Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Монтгомери-Смит, Е. М. Семёнов, Усреднение коэффициентов Фурье–Хаара,
Матем. сб., 1999, том 190, номер 10, 49–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm432>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:39:39

УДК 517.51

С. Монтгомери-Смит, Е. М. Семенов

Усреднение коэффициентов Фурье–Хаара

Работа посвящена изучению оператора, определяемого усреднениями коэффициентов Фурье функции по системе Хаара. Найден критерий ограниченности этого оператора в паре перестановочно-инвариантных пространств.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Пусть

$$x(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt. \quad (1)$$

Положим

$$H_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n(a) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k}, \quad (2)$$

где $a = (a_1, a_2, \dots)$. Операторы

$$Hx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(a) \cos nt,$$

$$Bx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(a) \cos nt$$

были изучены Г. Харди [1] и Р. Беллманом [2]. В этих работах показано, что операторы H и B ограничены в $L_p[0, \pi]$ на множестве функций вида (1) тогда и только тогда, когда $1 \leq p < \infty$ и $1 < p \leq \infty$ соответственно. В [1] и [3] установлено, что

$$Hx(t) = \frac{1}{2} \int_t^{\pi} x(s) \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x(t-s) \ln \left| 2 \sin \frac{s}{2} \right| ds,$$

$$Bx(t) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \int_0^t x(s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x(t-s) \ln \left| 2 \sin \frac{s}{2} \right| ds.$$

Первый автор был поддержан университетом Миссури, второй автор – Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 98-01-00044) и программой “Университеты России” (3667); оба автора получили поддержку Национального научного фонда (NSF) США.

Оператор

$$x \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x(t-s) \ln \left| 2 \sin \frac{s}{2} \right| ds$$

ограничен в любом г.и.-пространстве (определение см. ниже). Хорошо известно ([4; 2.b.7] или [5; 2.6.6]), что операторы

$$\int_t^\pi x(s) \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds, \quad \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \int_0^t x(s) ds$$

ограничены в г.и.-пространстве E в том и только том случае, если $\alpha_E > 0$ или $\beta_E < 1$ соответственно. Следовательно, оператор $H(B)$ ограничен в г.и.-пространстве E на множестве функций вида (1) тогда и только тогда, когда $\alpha_E > 0$ ($\beta_E < 1$). В работе [4] были изучены операторы H и B в пространствах, для которых $\alpha_E = 0$ или $\beta_E = 1$. Заметим, что если оператор H или B ограничен из г.и.-пространства E в г.и.-пространство F , то $E \subset F$.

Пусть задана некоторая ортонормированная система и $\{a_k\}$ — коэффициенты Фурье функции x относительно этой системы. По аналогии с операторами H и B по формуле (2) можно построить два оператора. Очевидно, оба эти операторы ограничены в L_2 . Настоящая работа посвящена изучению аналогов операторов H и B , порожденных системой Хаара. Оказалось, что эти операторы совершенно не похожи на операторы H и B и обладают интересными свойствами. Было выяснено, что естественно их изучать в парах г.и.-пространств. Задача о нахождении аналогов теорем Харди и Беллмана для системы Хаара была поставлена Б. И. Голубовым на семинаре в декабре 1997 года. Теорема 1 является ответом на вопрос Б. И. Голубова.

Приводим необходимые определения. Некоторые из них уже были использованы выше.

Функциональное банахово пространство E на $[0, 1]$ с мерой Лебега называется *перестановочно-инвариантным* (г.и.) или *симметричным*, если

- 1) из $|x(t)| \leq |y(t)|$ при всех $t \in [0, 1]$ и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;
- 2) из равноизмеримости функций $x(t), y(t)$ и $y \in E$ вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Следуя [4], мы будем предполагать, что E сепарабельно или изометрично сопряженному к сепарабельному пространству. Для заданного г.и.-пространства E обозначим через E_0 замыкание L_∞ в E , а через E' — дуальное к E пространство с нормой

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \int_0^1 x(t)y(t) dt.$$

За исключением случая $E = L_\infty$ пространство E_0 сепарабельно и $(E_0)^* = E'$ с совпадением норм. Как обычно, равенство $E = F$ г.и.-пространств E, F означает совпадение E и F как множеств и эквивалентность норм. Пространство $E'' = (E')'$ содержит E , и вложение $E \subset E''$ изометрично.

