Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Муранов, И. Хэмблтон, Проективные группы препятствий к расщеплению
вдоль односторонних подмногообразий, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 10, 65–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:45:55

УДК 513.83+515.1

Ю. В. Муранов, И. Хэмблтон

Проективные группы препятствий к расщеплению вдоль односторонних подмногообразий

Геометрическая диаграмма групп, состоящая из групп, снабженных геометрическими антиструктурами, является естественным обобщением квадрата фундаментальных групп, возникающего в задаче расщепления для одностороннего подмногообразия. В данной работе для таких диаграмм определены группы LS_* и LP_* и описаны свойства этих групп. Для случая геометрической диаграммы конечных 2-групп развиты методы вычисления LS_*^p , LP_*^p -групп и естественных отображений в диаграммах точных последовательностей.

Библиография: 21 название.

§ 1. Введение

Пусть $f: M \rightarrow Y$ – простая гомотопическая эквивалентность замкнутых многообразий размерности n и $X \subset Y$ – подмногообразие коразмерности q . Отображение f расщепляется вдоль подмногообразия $X \subset Y$, если существует такое отображение g в гомотопическом классе отображения f , что

- i) отображение g трансверсально X , так что, в частности, $g^{-1}(X) = N$ является подмногообразием коразмерности q в M ;
- ii) ограничение отображения g на подмногообразие N

$$g|_N: N \rightarrow X$$

и ограничение g на $M \setminus N$

$$g|_{M \setminus N}: (M \setminus N) \rightarrow (Y \setminus X)$$

являются гомотопическими эквивалентностями.

Существуют группы препятствий к расщеплению $LS_{n-q}(F)$, которые зависят функториально от универсального отталкивающего квадрата

$$F = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(Y \setminus X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_1(Y) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке гранта № 96-15-96841 Президента Российской Федерации, а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00009).

Часть этой работы была подготовлена в Max-Planck Institute für Mathematik в октябре 1996 года.

фундаментальных групп с ориентацией, где U – трубчатая окрестность подмногообразия X в Y , и эти группы зависят от размерности $n - q \bmod 4$ (см. [1], [2]). Для простоты мы обозначим группы с ориентацией в квадрате F следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Пусть $f: M \rightarrow Y$ является нормальным отображением степени 1. Тогда определено препятствие к существованию отображения g со свойствами i), ii) в классе нормального кобордизма отображения f . Это препятствие лежит в группе $LP_{n-q}(F)$, которая также зависит функториально от квадрата F и $n - q \bmod 4$.

Группы $LS_*(F)$ и $LP_*(F)$ тесно связаны с L -группами и естественными отображениями в L -теории. Так, эти группы входят в коммутативную диаграмму точных последовательностей (см. [1], [2])

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+q}(C) & \longrightarrow & L_{n+q}(D) & \longrightarrow & LS_{n-1}(F) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & LP_n(F) & & & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \rightarrow & LS_n(F) & \longrightarrow & L_n(B) & \longrightarrow & L_{n+q-1}(C) & \rightarrow \end{array}, \quad (1.3)$$

в которой почти все отображения имеют естественное геометрическое описание.

Если X является односторонним подмногообразием многообразия Y и горизонтальные отображения в квадрате F – изоморфизмы, то группы $LS_*(F)$ совпадают с группами Браудера–Ливси $LN_*(C \rightarrow D)$. Такая пара многообразий называется парой Браудера–Ливси. Группы LP_n для пары Браудера–Ливси совпадают с относительными группами $L_{n+1}(i^!)$, где $i^!: L_{n+1}(B) \rightarrow L_{n+1}(A)$ – отображение трансфера.

Группы Браудера–Ливси используются во многих геометрических задачах. Например, эти группы применяются для исследования инволюций на многообразиях и в решении задачи о реализуемости элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий (см. [3]–[6]).

С алгебраической точки зрения группы Браудера–Ливси $LN_*(C \rightarrow D)$ являются L -группами кольца с антиструктурой $(\mathbb{Z}C, \alpha, u)$, где $\alpha(x) = t\bar{x}t^{-1}$, $u = -w(t)t^2$, $t \in D \setminus C$, и черта обозначает стандартную инволюцию на кольце $\mathbb{Z}C$: $\Sigma n_g g \rightarrow \Sigma n_g w(g)g^{-1}$, где $w: C \rightarrow \{\pm 1\}$ – гомоморфизм ориентации.

