Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Михайлов, О существовании граничных значений у метегармонических функций, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 10, 17–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:38:36

УДК 517.9

В. П. Михайлов

О существовании граничных значений у метагармонических функций

Установлены необходимые и достаточные условия существования L_2 -пределов на границе у решений метагармонического уравнения в полупространстве. Для уравнения Лапласа эти критерии совпадают с теоремой Рисса: гармоническая функция имеет L_2 -предел на границе тогда и только тогда, когда она L_2 -ограничена.

Библиография: 4 названия.

В работе рассматривается вопрос о существовании предельных значений на граничных поверхностях коразмерности единица у решений эллиптических уравнений. Двумерный случай полигармонических функций в круге с этой точки зрения был рассмотрен в [1]; в этой работе были получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы полигармоническая функция имела предел в среднем на граничной окружности. Цель настоящей работы – перенести полученные в [1] критерии на более общий случай метагармонических функций, причем рассматриваться эти функции будут в полупространстве произвольной размерности. План изложения в предлагаемой работе в основном такой же, как и в работе [1], однако реализация этого плана здесь, естественно, встречается с большими трудностями.

Предельные значения на границе, как и в [1], будут пониматься в смысле L_2 -пределов. При этом решения естественно считать заданными не во всей области, а лишь в некоторой соответствующей приграничной полосе.

В полосе $\Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n, 0 < y < 1\}$ $(n+1)$ -мерного пространства $\mathbb{R}_{n+1} = \{x \in \mathbb{R}_n, y \in \mathbb{R}_1\}$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\mathcal{P}(\Delta)u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Pi, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, а

$$\mathcal{P}(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$$

– многочлен (с комплексными коэффициентами) степени $m \geq 1$. Уравнение (1), очевидно, является эллиптическим уравнением $2m$ -го порядка, решения его называются метагармоническими функциями [2]. Для простоты мы ограничимся рассмотрением лишь тех решений уравнения (1), которые при любом $a \in (0, 1)$ принадлежат пространству $W_2^m(\Pi_a)$, где $\Pi_a = \{x \in \mathbb{R}_n, a < y < 1\}$, и тем самым являются непрерывными по $y \in (0, 1]$ функциями со значениями в $L_2(\mathbb{R}_n)$: $u(x, y) \in C((0, 1]; L_2(\mathbb{R}_n))$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00248).

Как обычно, функцию $u(x, y)$ назовем L_2 -ограниченной, если

$$\sup_{0 < y < 1} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} < \infty; \quad (2)$$

аналогично, будем говорить, что функция $u(x, y)$ имеет L_2 -предел при $y \rightarrow +0$, если существует функция $u_0(x) \in L_2(\mathbb{R}_n)$ такая, что

$$\|u(\cdot, y) - u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow +0.$$

Нас интересует вопрос: какие условия следует наложить на решение $u(x, y)$, чтобы у него существовал L_2 -предел при $y \rightarrow +0$ или иначе, когда $u(x, y) \in C'([0, 1]; L_2(\mathbb{R}_n))$?

Для решений уравнения второго порядка известны следующие необходимые и достаточные условия существования L_2 -пределов на границе. Прежде всего это критерий типа теоремы Ф. Рисса: для того чтобы решение $u(x, y)$ уравнения (1) при $m = 1$ имело L_2 -предел при $y \rightarrow +0$, необходимо и достаточно, чтобы это решение было L_2 -ограниченным.

Другим критерием является теорема типа теоремы Литлвуда–Пэли: для того чтобы решение $u(x, y)$ уравнения (1) при $m = 1$ имело L_2 -предел при $y \rightarrow +0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_{\Pi} |\nabla u(x, y)|^2 y \, dx \, dy < \infty. \quad (3)$$

Однако ни условие (2), ни условие (3) не являются критериями в случае, когда уравнение (1) более высокого порядка, $m > 1$. Условие L_2 -ограниченности (2), конечно, является необходимым условием существования L_2 -предела и при $m > 1$, но достаточным условием оно не является. Приведем соответствующий пример для случая полигармонического уравнения

$$\Delta^m u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Pi, \quad m > 1 \quad (4)$$

(в (1) $\mathcal{P}(z) = z^m$).

Функция

$$u(x, y) = \frac{y}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_n} e^{i(x, \xi)} \frac{e^{-y|\xi|}}{(1 + |\xi|^2)^{(n-2)/4}} \, d\xi, \quad (x, y) \in \Pi,$$

как нетрудно проверить, является бигармонической функцией, т.е. решением уравнения (4) при $m = 2$, а значит, и при любом $m \geq 2$. Эта функция L_2 -ограничена. Действительно, поскольку

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 &= y^2 \int_{\mathbb{R}_n} \frac{e^{-2y|\xi|}}{(1 + |\xi|^2)^{(n-2)/2}} \, d\xi = y^2 \omega_n \int_0^\infty \frac{e^{-2y\rho} \rho^{n-1}}{(1 + \rho^2)^{(n-2)/2}} \, d\rho \\ &= \omega_n \int_0^\infty \frac{e^{-2r} r^{n-1}}{(y^2 + r^2)^{(n-2)/2}} \, dr, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, то для всех $y \in (0, 1]$

$$\|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 \leq \omega_n \int_0^\infty \frac{e^{-2r} r^{n-1}}{r^{n-2}} dr = \omega_n/4.$$

Покажем, что тем не менее L_2 -предела при $y \rightarrow +0$ функция $u(x, y)$ не имеет. Прежде всего отметим, что если бы такой предел существовал, то он был бы равен нулю. Действительно, для любой функции $\varphi(x)$ из пространства Шварца S ($\tilde{\varphi}(\xi)$ — преобразование Фурье этой функции, $\tilde{\varphi}(\xi) \in S$) имеем

$$(u(\cdot, y), \varphi(\cdot))_{L_2(\mathbb{R}_n)} = y \int_{\mathbb{R}_n} \frac{e^{-y|\xi|} \overline{\tilde{\varphi}(\xi)}}{(1 + |\xi|^2)^{(n-2)/4}} d\xi,$$

поэтому

$$|(u(\cdot, y), \varphi(\cdot))| \leq y \int_{\mathbb{R}_n} \frac{|\tilde{\varphi}(\xi)|}{(1 + |\xi|^2)^{(n-2)/4}} d\xi = y \cdot \text{const}$$

и тем самым $(u(\cdot, y), \varphi(\cdot))_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +0$. Так как S всюду плотно в $L_2(\mathbb{R}_n)$, а множество $\{u(\cdot, y), y > 0\}$ $L_2(\mathbb{R}_n)$ -ограничено, то $u(\cdot, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +0$ слабо в $L_2(\mathbb{R}_n)$, а следовательно, и сильный в $L_2(\mathbb{R}_n)$ предел функции $u(\cdot, y)$ равен нулю. Но этого быть не может, так как согласно (5)

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 = \omega_n \int_0^\infty r e^{-2r} dr = \omega_n/4 \neq 0.$$

Обратимся теперь к условию Литлвуда—Пэли (3). В работе [4] доказано, что выполнения условия (3) достаточно (другое достаточное условие можно получить с помощью результатов работы [3]) для существования L_2 -предела на границе у решения уравнения (4) при любом $m \geq 1$. Однако это условие не является для этого необходимым. Функция

$$u(x, y) = \frac{y}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_n} e^{i(x, \xi)} \frac{e^{-y|\xi|} d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{(n-2)/4} (\ln(2 + |\xi|^2))^{1/2}}, \quad (x, y) \in \Pi,$$

является бигармонической функцией (и решением уравнения (4) при любом $m \geq 2$). Для всех $y \in (0, 1]$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 &= y^2 \int_{\mathbb{R}_n} \frac{e^{-2y|\xi|} d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{(n-2)/2} (\ln(2 + |\xi|^2))} \\ &= y^2 \omega_n \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1} e^{-2y\rho} d\rho}{(1 + \rho^2)^{(n-2)/2} \ln(2 + \rho^2)} \\ &= \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1} e^{-2r} dr}{(y^2 + r^2)^{(n-2)/2} \ln(2 + \frac{r^2}{y^2})} \leq \omega_n \int_0^\infty \frac{r e^{-2r} dr}{\ln(2 + \frac{r^2}{y^2})}, \end{aligned}$$

из которого (согласно теореме Лебега) вытекает, что

$$\|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow +0.$$

Таким образом, рассматриваемая функция имеет (нулевой) L_2 -предел при $y \rightarrow +0$. Покажем, что условие (3) для функции $u(x, y)$ не выполняется. Действительно, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_n} |\nabla u(x, y)|^2 dx &= 2y^2 \int_{\mathbb{R}_n} \frac{|\xi|^2 e^{-2|\xi|y} d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{(n-2)/2} \ln(2 + |\xi|^2)} \\ &= 2\omega_n y^2 \int_0^\infty \frac{r^{n+1} e^{-2ry} dr}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} \ln(2 + r^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} y |\nabla u(x, y)|^2 dx dy &= 2\omega_n \int_0^1 y^3 \int_0^\infty \frac{r^{n+1} e^{-2ry} dr}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} \ln(2 + r^2)} dy \\ &= 2\omega_n \left\{ \int_1^\infty \frac{r^{n+1}}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} \ln(2 + r^2)} \int_0^1 y^3 e^{-2ry} dy dr \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 y^3 \int_0^1 \frac{r^{n+1} e^{-2ry} dr}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} \ln(2 + r^2)} dy \right\} \\ &= 2\omega_n \left\{ \frac{3}{8} \int_1^\infty \frac{r^{n-3} dr}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} \ln(2 + r^2)} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 y^3 \int_0^1 \frac{r^{n+1} e^{-2ry} dr}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} \ln(2 + r^2)} dy \right. \\ &\quad \left. - \int_1^\infty \frac{e^{-2r} \left(\frac{1}{2r} + \frac{3}{4r^2} + \frac{3}{4r^3} + \frac{3}{8r^4} \right)}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} \ln(2 + r^2)} dr \right\} = +\infty, \end{aligned}$$

поскольку первый интеграл в фигурных скобках равен $+\infty$, а два остальных — сходящиеся.

Для формулировки результатов работы нам потребуются некоторые обозначения. Обозначим через P_N при произвольном $N > 0$ проекционный оператор в $L_2(\mathbb{R}_n)$, действующий по следующему правилу: для любой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R}_n)$ функция $(P_N f)(x)$ определяется формулой

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{N < |\xi| < 2N} \tilde{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad (6)$$

$P_N = F^{-1} \zeta_{N, 2N} F$, где F — оператор преобразования Фурье

$$(Ff)(\xi) = \tilde{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_n} e^{-i(x, \xi)} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}_n,$$

а $\zeta_{N, 2N}$ — оператор умножения на характеристическую функцию шарового слоя $\{N < |\xi| < 2N\}$.

Как обычно, через $W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)$ будем обозначать гильбертово пространство, полученное пополнением пространства $L_2(\mathbb{R}_n)$ по норме

$$\|f\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} = \left(\int_{\mathbb{R}_n} \frac{|\tilde{f}(\xi)|^2}{1 + |\xi|^2} d\xi \right)^{1/2}.$$

Пусть $h = (h_1, \dots, h_n)$ – произвольный ненулевой вектор из $\mathbb{R}_n$, $|h| \neq 0$; для любой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R}_n)$ определим принадлежащую $L_2(\mathbb{R}_n)$ функцию

$$(T_h f)(x) = \frac{\delta_h^2 f(x)}{2|h|} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2|h|}. \quad (7)$$

Равенством (7) определяется оператор из $L_2(\mathbb{R}_n)$ в $L_2(\mathbb{R}_n)$, очевидно, ограниченный при любом h , $|h| \neq 0$, однако, норма его растет при $|h| \rightarrow 0$. Под T_h в дальнейшем будем понимать заданный формулой (7) оператор, действующий из $L_2(\mathbb{R}_n)$ в $W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)$. Покажем, что для так понимаемого оператора

$$\|T_h\| \leq 1 \quad \text{для всех } h \in \mathbb{R}_n \setminus \{0\}. \quad (8)$$

Действительно, поскольку для любой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R}_n)$

$$\begin{aligned} (T_h f)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_n} \tilde{f}(\xi) \frac{e^{i(h,\xi)} - 2 + e^{-i(h,\xi)}}{2|h|} e^{i(x,\xi)} d\xi, \\ \|T_h f\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)}^2 &= 4 \int_{\mathbb{R}_n} \frac{|\tilde{f}(\xi)|^2}{(1+|\xi|^2)|h|^2} \sin^4 \frac{(\xi, h)}{2} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_n} |\tilde{f}(\xi)|^2 \sin^2 \frac{(\xi, h)}{2} d\xi \end{aligned} \quad (9)$$

и, следовательно,

$$\|T_h f\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)}^2 \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2,$$

откуда вытекает неравенство (8).