Обозначим через $\mathfrak{x}_e(t)$ характеристическую функцию измеримого множества $e \subset [0, 1]$. Всегда $\mathfrak{x}_{[0,1]} \in E$. Будем предполагать, что $\|\mathfrak{x}_{[0,1]}\|_E = 1$. Тогда $L_\infty \subset E \subset L_1$ и

$$\|x\|_{L_1} \leq \|x\|_E \leq \|x\|_{L_\infty} \quad (3)$$

для всех $x \in L_\infty$.

Для любого $\tau > 0$ оператор

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & 0 \leq t \leq \min(\tau, 1), \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0, 1] \end{cases}$$

действует в любом г.и.-пространстве E и $\|\sigma_\tau\|_E \leq \max(1, \tau)$. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}$$

называются *индексами Бойда* г.и.-пространства E .

Если $x \in L_1[0, 1]$, то обозначим через $x^*(t)$ перестановку функции $|x(t)|$ в убывающем порядке. Если для любого $\tau \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\int_0^\tau x^*(t) dt \leq \int_0^\tau y^*(t) dt,$$

то это обозначается $x \prec y$. В таком случае $\|x\|_E \leq \|y\|_E$ для любого г.и.-пространства E . Это отношение полуупорядоченности было введено Харди и Литтлвудом. Аналогичным образом вводится отношение полуупорядоченности для пар функций, определенных на промежутке $[0, a]$, где $a > 0$.

Теперь мы дадим некоторые примеры г.и.-пространств. Если $M(u)$ – возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$, то пространство Орлича L_M есть множество измеримых функций, для которых

$$\|x\|_{L_M} = \inf \left\{ \lambda : \lambda > 0, \int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq 1 \right\} < \infty.$$

Пространство $(L_N)_0$, где $N(u) = e^{u^2} - 1$, играет важную роль в теории г.и.-пространств и обозначается через G . Очевидно, $L_\infty \subset G \subset L_p \subset G' \subset L_1$ для любого $p \in (1, \infty)$.

Пусть Φ – множество возрастающих вогнутых функций φ на $[0, 1]$. Всякая функция $\varphi \in \Phi$ порождает пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ с нормой

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t) d\varphi(t)$$

и пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ с нормой

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0 < s \leq 1} \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s x^*(t) dt.$$

Если $\varphi(+0) = \lim_{t \rightarrow 0} (t/\varphi(t)) = 0$, то $(M_0(\varphi))^* = \Lambda(\varphi)$ и $\Lambda^*(\varphi) = M(\varphi)$ с совпадением норм. Обозначим $\bar{\varphi}(t) = t(\ln(1/t) + 1)^{1/2}$. Тогда $G = M_0(\bar{\varphi})$.

Положим $\Delta_n^k = ((k-1)2^{-n}, k2^{-n})$, где $n = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, 2^n$. Последовательность функций $\chi_0^0(t) = 1$,

$$\chi_n^k(t) = \begin{cases} 2^{n/2}, & t \in \Delta_{n+1}^{2k-1}, \\ -2^{n/2}, & t \in \Delta_{n+1}^{2k}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0, 1] \end{cases}$$

называется системой Хаара (с.Х.). Множество индексов (n, k) обозначается через Ω . Иногда более удобно использовать одноиндексную систему $\chi_m(t)$. Взаимно однозначное соответствие между Ω и множеством целых чисел определяется формулой $m = 2^n + k$.

С.Х. есть полная ортонормированная система. Если г.и.-пространство E сепарабельно, то множество полиномов по с.Х. плотно в E . Обозначим через $S_n x$ частную сумму функции x порядка n по с.Х. Тогда

$$\|S_n x\|_E \leq \|x\|_E \quad (4)$$

для любого г.и.-пространства E и равенство

$$\int_0^1 x(t)y(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n x(t)y(t) dt \quad (5)$$

справедливо, если $x, y, xy \in L_1$. С.Х. образует шаудеровский базис в любом сепарабельном г.и.-пространстве и безусловный базис в сепарабельном г.и.-пространстве E , если и только если $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$.

Все указанные выше сведения о г.и.-пространствах можно найти в [4], [5], о с.Х. — в [4], [7]–[9].

