$ для любого $0 < \delta \leq 1/2$.

²В [14] мы использовали несколько иной способ вычисления коэффициентов, и в выражении для $\beta_2(1)$ под интегралом стояло $|\xi|\sigma(x, \xi)$. Ясно, что эти интегралы равны, так как интегрирование ведется по сфере $|\xi| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого вещественного α и размерностей $n \neq 5$ положим $\alpha_n = (5 - n)/2$ и $A_k(n) = \chi_1 \lambda_k^{\frac{1-n}{2}} + \chi_2 \lambda_k^{-\frac{n}{2}}$, где χ_j задаются формулой (26). Заметим, что в нашем случае

$$|\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n}| = O\left(\frac{1}{k^{1-\frac{1}{n}}}\right), \quad \lambda_k^{\alpha_n} \sim k^{\frac{5}{n}-1}, \quad (27)$$

а значит, $\left|\frac{\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n}}{\lambda_k^{\alpha_n}}\right| < 1$ начиная с некоторого номера k_0 , и мы можем разложить функцию $(1+x)^{\frac{\alpha}{\alpha_n}}$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $x = \frac{\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n} - A_k(n)}{\lambda_k^{\alpha_n}} + \frac{A_k(n)}{\lambda_k^{\alpha_n}}$. Воспользуемся этим соображением и проведем несложное преобразование:

$$\begin{aligned} \mu_k^\alpha &= (\mu_k^{\alpha_n})^{\frac{\alpha}{\alpha_n}} = (\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n} - A_k(n) + A_k(n) + \lambda_k^{\alpha_n})^{\frac{\alpha}{\alpha_n}} \\ &= \lambda_k^\alpha \left(1 + \frac{\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n} - A_k(n)}{\lambda_k^{\alpha_n}} + \frac{A_k(n)}{\lambda_k^{\alpha_n}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha_n}} \\ &= \lambda_k^\alpha + \frac{\alpha}{\alpha_n} \frac{A_k(n)}{\lambda_k^{\alpha_n - \alpha}} + \frac{\alpha}{\alpha_n} \frac{\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n} - A_k(n)}{\lambda_k^{\alpha_n - \alpha}} \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha - \alpha_n)}{2\alpha_n^2} \left(1 + \theta_k \frac{\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n}}{\lambda_k^{\alpha_n}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha_n} - 2} \frac{(\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n})^2}{\lambda_k^{2\alpha_n - \alpha}}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $0 < \theta_k < 1$ и $k > k_0$. Теперь положим

$$\chi_1(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha_n} \chi_1, \quad \chi_2(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha_n} \chi_2 \quad (29)$$

и с учетом (28) перепишем интересующую нас сумму в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha - \chi_1(\alpha) \lambda_k^{-2+\alpha} - \chi_2(\alpha) \lambda_k^{-5/2+\alpha}) \\ &= \sum_{k=0}^{k_0} (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha - \chi_1(\alpha) \lambda_k^{-2+\alpha} - \chi_2(\alpha) \lambda_k^{-5/2+\alpha}) \\ &\quad + \frac{\alpha}{\alpha_n} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n} - A_k(n)}{\lambda_k^{\alpha_n - \alpha}} \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha - \alpha_n)}{2\alpha_n^2} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{(\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n})^2}{(\theta_k \mu_k^{\alpha_n} + (1 - \theta_k) \lambda_k^{\alpha_n})^{2 - \frac{\alpha}{\alpha_n}}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n} - A_k(n)}{\lambda_k^{\alpha_n - \alpha}}. \quad (31)$$

Из леммы 1 известно, что частичные суммы $\sum_{k=1}^N (\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n} - A_k(n))$ ограничены в совокупности, поэтому при $\alpha < \alpha_n$ выполняются условия признака Дирихле сходимости числовых рядов и, значит, ряд (31) сходится.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{(\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n})^2}{(\theta_k \mu_k^{\alpha_n} + (1 - \theta_k) \lambda_k^{\alpha_n})^{2 - \frac{\alpha}{\alpha_n}}}.$$

Он мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_k^{\alpha_n} - \lambda_k^{\alpha_n})^2}{\lambda_k^{2 - \frac{\alpha}{\alpha_n}}},$$

также сходящимся при $\alpha < \alpha_n$ вследствие оценок (27). Тем самым доказана сходимость ряда в левой части (30), что и доказывает теорему для $n \neq 5$.