Случай одностороннего подмногообразия, когда горизонтальные отображения в квадрате F являются эпиморфизмами, рассматривался в работах [7]–[10]. В этом случае квадрат (1.1) называется *геометрической диаграммой* [7], [8]. В частности, группы LS_* и LP_* определены для квадрата антиструктур (см. [9], [10]), в котором горизонтальные отображения являются эпиморфизмами и вертикальные отображения являются квадратичными расширениями антиструктур [11]. Квадрат антиструктур такого типа получается из геометрической диаграммы F переходом к квадрату групповых колец со стандартной инволюцией.

Необходимо заметить, что в геометрических приложениях мы встречаем только антиструктуры специального типа, которые возникают как антиструктуры на групповых кольцах групп с дополнительными структурами.

Геометрическая антиструктура [12], [13] – это группа π с дополнительной структурой (см. §2), которая дает возможность ввести естественным образом антиструктуру на групповом кольце $R\pi$. Такие антиструктуры дают все возможные антиструктуры для групп Уолла препятствий к перестройкам и для групп Браудера–Ливси.

В настоящее время существуют эффективные методы вычисления L -групп и LN -групп в случае конечных гиперэлементарных групп (см., например, [6], [12]–[15]) и, в частности, в случае конечных 2-групп. Эти группы занимают особенное место в теории перестроек, так как образ отображения $\sigma: [M, G/TOP] \rightarrow L_n(G, w)$ в точной последовательности Сулливана определяется посредством L -группы силовой 2-подгруппы группы G [16]. Наиболее полные результаты в вычислении были получены для проективных L -групп (см. [12], [15]), которые были введены С. П. Новиковым [17].

В данной работе мы вводим понятие *геометрической диаграммы групп*. Такая диаграмма представляет собой коммутативный квадрат групп, снабженных геометрическими антиструктурами, в котором горизонтальные отображения – эпиморфизмы, а вертикальные отображения – вложения индекса 2. Кроме того, все отображения групп являются *морфизмами геометрических антиструктур*. Понятие геометрической диаграммы групп является естественным обобщением квадрата F , который возникает в задаче расщепления для одностороннего подмногообразия. Для геометрических диаграмм групп, используя методы работ [9], [10], мы определяем LS -группы и LP -группы и описываем их свойства. В случае конечных 2-групп с антиструктурами мы получаем достаточно полные результаты, необходимые для вычисления LS_*^p и LP_*^p -групп и естественных отображений в диаграмме (1.3). Фактически мы сводим задачу вычисления этих групп и естественных отображений к вычислениям для L_*^p -групп, приведенным в работе [12].

§2. Геометрическая диаграмма групп

Сначала мы напомним некоторые необходимые определения.

Пусть R – кольцо с единицей. *Антиструктура* задается тройкой (R, α, u) , где α – антиавтоморфизм кольца R , а $u \in R^*$ – такая единица, что $\alpha(u) = u^{-1}$, $\alpha^2(x) = u x u^{-1}$ для любого элемента $x \in R$. В этом случае группы Уолла $L_n^X(R, \alpha, u)$ определены для любой подгруппы $X \subset K_i(R)$, $i = 0, 1$, которая инвариантна относительно инволюции, индуцированной α [18]–[20].

Пусть R является групповым кольцом $\mathbb{Z}\pi$, и V есть образ $\{\pm\pi\}$ в $K_1(\mathbb{Z}\pi)$. Группы препятствий к перестройкам $L_n(\pi, w) = L_n^s(\pi, w)$ изоморфны $L_n^V(\mathbb{Z}\pi, \bar{\cdot}, 1)$ в четной размерности, а группу $L_{2k+1}^V(\mathbb{Z}\pi, \bar{\cdot}, 1)$ необходимо профакторизовать по подгруппе $\mathbb{Z}/2$, порожденной классом автоморфизма σ [18]. Аналогичные соглашения мы также будем использовать для групп Браудера–Ливси.

Пусть задана антиструктура (R, α, u) с единицей $v \in R^*$. Существует антиструктура (R, β, u_1) , где $u_1 = v\alpha(v^{-1})u$, $\beta(x) = v\alpha(x)v^{-1}$ для любого $x \in R$. Определен *скейлинг изоморфизм* $L_n(R, \alpha, u) \cong L_n(R, \beta, u_1)$, который индуцирован умножением квадратичной формы на v слева [18], [11].