Целью настоящей работы является доказательство следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы рассматриваемое решение уравнения (1) имело L_2 -предел при $y \rightarrow +0$, необходимо и достаточно, чтобы это решение было L_2 -ограниченным и выполнялось условие*

$$\sup_{0 < y < 1} \|P_N u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы рассматриваемое решение $u(x, y)$ уравнения (1) имело L_2 -предел при $y \rightarrow +0$, необходимо и достаточно, чтобы оно было L_2 -ограниченным и выполнялось условие*

$$\sup_{0 < y < 1} \|T_h u(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } |h| \rightarrow 0. \quad (11)$$

Условие (11), в котором n -мерная точка $h \rightarrow 0$, можно эквивалентно заменить на n одномерных условий. Пусть $i_1 = (1, \dots, 0)$, $\dots$, $i_n = (0, \dots, 0, 1)$, а $h = h_1 i_1 + \dots + h_n i_n$ – разложение вектора $h \in \mathbb{R}_n$ по этому базису; тогда вместо условия (11) можно записать n условий

$$\sup_{0 < y < 1} \|T_{h_k i_k} u(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } h_k \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11')$$

Эквивалентность условий (11) и (11') доказывается в лемме 12.

Таким образом, наряду с теоремой 2 имеет место и теорема 2'.

ТЕОРЕМА 2'. Для того чтобы решение $u(x, y)$ уравнения (1) имело L_2 -предел при $y \rightarrow +0$, необходимо и достаточно, чтобы оно было L_2 -ограниченным и выполнялось условие (11').

Обозначим через $\tilde{u}(\xi, y)$, $\xi \in \mathbb{R}_n$, $y \in (0, 1]$, преобразование Фурье по переменным x решения $u(x, y)$ уравнения (1):

$$\tilde{u}(\xi, y) = (Fu(\cdot, y))(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}_n, \quad y \in (0, 1].$$

Для почти всех $\xi \in \mathbb{R}_n$ функция $\tilde{u}(\xi, y)$ принадлежит W_2^{2m} ($a < y < 1$) при любом $a \in (0, 1)$ и является решением линейного однородного дифференциального уравнения

$$\mathcal{P} \left(\frac{d^2}{dy^2} - |\xi|^2 \right) \tilde{u}(\xi, y) = 0, \quad y \in (0, 1).$$

Пусть комплексные числа $z_1, \dots, z_k$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$, — корни многочлена $\mathcal{P}(z)$, а $m_1, \dots, m_k$ — их кратности, $m_i \geq 1$, $i = 1, \dots, k$, $m_1 + \dots + m_k = m$,

$$\mathcal{P}(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_k)^{m_k}.$$

Тогда дифференциальное уравнение для функции $\tilde{u}(\xi, y)$ имеет вид

$$\prod_{j=1}^k \left(\frac{d^2}{dy^2} - (|\xi|^2 + z_j) \right)^{m_j} \tilde{u}(\xi, y) = 0, \quad 0 < y < 1. \quad (12)$$

При каждом j , $j = 1, \dots, k$, в комплексной z -плоскости проведем разрез по лучу $z = -z_j + t$, $-\infty < t \leq 0$; под функцией $\sqrt{z + z_j}$, $1 \leq j \leq k$, в таком образом разрезанной плоскости будем понимать ту ветвь корня, для которой $(\sqrt{z + z_j} - \sqrt{z})|_{\text{Im } z=0} \rightarrow 0$ при $\text{Re } z \rightarrow +\infty$, где под $\sqrt{z}|_{\text{Im } z=0, \text{Re } z>0}$ понимается положительное значение корня $\sqrt{\text{Re } z}$.

Функции

$$\lambda_j = \lambda_j(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + z_j}, \quad j = 1, \dots, k, \quad \xi \in \mathbb{R}_n, \quad (13)$$

являются характеристическими числами обыкновенного дифференциального уравнения

$$\prod_{j=1}^k \left(\frac{d}{dy} - \lambda_j(\xi) \right)^{m_j} v = 0, \quad y \in \mathbb{R}_1, \quad \xi \in \mathbb{R}_n, \quad (14)$$

и поскольку для всех $\xi \in \mathbb{R}_n$ $\lambda_j \neq \lambda_s$, $j \neq s$, $j, s = 1, \dots, k$, то кратность характеристического числа λ_j при всех $\xi \in \mathbb{R}_n$ равна m_j , $j = 1, \dots, k$. Числа $-\lambda_j$, $j = 1, \dots, k$, являются характеристическими числами уравнения

$$\prod_{j=1}^k \left(\frac{d}{dy} + \lambda_j(\xi) \right)^{m_j} w = 0, \quad y \in \mathbb{R}_1, \quad \xi \in \mathbb{R}_n, \quad (15)$$

и кратность $-\lambda_j$ при всех $\xi \in \mathbb{R}_n$ равна m_j , $j = 1, \dots, k$. Поэтому при всех $\xi \in \mathbb{R}_n$ система функций

$$I = (e^{\lambda_1 y}, \dots, y^{m_1-1} e^{\lambda_1 y}, \dots, e^{\lambda_k y}, \dots, y^{m_k-1} e^{\lambda_k y})$$

является фундаментальной системой решений уравнения (14), а система

$$\Pi = (e^{-\lambda_1 y}, \dots, y^{m_1-1} e^{-\lambda_1 y}, \dots, e^{-\lambda_k y}, \dots, y^{m_k-1} e^{-\lambda_k y})$$

является фундаментальной системой решений уравнения (15).

Объединение этих систем, т.е. система

$$\text{III} = (e^{\lambda_1 y}, \dots, y^{m_1-1} e^{\lambda_1 y}, \dots, e^{-\lambda_k y}, \dots, y^{m_k-1} e^{-\lambda_k y})$$

будет фундаментальной системой решений уравнения (12) для всех $\xi \in \mathbb{R}_n$, кроме тех значений ξ , для которых при каком-либо $j, j = 1, \dots, k$, имеет место равенство $\lambda_j = -\lambda_j$ (равенство $\lambda_j = -\lambda_r$ при $j \neq r$, очевидно, невозможно), которое в силу (13) может быть лишь при вещественном неположительном значении корня z_j многочлена $\mathcal{P}$. Это множество значений ξ совпадает со сферой $\{|\xi| = \sqrt{-z_j}\}$, на этой сфере общая кратность корня $\lambda_j = -\lambda_j$ равна $2m_j$. Таким образом, система III является фундаментальной системой решений уравнения (12) для всех $\xi \in \mathbb{R}_n \setminus Z$, где $Z = \bigcup_{j=1}^k \{|\xi| = \sqrt{-z_j}\}$ (множество Z пусто, если среди корней многочлена $\mathcal{P}$ нет вещественных неотрицательных чисел), или, более грубо, для всех $\xi \in \mathbb{R}_n$, для которых $|\xi| > R_0 = \max\{\sqrt{|z_1|}; \dots; \sqrt{|z_k|}\}$.

В дальнейших наших построениях будут использованы другие фундаментальные системы решений уравнений (14), (15) и (12). Для построения нужной нам системы

$$\tilde{\Pi} = (w_1(\xi, y), \dots, w_m(\xi, y)),$$

являющейся фундаментальной системой решений уравнения (15), поступим следующим образом. Пусть s – произвольное целое число из отрезка $[1, m]$; обозначим через $\varkappa = \varkappa(s)$, $1 \leq \varkappa \leq k$, номер того полуинтервала из $(0, m_1], (m_1, m_1 + m_2], \dots, (m_1 + \dots + m_{k-1}, m]$ (напомним, что $m_1 + \dots + m_k = m$), в котором содержится s , и положим

$$w_s(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=|\xi|+R_0+1} \frac{e^{zy} dz}{(z + \lambda_1)^{m_1} \dots (z + \lambda_{\varkappa-1})^{m_{\varkappa-1}} (z + \lambda_{\varkappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\varkappa-1})}},$$

$$1 \leq s \leq m, \quad \varkappa = \varkappa(s) \in [1, k], \quad \xi \in \mathbb{R}_n, \quad y \in [0, 1], \quad (16)$$

где интеграл берется по окружности с центром в начале координат радиуса $|\xi| + R_0 + 1$ комплексной z -плоскости. В силу неравенств $|\lambda_p| \leq \sqrt{|\xi|^2 + |z_p|} \leq |\xi| + \sqrt{|z_p|}$, $p = 1, \dots, k$, все полюсы подынтегральной функции в (16) содержатся в круге $\{|z| < |\xi| + R_0 + 1\}$. Очевидно, что функция $w_s(\xi, y)$ при всех $s = 1, \dots, m$ и всех $\xi \in \mathbb{R}_n$ является решением уравнения (15).

Вычисляя интеграл в (16) с помощью вычетов, получим: для $s \leq m_1$

$$w_s(\xi, y) = \frac{1}{(s-1)!} y^{s-1} e^{-\lambda_1 y}, \quad \xi \in \mathbb{R}_n, \quad y \in [0, 1],$$

а для $s > m_1$

$$w_s(\xi, y) = \frac{1}{(m_1 - 1)!} \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial z^{m_1-1}} \left(\frac{e^{zy}}{(z + \lambda_2)^{m_2} \dots (z + \lambda_{\kappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} \right) \Big|_{z=-\lambda_1} \\ + \dots + \frac{1}{(s - (m_1 + \dots + m_{\kappa-1}) - 1)!} \frac{\partial^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})-1}}{\partial z^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})-1}} \\ \times \left(\frac{e^{zy}}{(z + \lambda_1)^{m_1} \dots (z + \lambda_{\kappa-1})^{m_{\kappa-1}}} \right) \Big|_{z=-\lambda_{\kappa}}.$$

Следовательно, матрица $C = C(\xi)$, устанавливающая следующую связь между фундаментальной системой Π и системой $\tilde{\Pi}$

$$\tilde{\Pi}^* = C \Pi^*$$

(векторы Π^* и $\tilde{\Pi}^*$ — соответствующие векторы-столбцы для векторов-строк Π и $\tilde{\Pi}$), является треугольной, причем s -й элемент диагонали матрицы C при $s \leq m_1$ равен $1/(s-1)!$, а при $s > m_1$ равен

$$\frac{1}{(s - (m_1 + \dots + m_{\kappa-1}) - 1)! (\lambda_1 - \lambda_{\kappa})^{m_1} \dots (\lambda_{\kappa-1} - \lambda_{\kappa})^{m_{\kappa-1}}} \neq 0.$$

Это означает, что система $\tilde{\Pi} = \{w_1(\xi, y), \dots, w_m(\xi, y)\}$, как и система Π , является фундаментальной системой решений уравнения (15) при всех $\xi \in \mathbb{R}_n$.

Аналогично, система

$$\{v_1(\xi, y), \dots, v_m(\xi, y)\},$$

где

$$v_m(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=|\xi|+R_0+1} \frac{e^{-zy}}{(z + \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_{\kappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} dz, \\ s = 1, \dots, m, \quad \xi \in \mathbb{R}_n, \quad y \in [0, 1],$$

является при всех $\xi \in \mathbb{R}_n$ фундаментальной системой решений уравнения (14), а система

$$\{v_1(\xi, y), \dots, v_m(\xi, y), w_1(\xi, y), \dots, w_m(\xi, y)\}$$

— объединение систем $\{v_s(\xi, y), s = 1, \dots, m\}$ и $\{w_s(\xi, y), s = 1, \dots, m\}$ — является фундаментальной системой решений уравнения (12) при всех $\xi \in \mathbb{R}_n \setminus Z$ или, более грубо, для всех $\xi \in \mathbb{R}_n$, для которых $|\xi| > R_0$. Это означает, что для функции $\tilde{u}(\xi, y)$ — преобразования Фурье исследуемого решения — однозначно найдутся при $|\xi| > R_0$ такие функции $A_1(\xi), \dots, A_m(\xi), B_1(\xi), \dots, B_m(\xi)$, что

$$\tilde{u}(\xi, y) = \sum_{i=1}^m B_i(\xi) v_i(\xi, y) + \sum_{i=1}^m A_i(\xi) w_i(\xi, y), \quad y \in (0, 1), \quad |\xi| > R_0 + 1. \quad (17)$$

Следующие леммы посвящены изучению свойств функций $v_i(\xi, y)$, $w_i(\xi, y)$, $i = 1, \dots, m$, и коэффициентов $B_i(\xi)$ и $A_i(\xi)$, $i = 1, \dots, m$, в представлении (17).

ЛЕММА 1. Для всех $\xi \in \mathbb{R}_n$ функции $w_s(\xi, y)$, $y \in [0, 1]$, удовлетворяют условиям

$$w_1|_{y=0} = 1, \\ w_s|_{y=0} = \dots = \frac{\partial^{s-2} w_s}{\partial y^{s-2}} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^{s-1} w_s}{\partial y^{s-1}} \Big|_{y=0} = 1, \quad s = 2, \dots, m.$$

При каждом s , $1 \leq s \leq m$, равномерно по $y \in [0, 1]$

$$w_s(\xi, y) = \frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \right) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Существует постоянная R_1 , $R_1 \geq R_0 + 1$, такая, что для каждого s , $1 \leq s \leq m$,

$$\frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{2(s-1)!} \leq |w_s(\xi, y)| \leq 2 \frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \quad (19)$$

для всех $y \in [0, 1]$, $|\xi| \geq R_1$.