В случае сферы S^5 мы проведем аналогичные рассуждения при $\alpha_n = -\delta$ для любого $\delta > 0$, так как очевидно, что оценка (19) тем более верна при степенях α меньших $(5 - n)/2$. В силу произвольности δ утверждение леммы остается верным и в этом случае.

ЛЕММА 3. *Для следа оператора $(-\Delta + q)^{\frac{5-n}{2}}$ с бесконечно дифференцируемым нечетным вещественнозначным потенциалом q на сфере S^n не существует регуляризации по собственным числам невозмущенного оператора Δ , т.е. для любого набора констант χ_j и степеней $k(j)$ ряд*

$$\mu_0^{\frac{5-n}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_k^{\frac{5-n}{2}} - \sum_j \chi_j \lambda_k^{k(j)} \right) \quad (32)$$

расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (21), рассмотрим оператор нулевого порядка

$$S = Q \cdot (2(-\Delta + q)^{\frac{1}{2}} - Q) \cdot (-\Delta + q)$$

с собственными числами $(\mu_{ki} - \lambda_{ki})\mu_{ki}$. Из (25) видно, что главный символ S равен

$$\frac{1}{\pi i} |\xi|^3 \sigma(x, \xi),$$

и очевидно, что он не является символом оператора, кратного единичному, а следовательно, ограниченная последовательность $(\mu_{ki} - \lambda_{ki})\mu_{ki}$ имеет более одной предельной точки.

Рассмотрим оператор нулевого порядка $(-\Delta + q)^{\frac{n-1}{2}} R$, где

$$R = (-\Delta + q)^{\frac{5-n}{2}} - ((-\Delta + q)^{1/2} - Q)^{5-n} - \sum_{j=1}^p \chi_j ((-\Delta + q)^{1/2} - Q)^{5-n-j}$$

— оператор порядка $1 - n$, а коэффициенты χ_j выбраны так, что собственные числа оператора R суммируются по Абелю. Существование таких χ_j доказано в работе [13].

Применяя асимптотическое разложение (12) к собственным числам оператора $-\Delta + (-\Delta + q)^{\frac{n-1}{2}} R$ и используя полученные выше свойства последовательности $(\mu_{ki} - \lambda_{ki})\mu_{ki}$ (которая в главном совпадает с собственными числами оператора $(-\Delta + q)^{\frac{n-1}{2}} R$), делаем вывод о том, что собственные числа ν_{ki} оператора

$(-\Delta + q)^{\frac{n-1}{2}} R$, занумерованные синхронно собственным числам оператора Лапласа, всюду плотно заполняют некоторый невырожденный отрезок $[a, b]$, причем так, что на любом его подынтервале есть собственные числа с первым индексом k для всех достаточно больших k (см., например, [17; гл. 29]).

Нам необходимо выделить часть отрезка $[a, b]$, содержащую ν_{ki} одного знака. Если $a < b \leq 0$ или $0 \leq a < b$, можно взять интервал (a, b) . Если $0 \in (a, b)$, можно выбрать $(0, b)$. Далее, не ограничивая общности, можно считать, что $0 < b$. Рассмотрим отрезок $I \in (0, b)$. Выберем финитную функцию $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ такую, что $\phi(x) \geq 0$, $\phi(x) \equiv 1$ на I и $\text{supp } \phi(x) \in (0, b)$. Тогда, используя формулу (12), нетрудно получить следующее неравенство:

$$\left| \sum_I \nu_{ki} \right| \geq \sum_{i=1}^{N_k} \phi(\nu_{ki}) = \int_{S^* S^n} \phi(\sigma((-\Delta)^{\frac{n-1}{2}} R)) dV \cdot k^{n-1} + O(k^{n-2}),$$