Геометрическая антиструктура [12], [13] на группе π задается четверкой

(π, w, θ, b) , где $w: \pi \rightarrow \{\pm 1\}$ – гомоморфизм ориентации, а $\theta \in \text{Aut}(\pi)$, $b \in \pi$ таковы, что

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & w\theta(g) = w(g) \quad \forall g \in \pi, \\ \text{(ii)} \quad & \theta^2(g) = bgb^{-1} \quad \forall g \in \pi, \\ \text{(iii)} \quad & \theta(b) = b \quad \text{и} \quad w(b) = 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ориентация геометрической антиструктуры задается обратимым элементом $\varepsilon \in R^*$, для которого $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$, где черта обозначает инволюцию на кольце R .

Ассоциированная антиструктура $(R\pi, \alpha, u)$ состоит из группового кольца $R\pi$ с антиавтоморфизмом

$$\alpha: \Sigma r_g g \rightarrow \Sigma \bar{r}_g w(g)\theta(g^{-1})$$

и единицы $u = \varepsilon b$.

Рассмотрим ориентированную геометрическую антиструктуру $(\pi, w, \theta, b, \varepsilon)$ и элемент $c \in \pi$. Определена новая геометрическая антиструктура $(\pi, w, \theta^c, b^c, \varepsilon^c)$ [13]. Здесь $\theta^c(x) = c\theta(x)c^{-1}$ для любого $x \in \pi$, $b^c = c\theta(c)b$, $\varepsilon^c = w(c)\varepsilon$. Тогда антиструктура, ассоциированная с $(\pi, w, \theta^c, b^c, \varepsilon^c)$, будет скейлинг эквивалентна антиструктуре $(R\pi, \alpha, u)$ [13].

Далее мы будем рассматривать случай $\bar{r} = r$ ($r \in R$), $\varepsilon = \pm 1$. Следовательно, *ориентированная геометрическая антиструктура* (π, ε) определяет антиструктуру на кольце $R\pi$.

В геометрии L -группы возникают как группы препятствий к перестройкам $L_*(\pi, w)$, где π – фундаментальная группа пространства Пуанкаре с гомоморфизмом ориентации $w: \pi \rightarrow \{\pm 1\}$. L -группы кольца с нетривиальной антиструктурой возникают в задаче расщепления для пары Браудера–Ливси многообразий $X \subset Y$. В этом случае отображение $\pi_1(Y \setminus X) \rightarrow \pi_1(Y)$ в квадрате (1.1) является вложением индекса 2 групп с ориентацией. Более того, любое вложение $(\pi \rightarrow G, w)$ индекса 2 групп с ориентацией дает группы Браудера–Ливси

$$LN_*(\pi \rightarrow G, w) \cong L_*(\mathbb{Z}\pi, \alpha, -w(t)t^2), \tag{2.2}$$

где $t \in G \setminus \pi$, $\alpha(x) = t\bar{x}t^{-1}$. Группы Браудера–Ливси $LN_n(\pi \rightarrow G, w)$ совпадают с группами препятствий к перестройкам $L_{n+1+w(t)}(\pi)$, если $\pi \subset G$ является прямым слагаемым.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Антиструктура в (2.2) зависит от t . Легко проверить, что другая антиструктура $(\mathbb{Z}\pi, \beta, -w(\tau)\tau^2)$ для $\tau = vt$, $v \in \pi$, получается посредством скейлинга на v из антиструктуры в (2.2) (см., например, [5]). Чтобы избежать functorialных проблем, мы будем отождествлять каждую группу $L_*(\mathbb{Z}\pi, \alpha, -w(t)t^2)$ с подмножеством прямого произведения $\prod_{t \in G \setminus \pi} L_*(\mathbb{Z}\pi, \alpha, -w(t)t^2)$, состоящим из элементов, чьи компоненты согласованы посредством изоморфизма скейлинга (см. [5]). Отождествление задается проекцией на координату. Следовательно, L -группы зависят от класса скейлинг эквивалентных антиструктур.

Любая геометрическая антиструктура (π, θ, w, b) дает вложение $i: \pi \rightarrow G$ индекса 2 [12], где

$$G = \{\pi * \mathbb{Z}/tgt^{-1} = \theta(g) : t^2 = b\}.$$

Используя ориентацию геометрической антиструктуры, мы можем рассматривать вложение i как отображение групп с ориентациями $w: \pi \rightarrow \{\pm 1\}$, $w(t) = -\varepsilon$. Вложение $(\pi \rightarrow G, w)$ дает короткую точную последовательность

$$1 \rightarrow \pi \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1, \quad (2.4)$$

в которой отображение $\pi \rightarrow G$ согласовано с ориентациями. Следовательно, ориентированная геометрическая антиструктура $(\pi, \theta, w, b, \varepsilon)$ дает точную последовательность (2.4), которую мы обозначим через $\mathcal{S}(\pi, \theta, w, b, \varepsilon)$.