Соответствующие свойства функций $v_s(\xi, y)$, $s = 1, \dots, m$, устанавливаются в лемме 1'.

ЛЕММА 1'. Для всех $\xi \in \mathbb{R}_n$ функции $v_s(\xi, y)$, $y \in [0, 1]$, $1 \leq s \leq m$, удовлетворяют условиям

$$v_1|_{y=0} = 1, \\ v_s|_{y=0} = \dots = \frac{\partial^{s-2} v_s}{\partial y^{s-2}} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^{s-1} v_s}{\partial y^{s-1}} \Big|_{y=0} = 1, \quad s = 2, \dots, m.$$

При каждом s , $1 \leq s \leq m$, равномерно по $y \in [0, 1]$

$$v_s(\xi, y) = \frac{e^{y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \right) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (18')$$

Существует постоянная R_1 , $R_1 \geq R_0 + 1$, такая, что для каждого s , $1 \leq s \leq m$,

$$\frac{e^{y|\xi|} y^{s-1}}{2(s-1)!} \leq |v_s(\xi, y)| \leq 2 \frac{e^{y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \quad \text{для всех } y \in [0, 1], \quad |\xi| \geq R_1. \quad (19')$$

Леммы 1 и 1' доказываются совершенно одинаково, поэтому остановимся на доказательстве лишь леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Для вычисления значений функций $w_s(\xi, y)$ и их производных по y при $y = 0$ следует воспользоваться очевидными равенствами

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=|\xi|+R_0+1} \frac{z^p dz}{(z+\lambda_1)^{m_1} \dots (z+\lambda_{\kappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq p \leq s-2, \\ 1 & \text{при } p = s-1, \end{cases} \quad (20)$$

из которых немедленно вытекают требуемые соотношения.

Для доказательства асимптотического равенства (18) воспользуемся разложением

$$\lambda_j = \lambda_j(\xi) = |\xi| \sqrt{1 + \frac{z_j}{|\xi|^2}} = |\xi| + \frac{z_j}{2|\xi|} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s (2s-1)!!}{2^{s+1} (s+1)!} \frac{z_j^{s+1}}{|\xi|^{2s+1}}, \quad (21)$$

в котором ряд сходится при $|\xi| > \sqrt{|z_j|}$, $j = 1, \dots, k$. Соотношения (18) при $s \leq m_1$, при которых, как уже отмечалось, $w_s = e^{-\lambda_1(\xi)y} y^{s-1} / (s-1)!$, являются прямыми следствиями (21). Пусть $s > m_1$. Под знаком интеграла в (16) сделаем замену переменной $z = \zeta|\xi|$ (считая, что $|\xi| \geq 1$), а затем, обозначив ζ через $z-1$, получим

$$\begin{aligned} w_s(\xi, y) &= \frac{1}{2\pi i |\xi|^{s-1}} \int_{|\zeta|=1+\frac{R_0+1}{|\xi|}} \frac{e^{y|\xi|\zeta} d\zeta}{\left(\zeta + \frac{\lambda_1}{|\xi|}\right)^{m_1} \dots \left(z + \frac{\lambda_{\kappa}}{|\xi|}\right)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} \\ &= \frac{e^{-y|\xi|}}{2\pi i |\xi|^{s-1}} \int_{|z-1|=1+\frac{R_0+1}{|\xi|}} \frac{e^{y|\xi|z} dz}{\left(z - \left(1 - \frac{\lambda_1}{|\xi|}\right)\right)^{m_1} \dots \left(z - \left(1 - \frac{\lambda_{\kappa}}{|\xi|}\right)\right)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} \\ &= \frac{e^{-y|\xi|}}{2\pi i |\xi|^{s-1}} \int_{|z|=1} \frac{e^{y|\xi|z} dz}{\left(z - \left(1 - \frac{\lambda_1}{|\xi|}\right)\right)^{m_1} \dots \left(z - \left(1 - \frac{\lambda_{\kappa}}{|\xi|}\right)\right)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}}, \end{aligned}$$

при этом считаем $|\xi|$ настолько большим, что все полюсы подынтегральной функции находятся в круге $\{|z| < 1\}$: из (21) вытекает, что при любом p , $p = 1, \dots, k$, $\frac{\lambda_p}{|\xi|} - 1 = \frac{z_p}{2|\xi|^2} + o\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right)$. Поскольку для всех (комплексных) z и любого целого $r \geq 0$

$$e^z - \left(1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^r}{r!}\right) = \frac{1}{r!} \int_0^z (z-\theta)^r e^{\theta} d\theta,$$

где интегрирование производится по отрезку, соединяющему точки 0 и z , то в силу равенств (20) имеем

$$\begin{aligned} w_s(\xi, y) &= \frac{e^{-y|\xi|}}{2\pi i |\xi|^{s-1}} \\ &\times \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{1}{(s-1)!} \int_0^{y|\xi|z} (y|\xi|z - \theta)^{s-1} e^{\theta} d\theta + 1 + \frac{y|\xi|z}{1!} + \dots + \frac{(y|\xi|z)^{s-1}}{(s-1)!}\right) dz}{\left(z - \left(1 - \frac{\lambda_1}{|\xi|}\right)\right)^{m_1} \dots \left(z - \left(1 - \frac{\lambda_{\kappa}}{|\xi|}\right)\right)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} \\ &= \frac{e^{-y|\xi|}}{2\pi i (s-1)! |\xi|^{s-1}} \\ &\times \left\{ \int_{|z|=1} \frac{\int_0^{y|\xi|z} (y|\xi|z - \theta)^{s-1} e^{\theta} d\theta dz}{\left(z - \left(1 - \frac{\lambda_1}{|\xi|}\right)\right)^{m_1} \dots \left(z - \left(1 - \frac{\lambda_{\kappa}}{|\xi|}\right)\right)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} + 2\pi i (y|\xi|)^{s-1} \right\} \\ &= \frac{e^{-y|\xi|}}{2\pi i (s-1)! |\xi|^{s-1}} \\ &\times \left\{ 2\pi i (y|\xi|)^{s-1} + \int_{|z|=1} \frac{(y|\xi|z)^s \int_0^1 (1-t)^{s-1} e^{y|\xi|zt} dt dz}{\left(z - \left(1 - \frac{\lambda_1}{|\xi|}\right)\right)^{m_1} \dots \left(z - \left(1 - \frac{\lambda_{\kappa}}{|\xi|}\right)\right)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \times \left\{ 1 + \frac{y|\xi|}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^s \int_0^1 (1-t)^{s-1} e^{y|\xi|zt} dt dz}{(z - (1 - \frac{\lambda_1}{|\xi|}))^{m_1} \dots (z - (1 - \frac{\lambda_{\varkappa}}{|\xi|}))^{s-(m_1+\dots+m_{\varkappa-1})}} \right\}.$$

Поэтому для доказательства (18) достаточно проверить, что равномерно по $y \in [0, 1]$ и $t \in [0, 1]$ при $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^s e^{yt|\xi|z} dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_{\varkappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\varkappa-1})}} = O\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right), \quad (22)$$

где $\mu_i = \mu_i(\xi) = 1 - \lambda_i(\xi)/|\xi|$, $i = 1, \dots, k$. В силу (21) при $|\xi| \rightarrow \infty$ имеют место соотношения $\mu_i = O(1/|\xi|^2)$ и $\mu_i - \mu_j = \frac{z_i - z_j}{|\xi|^2} + O(1/|\xi|^3)$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$.

Для доказательства (22) вычислим интеграл в (22) с помощью вычетов и проверим, что соотношению (22) удовлетворяет вычет подынтегральной функции в каждом из ее полюсов. Вычет в полюсе μ_1 имеет вид

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{z=\mu_1} \frac{z^s e^{yt|\xi|z}}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_{\varkappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\varkappa-1})}} \\ &= \frac{1}{(m_1 - 1)!} \frac{d^{m_1-1}}{dz^{m_1-1}} \left(\frac{z^s e^{yt|\xi|z}}{(z - \mu_2)^{m_1} \dots (z - \mu_{\varkappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\varkappa-1})}} \right) \Big|_{z=\mu_1} \\ &= \sum_{p+q+r=m_1-1} C_{pqr} \left(\frac{d^p e^{yt|\xi|z}}{dz^p} \right) \left(\frac{d^q z^s}{dz^q} \right) \left(\frac{d^r}{dz^r} \left(\frac{1}{(z - \mu_2)^{m_1} \dots} \right) \right) \Big|_{z=\mu_1}, \end{aligned}$$

где C_{pqr} — соответствующие биномиальные коэффициенты. В силу (21) равномерно по $y \in [0, 1]$ и $t \in [0, 1]$

$$\left. \frac{d^p e^{yt|\xi|z}}{dz^p} \right|_{z=\mu_1} = y^p t^p |\xi|^p e^{yt|\xi|\mu_1} = O(|\xi|^p) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty,$$

а также

$$\left. \frac{d^q z^s}{dz^q} \right|_{z=\mu_1} = O\left(\frac{1}{|\xi|^{2(s-q)}}\right) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Далее, $\frac{\partial^r}{\partial z^r} \frac{1}{(z - \mu_2)^{m_2} \dots (z - \mu_{\varkappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\varkappa-1})}}$ есть линейная комбинация нескольких дробей вида $\frac{1}{(z - \mu_2)^{\alpha_2} \dots (z - \mu_{\varkappa})^{\alpha_{\varkappa}}}$, степени многочленов в знаменателях которых на r единиц больше степени многочлена в знаменателе дроби, которая дифференцируется, т.е.

$$\alpha_2 + \dots + \alpha_{\varkappa} = r + m_2 + \dots + m_{\varkappa-1} + s - (m_1 + \dots + m_{\varkappa-1}) = s - m_1 + r.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - \mu_2)^{\alpha_2} \dots (z - \mu_{\kappa})^{\alpha_{\kappa}}} \Big|_{z=\mu_1} &= \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)^{\alpha_2} \dots (\mu_1 - \mu_{\kappa})^{\alpha_{\kappa}}} \\ &= \frac{|\xi|^{2(\alpha_2 + \dots + \alpha_{\kappa})}}{(z_2 - z_1)^{\alpha_2} \dots (z_{\kappa} - z_1)^{\alpha_{\kappa}}} = O(|\xi|^{2(s-m_1+r)}) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\partial^r}{\partial z^r} \frac{1}{(z - \mu_2)^{m_2} \dots (z - \mu_{\kappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} \Big|_{z=\mu_1} = O(|\xi|^{2(s-m_1+r)}) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Таким образом, равномерно по $y \in [0, 1]$ и $t \in [0, 1]$ при $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{z=\mu_1} \frac{z^s e^{yt|\xi|z}}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_{\kappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} \\ &= O(|\xi|^{p-2s+2q+2s-2m_1+2r}) = O(|\xi|^{2(p+q+r)-p-2m_1}) \\ &= O(|\xi|^{-p-2}) = O(|\xi|^{-2}), \end{aligned}$$

поскольку $p \geq 0$. Аналогично рассматриваются и другие полюсы подынтегральной функции. Таким образом, соотношение (22) установлено, а вместе с ним установлено и равенство (18).

Неравенства (19), конечно, являются простыми следствиями равенства (18). Леммы 1 и 1' доказаны.

Первоначальные свойства коэффициентов $A_i(\xi)$ и $B_i(\xi)$, $i = 1, \dots, m$, в разложении (17) по фундаментальной системе решений преобразования Фурье исследуемого решения уравнения (1) установлены в следующей лемме 2; из нее, в частности, вытекает, что эти коэффициенты являются локально интегрируемыми функциями вне шара достаточно большого радиуса.