где $d\xi dx$ — элемент симплектического объема, $\sigma((-\Delta + q)^{\frac{n-1}{2}} R)$ — главный символ оператора $(-\Delta + q)^{\frac{n-1}{2}} R$, а суммирование в первой сумме ведется по собственным числам ν_{ki} , попавшим при данном k в отрезок I . А значит, существует такая строго положительная константа c , что

$$\left| \sum_I \nu_{ki} \right| \geq c \cdot k^{n-1}$$

или

$$\left| \sum_I \mu_{ki}^{\frac{n-1}{2}} \left(\mu_{ki}^{\frac{5-n}{2}} - \lambda_{ki}^{\frac{5-n}{2}} - \sum_{j=1}^p \chi_j \lambda_{ki}^{-\frac{n+j-5}{2}} \right) \right| \geq c \cdot k^{n-1}.$$

Воспользуемся критерием Коши сходимости числового ряда, и так как $\mu_{ki} \sim k^2$, то верно неравенство

$$\left| \sum_I \left(\mu_{ki}^{\frac{5-n}{2}} - \lambda_{ki}^{\frac{5-n}{2}} - \sum_{j=0}^6 \chi_j \lambda_{ki}^{-\frac{n+j-5}{2}} \right) \right| \geq c > 0.$$

Таким образом, суммируемый по Абелю ряд (32) расходится. При любом другом выборе коэффициентов χ_j ряд (32) даже не будет суммируем по Абелю. Это рассуждение и доказывает лемму.

ЛЕММА 4. *Регуляризованный след порядка α оператора $-\Delta + q$ с бесконечно дифференцируемым комплекснозначным нечетным потенциалом q на сфере S^n при $\alpha < (4 - n)/2$ сходится абсолютно, т.е. сходится ряд*

$$|\mu_0|^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha|. \quad (33)$$

Более того, для вещественнозначного нечетного потенциала q при $\alpha \geq (4 - n)/2$ для абсолютной сходимости следа порядка α не существует регуляризации по собственным числам невозмущенного оператора Δ , т.е. для любого набора констант $\chi_j(\alpha)$ и степеней $k_j(\alpha)$ ряд

$$|\mu_0|^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha - \sum_j \chi_j(\alpha) \lambda_k^{k_j(\alpha)} \right|$$

расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\xi_k = \mu_k - \lambda_k$. Тогда из (1) и (2)

$$|\xi_k| = O\left(\frac{1}{k^{2/n}}\right), \quad |\lambda_k| = O(k^{2/n}), \quad (34)$$

а значит, $|\xi_k/\lambda_k| < 1$ начиная с некоторого номера k_0 , и мы можем разложить функцию $(1+x)^\alpha$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $x = \xi_k/\lambda_k$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha| &= |(\lambda_k + \xi_k)^\alpha - \lambda_k^\alpha| = \left| \lambda_k^\alpha \left(1 + \frac{\xi_k}{\lambda_k}\right)^\alpha - \lambda_k^\alpha \right| \\ &= \left| \alpha \xi_k \lambda_k^{\alpha-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \xi_k^2 (\lambda_k + \theta_k \xi_k)^{\alpha-2} \right|, \end{aligned}$$

где $0 < \theta_k < 1$. А значит, используя (34),

$$|\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha| \leq C \cdot k^{\frac{2}{n}(\alpha-1) - \frac{2}{n}}.$$

Из условия леммы $\alpha = (4-n)/2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, тогда

$$|\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha| \leq C \cdot \frac{1}{k^{1+2\varepsilon/n}}$$

и ряд (33) сходится.