L -группы ассоциированной антиструктуры изоморфны группам Браудера–Ливси

$$L_*(\mathbb{Z}\pi, \alpha, \varepsilon b) \cong LN_*(\pi \rightarrow G, w).$$

ПРИМЕР 2.5. Каждая группа π с ориентацией w дает геометрическую антиструктуру (π, w, θ, b) , где $\theta = \text{Id}$ является тождественным отображением, а $b = e$ – единичный элемент. Тогда $G = \pi \oplus \mathbb{Z}/2$.

ПРИМЕР 2.6. Пусть π является циклической группой $\mathbb{Z}/2^{r+1}$ с образующей x , $b = x^{2^r}$, $\theta(x) = x^{-1}$. Тогда вложение i будет стандартным вложением циклической группы π в кватернионную 2-группу G .

Морфизм антиструктур

$$f: (R, \alpha, u) \rightarrow (R', \alpha', u')$$

задается таким кольцевым гомоморфизмом $f: R \rightarrow R'$, что $f(u) = u'$, $\alpha' f = f \alpha$. Через $\mathcal{RA}$ мы будем обозначать категорию классов скейлинг эквивалентных антиструктур с такими морфизмами.

Определим *морфизм*

$$f: (\pi \rightarrow G, w) \longrightarrow (\pi' \rightarrow G', w') \quad (2.7)$$

вложений индекса 2 групп с ориентациями как такой гомоморфизм $f: G \rightarrow G'$, что $w' f = w$ и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \pi & \rightarrow & G & \rightarrow & \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \cong \\ 1 & \rightarrow & \pi' & \rightarrow & G' & \rightarrow & \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1 \end{array}. \quad (2.8)$$

Через $\mathcal{GI}$ мы обозначим категорию таких точных последовательностей, определенных с точностью до внутренних автоморфизмов, и таких морфизмов.

Для любого кольца R морфизм f , определенный в (2.7), индуцирует морфизм антиструктур

$$f_a: (R\pi, \alpha, -w(t)t^2) \rightarrow (R\pi', \alpha', -w'(f(t))(f(t))^2).$$

Чтобы это увидеть, достаточно проверить условие $\alpha' f_a = f_a \alpha$, где α и α' определяются так же, как в (2.2). Используя соглашение замечания 2.3, получим функтор

$$\mathcal{H}: \mathcal{GI} \rightarrow \mathcal{RA}.$$

Пусть (π, w, θ, b) и (π', w', θ', b') – геометрические антиструктуры с ориентациями ε и ε' соответственно. Мы определим *морфизм ориентированных геометрических антиструктур*

$$f: (\pi, \varepsilon) \rightarrow (\pi', \varepsilon') \quad (2.9)$$

как гомоморфизм $f: \pi \rightarrow \pi'$, удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad w' f(g) &= w(g) \quad \forall g \in \pi, \\ \text{(ii)} \quad \theta' f(g) &= f \theta(g) \quad \forall g \in \pi, \\ \text{(iii)} \quad f(b) &= b' \quad \text{и} \quad \varepsilon = \varepsilon' \circ f. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Обозначим через $\mathcal{GA}$ категорию скейлинг эквивалентных ориентированных геометрических антиструктур с этими морфизмами.

Отображение f определяет отображение $\mathcal{S}(f)$ вложений индекса 2 групп с ориентациями $\mathcal{S}(\pi, \theta, w, b, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{S}(\pi', \theta', w', b', \varepsilon')$. Таким образом, отображение $\mathcal{S}$ является функтором

$$\mathcal{S}: \mathcal{GA} \rightarrow \mathcal{GI}.$$

При выполнении условий (2.10) отображение f индуцирует морфизм ассоциированных антиструктур для кольца R

$$\mathcal{F}(f): (R\pi, \alpha, \varepsilon b) \rightarrow (R\pi', \alpha', \varepsilon' b'), \quad (2.11)$$

и, таким образом, мы получаем функтор $\mathcal{F}$ из категории ориентированных геометрических антиструктур $\mathcal{GA}$ в категорию $\mathcal{RA}$.

Из определений следует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{GA} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{RA} \\ \mathcal{S} \searrow & & \nearrow \mathcal{H} \\ & \mathcal{GI} & \end{array}.$$

Рассмотрим теперь морфизм геометрических антиструктур

$$i: (\pi, w, \theta, b) \rightarrow (\pi', w', \theta', b'),$$

для которого отображение i является вложением $\pi \rightarrow \pi'$ индекса 2. В этом случае мы можем отождествить группу π с подгруппой π' , b с b' и w с w' . Такое вложение индекса 2 мы обозначим через $(\pi \rightarrow \pi', w, \theta, b)$ и будем называть его *вложением индекса 2 с геометрической антиструктурой*. Мы можем снабдить это вложение ориентацией ε .