ЛЕММА 2. *Существует такое $R_2 > 0$, $R_2 \geq R_1$, что при любом $\varepsilon \in (0, 1/2)$ функции*

$$A_i(\xi) e^{-\varepsilon|\xi|} \in L_2(|\xi| > R_2), \quad i = 1, \dots, m, \quad (23)$$

и функции

$$B_i(\xi) e^{(1-\varepsilon)|\xi|} \in L_2(|\xi| > R_2), \quad i = 1, \dots, m. \quad (24)$$

Для доказательства этой леммы поступим следующим образом. Возьмем произвольные ν и σ , $0 < \sigma < \nu < 1$, и рассмотрим $2m$ чисел $y_1 = \nu - \frac{\sigma}{2m}$, $y_2 = \nu - \frac{2\sigma}{2m}$, $\dots$, $y_k = \nu - \frac{k\sigma}{2m}$, $\dots$, $y_{2m} = \nu - \frac{2m\sigma}{2m} = \nu - \sigma > 0$. Обозначим через $g_p(\xi)$ значение функции $\tilde{u}(\xi, y)$ при $y = y_p$:

$$\tilde{u}(\xi, y_p) = g_p(\xi), \quad p = 1, \dots, 2m;$$

$g_p(\xi) \in L_2(\mathbb{R}_n)$, $p = 1, \dots, 2m$. В силу (17) получим $2m$ равенств, представляющих собой систему $2m$ уравнений относительно $2m$ функций $B_1(\xi), \dots, B_m(\xi)$, $A_1(\xi), \dots, A_m(\xi)$, $|\xi| > R_0 + 1$:

$$\sum_{j=1}^m B_j(\xi) v_j(\xi, y_p) + \sum_{j=1}^m A_j(\xi) w_j(\xi, y_p) = g_p(\xi), \quad |\xi| > R_0 + 1, \quad p = 1, \dots, 2m. \quad (25)$$

Найдем оценки при больших $|\xi|$ определителя $\Delta(\xi)$ (определителя $2m$ -го порядка) этой системы и его миноров $\Delta_{pq}(\xi)$ $(2m-1)$ -го порядка, получающихся из определителя $\Delta(\xi)$ вычеркиванием его p -й строки и q -го столбца; при этом будем пользоваться асимптотическими равенствами из лемм 1 и 1'. Разложим определитель $\Delta(\xi)$ согласно теореме Лапласа по первым m столбцам. Среди всех миноров m -го порядка, расположенных в первых m столбцах определителя $\Delta(\xi)$, максимальным по порядку при $|\xi| \rightarrow \infty$ является минор $\Delta'(\xi)$, занимающий крайнее верхнее положение, и отношение любого другого минора m -го порядка, расположенного в этих столбцах, к $\Delta'(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ есть $O(e^{-\frac{\sigma|\xi|}{2m}})$. Аналогично, среди всех миноров m -го порядка, расположенных в последних m столбцах определителя $\Delta(\xi)$, максимальным по порядку при $|\xi| \rightarrow \infty$ является минор $\Delta''(\xi)$, занимающий крайнее нижнее положение, и отношение любого другого минора m -го порядка, расположенного в этих столбцах, к $\Delta''(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ есть $O(e^{-\frac{\sigma|\xi|}{2m}})$. Следовательно,

$$\Delta(\xi) = \Delta'(\xi)\Delta''(\xi)(1 + O(e^{-\frac{\sigma|\xi|}{2m}})) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Из равенств (18) и (18') вытекает, что

$$\begin{aligned} \Delta'(\xi) &= e^{|\xi|(y_1+\dots+y_m)} \frac{W(y_1, \dots, y_m)}{1! 2! \dots (m-1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)\right) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty, \\ \Delta''(\xi) &= e^{-|\xi|(y_{m+1}+\dots+y_{2m})} \frac{W(y_{m+1}, \dots, y_{2m})}{1! 2! \dots (m-1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)\right) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $W(y_1, \dots, y_m)$ – определитель Вандермонда,

$$\begin{aligned} W(y_1, \dots, y_m) &= \prod_{1 \leq i < j \leq m} (y_i - y_j) = \left(\frac{\sigma}{2m}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} 1! \dots (m-1)!, \\ W(y_{m+1}, \dots, y_{2m}) &= W(y_1, \dots, y_m), \end{aligned}$$

и тем самым

$$\begin{aligned} \Delta(\xi) &= e^{|\xi|(y_1+\dots+y_m-y_{m+1}-\dots-y_{2m})} \left(\frac{\sigma}{2m}\right)^{m(m-1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)\right) \\ &= e^{\frac{\sigma m}{2}|\xi|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)\right) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, существует такое число R_2 , $R_2 \geq R_1$, что

$$|\Delta(\xi)| \geq \frac{1}{2} e^{\frac{\sigma m}{2}|\xi|} \quad \text{для всех } \xi, \quad |\xi| \geq R_2. \quad (26)$$

Оценим миноры $\Delta_{pq}(\xi)$. Пусть сначала $p \in [1, m]$, а q – произвольное, $1 \leq q \leq 2m$. Разлагая определитель $\Delta_{pq}(\xi)$ согласно теореме Лапласа по первым $(m-1)$ -му столбцу и пользуясь приведенными выше соображениями, получим с помощью (18) и (18') при достаточно больших $|\xi|$, $|\xi| \geq R_2$, оценку

$$\begin{aligned} |\Delta_{pq}(\xi)| &\leq C_{pq} e^{|\xi|(y_1+\dots+y_{m-1})-|\xi|(y_{m+1}+\dots+y_{2m})} \\ &= C_{pq} e^{|\xi|((m-1)\nu - \frac{\sigma}{2m} \frac{m(m-1)}{2}) - |\xi|(m\nu - \frac{\sigma}{2m} \frac{m(3m+1)}{2})} \\ &= C_{pq} e^{|\xi|(-\nu + \frac{\sigma}{2}(m+1))}, \quad |\xi| \geq R_2, \end{aligned} \quad (27)$$

где C_{pq} – некоторые положительные постоянные. Если $p \in [m+1, 2m]$, то при любом q , $1 \leq q \leq 2m$, разлагая определитель $\Delta_{pq}(\xi)$ по первым m столбцам, аналогично получим неравенство

$$\begin{aligned} |\Delta_{pq}(\xi)| &\leq C_{pq} e^{|\xi|(y_1+\dots+y_m)-|\xi|(y_{m+2}+\dots+y_{2m})} \\ &= C_{pq} e^{|\xi|(m\nu-\frac{\sigma}{2m}\frac{m(m+1)}{2})-|\xi|((m-1)\nu-\frac{\sigma}{2m}\frac{(m-1)(3m+2)}{2})} \\ &= C_{pq} e^{|\xi|(\nu+\frac{\sigma}{2m}(m^2-m-1))}, \quad |\xi| \geq R_2. \end{aligned} \quad (28)$$

В результате из (25), (26) и (27) получаем для всех p , $1 \leq p \leq m$, оценки

$$\begin{aligned} |B_p(\xi)| &\leq \sum_{q=1}^{2m} |g_q(\xi)| \frac{|\Delta_{pq}(\xi)|}{|\Delta(\xi)|} \\ &\leq 2e^{-|\xi|(\nu-\frac{\sigma}{2})} \sum_{q=1}^{2m} C_{pq} |g_q(\xi)|, \quad |\xi| \geq R_2, \end{aligned} \quad (29)$$

а из (25), (26) и (28) – для всех p , $1 \leq p \leq m$, оценки

$$\begin{aligned} |A_p(\xi)| &\leq \sum_{q=1}^{2m} |g_q(\xi)| \frac{|\Delta_{p+m,q}(\xi)|}{|\Delta(\xi)|} \\ &\leq 2e^{|\xi|(\nu-\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma}{2m})} \sum_{q=1}^{2m} C_{m+p,q} |g_q(\xi)| \\ &\leq 2e^{|\xi|(\nu-\frac{\sigma}{2})} \sum_{q=1}^{2m} C_{p+m,q} |g_q(\xi)|, \quad |\xi| \geq R_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Если в (29) положить $\nu = 1 - \varepsilon/2$, $\sigma = \varepsilon$ при произвольно взятом $\varepsilon \in (0, 1/2)$, то мы получим, что функции $B_p(\xi)e^{|\xi|(1-\varepsilon)} \in L_2(|\xi| > R_2)$ для всех p , $1 \leq p \leq m$; полагая в (30) $\nu = 3\varepsilon/2$, $\sigma = \varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/2)$, получим, что функции $A_p(\xi)e^{-\varepsilon|\xi|} \in L_2(|\xi| > R_2)$ при всех p , $1 \leq p \leq m$ (число R_2 , конечно, от ε не зависит). Лемма 2 доказана.

Обозначим через $\chi_{R_2}(\xi)$ характеристическую функцию шара $\{|\xi| < R_2\}$. Равенство

$$\tilde{u}(\xi, y) = \chi_{R_2}(\xi) \tilde{u}(\xi, y) + (1 - \chi_{R_2}(\xi)) \tilde{u}(\xi, y), \quad \xi \in \mathbb{R}_n, \quad 0 < y < 1,$$

в силу (17) можно переписать ($R_2 \geq R_0 + 1$) в виде

$$\tilde{u}(\xi, y) = \chi_{R_2}(\xi) \tilde{u}(\xi, y) + \sum_{i=1}^m (1 - \chi_{R_2}(\xi)) A_i(\xi) w_i(\xi, y) + (1 - \chi_{R_2}(\xi)) \sum_{i=1}^m B_i(\xi) v_i(\xi, y).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (F^{-1} \tilde{u}(\cdot, y))(x) = (F^{-1} \chi_{R_2}(\cdot) \tilde{u}(\cdot, y))(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m (F^{-1} [(1 - \chi_{R_2}(\cdot)) A_i(\cdot) w_i(\cdot, y)])(x) \\ &\quad + \left(F^{-1} (1 - \chi_{R_2}(\cdot)) \sum_{i=1}^m B_i(\cdot) v_i(\cdot, y) \right)(x), \quad (x, y) \in \Pi. \end{aligned} \quad (31)$$

Функция

$$(F^{-1}\chi_{R_2}(\cdot)\tilde{u}(\cdot, y))(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|\xi| < R_2} e^{i(x, \xi)} \tilde{u}(\xi, y) d\xi, \quad (32)$$

очевидно, является решением уравнения (1) во всем пространстве $\mathbb{R}_{n+1}$ и, в частности, в Π и принадлежит $W_2^{2m}(\Pi)$. Функции

$$\begin{aligned} & (F^{-1}(1 - \chi_{R_2}(\cdot))A_i(\cdot)w_i(\cdot, y))(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|\xi| > R_2} e^{i(x, \xi)} A_i(\xi)w_i(\xi, y) d\xi, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (33)$$

являются решениями уравнения (1) в полупространстве $\{x \in \mathbb{R}_n, y > a\}$ и, в частности, в полосе $\{x \in \mathbb{R}_n, a < y < 1\}$ и принадлежат $W_2^{2m}(x \in \mathbb{R}_n, a < y < 1)$ при любом $a \in (0, 1)$, поскольку для любого такого a производная произвольного порядка $p, p \geq 0$, по переменным (x, y) стоящей под знаком интеграла функции при всех $x \in \mathbb{R}_n$ и всех $y \geq a$ имеет в силу лемм 1 и 2 интегрируемую мажоранту $|g(\xi)|e^{-\frac{a}{2}|\xi|}|\xi|^p$, где $g(\xi)$ – некоторая, конечно, зависящая от a функция из $L_2(|\xi| > R_2)$ (число ε в (23) полагаем равным $a/2$). Функция

$$\begin{aligned} & \left(F^{-1}(1 - \chi_{R_2}(\cdot)) \sum_{i=1}^m B_i(\cdot)v_i(\cdot, y) \right)(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|\xi| > R_2} e^{i(x, \xi)} \sum_{i=1}^m B_i(\xi)v_i(\xi, y) d\xi \end{aligned} \quad (34)$$

является решением уравнения (1) в полупространстве $\{x \in \mathbb{R}_n, y < 1 - a\}$ и, в частности, в полосе $\{x \in \mathbb{R}_n, 0 < y < 1 - a\}$ и принадлежит $W_2^{2m}(x \in \mathbb{R}_n, 0 < y < 1 - a)$ при любом $a \in (0, 1)$, поскольку для любого такого a производная произвольного порядка $p, p \geq 0$, по переменным (x, y) стоящей под знаком интеграла функции при всех $x \in \mathbb{R}_n$ и всех $y \in [0, 1 - a]$ имеет в силу лемм 1' и 2 интегрируемую мажоранту $e^{-\frac{a}{2}|\xi|}|\xi|^p|g(\xi)|$, где $g(\xi)$ – некоторая функция из $L_2(|\xi| > R_2)$ (число ε в (24) полагаем равным $a/2$). Так как функция $u(x, y)$, стоящая в левой части равенства (31), по условию и функции (32) и (33) по только что доказанному являются решениями уравнения (1) в Π и принадлежат $W_2^{2m}(x \in \mathbb{R}_n, a < y < 1)$ при любом $a \in (0, 1)$, то в силу (31) и функция (34) также является решением в Π уравнения (1) и принадлежит $W_2^{2m}(x \in \mathbb{R}_n, 0 < y < 1)$.

Равенство (31) можно переписать в виде

$$u(x, y) = U(x, y) + \sum_{i=1}^m u_i(x, y), \quad (x, y) \in \Pi, \quad (35)$$

где $U(x, y)$ – сумма функций (32) и (34), а $u_i(x, y), i = 1, \dots, m$, – функции из (33). Таким образом, доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Принадлежащее $W_2^{2m}(x \in \mathbb{R}_n, a < y < 1)$ при любом $a \in (0, 1)$ решение $u(x, y)$ уравнения (1) можно представить в виде суммы (35) более простых решений $u_1(x, y), \dots, u_m(x, y)$ и $U(x, y)$ этого уравнения, где $u_i(x, y) \in W_2^{2m}(x \in \mathbb{R}_n, a < y < 1)$, $i = 1, \dots, m$, при любом $a \in (0, 1)$ и

$$\tilde{u}_i(\xi, y) = A_i(\xi)(1 - \chi_{R_2}(\xi))w_i(\xi, y), \quad i = 1, \dots, m, \quad (36)$$

при некотором $R_2 > 0$, а $U(x, y) \in W_2^{2m}(x \in \mathbb{R}_n, 0 < y < 1)$.