§ 2. Полуупорядоченность Харди–Литтлвуда

Понятие полуупорядоченности Харди–Литтлвуда, которое было введено в § 1 для пар функций, аналогичным образом вводится для векторов.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, (a_k^*) — перестановка чисел $|a_i|$ в убывающем порядке. Будем писать $a \prec b$, если

$$\sum_{i=1}^k a_i^* \leq \sum_{i=1}^k b_i^*$$

для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Построим функции

$$\tilde{a}(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathfrak{a}_{(i-1, i)}(t), \quad \tilde{b}(t) = \sum_{i=1}^n b_i \mathfrak{a}_{(i-1, i)}(t).$$

В дальнейшем мы будем использовать тот очевидный факт, что соотношения $a \prec b$ и $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ эквивалентны. Вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и число d порождают вектор

$$(a_i \pm d) = (a_1 + d, a_1 - d, a_2 + d, a_2 - d, \dots, a_n + d, a_n - d)$$

из $\mathbb{R}^{2n}$. Аналогичным образом пара векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$ определяет вектор $(a_i \pm b_i)$ из $\mathbb{R}^{2n}$.

ЛЕММА 1. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^1$, $a \prec b$, $0 \leq d \leq |c_i|$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $\{a_i \pm d\} \prec \{b_i \pm c_i\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\{b_i \pm d\} \prec \{b_i \pm c_i\}$, то достаточно доказать, что $\{a_i \pm d\} \prec \{b_i \pm d\}$. Без ограничения общности

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0, \quad b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0.$$

Согласно предположению

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i \quad (6)$$

для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим вначале частный случай, когда вместо (6) выполнено более сильное предположение

$$a_i \leq b_i$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть $p, q, r \in \{0, 1, \dots, n, n+1\}$, $p < r$ и $d \geq 0$. Как обычно, $\sum_{i=r}^p a_i = 0$. Очевидно, $d - a_i \leq b_i + d$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Так как

$$\sum_{i=1}^p (a_i + d) + \sum_{i=1}^q (a_i - d) + \sum_{i=r}^n (d - a_i) \leq \sum_{i=1}^p (b_i + d) + \sum_{i=1}^q (b_i - d) + \sum_{i=r}^n (b_i + d),$$

то это неравенство означает, что $(a_i \pm d) \prec (b_i \pm d)$.

Предположим теперь, что вместе с неравенствами (6) справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i.$$

Тогда

$$\sum_{i=k}^n a_i \geq \sum_{i=k}^n b_i$$

для всех $k = 1, 2, \dots, n$ и

$$\sum_{i=1}^p (a_i + d) + \sum_{i=1}^q (a_i + d) + \sum_{i=r}^n (d - a_i) \leq \sum_{i=1}^p (b_i + d) + \sum_{i=1}^q (b_i + d) + \sum_{i=r}^n (d - b_i).$$

Отсюда снова вытекает, что $(a_i \pm d) \prec (b_i \pm d)$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда выполнены только неравенства (6) и

$$\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i.$$

Существует такая последовательность $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, что $a_i \leq f_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, $f \prec b$ и

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n b_i. \quad (7)$$

Теперь мы можем использовать рассмотренные выше частные случаи. Получаем $(a_i \pm d) \prec (f_i \pm d) \prec (b_i \pm d)$. Последовательность $\{f_i\}$ может быть построена в явном виде:

$$f_i = \min(a_i, \lambda),$$

где λ определяется из условия (7).

ЛЕММА 2. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^1$, $a \prec b$, $|c_i| \leq d$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $(a_i \pm c_i) \prec (b_i \pm d)$.

Доказательство леммы 2 точно такое же, как и леммы 1. Поэтому мы его опускаем.

В связи с леммами 1, 2 заметим, что предположение $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$, $a \prec b$, $c \prec d$ не влечет $(a_i \pm c_i) \prec (b_i \pm d_i)$. Действительно, если $n = 2$ и $a = b = c = (1, 0)$, $d = (0, 1)$, то векторы $(a_i \pm c_i)$ и $(b_i \pm d_i)$ не сравнимы.

Функции Радемахера $\text{sign} \sin(2^n \pi t)$ обозначаются, как обычно, через $r_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$. Заметим, для любого $n = 0, 1, \dots$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^k(t) = 2^{n/2} r_{n+1}(t).$$

ЛЕММА 3. Если $|c_{n,k}| \geq d_n$ для $k = 0, 1$ при $n = 0$ и для $1 \leq k \leq 2^n$ при $n = 1, 2, \dots$, $m \geq 0$, то

$$d_0 + \sum_{n=0}^m d_n 2^{n/2} r_{n+1} \prec \sum_{\substack{(n,k) \in \Omega \\ n \leq m}} c_{n,k} \chi_n^k. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно для $m = 0$. Предположим, что оно справедливо для $m - 1$. Обозначим

$$\begin{aligned} d_0 + \sum_{\substack{(n,k) \in \Omega \\ n \leq m-1}} d_n 2^{n/2} r_{n+1}(t) &= \sum_{i=1}^{2^m} a_i \mathfrak{A}_{((i-1)2^{-m}, i2^{-m})}(t), \\ \sum_{\substack{(n,k) \in \Omega \\ n \leq m-1}} c_{n,k} \chi_n^k(t) &= \sum_{i=1}^{2^m} b_i \mathfrak{A}_{((i-1)2^{-m}, i2^{-m})}(t). \end{aligned}$$