Напомним определение квадратичного расширения антиструктур [11]. Пусть (R, α, u) – антиструктура и (ρ, a) – структура на кольце R , т.е. ρ является автоморфизмом кольца R , $a \in R^*$ и $\rho(a) = a$, $\rho^2(x) = axa^{-1}$ для любого $x \in R$. *Квадратичным расширением антиструктуры* (R, α, u) относительно структуры (ρ, a) называется антиструктура (S, α, u) , где $S = R[t]/(t^2 - a)$, $tx = \rho(x)t$, $\alpha(t)t \in R$ и $\alpha^2(t) = utu^{-1}$.

Обозначим через i вложение антиструктур

$$(R, \alpha, u) \rightarrow (S, \alpha, u)$$

и через γ – автоморфизм кольца S над R , заданный формулой $\gamma(x + yt) = (x - yt)$, $x, y \in R$. Автоморфизм ρ продолжается на кольцо S по формуле $\rho(x + yt) = t(x + yt)t^{-1}$, $x, y \in R$. Имеется другая антиструктура $(S, \tilde{\alpha}, \tilde{u})$ на кольце S , где $\tilde{\alpha} = \rho\gamma\alpha$, $\tilde{u} = -t\alpha(t^{-1})u$. Так как $\tilde{u} \in R$ и кольцо R является $\tilde{\alpha}$ -инвариантным, то антиструктура $(R, \tilde{\alpha}, \tilde{u})$ определена. Квадратичное расширение антиструктур

$$(R, \tilde{\alpha}, \tilde{u}) \rightarrow (S, \tilde{\alpha}, \tilde{u})$$

совпадает с гомоморфизмом i как отображение колец.

Пусть $(\pi \rightarrow G, w, \theta, b, \varepsilon)$ является вложением индекса 2 ориентированных геометрических антиструктур. Для любого $t \in G \setminus \pi$ это вложение определяет квадратичное расширение ассоциированных антиструктур

$$(R\pi, \alpha, u) \rightarrow (RG, \alpha, u)$$

относительно структуры (ρ, a) , где $u = \varepsilon b$, $\alpha(\Sigma r_g g) = \Sigma w(g)r_g \theta(g^{-1})$, $a = t^2$, $\rho(\Sigma r_g g) = \Sigma r_g t g t^{-1}$, $r_g \in R$, $g \in G$. Чтобы это увидеть, достаточно проверить условие $\alpha(t)t \in R\pi$, которое очевидно, поскольку $\theta(\pi) = \pi$. Следовательно, определено квадратичное расширение антиструктур

$$(R\pi, \tilde{\alpha}, \tilde{u}) \rightarrow (RG, \tilde{\alpha}, \tilde{u}).$$

Антиструктура $(R\pi, \tilde{\alpha}, \tilde{u})$ зависит от $t \in G \setminus \pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Отметим, что $\tilde{u} = -\varepsilon w(t)t\theta(t)b$,

$$\tilde{\alpha}(t) = \rho\gamma\alpha(t) = -w(t)\rho\theta(t^{-1})$$

и антиавтоморфизм $\tilde{\alpha}$ задается на кольце $R\pi$ формулой

$$\tilde{\alpha}(\Sigma r_x x) = \Sigma r_x w(x)t\theta(x^{-1})t^{-1} = \Sigma r_x w(x)\rho\theta(x^{-1}), \quad r_x \in R, \quad x \in \pi.$$

ЛЕММА 2.13. Пусть $\tau = vt(v \in \pi)$ – другой элемент из $G \setminus \pi$. Антиструктура $(R\pi, \tilde{\alpha}', \tilde{u}')$, которая получается с использованием элемента τ вместо t , будет скейлинг эквивалентна антиструктуре $(R\pi, \tilde{\alpha}, \tilde{u})$. Антиструктура $(RG, \tilde{\alpha}', \tilde{u}')$ будет скейлинг эквивалентна антиструктуре $(RG, \tilde{\alpha}, \tilde{u})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя замечание 2.12, мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(x) &= w(x)(vt)\theta(x^{-1})(vt)^{-1} = v\tilde{\alpha}(x)v^{-1} \quad \forall x \in \pi, \\ \tilde{\alpha}'(t) &= \tilde{\alpha}'(v^{-1}vt) = \tilde{\alpha}'(v^{-1})\tilde{\alpha}'(vt) \\ &= [w(v^{-1})(vt)\theta(v)(vt)^{-1}] [-w(vt)(vt)\theta((vt)^{-1})(vt)^{-1}] \\ &= -w(t)vt\theta(t^{-1})(vt)^{-1} = v\tilde{\alpha}(t)v^{-1}, \\ \tilde{u}' &= -\varepsilon w(vt)vt\theta(vt)b, \\ -v\tilde{\alpha}(v^{-1})\tilde{u} &= vw(v)t\theta(v)t^{-1}(-\varepsilon)w(t)t\theta(t)b = -\varepsilon w(vt)vt\theta(vt)b. \end{aligned}$$