Для доказательства второй части утверждения леммы рассмотрим оператор

$$R = (-\Delta + Q)^{\frac{4-n}{2}} - (-\Delta)^{\frac{4-n}{2}} - \sum_{j=0}^5 \chi_j (-\Delta)^{-\frac{n+j-4}{2}}$$

порядка $-n$, причем константы χ_j выбраны так, что собственные числа оператора R суммируются по Абелю. И далее рассмотрим оператор нулевого порядка $(-\Delta)^{\frac{n}{2}} R$. Повторяя рассуждения леммы 3, убеждаемся, что существует такая строго положительная константа c , что

$$\sum_I \left| \mu_{ki}^{\frac{4-n}{2}} - \lambda_{ki}^{\frac{4-n}{2}} - \sum_{j=0}^5 \chi_j \lambda_{ki}^{-\frac{n+j-4}{2}} \right| \geq \frac{c}{k}. \quad (35)$$

Здесь суммирование ведется по собственным числам ν_{ki} , попавшим при данном k в отрезок I .

Теперь предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \mu_k^{\frac{4-n}{2}} - \lambda_k^{\frac{4-n}{2}} - \sum_{j=0}^5 \chi_j \lambda_k^{-\frac{n+j-4}{2}} \right|$$

сходится. Если ряд сходится абсолютно, то абсолютно сходится и любой ряд, полученный из данного перестановкой членов и расстановкой скобок, но тогда из (35) для любого достаточно большого натурального N

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{N_k} \left| \mu_{ki}^{\frac{4-n}{2}} - \lambda_{ki}^{\frac{4-n}{2}} - \sum_{j=0}^5 \chi_j \lambda_{ki}^{-\frac{n+j-4}{2}} \right| \\ &\geq \sum_{k=1}^N \sum_I \left| \mu_{ki}^{\frac{4-n}{2}} - \lambda_{ki}^{\frac{4-n}{2}} - \sum_{j=0}^5 \chi_j \lambda_{ki}^{-\frac{n+j-4}{2}} \right| \geq \sum_{k=1}^N \frac{c}{k}, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы.

В случае, если потенциал q не является нечетным, оценка (3) позволяет получить для разности собственных значений внутри последнего кластера (лемма 1) менее квалифицированную, нежели (10), оценку:

$$|\mu_{P_N+1,i}^\alpha - \lambda_{P_N+1,i}^\alpha| = O(P_N^{2\alpha-2})$$

при $N \rightarrow \infty$. Поэтому сумма разностей собственных значений внутри последнего кластера является $O(1)$ лишь при $\alpha = \alpha_0 = (3-n)/2$. Далее, полностью повторяя рассуждения лемм 2 и 4 с заменой, где это необходимо, оценки (4) на (3), мы получаем доказательство сходимости соответствующих рядов. Для доказательства расходимости необходимо воспользоваться явным видом главного символа оператора Q , построенного в лемме 1, который в данном случае равен

$$\sigma(x, \xi) = \frac{i}{2|\xi|} \int_0^{2\pi} (\exp t\Xi)^* q dt$$

(см., например, [4]), и полностью повторить рассуждения лемм 3 и 4. Таким образом верна

ТЕОРЕМА 2. Пусть комплекснозначный потенциал q не является нечетным. Тогда имеют следующие возможности:

1. при $(2-n)/2 \leq \alpha < (3-n)/2$ и $n \neq 5$ существуют константы $\chi_1(\alpha)$, $\chi_2(\alpha)$ такие, что ряд (7) сходится условно, а в случае сферы S^5 при любом $3/2 \geq \delta > 1$ существуют константы $\chi_1(\alpha, \delta)$, $\chi_2(\alpha, \delta)$ такие, что регуляризованный след (8) условно сходится при $-3/2 \leq \alpha < -\delta$;
2. при $\alpha < (2-n)/2$ регуляризованный след (6) сходится абсолютно, т.е. сходится ряд (9).