Согласно предположению индукции

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{2^m}\} \prec \{b_1, b_2, \dots, b_{2^m}\}.$$

Функциям

$$d_0 + \sum_{\substack{(n,k) \in \Omega \\ n \leq m}} d_n 2^{n/2} r_{n+1}(t), \quad \sum_{\substack{(n,k) \in \Omega \\ n \leq m}} c_{n,k} \chi_n^k(t)$$

соответствуют векторы $\{a_i \pm d_m\}$ и $\{b_i \pm c_{m,i}\}$. В силу леммы 1 $\{a_i \pm d_m\} \prec \{b_i \pm c_{m,i}\}$. Это соотношение влечет (8).

Повторяя доказательство леммы 3 и используя лемму 2 вместо леммы 1, мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 4. Если $|c_{n,k}| \leq d_n$ для $k = 0, 1$ при $n = 0$ и для $1 \leq k \leq 2^n$ при $n = 0, 1, \dots, m \geq 0$, то

$$\sum_{\substack{(n,k) \in \Omega \\ n \leq m}} c_{n,k} \chi_n^k \prec d_0 + \sum_{n=0}^m d_n 2^{n/2} r_{n+1}.$$

В связи с леммами 3, 4 заметим: из предположения, что неравенства $0 \leq c_{n,k} \leq d_{n,k}$ справедливы для всех пар (n, k) , не вытекает

$$\sum c_{n,k} \chi_n^k \prec M \sum d_{n,k} \chi_n^k,$$

где M – любая положительная константа. Это непосредственно следует из хорошо известного утверждения о том, что система Хаара не является безусловным базисом в L_1 .

§ 3. Критерий ограниченности операторов T_1 и T_2

Если

$$x(t) = \sum_n a_n \chi_n(t)$$

есть полином по с.Х., то положим

$$\begin{aligned} T_1 x(t) &= \sum_n H_n(a) \chi_n(t), \\ T_2 x(t) &= \sum_n B_n(a) \chi_n(t), \end{aligned}$$

где $H_n(a)$ и $B_n(a)$ определяются по формуле (2). В этом параграфе будет найден критерий ограниченности операторов T_1 и T_2 в паре г.и.-пространств.

Пусть m_k – последовательность целых чисел, $1 \leq m_k \leq 2^k$, $\varepsilon_k = m_k 2^{-k}$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$, $c = (c_1, c_2, \dots)$. Рассмотрим семейство операторов

$$P_\varepsilon c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k(t) \mathfrak{x}_{(0, \varepsilon_k)}(t).$$

ЛЕММА 5. Оператор P_ε действует из ℓ_2 в G , и существует такая константа M , что $\|P_\varepsilon\|_{\ell_2, G} \leq M$ для любой последовательности $\{\varepsilon_k\}$ указанного вида.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varepsilon_k = 1$ для всех $k = 1, 2, \dots$, то это утверждение хорошо известно [7; теорема 2.5], [10; 2.b.3]. Точно так же, как и в [10], доказывается, что

$$\|P_\varepsilon c\|_{L_{2m}} \leq \sqrt{m} \|c\|_{\ell_2}$$

для любого натурального m . Используя стандартные рассуждения, связанные с разложением функции e^x в ряд Тейлора, легко получить требуемую оценку. В качестве M можно взять $\|P_\delta\|_{\ell_2, G}$, где $\delta = (1, 1, \dots)$.

Пусть c — финитная последовательность, $c = (c_1, c_2, \dots)$, $\|c\|_{\ell_2} \leq 1$, $x \in G'$, $\|x\|_{G'} \leq 1$. В силу леммы 5

$$\int_0^1 \left(\sum_k c_k r_k(t) \mathfrak{A}_{(0, \varepsilon_k)}(t) \right) x(t) dt \leq M.$$

Отсюда

$$\left\| \int_0^{\varepsilon_k} x(t) r_k(t) dt \right\|_{\ell_2} = \sup_{\|c\|_{\ell_2} \leq 1} \sum_k c_k \int_0^{\varepsilon_k} x(t) r_k(t) dt \leq M.$$