Следовательно, используя соглашение замечания 2.3, получаем, что класс антиструктуры $(R\pi, \tilde{\alpha}, \tilde{u})$ будет независим от $t \in G \setminus \pi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. Пусть $(\pi \rightarrow G, w, \theta, b)$ – вложение индекса 2 с ориентацией ε . Тогда существует такая геометрическая антиструктура $(\pi, w, \tilde{\theta}, \tilde{b})$ с ориентацией $\tilde{\varepsilon}$, что

$$\mathcal{F}(\pi, w, \tilde{\theta}, \tilde{b}, \tilde{\varepsilon}) = (R\pi, \tilde{\alpha}, \tilde{u}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in G \setminus \pi$, $\varepsilon' = -w(t)$ и ρ – автоморфизм группы π , заданный формулой $\rho(x) = txt^{-1}$, $x \in \pi$. Теперь определим

$$\tilde{\theta} = \rho \circ \theta, \quad \tilde{b} = -w(t)\varepsilon't\theta(t)b = t\theta(t)b, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon\varepsilon' = -w(t)\varepsilon. \quad (2.15)$$

Далее,

$$\begin{aligned} w\tilde{\theta}(x) &= w(t(\theta(x))t^{-1}) = w\theta(x) = w(x), \\ \tilde{\theta}^2(x) &= (\rho \circ \theta)^2(x) = t[\theta(t(\theta(x))t^{-1})]t^{-1} = t\theta(t)\theta^2(x)\theta(t^{-1})t^{-1} \\ &= t\theta(t)bxb^{-1}(t\theta(t))^{-1} = t\theta(t)bx(t\theta(t)b)^{-1} = \tilde{b}x\tilde{b}^{-1} \quad \forall x \in \pi, \\ w(\tilde{b}) &= w([-w(t)\varepsilon']t\theta(t)b) = w([-w(t)]^2t\theta(t)b) = w(b) = 1, \text{ так как } w(\theta(t)) = w(t), \\ \tilde{\theta}(\tilde{b}) &= t\theta[t\theta(t)b]t^{-1} = t\theta(t)[\theta^2(t)]\theta(b)t^{-1} = t\theta(t)[tb^{-1}]bt^{-1} = t\theta(t)b = \tilde{b}. \end{aligned}$$

Теперь условия (2.1) выполнены. Для ассоциированной антиструктуры мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}\tilde{b} &= -w(t)\varepsilon t\theta(t)b = \tilde{u}, \\ w(g)\tilde{\theta}(g^{-1}) &= w(g)\rho\theta(g^{-1}) = \tilde{\alpha}(g^{-1}), \quad g \in \pi. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. Пусть i – вложение индекса 2 геометрических антиструктур $(\pi \rightarrow G, w, \theta, b)$ с ориентацией ε . Тогда существует такое вложение индекса 2 $\tilde{i}$ геометрических антиструктур $(\pi \rightarrow G, \tilde{w}, \tilde{\theta}, \tilde{b})$ с ориентацией $\tilde{\varepsilon}$, для которого $\mathcal{F}(\tilde{i})$ является квадратичным расширением $(R\pi, \tilde{\alpha}, \tilde{u}) \rightarrow (RG, \tilde{\alpha}, \tilde{u})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{w}(t) = -w(t)$, $\tilde{w}|_{\pi} = w$ и $\tilde{\theta}, \tilde{b}, \tilde{\varepsilon}$ определены формулами (2.15). Тогда $\tilde{w}(t)\tilde{\theta}(t^{-1}) = -w(t)\rho\theta(t^{-1}) = \tilde{\alpha}(t)$ и результат следует из предложения 2.14.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.17. В условиях предложения 2.16 антиструктуры $\mathcal{F}(G, \tilde{w}, \tilde{\theta}, \tilde{b}, \tilde{\varepsilon})$ и $\mathcal{F}(G, \tilde{w}, \theta, b, \varepsilon)$ будут скейлинг эквивалентны. В частности, соответствующие L -группы будут изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение ассоциированной антиструктуры, легко проверить, что скейлинг задается элементом t^{-1} .