Установленное леммой 3 представление (35) исследуемого решения в виде суммы нескольких более простых решений будет играть в дальнейшем центральную роль. Приступим сначала к изучению отдельных слагаемых суммы (35).

ЛЕММА 4. Пусть функция $G(x, y) \in C([0, 1]; L_2(\mathbb{R}_n))$. Тогда

$$\sup_{0 < y < 1} \|P_N G(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty, \quad (37)$$

$$\sup_{0 < y < 1} \|T_h G(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow 0. \quad (38)$$

Из этой леммы, в частности, вытекает, что функция $U(x, y)$ из (35), принадлежащая $C([0, 1], L_2(\mathbb{R}_n))$, удовлетворяет условиям (37) и (38).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего проверим соотношения (37) и (38) для функции $G(x, y)$, не зависящей от y : $G(x, y) \equiv g(x)$. В этом случае

$$\|P_N g\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 = \int_{N < |\xi| < 2N} |\tilde{g}(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty,$$

поскольку $\tilde{g}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}_n)$. Аналогично обстоит дело и со вторым соотношением: в силу неравенства (9)

$$\|T_h g\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)}^2 \leq \int_{\mathbb{R}_n} |\tilde{g}(\xi)|^2 \sin^2 \frac{(h, \xi)}{2} d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow 0,$$

поскольку $\tilde{g}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}_n)$.

Докажем теперь соотношение (37) в общем случае. Если оно места не имеет, то существуют $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $\{N_k, k = 1, 2, \dots\}$ и $\{y_k, k = 1, 2, \dots\}$, $N_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, $y_k \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\|P_{N_k} G(\cdot, y_k)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \geq \varepsilon_0 \quad \text{для всех} \quad k = 1, 2, \dots \quad (39)$$

Последовательность $\{y_k, k = 1, 2, \dots\}$ можно, не умаляя общности, считать сходящейся: $y_k \rightarrow y_0$ при $k \rightarrow \infty$, $y_0 \in [0, 1]$. Поскольку

$$\begin{aligned} \|P_{N_k} G(\cdot, y_k)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} &\leq \|P_{N_k}(G(\cdot, y_k) - G(\cdot, y_0))\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} + \|P_{N_k} G(\cdot, y_0)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \\ &\leq \|G(\cdot, y_k) - G(\cdot, y_0)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} + \|P_{N_k} G(\cdot, y_0)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \end{aligned}$$

и поскольку при достаточно больших k первое слагаемое правой части последнего неравенства в силу того, что $G(x, y) \in C([0, 1]; L_2(\mathbb{R}_n))$, может быть сделано

сколь угодно малым, а второе слагаемое – сколь угодно малым в силу только что доказанного соотношения (37) для функции $g(x) = G(x, y_0)$, то неравенство (39) несостоятельно.

Аналогично доказывается (38). Если (38) не имеет места, то существуют $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $\{h^k \in \mathbb{R}_n, k = 1, 2, \dots\}$, $\{y^k, k = 1, 2, \dots\}$, $|h^k| \rightarrow 0$, $y^k \rightarrow y_0, k \rightarrow \infty$, такие, что

$$\|T_{h^k}G(\cdot, y^k)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \geq \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

но этого быть не может, поскольку в силу (8)

$$\begin{aligned} \|T_{h^k}G(\cdot, y^k)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} &\leq \|T_{h^k}(G(\cdot, y^k) - G(\cdot, y_0))\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \\ &\quad + \|T_{h^k}G(\cdot, y_0)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \leq \|G(\cdot, y^k) - G(\cdot, y_0)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \\ &\quad + \|T_{h^k}G(\cdot, y_0)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим слагаемое $u_1(x, y)$ в сумме (35).

ЛЕММА 5. Если $u_1(x, y)$ из (35) L_2 -ограниченная функция, то

- 1) существует ее L_2 -предел при $y \rightarrow +0$,
- 2) $\sup_{0 < y < 1} \|P_N u_1(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$,
- 3) $\sup_{0 < y < 1} \|T_h u_1(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$.

В силу (36) и (19) для всех $y \in [0, 1]$ имеет место ($R_2 \geq R_1$) неравенство

$$\begin{aligned} \|u_1(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 &= \int_{|\xi| > R_2} |A_1(\xi)|^2 |w_1(\xi, y)|^2 d\xi \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{|\xi| > R_2} |A_1(\xi)|^2 e^{-2y|\xi|} d\xi \geq \frac{1}{2} \int_{N > |\xi| > R_2} |A_1(\xi)|^2 e^{-2y|\xi|} d\xi \end{aligned}$$

при любом $N > R_2$, т.е. для любого $y \in [0, 1]$ и любого $N > R_2$

$$\frac{1}{2} \int_{R_2 < |\xi| < N} |A_1(\xi)|^2 e^{-2y|\xi|} d\xi \leq M^2,$$

где $M = \sup_{0 < y < 1} \|u_1(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} < \infty$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $y \rightarrow +0$, получим, что для любого $N > R_2$

$$\int_{R_2 < |\xi| < N} |A_1(\xi)|^2 d\xi \leq 2M^2.$$

Это означает, что $A_1(\xi) \in L_2(|\xi| > R_2)$. Поскольку функция $w_1(\xi, y)$ непрерывна по $y \in [0, 1]$ при всех $\xi, |\xi| > R_2$, и ограничена (ср. (19)), то на основании теоремы Лебега

$$\|u_1(\cdot, y') - u_1(\cdot, y'')\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 = \int_{|\xi| > R_2} |A_1(\xi)|^2 |w_1(\xi, y') - w_1(\xi, y'')|^2 d\xi \rightarrow 0$$

при $y' - y'' \rightarrow 0$, т.е. $u_1(x, y) \in C([0, 1]; L_2(\mathbb{R}_n))$. Утверждение 1) леммы 5 доказано. Утверждения 2) и 3) этой леммы теперь вытекают из предыдущей леммы 4. Лемма 5 доказана.

Прежде чем приступить к изучению оставшихся слагаемых суммы в (35), докажем одно элементарное утверждение, которым в дальнейшем будем неоднократно пользоваться.

ЛЕММА 6. Пусть $f(x) \in L_{1\text{loc}}(\mathbb{R}_n)$ и $f(x) \geq 0$ п.в. в $\mathbb{R}_n$. Если

$$\sup_{N>0} \int_{N<|x|<2N} f(x) dx < \infty,$$

то

$$\sup_{N>0} \frac{1}{N} \int_{|x|<N} |x| f(x) dx < \infty$$

и при любом $\theta > 0$

$$\frac{f(x)}{(1+|x|^2)^\theta} \in L_1(\mathbb{R}_n).$$

Если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{N<|x|<2N} f(x) dx = 0,$$

то и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{|x|<N} |x| f(x) dx = 0.$$

Ясно, что утверждения леммы будут доказаны, если для функции одной переменной

$$\alpha(r) = \int_{|x|=r} f(x) dS_x, \quad r > 0,$$

принадлежащей при любом $R > 0$ пространству $L_1(0, R)$, показать, что из неравенства

$$\sup_{N>0} \int_N^{2N} \alpha(r) dr < \infty \tag{40}$$

вытекает неравенство

$$\sup_{N>0} \frac{1}{N} \int_0^N r \alpha(r) dr < \infty \tag{41}$$

и принадлежность при любом $\theta > 0$ функции $\alpha(r)/(1+r^2)^\theta$ пространству $L_1(0, \infty)$, а из условия

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_N^{2N} \alpha(r) dr = 0 \tag{40'}$$

вытекает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N r \alpha(r) dr = 0. \tag{41'}$$

Рассмотрим при $N \geq 0$ неотрицательную функцию

$$F(N) = \int_0^N r \alpha(r) dr, \quad N \geq 0,$$

и определим для любого целого $m \geq 1$ функцию

$$G(m) = \int_{2^{m-1}}^{2^m} r\alpha(r) dr, \quad m \geq 1.$$

Из (40) вытекает, что

$$G(m) \leq 2^m \int_{2^{m-1}}^{2^m} \alpha(r) dr \leq M \cdot 2^m \quad \text{для любого } m \geq 1,$$

где $M = \sup_{N > 0} \int_N^{2N} \alpha(r) dr$. Если же имеет место (40'), то по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $m_0 > 0$, что

$$G(m) \leq 2^m \varepsilon \quad \text{для всех } m \geq m_0.$$

Для произвольного $N > 1$ найдем целое $m \geq 1$ такое, что $2^{m-1} < N \leq 2^m$ ($m = [\ln N / \ln 2] + 1$); из (40) имеем неравенство

$$\begin{aligned} F(N) &= \left(\int_0^1 + \int_1^2 + \dots + \int_{2^{m-1}}^{2^m} \right) (r\alpha(r)) dr \leq \left(\int_0^1 + \dots + \int_{2^{m-1}}^{2^m} \right) (r\alpha(r)) dr \\ &\leq \int_0^1 r\alpha(r) dr + 2M + 2^2 M + \dots + 2^m M = C_0 + (2 + \dots + 2^m)M \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{F(N)}{N} \leq \frac{C_0 + M(2 + \dots + 2^m)}{2^{m-1}} \leq \frac{C_0}{2^{m-1}} + 4M,$$

и тем самым имеет место (41). Если же выполняется (40'), то для $N > 2^{m_0+1}$ ($m = [\ln N / \ln 2] + 1 > m_0 + 1$) имеет место неравенство

$$F(N) \leq \left(\int_0^{2^{m_0+1}} + \dots + \int_{2^{m-1}}^{2^m} \right) (r\alpha(r)) dr \leq C_1 + (2^{m_0+2} + \dots + 2^m)\varepsilon,$$

откуда

$$\frac{F(N)}{N} \leq \frac{C_1}{N} + (2 + 1 + \dots + 2^{m_0-m+3})\varepsilon \leq \frac{C_1}{N} + 4\varepsilon,$$

и тем самым $F(N)/N \leq 5\varepsilon$ для достаточно больших N , т.е. выполняется (41).

Покажем, что из (40) вытекает принадлежность при любом $\theta > 0$ функции $\alpha(r)/(1+r^2)^\theta$ пространству $L_1(0, \infty)$. Действительно, для любого $N > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^N \frac{\alpha(r)}{(1+r^2)^\theta} dr &= \int_0^N \frac{1}{r(1+r^2)^\theta} d \left(\int_0^r \rho\alpha(\rho) d\rho \right) \\ &= \frac{1}{(1+N^2)^\theta} \frac{1}{N} \int_0^N \rho\alpha(\rho) d\rho + \int_0^N \left(\frac{1}{r} \int_0^r \rho\alpha(\rho) d\rho \right) \left(\frac{1+(2\theta+1)r^2}{r(1+r^2)^{\theta+1}} \right) dr \\ &\leq \sup_{N>0} \left(\frac{1}{N} \int_0^N \rho\alpha(\rho) d\rho \right) \left[\frac{1}{(1+N^2)^\theta} + (2\theta+1) \int_0^N \frac{dr}{r(1+r^2)^\theta} \right] \leq \text{const} \end{aligned}$$

в силу (41). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь слагаемые $u_s(x, y)$, $s = 2, \dots, m$, суммы в (35).

ЛЕММА 7. Пусть целое $s \in [2, m]$.

- 1) Для L_2 -ограниченности функции $u_s(x, y)$ из (35) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sup_{N>0} \int_{N<|\xi|<2N} \frac{|A_s(\xi)|^2}{(1+|\xi|^2)^{s-1}} d\xi < \infty. \quad (42)$$

- 2) Для существования L_2 -предела при $y \rightarrow 0$ функции $u_s(x, y)$ (этот предел непременно нулевой) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{N<|\xi|<2N} \frac{|A_s(\xi)|^2}{(1+|\xi|^2)^{s-1}} d\xi = 0. \quad (42')$$

Прежде всего проверим, что если существует L_2 -предел $f(x)$ функции $u_s(x, y)$ при $y \rightarrow 0$, то $f(x) = 0$. Действительно, для любой функции $g(x)$, преобразование Фурье $\tilde{g}(\xi)$ которой является финитной функцией, имеет место (см. (36) и лемму 1) соотношение

$$(u_s(\cdot, y), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{R}_n)} = (A_s(\cdot)w_s(\cdot, y), \tilde{g}(\cdot))_{L_2(|\xi|>R_2)} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow 0.$$

Это означает, что $(f(\cdot), g(\cdot))_{L_2(\mathbb{R}_n)} = 0$, откуда в силу плотности в $L_2(\mathbb{R}_n)$ рассматриваемого множества функций $g(x)$ имеем $f = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В точности так же доказывается и следующее утверждение, которое нам понадобится при доказательстве леммы 9: только нулевая функция может быть L_2 -пределом функции $u_2(x, y) + \dots + u_m(x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. *Необходимость.* Пусть при доказательстве необходимости в первом утверждении леммы

$$\|u_s(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 = \|A_s(\cdot)w_s(\cdot, y)\|_{L_2(|\xi|>R_2)}^2 \leq M \text{ для всех } y \in (0, 1), \quad (43)$$

где M — некоторая постоянная, и при любом $\varepsilon > 0$ имеется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\|u_s(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 = \|A_s(\cdot)w_s(\cdot, y)\|_{L_2(|\xi|>R_2)}^2 \leq \varepsilon \text{ для всех } y \in (0, \delta) \quad (43')$$

в случае доказательства необходимости во втором утверждении. Докажем, что выполняются соотношения (42) и (42') соответственно.