Полученное неравенство означает, что оператор

$$Q_\varepsilon x = \left\{ \int_0^{\varepsilon_k} x(t) r_k(t) dt \right\}$$

действует из G' в ℓ_2 и

$$\|Q_\varepsilon\|_{G', \ell_2} \leq M. \quad (9)$$

Рассмотрим оператор

$$R_\varepsilon x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\varepsilon_k} x(s) r_k(s) ds \cdot r_k(t).$$

Так как $R_\varepsilon = P_\delta Q_\varepsilon$, где $\delta = (1, 1, \dots)$, то из леммы 5 и неравенства (9) вытекает, что

$$\|R_\varepsilon\|_{G', G} \leq M^2. \quad (10)$$

ЛЕММА 6. Оператор T_1 действует из G' в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого ненулевого $z \in G'$ и натурального i обозначим через $n_i = n_i(z)$ такое натуральное число, что $2^i < n_i \leq 2^{i+1}$ и

$$\max_{2^i < n \leq 2^{i+1}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k(z) \right| = \left| \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} c_k(z) \right|.$$

Рассмотрим следующие операторы:

$$\begin{aligned} Sx &= S_z x = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} c_k(x) \right) \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \chi_k, \\ Ux &= U_z x = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{2^i} c_k(x) \right) \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \chi_k, \\ Vx &= V_z x = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=2^i+1}^{n_i} c_k(x) \right) \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \chi_k. \end{aligned}$$

Очевидно, $S = U + V$. Обозначим через $e_k(x)$ коэффициенты Фурье функции x по системе Радемахера. Тогда

$$\begin{aligned} Ux &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{2^i} \int_0^1 x(s) \chi_k(s) ds \right) 2^{i/2} r_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n_i} \left(\int_0^1 x(s) ds + \sum_{j=0}^{i-1} e_{j+1}(x) 2^{j/2} \right) 2^{i/2} r_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \left(\int_0^1 x(s) ds 2^{-i/2} + \sum_{j=0}^{i-1} e_{j+1}(x) 2^{(j-i)/2} \right) r_{i+1}, \end{aligned}$$

где $\lambda_i = 1/(n_i 2^{-i})$. Следовательно, $1 < \lambda_i \leq 2$ для всех $i = 0, 1, \dots$. Так как

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i 2^{-i/2} r_{i+1}(t) \right| \leq \frac{2}{1 - 1/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1),$$

то в силу (3)

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i 2^{-i/2} r_i \int_0^1 x(s) ds \right\|_G \leq 2(2 + \sqrt{2}) \|x\|_{G'}.$$

Оператор $\{x_i\} \rightarrow \{\sum_{j=1}^i x_j 2^{(j-i)/2}\}$ действует в каждом ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$), и его норма в ℓ_2 не превосходит

$$\sup_{i \geq 1} \sum_{j=1}^i 2^{(j-i)/2} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/2} = \frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}.$$

Оценка (9) означает, что

$$\|\{e_k(x)\}\|_{\ell_2} \leq M \|x\|_{G'}.$$

Как отмечалось выше, из [7; 2.5] вытекает неравенство

$$\left\| \sum c_i r_i \right\|_G \leq M \|c\|_{\ell_2}. \quad (11)$$

Таким образом,

$$\|Ux\|_G \leq 2(2 + \sqrt{2})(1 + M^2)\|x\|_{G'}.$$

Обозначим $\varepsilon_i = (n - 2^i)2^{-i}$. Тогда

$$\begin{aligned} Vx(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=2^i+1}^{n_i} \int_0^1 x(s) \chi_k(s) ds \right) 2^{i/2} r_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{n_i} \int_0^{\varepsilon_i} x(s) r_{i+1}(s) ds \cdot r_{i+1}(t). \end{aligned}$$

Используя (9) и (11), получаем

$$\|V\|_{G',G} \leq \|Q_\varepsilon\|_{G',\ell_2} \|P_\delta\|_{\ell_2,G} \leq M^2.$$

Таким образом,

$$\|S_z\|_{G',G} \leq 2(2 + \sqrt{2})(1 + M^2) + M^2 \quad (12)$$

для всех $z \in G'$. Лемма 4 влечет оценку

$$T_1 x \prec \int_0^1 x(s) ds + S_x x.$$

В силу [4; 2.а.8], (3) и (12)

$$\begin{aligned} \|T_1 x\|_G &\leq \left| \int_0^1 x(s) ds \right| + \|S_x x\|_G \leq \|x\|_{G'} + \sup_z \|S_z\|_{G',G} \|x\|_{G'} \\ &= (1 + 2(2 + \sqrt{2})(1 + M^2) + M^2) \|x\|_{G'} = M_1 \|x\|_{G'}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. Если оператор T_1 действует из L_∞ в $r.i.$ -пространство E , то $E \supset G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [11; лемма 3.1]

$$\left\| \max_{1 \leq j \leq m^2} \left| \sum_{i=1}^j r_i \right| \right\|_{L_2} \leq \sqrt{2} \left\| \sum_{i=1}^{m^2} r_i \right\|_{L_2} = \sqrt{2} m$$