Более того, для вещественнозначного потенциала q , не являющегося нечетным, верны следующие утверждения:

3. при $\alpha \geq (3-n)/2$ не существует регуляризации по собственным числам невозмущенного оператора $-\Delta$, т.е. для любого набора констант $\chi_j(\alpha)$ и степеней $k_j(\alpha)$ ряд (6) расходится;
4. при $\alpha \geq (2-n)/2$ регуляризованный след (6) не может сходиться абсолютно, т.е. для любого набора констант $\chi_j(\alpha)$ и степеней $k_j(\alpha)$ ряд, составленный из модулей членов ряда (6), расходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Суммы рядов (7) и (8) эффективно вычисляются через аналитическое продолжение дзета-функции оператора $-\Delta + q$. Так, для суммы ряда (7) верно выражение:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha - \chi_1(\alpha) \lambda_k^{-2+\alpha} - \chi_2(\alpha) \lambda_k^{-5/2+\alpha}) \\ &= \operatorname{reg}_{s=\alpha} Z(s) - \sum_{l=1}^n p_l \operatorname{reg}_{s=\alpha} \left[\zeta \left(l - n - 2s, \frac{n-1}{2} \right) + \chi_1(\alpha) \zeta \left(l + 4 - n - 2s, \frac{n-1}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \chi_2(\alpha) \zeta \left(l + 5 - n - 2s, \frac{n-1}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

где $Z(s)$ – дзета-функция оператора $-\Delta + q$, $\zeta(s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+a)^{-s}$ – обобщенная дзета-функция Римана, p_l – коэффициенты разложения многочлена N_k (см. (2)) по степеням $(k+a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Требование вещественнозначности потенциала q для утверждений о расходимости соответствующих рядов является существенным, так как в работе [15] построен пример такого комплекснозначного потенциала q , что спектры операторов $-\Delta + q$ и $-\Delta$ совпадают, что влечет сходимость рассматриваемых нами рядов при всех значениях параметра α .

Список литературы

1. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
2. Guillemin V. Some spectral results on rank one symmetric spaces // Adv. Math. 1978. V. 28. P. 129–137.
3. Guillemin V. An addendum: some spectral results on rank one symmetric spaces // Adv. Math. 1978. V. 28. P. 138–147.
4. Guillemin V. Some spectral results for the Laplace operator with potential on the n -sphere // Adv. Math. 1978. V. 27. P. 273–286.
5. Guillemin V. Band asymptotics in two dimensions // Adv. Math. 1981. V. 42. P. 248–282.
6. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1980.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
8. Widom H. The Laplace operator with potential on the 2-sphere // Adv. Math. 1979. V. 31. P. 63–66.
9. Садовничий В. А., Дубровский В. В. Классическая формула регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере S^2 // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 1. С. 61–62.
10. Подольский В. Е. Формула регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере S^2 // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 1. С. 71–77.
11. Podolskii V. E. On the summability of regularized sums of eigenvalues of the Laplace–Beltrami operator with potential on symmetric spaces of rank one // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 1. P. 123–130.
12. Любишкин В. А., Подольский В. Е. О суммируемости регуляризованных следов дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 2. С. 33–37.
13. Бобров А. Н. Регуляризованные следы высших порядков оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на симметрических пространствах ранга 1 // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 6. С. 800–804.
14. Бобров А. Н., Подольский В. Е. О сходимости следа степени оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^n // Функци. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 4. С. 69–72.
15. Guillemin V., Uribe A. Spectral properties of a certain class of complex potentials // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 279. № 2. P. 759–771.
16. Colin de Verdière Y. Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques // Comment. Math. Helv. 1979. V. 54. P. 508–522.
17. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 4. Интегральные операторы Фурье. М.: Мир, 1988.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: podolski@top.rector.msu.su, bobr@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
07.05.1998