В силу неравенства (19) леммы 1 для любого $N \geq R_2$ из (43) вытекает справедливое при всех $y \in (0, 1)$ неравенство

$$\begin{aligned} M &\geq \int_{|\xi|>R_2} |A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2 d\xi \geq \int_{N<|\xi|<2N} |A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2 d\xi \\ &\geq \frac{1}{(2(s-1)!)^2} \int_{N<|\xi|<2N} |A_s(\xi)|^2 y^{2(s-1)} e^{-2y|\xi|} d\xi; \end{aligned}$$

из этого неравенства при $y = 1/N$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{1}{(2(s-1)!)^2} \int_{N < |\xi| < 2N} |A_s(\xi)|^2 \frac{1}{N^{2(s-1)}} e^{-2\frac{|\xi|}{N}} d\xi \\ &\geq \frac{1}{(2(s-1)!e^2)^2} \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_s(\xi)|^2}{(1+|\xi|^2)^{s-1}} d\xi, \end{aligned}$$

из которого следует (42).

Если имеет место (43'), то приведенная выше выкладка (точка $y = 1/N$ при всех достаточно больших N , $N > 1/\delta$, содержится в $(0, \delta)$) дает

$$\varepsilon \geq \frac{1}{(2(s-1)!e^2)^2} \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_s(\xi)|^2}{(1+|\xi|^2)^{s-1}} d\xi \quad \text{при всех } N > \frac{1}{\delta},$$

т.е. имеет место (42').

Достаточность. Пусть выполнено условие (42) или условие (42'). Покажем, что функция

$$\|u_s(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 = \|A_s(\cdot)w_s(\cdot, y)\|_{L_2(|\xi| > R_2)}^2, \quad y \in (0, 1),$$

ограничена или соответственно стремится к нулю при $y \rightarrow 0$. Так как функция $w_s(\xi, y)$, $s = 1, \dots, m$, зависит лишь от $|\xi|$ и y (см. (13) и (16)), т.е. $w_s(\xi, y) = w_s(|\xi|, y)$, $s = 1, \dots, m$, то, как и в доказательстве леммы 6, удобно ввести в рассмотрение функцию $\alpha_s(r)$, $r \geq 0$, $s = 1, \dots, m$, равную нулю при $r < R_2$ и равную

$$\int_{|\xi|=r} |A_s(\xi)|^2 dS \quad \text{при } r > R_2.$$

Очевидно, $\alpha_s(r) \in L_1(0, R)$ при любом $R > 0$. В терминах функции $\alpha_s(r)$, $2 \leq s \leq m$, из условия

$$\sup_{N > 0} \int_N^{2N} \frac{\alpha_s(r)}{(1+r^2)^{s-1}} dr < \infty \quad (44)$$

нам нужно получить, что

$$\sup_{0 < y < 1} \int_0^\infty \alpha_s(r) |w_s(r, y)|^2 dr < \infty, \quad (45)$$

а из условия

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_N^{2N} \frac{\alpha_s(r)}{(1+r^2)^{s-1}} dr = 0 \quad (44')$$

— получить, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^\infty \alpha_s(r) |w_s(r, y)|^2 dr = 0. \quad (45')$$

В силу леммы 1

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \alpha_s(r) |w_s(r, y)|^2 dr &\leq \left(\frac{2}{(s-1)!} \right)^2 y^{2(s-1)} \int_{R_2}^\infty \alpha_s(r) e^{-2ry} dr \\ &\leq \left(\frac{2}{(s-1)!} \right)^2 y^{2(s-1)} \int_1^\infty \alpha_s(r) e^{-2ry} dr \end{aligned} \quad (46)$$

(считаем, что $R_2 \geq 1$). Интеграл, стоящий в правой части (46), преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
y^{2(s-1)} \int_1^\infty \alpha_s(r) e^{-2ry} dr &= y^{2(s-1)} \int_1^\infty e^{-2ry} \frac{r \alpha_s(r)}{(1+r^2)^{s-1}} \frac{(1+r^2)^{s-1}}{r} dr \\
&= y^{2(s-1)} \int_1^\infty e^{-2ry} \frac{(1+r^2)^{s-1}}{r} d \left(\int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} \right) \\
&= -y^{2(s-1)} \int_1^\infty \left(\frac{1}{r} e^{-2ry} (1+r^2)^{s-1} \right)' \left(\int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} \right) dr \\
&= \int_1^\infty \left(\frac{1}{r} \int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} \right) \psi(r, y) dr,
\end{aligned} \tag{47}$$

где

$$\psi(r, y) = -y^{2(s-1)} r \left(e^{-2ry} \frac{(1+r^2)^{s-1}}{r} \right)'. \tag{48}$$

Граничные члены в проведенном выше интегрировании по частям отсутствуют, поскольку, очевидно,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{r} e^{-2ry} (1+r^2)^{s-1} \int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} = 0$$

и в силу леммы 6

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} e^{-2ry} (1+r^2)^{s-1} \int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned}
|\psi(r, y)| &= ry^{2(s-1)} \left| -\frac{2y}{r} (1+r^2)^{s-1} e^{-2ry} - e^{-2ry} \frac{(1+r^2)^{s-1}}{r^2} \right. \\
&\quad \left. + 2e^{-2ry} (s-1)(1+r^2)^{s-2} \right| \\
&\leq e^{-2ry} \left(2y^{2s-1} (1+r^2)^{s-1} + \frac{(1+r^2)^{s-1}}{r} y^{2(s-1)} \right. \\
&\quad \left. + 2(s-1)ry^{2(s-1)} (1+r^2)^{s-2} \right),
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty |\psi(r, y)| dr &\leq \int_1^\infty (2^s y^{2s-1} r^{2(s-1)} + 2^{s-1} r^{2s-3} y^{2(s-1)} \\
&\quad + 2^{s-1} (s-1) y^{2(s-1)} r^{2s-3}) e^{-2ry} dr \\
&\leq \int_0^\infty (2^s \rho^{2s-2} + s 2^{s-1} \rho^{2s-3}) e^{-2\rho} d\rho = C_0
\end{aligned}$$

для всех $y \in (0, 1)$ (напомним, что $s \geq 2$). Поэтому в продолжение (47) имеем

$$\begin{aligned}
y^{2(s-1)} \int_1^\infty \alpha_s(r) e^{-2ry} dy &\leq \int_1^\infty \left(\frac{1}{r} \int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} \right) |\psi(r, y)| dr \\
&\leq \sup_{r > 1} \left(\frac{1}{r} \int_1^\infty \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} \right) C_0
\end{aligned}$$

для всех $y \in (0, 1)$, откуда в силу леммы 6 следует (45).

Если же речь идет о втором утверждении леммы, то правую часть в (46) оценим следующим образом: из (44') в силу леммы 6 по любому $\varepsilon > 0$ найдем $N' > 1$ такое, что

$$\frac{1}{N} \int_0^N \frac{r \alpha_s(r) dr}{(1+r^2)^{s-1}} < \varepsilon \quad \text{для всех } N \geq N'.$$

Тогда (см. (47))

$$\begin{aligned} & \left| \int_1^\infty \left(\frac{1}{r} \int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} \right) \psi(r, y) dr \right| \leq \left| \int_1^{N'} \left(\frac{1}{r} \int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} \right) \psi(r, y) dr \right| \\ & \quad + \left| \int_{N'}^\infty \left(\frac{1}{r} \int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} \right) \psi(r, y) dr \right| \\ & \leq \left| \int_1^{N'} \left| \frac{1}{r} \int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} \right| |\psi(r, y)| dr \right| + \varepsilon \int_{N'}^\infty |\psi(r, y)| dr \\ & \leq \int_1^{N'} \left| \frac{1}{r} \int_1^r \frac{\rho \alpha_s(\rho) d\rho}{(1+\rho^2)^{s-1}} \right| |\psi(r, y)| dr + C_0 \varepsilon \leq \varepsilon (C_0 + 1), \end{aligned}$$

поскольку первое слагаемое в силу (48) ($\lim_{y \rightarrow 0} |\psi(r, y)| = 0$) может быть сделано меньшим ε . Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $2 \leq s \leq m$. Следующие три утверждения эквивалентны.

- 1) $\|u_s(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, y \rightarrow 0$.
- 2) $\sup_{0 < y < 1} \|P_N u_s(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$.
- 3) $\sup_{0 < y < 1} \|T_h u_s(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$.

То, что из утверждения 1) вытекают утверждения 2) и 3), есть прямое следствие леммы 4; поэтому для доказательства леммы 8 нам следует проверить обратное: что из 2) вытекает 1) и что из 3) вытекает 1). Утверждения 1), 2) и 3) в терминах преобразования Фурье имеют соответственно вид (см. (36)):

$$\|A_s(\cdot) w_s(\cdot, y)\|_{L_2(|\xi| > R_2)} \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \quad (49)$$

$$\sup_{0 < y < 1} \|\zeta_{N, 2N}(\cdot) A_s(\cdot) w_s(\cdot, y)\|_{L_2(|\xi| > R_2)} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \quad (50)$$

$$\sup_{0 < y < 1} \left\| \frac{A_s(\cdot) w_s(\cdot, y) \sin^2 \frac{(h, \cdot)}{2}}{(1 + |\cdot|^2)^{1/2} |h|} \right\|_{L_2(|\xi| > R_2)} \rightarrow 0, h \rightarrow 0, \quad (51)$$

где $\zeta_{N, 2N}(\xi)$ – характеристическая функция шарового слоя $\{N < |\xi| < 2N\}$.

Заметим, что соотношение (49) в силу предыдущей леммы эквивалентно соотношению

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_s(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{s-1}} d\xi = 0. \quad (49')$$

Докажем сначала, что из (50) вытекает (49'), что эквивалентно соответствию 2) $\rightarrow$ 1). Из (50) в силу леммы 1 имеем, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется N_0 (будем считать $N_0 > \max(1; R_2)$), где R_2 – число из леммы 3) такое, что

$$\int_{N < |\xi| < 2N} |A_s(\xi)|^2 y^{2(s-1)} e^{-2|\xi|y} d\xi \leq \varepsilon \quad \text{для всех } N \geq N_0 \text{ и } y \in (0, 1).$$

Подставляя в это неравенство $y = 1/N$, получим

$$\begin{aligned}\varepsilon &\geq \int_{N < |\xi| < 2N} |A_s(\xi)|^2 \frac{1}{N^{2(s-1)}} e^{-\frac{2|\xi|}{N}} d\xi \\ &\geq e^{-4} \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_s(\xi)|^2 2^{2(s-1)}}{|\xi|^{2(s-1)}} d\xi \\ &\geq 2^{2(s-1)} e^{-4} \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_s(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{s-1}} d\xi,\end{aligned}$$

откуда вытекает (49').