для любого натурального m . Обозначим

$$z_m(t) = \frac{1}{m} \max_{1 \leq j \leq m^2} \sum_{i=1}^j r_i(t), \quad e_m = \{t : z_m(t) \leq 2\sqrt{2}\}.$$

Тогда $\|z_m\|_{L_1} \leq \|z_m\|_{L_2} \leq \sqrt{2}$ и $\text{mes } e_m \geq \frac{1}{2}$. Существует такое множество $I_m \subset \{1, 2, \dots, 2^{m^2+1}\}$, что

$$e_m = \bigcup_{i \in I_m} \Delta_{m^2+1}^i.$$

Положим $c_{0,0} = 0$,

$$c_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{m} 2^{-n/2}, & \text{если } \Delta_n^k \supset \Delta_{m^2}^i \text{ для некоторого } i \in I_m, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и

$$y_m(t) = \sum_{(n,k) \in \Omega} c_{n,k} \chi_n^k(t).$$

По построению $\|y_m\|_{L_\infty} \leq 2\sqrt{2}$ для всех $m = 1, 2, \dots$. Так как $\text{mes } e_m \geq \frac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2m} 2^{n/2} \leq \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} \leq \frac{1}{m} 2^{n/2}$$

для любого $n = 1, 2, \dots, m^2$. Для любого натурального $1 < j \leq 2^{n+1}$ найдем такое натуральное n , что $2^n < j \leq 2^{n+1}$. Тогда

$$\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j c_i \geq 2^{-(n+1)} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} c_i \geq 2^{-(n+1)} \frac{1}{2m} 2^{(n-1)/2} = \frac{1}{m} 2^{-(n+5)/2} \quad (13)$$

и

$$2^{n/2} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j c_i \geq 2^{n/2} \frac{1}{m} 2^{-(n+5)/2} = \frac{1}{4\sqrt{2}m}.$$

В силу леммы 3

$$T_1 y_m \succ \frac{1}{4\sqrt{2}m} \sum_{i=1}^{m^2} r_i.$$

Снова применяя к полученной оценке [4; 2.а.8], получаем

$$\left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m^2} r_i \right\|_E \leq 4\sqrt{2} \|T_1 y_m\|_E \leq 4\sqrt{2} \|T_1\|_{L_\infty, E} \|y_m\|_{L_\infty} \leq 2^4 \|T_1\|_{L_\infty, E}.$$

В [12] или [4; 2.б.4] показано, что неравенство

$$\sup_{m \geq 1} \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m^2} r_i \right\|_E < \infty$$

влечет $E \supset G$.

ЛЕММА 8. Если оператор T_2 действует из L_∞ в г.и.-пространство E , то $E \supset G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8 точно такое же, как и леммы 7. Единственное отличие состоит в следующем: вместо (13) имеем

$$\sum_{i=j}^{\infty} \frac{c_i}{i} \geq \sum_{i=2^{n+1}}^{2^{n+2}} \frac{c_i}{i} \geq 2^{-n-2} \sum_{i=2^{n+1}}^{2^{n+2}} c_i \geq \frac{1}{2m} 2^{-n-2+(n+1)/2} = \frac{1}{m} 2^{-(n+5)/2}$$

для $n+2 \leq m^2$.

Нетрудно показать, что операторы T_1 и T_2 являются сопряженными друг к другу, если рассматривать их в парах рефлексивных г.и.-пространств и, следовательно, их нормы равны. Это простое утверждение допускает следующее уточнение.

ЛЕММА 9. Для любой пары г.и.-пространств E, F справедливо равенство

$$\|T_1\|_{E,F} = \|T_2\|_{F',E'}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N – натуральное число и

$$x(t) = \sum_{n=1}^N c_n \chi_n(t),$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^N d_n \chi_n(t).$$

Тогда

$$\int_0^1 T_1 x(t) y(t) dt = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^n c_k \right) d_n = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{d_n}{n} = \int_0^1 x(t) T_2 y(t) dt.$$

Если E и F' сепарабельны, то множество полиномов по с.Х. плотно в E и F' . Отсюда вытекает (14) при сделанном предположении.