ПРИМЕР 2.18. Мы можем рассматривать любое вложение индекса 2 групп с ориентацией $(\pi \rightarrow G, w)$ как вложение индекса 2, снабженное геометрической антиструктурой $(\pi \rightarrow G, w, \text{Id}, e)$ с ориентацией $\varepsilon = 1$. Тогда $\theta = \text{Id}$ и из (2.15) мы имеем $\tilde{\theta}(x) = txt^{-1}$, $\tilde{e} = t\theta(t)e = t^2$, $\tilde{\varepsilon} = -w(t)\varepsilon = -w(t)$, $t \in G \setminus \pi$ для любого $x \in \pi$. Следовательно, $\mathcal{F}(\pi, w, \text{Id}, \tilde{e}, \tilde{1}) = (R\pi, \beta, -w(t)t^2)$, где $\beta(x) = w(x)txt^{-1}$ для любого $x \in \pi$ и $\beta(r) = r$ для любого $r \in R$. В случае $R = \mathbb{Z}$

$$L_n(\mathcal{F}(\pi, w, \text{Id}, \tilde{e}, \tilde{1})) = L_n(\mathbb{Z}\pi, \beta, -w(t)t^2) = LN_n(\pi \rightarrow G, w).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.19. *Геометрической диаграммой групп* называется коммутативный квадрат ориентированных геометрических антиструктур

$$\begin{array}{ccc} (\pi, w, \theta, b, \varepsilon) & \rightarrow & (\rho, w', \theta', b', \varepsilon') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G, w, \theta, b, \varepsilon) & \rightarrow & (H, w', \theta', b', \varepsilon') \end{array},$$

в котором вертикальные отображения являются вложениями индекса 2 геометрических антиструктур, а горизонтальные отображения $\pi \rightarrow \rho, G \rightarrow H$ являются эпиморфизмами.

ПРИМЕР 2.20. Пусть F – коммутативная диаграмма групп (1.2) в случае одностороннего подмногообразия. Отметим, что все отображения в квадрате F согласованы с ориентациями, кроме отображения $B \rightarrow D$. Это отображение коммутирует с гомоморфизмом ориентации на образе вертикального отображения, но не коммутирует вне этого образа. Для изучения алгебраических свойств L -функторов на таких квадратах мы изменим ориентацию на группе B вне образа вертикального отображения, которое является вложением индекса 2. После такого изменения все гомоморфизмы в квадрате F станут совместимы с ориентациями, и мы можем рассматривать квадрат F как геометрическую диаграмму групп

$$F = \begin{pmatrix} (A, w, \text{Id}, e, 1) & \xrightarrow{f} & (C, w', \text{Id}, e, 1) \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ (B, w, \text{Id}, e, 1) & \xrightarrow{g} & (D, w', \text{Id}, e, 1) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Пусть $t \in B \setminus A, \tau = g(t) \in D \setminus C$. Тогда существует геометрическая диаграмма групп

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} (A, w, \rho, t^2, -w(t)) & \xrightarrow{f} & (C, w', \rho', \tau^2, -w'(\tau)) \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ (B, w, \rho, t^2, -w(t)) & \xrightarrow{g} & (D, w', \rho', \tau^2, -w'(\tau)) \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

где $\rho(x) = \tilde{\text{Id}}(x) = txt^{-1}$ для любого $x \in B$ и $\rho'(y) = \tilde{\text{Id}}(y) = \tau y \tau^{-1}$ для любого $y \in D$.

Для $R = \mathbb{Z}$ квадрат антиструктур $\mathcal{F}(\tilde{F})$ индуцирует квадрат L -групп

$$\begin{array}{ccc} LN_n(A \rightarrow B, w) & \longrightarrow & LN_n(C \rightarrow D, w') \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_n(B^-) & \longrightarrow & L_n(D^-) \end{array}, \quad (2.23)$$

который получается с помощью изоморфизма (2.2) и скейлинг эквивалентности. Здесь индекс “ $-$ ” обозначает изменение ориентации на элементах t и τ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.24. В работах [9], [10] термин “геометрическая диаграмма групп” используется только для диаграммы (1.1), в которой горизонтальные отображения являются эпиморфизмами, а вертикальные отображения – вложениями индекса 2.