Покажем теперь, что из (51) также вытекает 1). Пусть при произвольно взятом $\varepsilon > 0$ число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таково, что

$$\varepsilon \geq \int_{\mathbb{R}_n} \frac{|A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2}{(1 + |\xi|^2) |h|^2} \sin^4 \frac{(\xi, h)}{2} d\xi \quad \text{для всех } h, \quad |h| \leq \delta. \quad (52)$$

Рассмотрим сначала случай $n > 1$. Полагая $h = |h|h^0$, $\xi = |\xi|\xi^0$, где $h^0 = h/|h|$ при $|h| > 0$, $\xi^0 = \xi/|\xi|$ при $|\xi| > 0$, проинтегрируем неравенство (52) по единичной сфере $\{|h^0| = 1\}$ (считая $|h| \leq \delta$):

$$\varepsilon \omega_n \geq \int_{\mathbb{R}_n} \frac{|A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2}{(1 + |\xi|^2) |h|^2} \int_{|h^0|=1} \sin^4 \frac{|\xi| |h| (\xi^0, h^0)}{2} dS_{h^0} d\xi, \quad (53)$$

где ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}_n$. Поскольку при

$$\begin{aligned}h_1^0 &= \cos \varphi_1, \\ h_2^0 &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\dots\dots\dots \\ h_{n-1}^0 &= \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ h_n^0 &= \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1},\end{aligned}$$

$0 < \varphi_1 < \pi, \dots, 0 < \varphi_{n-2} < \pi, 0 < \varphi_{n-1} < 2\pi$, где φ_1 — угол между векторами h^0 и ξ^0 (северный полюс единичной сферы $\{|h^0| = 1\}$ помещен в точку ξ^0), то

$$\begin{aligned}\int_{|h^0|=1} \sin^4 \frac{|h| |\xi| (h^0, \xi^0)}{2} dS_{h^0} &= \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \\ &\times \cdots \times \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^4 \frac{|h| |\xi| \cos \varphi_1}{2} d\varphi_1 \\ &= \omega'_n \int_0^1 (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}} \sin^4 \frac{|\xi| |h| u}{2} du,\end{aligned}$$

где

$$\omega'_n = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \cdots \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \neq 0$$

при $n > 2$, а при $n = 2$ $\omega'_2 = 4$. Следовательно, из (53) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\omega_n}{\omega'_n} &\geq \int_{\mathbb{R}_n} d\xi \int_0^1 \frac{|A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2}{(1 + |\xi|^2)|h|^2} \sin^4 \frac{|\xi||h|u}{2} (1 - u^2)^{(n-3)/2} du \\ &\geq \int_{1 < |\xi||h| < 2} d\xi \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{|A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2}{(1 + |\xi|^2)|h|^2} \sin^4 \frac{|\xi||h|u}{2} (1 - u^2)^{(n-3)/2} du. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{|\xi||h|u}{2} \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ при $|\xi||h| \in [1, 2]$ и $u \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, то

$$\begin{aligned} \sin^4 \frac{|\xi||h|u}{2} &= \left(\frac{\sin \frac{|\xi||h|u}{2}}{\frac{|\xi||h|u}{2}} \right)^2 \frac{|\xi|^2 |h|^2 u^2}{4} \sin^2 \frac{|\xi||h|u}{2} \\ &\geq \left(\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \right)^2 \frac{|\xi|^2 |h|^2 u^2}{4} \left(\sin \frac{\pi}{12} \right)^2 \geq 2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\pi} \right)^2 |\xi|^2 |h|^2 u^2. \end{aligned}$$

Поэтому при $|h| \leq \delta$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\omega_n}{\omega'_n} &\geq 2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\pi} \right)^2 \int_{\frac{1}{|h|} < |\xi| < \frac{2}{|h|}} \frac{|\xi|^2 |A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2}{1 + |\xi|^2} d\xi \\ &\quad \times \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} u^2 (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}} du \geq \omega''_n \int_{\frac{1}{|h|} < |\xi| < \frac{2}{|h|}} |A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\omega''_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} u^2 (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}} du \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{12}}{\pi^2} > 0$$

(считаем, что $|h| \leq 1$). Это означает, что для всех $y \in (0, 1)$

$$\int_{N < |\xi| < 2N} |A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2 d\xi \leq \varepsilon \frac{\omega_n}{\omega'_n \omega''_n} = \text{const} \cdot \varepsilon$$

при $N = 1/|h| \geq 1/\delta(\varepsilon)$, т.е. выполняется соотношение (50), из которого мы только что выше вывели (49).

В случае $n = 1$ доказательство несколько короче. В неравенстве (52) в этом случае число h можно считать в силу четности по h подынтегральной функции положительным: $h > 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \int_{\mathbb{R}_1} \frac{|A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2}{(1 + \xi^2)h^2} \sin^4 \frac{\xi h}{2} d\xi \\ &\geq (\sin 1)^2 \left(\sin \frac{1}{2} \right)^2 \int_{\frac{1}{2} < \frac{\xi h}{2} < 1} \frac{|A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2}{(1 + \xi^2)h^2} \frac{\xi^2 h^2}{4} d\xi \\ &\geq \frac{(\sin 1 \cdot \sin \frac{1}{2})^2}{8} \int_{\frac{1}{h} < \xi < \frac{2}{h}} |A_s(\xi)|^2 |w_s(\xi, y)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

если $h \leq 1$. Поэтому, как и в общем случае, имеет место (50) и тем самым (49). Лемма доказана.

Представление решения уравнения (1) в виде суммы (35) обладает следующим важным свойством. Входящие в (35) слагаемые в определенном смысле независимы: они ведут себя около границы настолько различным образом, что не могут компенсировать друг друга. Эта независимость слагаемых в (35) выражается следующими леммами.

ЛЕММА 9.

- 1) Решение $u(x, y)$ уравнения (1) L_2 -ограничено тогда и только тогда, когда L_2 -ограничено каждое слагаемое суммы (35).
- 2) Решение $u(x, y)$ уравнения (1) имеет L_2 -предел при $y \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда L_2 -пределы при $y \rightarrow 0$ существуют у каждого слагаемого суммы (35).

Естественно, что каждое из этих утверждений нужно доказывать только в одну сторону: из ограниченности или существования предела решения $u(x, y)$ следует получить ограниченность или соответственно существование предела каждого слагаемого в (35).

Пусть $u(x, y)$ L_2 -ограничено. Поскольку функция $U(x, y)$ L_2 -ограничена, то L_2 -ограничена и сумма $u_1(x, y) + \dots + u_m(x, y)$, что эквивалентно в силу (36) неравенству

$$\left\| \sum_{i=1}^m A_i(\cdot) w_i(\cdot, y) \right\|_{L_2(|\xi| > R_2)}^2 \leq M, \quad y \in (0, 1), \quad (54)$$

при некоторой постоянной $M > 0$. Из этого неравенства немедленно вытекает нужное неравенство для слагаемого $u_1(x, y)$ в сумме (35):

$$\|u_1(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 = \|A_1(\cdot) w_1(\cdot, y)\|_{L_2(|\xi| > R_2)}^2 \leq M_1, \quad y \in (0, 1), \quad (55_1)$$

с некоторой постоянной $M_1 > 0$. Для получения (55₁) в неравенстве

$$\left\| \sum_{i=1}^m A_i(\cdot) w_i(\cdot, y) \right\|_{L_2(R_2 < |\xi| < N)}^2 \leq M, \quad y \in (0, 1),$$

которое для любого $N > R_2$ вытекает из (54), перейдем к пределу при $y \rightarrow 0$. В результате получим, что при любом $N > R_2$ справедливо неравенство $\|A_1(\cdot)\|_{L_2(R_2 < |\xi| < N)}^2 \leq M$, т.е. $A_1(\xi) \in L_2(|\xi| > R_2)$. Неравенство (55₁) после этого следует из непрерывности и ограниченности (см. лемму 1) функции $w_1(\xi, y)$.

Из (54) и (55₁) имеем

$$\left\| \sum_{i=2}^m A_i(\cdot) w_i(\cdot, y) \right\|_{L_2(|\xi| > R_2)}^2 \leq M', \quad y \in (0, 1), \quad (56)$$

где $M' = 2(M + M_1)$.

Покажем теперь, что из (56) вытекает ограниченность каждого из оставшихся слагаемых в (35):

$$\|A_i(\cdot) w_i(\cdot, y)\|_{L_2(|\xi| > R_2)}^2 \leq M_i, \quad y \in (0, 1), \quad i = 2, \dots, m, \quad (55_i)$$

где $M_i > 0$ — некоторые постоянные, $i = 2, \dots, m$.

Для этого прежде всего отметим, что из (56) следует справедливость при любом $N > R_2$ неравенства

$$\int_{N < |\xi| < 2N} \left| \sum_{i=2}^m A_i(\xi) w_i(\xi, y) \right|^2 d\xi \leq M', \quad y \in (0, 1); \quad (57)$$

разделим это неравенство на y^2 , проинтегрируем полученное неравенство по y от $y \in (0, 1)$ до 1

$$\int_y^1 d\eta \int_{N < |\xi| < 2N} \left| \sum_{i=2}^m A_i(\xi) \frac{w_i(\xi, \eta)}{\eta} \right|^2 d\xi \leq M' \int_y^1 \frac{d\eta}{\eta^2} \leq \frac{M'}{y}, \quad y \in (0, 1),$$

и положим в последнем неравенстве $y = 1/N$ (считаем, что $R_2 \geq 1$). В результате получим

$$\begin{aligned} M'N &\geq \int_{N < |\xi| < 2N} \int_{1/N}^1 \left| \sum_{i=2}^m A_i(\xi) \frac{w_i(\xi, \eta)}{\eta} \right|^2 d\eta d\xi \\ &= \int_{N < |\xi| < 2N} \int_{1/N}^1 \left| \sum_{i=2}^m B_i(\xi) \frac{w_i(\xi, \eta)}{\eta} |\xi|^{i-1} \right|^2 d\eta d\xi, \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$B_i(\xi) = \frac{A_i(\xi)}{|\xi|^{i-1}}, \quad |\xi| \neq 0, \quad i = 2, \dots, m.$$

Покажем, что квадратичная форма

$$\int_{1/N}^1 \left| \sum_{i=2}^m B_i \frac{w_i(\xi, \eta)}{\sqrt{N}\eta} |\xi|^{i-1} \right|^2 d\eta$$

в $(m-1)$ -мерном комплексном пространстве векторов $B = (B_2, \dots, B_m)$ при всех ξ , $N < |\xi| < 2N$, и всех $N \geq R_2$ положительно определена, т.е. число

$$\gamma_0 = \inf_{\mathfrak{N}} \int_{1/N}^1 \left| \sum_{i=2}^m B_i \frac{w_i(\xi, \eta)}{\eta\sqrt{N}} |\xi|^{i-1} \right|^2 d\eta > 0, \quad (59)$$

где $\mathfrak{N} = \{N \geq R_2, \|B\| = (|B_2|^2 + \dots + |B_m|^2)^{1/2} = 1, N \leq |\xi| \leq 2N\}$ — множество $(m+n)$ -мерного пространства переменных $N, B_2, \dots, B_m, \xi_1, \dots, \xi_n$.

Очевидно, что $\gamma_0 \geq 0$. Доказательство неравенства (59) проведем от противного: предположим, что $\gamma_0 = 0$. Тогда существуют такие последовательности $\{N_k, k = 1, 2, \dots\}$, $\{B^k = \{B_2^k, \dots, B_m^k\}, k = 1, 2, \dots\}$, $\{\xi^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k), k = 1, 2, \dots\}$, что

$$\begin{aligned} &\int_{1/N_k}^1 \left| \sum_{i=2}^m B_i^k \frac{w_i(\xi^k, \eta)}{\sqrt{N_k}\eta} |\xi^k|^{i-1} \right|^2 d\eta \\ &= \int_{|\xi^k|/N_k}^{|\xi^k|} \left| \sum_{i=2}^m B_i^k \frac{w_i(\xi^k, \zeta/|\xi^k|)}{\sqrt{N_k} \frac{\zeta}{|\xi^k|}} |\xi^k|^{i-1} \right|^2 \frac{d\zeta}{|\xi^k|} \\ &= \frac{|\xi^k|}{N_k} \int_{|\xi^k|/N_k}^{|\xi^k|} \left| \sum_{i=2}^m B_i^k \frac{w_i(\xi^k, \zeta/|\xi^k|)}{\zeta} |\xi^k|^{i-1} \right|^2 d\zeta \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (60)$$

При этом, не умаляя общности, можно считать последовательности $\{B^k, k = 1, 2, \dots\}$ и $\{|\xi^k|/N_k, k = 1, 2, \dots\}$ сходящимися, т.е. считать, что существуют такой вектор $B^0 = (B_2^0, \dots, B_m^0)$, $\|B^0\| = 1$, и такое число $\alpha \in [1, 2]$, что $B^k \rightarrow B^0$ и

$|\xi^k|/N_k \rightarrow \alpha$ при $k \rightarrow \infty$, а последовательность $\{N_k, k = 1, 2, \dots\}$ или а) сходится к некоторому числу β : $N_k \rightarrow \beta \geq R_2$ при $k \rightarrow \infty$, или б) $N_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$; в случае а) можно дополнительно считать, что вектор $\xi^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k) \rightarrow \xi^0 = \{\xi_1^0, \dots, \xi_n^0\}$ при $k \rightarrow \infty$. В случае а) из (60) имеем равенство

$$\alpha \int_{\alpha}^{\alpha\beta} \left| \sum_{i=2}^m B_i^0 \frac{w_i(\xi^0, \zeta/(\alpha\beta))}{\zeta} (\alpha\beta)^{i-1} \right|^2 d\zeta = 0,$$

которое невозможно в силу линейной независимости системы $\{w_i(\xi^0, \zeta/(\alpha\beta)), i = 2, \dots, m\}$. В случае б) из равенства (60) с помощью леммы 1 заключаем, что

$$\alpha \int_{\alpha}^{\infty} \left| \sum_{i=2}^{\infty} B_i^0 \frac{e^{-\zeta} \zeta^{i-1}}{(i-1)!} \right|^2 d\zeta = 0,$$

чего также не может быть в силу линейной независимости системы функций $\{\zeta e^{-\zeta}, \zeta^2 e^{-\zeta}, \dots, \zeta^{m-1} e^{-\zeta}\}$ на множестве $\alpha \leq \zeta < \infty$.