Пусть E – несепарабельное г.и.-пространство, $E \neq L_{\infty}$, $F \neq L_1$. Неравенство

$$\|T_1\|_{E,F} \geq \|T_1\|_{E_0,F} \quad (15)$$

очевидно. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такие $x \in E, y \in F'$, что $\|x\|_E \leq 1$, $\|y\|_{F'} \leq 1$ и

$$\int_0^1 T_1 x(t) y(t) dt \geq \|T_1\|_{E,F} - \varepsilon.$$

Согласно (5)

$$\int_0^1 T_1 x(t) y(t) dt \leq \int_0^1 T_1 x(t) S_n y(t) dt + \varepsilon$$

для достаточно больших n . Так как

$$\int_0^1 T_1 x(t) S_n y(t) dt = \int_0^1 T_1 S_n x(t) S_n y(t) dt$$

и $\|S_n\|_E = 1$ для любого n и любого г.и.-пространства E , то

$$\|T_1\|_{E,F} \leq \int_0^1 T_1 S_n x(t) S_n y(t) dt + 2\varepsilon \leq \|T_1\|_{E_0,F} + 2\varepsilon. \quad (16)$$

Оценки (15), (16) показывают, что

$$\|T_1\|_{E,F} = \|T_1\|_{E_0,F}. \quad (17)$$

Пусть i – натуральное число. Тогда

$$T_1 \chi_i = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_k$$

и

$$\|T_1 \chi_i\|_{L_\infty} \leq \|T_1 \chi_1\|_{L_\infty} \leq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} + 1.$$

Отсюда вытекает, что оператор T_1 отображает множество полиномов по с.Х. в L_∞ . Как отмечалось в § 1, множество полиномов по с.Х. плотно в E_0 . Поэтому $T_1 E_0 \subset F_0$ и

$$\|T_1\|_{E,F} = \|T_1\|_{E_0,F_0}.$$

Точно так же, как и (17), доказывается, что

$$\|T_2\|_{E,F} = \|T_2\|_{E_0,F_0}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|T_1\|_{E,F} &= \|T_1\|_{E_0,F_0} = \|T_1^*\|_{F_0^*,E_0^*} = \|T_1^*\|_{F',E'} \\ &\geq \|T_1^*\|_{(F')_0,(E')_0} = \|T_2\|_{(F')_0,(E')_0} = \|T_2\|_{F',E'} \end{aligned}$$

и

$$\|T_2\|_{F',E'} = \|T_2^*\|_{E'',F''} \geq \|T_2^*\|_{E,F} = \|T\|_{E,F}.$$

Следовательно, $\|T_1\|_{E,F} = \|T_2\|_{F',E'}$. Нетрудно показать, что эта формула сохраняет силу и для случая, когда $E = L_\infty$ или $F = L_1$.

Точно так же доказывается формула

$$\|T_2\|_{E,F} = \|T_1\|_{F',E'}. \quad (18)$$

Теперь мы можем сформулировать и доказать основные результаты работы. Как отмечалось в § 1, множества тех г.и.-пространств E , в которых непрерывны операторы H и B , различны. Для операторов T_1, T_2 ситуация иная. Ниже будет показано, что множества пар г.и.-пространств (E, F) таких, что T_1 или T_2 непрерывен из E в F , одинаковы. Поэтому критерий непрерывности будет сформулирован одновременно для этих двух операторов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть E, F – г.и.-пространства. Для того чтобы оператор T_1 или T_2 был ограничен из E в F , необходимо и достаточно, чтобы $E \subset G', F \supset G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность непосредственно вытекает из леммы 6 для оператора T_1 . Леммы 6 и 9 показывают, что T_2 действует из G' в G'' . Так как G' сепарабельно, T_2 отображает множество полиномов по с.Х. в себя и это множество плотно в G и G' , то T_2 действует из G' в G . Отсюда вытекает достаточность условий и для оператора T_2 .

Необходимость условия является следствием (3) и лемм 7, 8. В силу (14) или (18) $E' \supset G$. Поэтому $E \subset E'' \subset G'$.

Так как $L_\infty \subset G \subset L_p \subset G' \subset L_1$ для любого $p \in (1, \infty)$, то из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$. Для того чтобы оператор T_1 или T_2 был ограничен из L_p в L_q , необходимо и достаточно, чтобы $1 < p, q < \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Для того чтобы оператор T_1 или T_2 был ограничен в L_p , необходимо и достаточно, чтобы $1 < p < \infty$.