Итак, неравенство (59) доказано, а вместе с ним доказано и неравенство

$$\int_{1/N}^1 \left| \sum_{i=2}^m B_i \frac{w_i(\xi, \eta)}{\sqrt{N}\eta} |\xi|^{i-1} \right|^2 d\eta \geq \gamma_0 \sum_{i=2}^m |B_i|^2$$

для всех $N \geq R_2$, всех ξ , $N \leq |\xi| \leq 2N$, и любого вектора $B = (B_2, \dots, B_m)$. Следовательно, из (58) получаем неравенство

$$\begin{aligned} M' &\geq \gamma_0 \int_{N < |\xi| < 2N} \sum_{i=2}^m |B_i(\xi)|^2 d\xi = \gamma_0 \int_{N < |\xi| < 2N} \sum_{i=2}^m \frac{|A_i(\xi)|^2}{|\xi|^{2(i-1)}} d\xi \\ &\geq \gamma_0 \int_{N < |\xi| < 2N} \sum_{i=2}^m \frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{i-1}} d\xi \geq \gamma_0 \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{i-1}} d\xi, \end{aligned} \quad (61)$$

справедливое для любого $i, i = 2, \dots, m$. Для доказательства первой части леммы теперь остается воспользоваться первым утверждением леммы 7.

Пусть теперь функция $u(x, y)$ имеет L_2 -предел при $y \rightarrow 0$. Тогда она L_2 -ограничена и по только что доказанному L_2 -ограничено, в частности, слагаемое $u_1(x, y)$ в равенстве (35). В силу первого утверждения леммы 5 функция $u_1(x, y)$ имеет L_2 -предел при $y \rightarrow 0$. Поскольку функция $U(x, y)$ также имеет L_2 -предел при $y \rightarrow 0$, то L_2 -предел имеет и сумма $u_2(x, y) + \dots + u_m(x, y)$, причем L_2 -пределом этой суммы в силу замечания при доказательстве леммы 7 является нулевая функция. Это означает, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\|u_2(\cdot, y) + \dots + u_m(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 = \left\| \sum_{i=2}^m A_i(\cdot) w_i(\cdot, y) \right\|_{L_2(|\xi| > R_2)}^2 \leq \varepsilon$$

для всех $y \in (0, \delta)$. Это неравенство совпадает с неравенством (56), в котором $M' = \varepsilon$, но которое должно выполняться не для всех $y \in (0, 1)$, а лишь для $y \in (0, \delta)$. Повторяя рассуждения, приведшие выше к неравенствам (61), получим, что для всех $N, N \geq 1/\delta$,

$$\varepsilon \geq \gamma_0 \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{i-1}} d\xi \quad \text{при каждом } i, \quad i = 2, \dots, m,$$

откуда в силу леммы 7 вытекает требуемое утверждение. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. L_2 -ограниченное решение $u(x, y)$ уравнения (1) обладает свойством

$$\sup_{0 < y < 1} \|P_N u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждая из функций $u_i(x, y)$, $i = 1, \dots, m$, в равенстве (35):

$$\sup_{0 < y < 1} \|P_N u_i(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, m.$$

В силу первого утверждения предыдущей леммы функция $u_1(x, y)$ L_2 -ограничена, следовательно, согласно лемме 5 при $N \rightarrow \infty$

$$\sup_{0 < y < 1} \|P_N u_1(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0.$$

По лемме 4 аналогичным свойством обладает и функция $U(x, y)$. Поэтому из условия доказываемой леммы вытекает, что

$$\sup_{0 < y < 1} \|P_N(u_2(\cdot, y) + \dots + u_m(\cdot, y))\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

т.е. по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_0 > R_2$, что

$$\int_{N < |\xi| < 2N} \left| \sum_{i=2}^m A_i(\xi) w_i(\xi, y) \right|^2 d\xi \leq \varepsilon \quad \text{для всех } y \in (0, 1),$$

если только $N \geq N_0$. Но это неравенство совпадает с неравенством (57), в котором $M' = \varepsilon$. Поэтому в силу (61) для любого i , $i = 2, \dots, m$,

$$\int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{i-1}} \leq \frac{\varepsilon}{\gamma_0}$$

для всех достаточно больших N . Тогда в силу леммы 7 функции $u_i(x, y)$, $i = 2, \dots, m$, имеют нулевой L_2 -предел при $y \rightarrow 0$. После этого доказываемое утверждение вытекает из леммы 8. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. L_2 -ограниченное решение $u(x, y)$ уравнения (1) обладает свойством

$$\sup_{0 < y < 1} \|T_h u(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, \quad |h| \rightarrow 0, \quad (62)$$

тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждая функция $u_i(x, y)$, $i = 1, \dots, m$, из равенства (35):

$$\sup_{0 < y < 1} \|T_h u_i(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, \quad |h| \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (63)$$

Проведя те же рассуждения, что и при доказательстве предыдущей леммы, получим, что функция $u_1(x, y)$ обладает свойством (63) и тем самым

$$\sup_{0 < y < 1} \left\| T_h \sum_{i=2}^m u_i(\cdot, y) \right\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0, \quad |h| \rightarrow 0,$$

т. е. по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство

$$\int_{|\xi| > R_2} \left| \sum_{i=2}^m A_i(\xi) w_i(\xi, y) \right|^2 \frac{\sin^4 \frac{(\xi, h)}{2}}{|h|^2 (1 + |\xi|^2)} d\xi \leq \varepsilon, \quad y \in (0, 1),$$

имеет место для всех h , $|h| \leq \delta$. Это неравенство совпадает с неравенством (56), в котором $M' = \varepsilon$, а вместо функций $A_i(\xi)$ стоят функции

$$A_i(\xi) \frac{\sin^2 \frac{(\xi, h)}{2}}{|h| (1 + |\xi|^2)^{1/2}}, \quad i = 2, \dots, m.$$

Поэтому в силу рассуждений, которые привели от (56) к (61), существует такое N_0 , что имеют место неравенства

$$\int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_i(\xi)|^2 \sin^4 \frac{(\xi, h)}{2}}{|h|^2 (1 + |\xi|^2)^i} d\xi \leq \frac{\varepsilon}{\gamma_0}, \quad i = 2, \dots, m,$$

для всех h , $|h| \leq \delta$, и всех $N \geq N_0$.

Далее поступаем, как при доказательстве леммы 8. Проинтегрируем последнее неравенство по единичной сфере $\{|h|^0 = 1\}$, где $h^0 = h/|h|$ при $|h| \neq 0$:

$$\omega'_n \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_i(\xi)|^2}{|h|^2 (1 + |\xi|^2)^i} \int_0^1 (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}} \sin^4 \left(\frac{|\xi| |h| u}{2} \right) du d\xi \leq \frac{\varepsilon \omega_n}{\gamma_0},$$

$i = 2, \dots, m$, при этом считаем, что $n > 1$; случай $n = 1$ проще, он так же, как и при доказательстве леммы 8, исследуется отдельно. Полагая в последнем неравенстве $|h| = 1/N$ (считая при этом, конечно, что $N_0 \geq 1/\delta$), получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \omega_n}{\gamma_0 \omega'_n} &\geq \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_i(\xi)|^2 N^2}{(1 + |\xi|^2)^i} \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}} \sin^4 \left(\frac{|\xi| u}{2N} \right) du d\xi \\ &\geq \frac{27 \sin^2 \frac{\pi}{12}}{32 \pi^2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} u^2 (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}} du \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{i-1}} d\xi, \end{aligned}$$

$i = 2, \dots, m$, из которого вытекает, что

$$\int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{i-1}} d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad i = 2, \dots, m,$$

и, следовательно, в силу лемм 7 и 8 имеет место доказываемое утверждение. Лемма доказана.

Докажем, наконец, последнюю лемму, которая позволит из теоремы 2 получить теорему 2'.

ЛЕММА 12. Для всякой функции $u(x, y)$ из $C((0, 1]; L_2(\mathbb{R}_n))$ условие

$$\sup_{0 < y < 1} \|T_h u(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0 \quad (h \in \mathbb{R}_n) \quad (11)$$

эквивалентно условиям

$$\sup_{0 < y < 1} \|T_{h_k i_k} u(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h_k \rightarrow 0 \quad (h_k \in \mathbb{R}_1), \quad k = 1, \dots, n \quad (11')$$

(напомним, что $i_1 = (1, \dots, 0), \dots, i_n = (0, \dots, 0, 1)$, $h = h_1 i_1 + \dots + h_n i_n$).

В силу формулы (9) имеем равенство

$$\|T_h u(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)}^2 = 4 \int_{\mathbb{R}_n} \frac{|\tilde{u}(\xi, y)|^2}{(1 + |\xi|^2)|h|^2} \sin^4 \frac{(\xi, h)}{2} d\xi.$$

Так как

$$\begin{aligned} \sin \frac{(\xi, h)}{2} &= \sin \left(\frac{\xi_1 h_1}{2} + \dots + \frac{\xi_n h_n}{2} \right) = \sin \frac{\xi_1 h_1}{2} \cos \left(\frac{\xi_2 h_2}{2} + \dots + \frac{\xi_n h_n}{2} \right) \\ &\quad + \cos \frac{\xi_1 h_1}{2} \sin \frac{\xi_2 h_2}{2} \cdot \cos \left(\frac{\xi_3 h_3}{2} + \dots + \frac{\xi_n h_n}{2} \right) \\ &\quad + \dots + \cos \frac{\xi_1 h_1}{2} \dots \cos \frac{\xi_{n-1} h_{n-1}}{2} \sin \frac{\xi_n h_n}{2}, \end{aligned}$$

то

$$\left| \sin \frac{(\xi, h)}{2} \right| \leq \left| \sin \frac{\xi_1 h_1}{2} \right| + \left| \sin \frac{\xi_2 h_2}{2} \right| + \dots + \left| \sin \frac{\xi_n h_n}{2} \right|.$$

Согласно неравенству Гёльдера

$$\sin^4 \frac{(\xi, h)}{2} \leq n^3 \left(\sin^4 \frac{\xi_1 h_1}{2} + \dots + \sin^4 \frac{\xi_n h_n}{2} \right),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|T_h u(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)}^2 &\leq 4n^3 \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}_n} \frac{|\tilde{u}(\xi, y)|^2}{(1 + |\xi|^2)|h|^2} \sin^4 \frac{\xi_k h_k}{2} d\xi \\ &\leq 4n^3 \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}_n} \frac{|\tilde{u}(\xi, y)|^2}{1 + |\xi|^2} \frac{\sin^4 \frac{\xi_k h_k}{2}}{h_k^2} d\xi \\ &\leq 4n^3 \sum_{k=1}^n \sup_{0 < y < 1} \|T_{h_k i_k} u(\cdot, y)\|_{W_2^{-1}(\mathbb{R}_n)}^2. \end{aligned}$$

Из этого неравенства вытекает, что из (11') следует (11). Обратное очевидно. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 2. Докажем сначала утверждения о *необходимости*. Если функция $u(x, y)$ имеет L_2 -предел при $y \rightarrow 0$, т.е. если $u(x, y) \in C([0, 1]; L_2(\mathbb{R}_n))$, то она, конечно, L_2 -ограничена, т.е. выполняется условие (2), и в силу леммы 4 она удовлетворяет условиям (10) и (11).

Докажем теперь утверждения о *достаточности*. Из условия ограниченности (2) в силу леммы 9 имеем L_2 -ограниченность каждой функции $u_i(x, y)$, $i = 1, \dots, m$, в равенстве (35), а тогда в силу леммы 5 функция $u_1(x, y)$ имеет L_2 -предел при $y \rightarrow 0$. Из условий (10) и (11) согласно леммам 10 и 11 получаем, что условиям (10) и (11) удовлетворяет каждое из оставшихся слагаемых $u_i(x, y)$, $i = 2, \dots, m$, в формуле (35). Но тогда согласно лемме 8 каждая функция $u_i(x, y)$, $i = 2, \dots, m$, имеет (нулевой) L_2 -предел при $y \rightarrow 0$. Таким образом, функция $u(x, y)$ имеет L_2 -предел при $y \rightarrow 0$. Теоремы доказаны.

Доказательство теоремы 2' получается немедленно из теоремы 2, если принять во внимание лемму 12.

Список литературы

1. Михайлов В. П. О существовании предельных значений решений полигармонического уравнения на границе области // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 11. С. 89–114.
2. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
3. Ройтберг Я. А. О предельных значениях по поверхностям, параллельным границе, обобщенных решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 6. С. 1303–1306.
4. Михайлов В. П. Об одном достаточном условии существования предельных значений полигармонических функций на границе области // Труды 2-го международного семинара “Дифференциальные уравнения и их приложения”. Самара: Изд-во СГУ, 1998. С. 115–121.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
17.03.1999