Здесь ясно видна разница между теоремами Харди и Беллмана и теоремой 1, что говорит о различных свойствах операторов H, B и T_1, T_2 .

Если E, F – г.и.-пространства и $E \subset G'$, то $T_1 E \subset G$. Если же еще известно, что $T_1 E \supset F$, то $F \supset G$. Это говорит о том, что $T_1 E$ “слабо” зависит от $E \subset G'$. Аналогичное утверждение справедливо и для T_2 . Если же $E \not\subset G'$, то $T_1 E \not\subset L_1$. Более того, можно показать, что T_1 не определен на всем E . Это связано с известным утверждением о том, что ряд Радемахера расходится почти везде, если коэффициенты этого ряда не принадлежат ℓ_2 . Однако для любой функции $x \in L_1$ можно найти такую функцию y , что $y^* \geq x^*$ и T_1 определен на y . Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x \in L_1$. Существует такая функция $y \in L_1$, что $|y| \geq x^*$, $T_1 y \in L_\infty$ и

$$\|T_1 y\|_{L_\infty} \leq 10\|x\|_{L_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x^*(2^{-k}) 2^{-k/2} \chi_k^2(t).$$

Тогда

$$|y(t)| = \sum_{k=1}^{\infty} x^*(2^{-k}) \mathfrak{a}_{(2^{-k}, 2^{-k+1})}(t) \geq x^*(t).$$

С другой стороны, $|y| \leq \sigma_2 x^*$. Отсюда $y \in L_1$ и $\|y\|_{L_1} \leq 2\|x\|_{L_1}$. Очевидно,

$$c_i(y) = \begin{cases} x^*(2^{-k}) 2^{-k/2}, & \text{если } i = 2^k + 2, k = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{для остальных значений } i. \end{cases}$$

Если $2^j < n \leq 2^{j+1}$ для некоторого $j \geq 1$, то

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i \leq 2^{-j} \sum_{k=1}^j x^*(2^{-k}) 2^{-k/2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|T_1 x\|_{L_\infty} &\leq \frac{3}{2} \|x\|_{L_1} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{-j} \sum_{k=1}^j x^*(2^{-k}) 2^{-k/2} \right) 2^{j/2} \\ &= \frac{3}{2} \|x\|_{L_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j/2} 2^{-k/2} x^*(2^{-k}) \\ &= \frac{3}{2} \|x\|_{L_1} + (2 + \sqrt{2}) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x^*(2^{-k}) \\ &\leq \frac{3}{2} \|x\|_{L_1} + 2(2 + \sqrt{2}) \|x\|_{L_1} \leq 10 \|x\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Ядро оператора T_1 (и T_2) тривиально. Однако

$$\inf_{\|x\|_{L_1}=1} \|T_1 x\|_{L_\infty} = 0.$$

Действительно, если

$$x_n(t) = 2^{-n/2} \sum_{k=1}^{2^n} (-1)^k \chi_n^k(t),$$

то $\|x_n\|_{L_1} = 1$ и

$$\|T_1 x_n\|_{L_\infty} = (2^n + 1)^{-1}$$

для любого $n = 1, 2, \dots$. В силу (3)

$$\inf_{\|x\|_E=1} \|T_1 x\|_F = 0$$

для любой пары г.и.-пространств E, F .

Список литературы

1. *Hardy G. G.* Notes on some points of the integral calculus // Messenger of Math. 1928. V. 58. P. 50–52.
2. *Bellman R.* Note on a theorem of Hardy on Fouries constant // Bull. Amer. Soc. 1944. V. 50. P. 741–744.
3. *Голубов Б. И.* Об одной теореме Беллмана о коэффициентах Фурье // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 11. С. 31–40.

4. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. Function spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
6. *Родин В. А.* К вопросу о преобразовании Харди пространства ВМО // *Phystech J.* 1997. V. 3. № 4. P. 79–83.
7. *Кашии Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
8. *Голубов Б. И.* Ряды Фурье по системе Хаара // *Итоги науки и техн. Матем. анализ.* М.: ВИНТИ, 1971. С. 109–146.
9. *Novikov I. Ya., Semenov E. M.* Haar series and linear operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
10. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. Sequence spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
11. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.
12. *Rodin V. A., Semenov E. M.* Rademacher series in symmetric spaces // *Anal. Math.* 1975. V. 1. № 3. P. 207–222.

Университет Миссури, Колумбия;
Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
17.12.1998