§ 3. LS и LP -группы от геометрических диаграмм групп

В этом параграфе мы определяем LS и LP -группы и описываем их свойства для геометрических диаграмм групп

$$F = \begin{pmatrix} (\pi, w, \theta, b, \varepsilon) & \rightarrow & (\rho, w', \theta', b', \varepsilon') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G, w, \theta, b, \varepsilon) & \rightarrow & (H, w', \theta', b', \varepsilon') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & \xrightarrow{f} & \rho \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ G & \xrightarrow{g} & H \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Если это не вызывает недоразумений, будем иногда писать π вместо $(\pi, w, \theta, b, \varepsilon)$. Мы будем использовать аналогичные соглашения для отображений и квадратов геометрических антиструктур.

Для кольца T квадрат F определяет *геометрическую диаграмму антиструктур* (см. [9])

$$\Phi = \mathcal{F}(F) = \begin{pmatrix} (R, \alpha, u) & \xrightarrow{f} & (P, \beta, v) \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ (S, \alpha, u) & \xrightarrow{g} & (Q, \beta, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \rightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \rightarrow & Q \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где $R = T\pi$, $P = T\rho$, $S = TG$ и $Q = TH$ являются кольцами с ассоциированными антиструктурами. Мы будем обозначать индуцированное отображение ассоциированных антиструктур так же, как соответствующее отображение геометрических антиструктур. В квадрате (3.2) вертикальные отображения являются квадратичными расширениями антиструктур, а горизонтальные отображения – эпиморфизмами антиструктур.

Следовательно (см. [9], [10]), существует геометрическая диаграмма антиструктур

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} (R, \tilde{\alpha}, \tilde{u}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (P, \tilde{\beta}, \tilde{v}) \\ \downarrow \tilde{i} & & \downarrow \tilde{j} \\ (S, \tilde{\alpha}, \tilde{u}) & \xrightarrow{\tilde{g}} & (Q, \tilde{\beta}, \tilde{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R} & \rightarrow & \tilde{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{S} & \rightarrow & \tilde{Q} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим геометрическую диаграмму групп

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} (\pi, \tilde{w}, \tilde{\theta}, \tilde{b}, \tilde{\varepsilon}) & \rightarrow & (\rho, \tilde{w}', \tilde{\theta}', \tilde{b}', \tilde{\varepsilon}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G, \tilde{w}, \tilde{\theta}, \tilde{b}, \tilde{\varepsilon}) & \rightarrow & (H, \tilde{w}', \tilde{\theta}', \tilde{b}', \tilde{\varepsilon}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\pi} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{\rho} \\ \downarrow \tilde{i} & & \downarrow \tilde{j} \\ \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{H} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

для которой $\mathcal{F}(\tilde{F}) = \tilde{\Phi}$. Существование такой диаграммы следует из предложений 2.14, 2.16.

Пусть теперь T – фиксированное кольцо с 1. Следуя работам [12], [13], мы определим L -группы геометрической антиструктуры как L -группы ассоциированной антиструктуры. Относительные L -группы мы определим аналогично. Так, например, имеем

$$L_*(\pi) = L_*(\pi, w, \theta, b, \varepsilon) = L_*(R, \alpha, u), \quad L_*(\tilde{f}) = L_*(\tilde{R} \rightarrow \tilde{P}).$$

Пусть G^- обозначает геометрическую антиструктуру $(G, \tilde{w}, \theta, b, \varepsilon)$, а H^- обозначает геометрическую антиструктуру $(H, \tilde{w}', \theta', b', \varepsilon')$. Тогда определены

квадратичные расширения антиструктур $(\pi \rightarrow G, \tilde{w}, \theta, b, \varepsilon) = (\pi \rightarrow G^-)$ и $(\rho \rightarrow H, \tilde{w}', \theta', b', \varepsilon') = (\rho \rightarrow H^-)$. Обозначим эти расширения i_- и j_- соответственно.

Из предложения 2.17 следуют изоморфизмы

$$L_*(\tilde{G}) \cong L_*(G^-), \quad L_*(\tilde{H}) \cong L_*(H^-), \quad L_*(\tilde{g}) \cong L_*(g^-),$$

где g^- обозначает морфизм $G^- \rightarrow H^-$, заданный посредством g .

Существуют относительные L -группы $L_*(i^!)$, $L_*(i_-^!)$, $L_*(j^!)$ и $L_*(j_-^!)$, входящие в соответствующие точные последовательности для отображений трансфера. Обозначим через $L_*((i_-, j_-)^!) = L_*(F_-^!)$ относительные группы, входящие в точную последовательность

$$\rightarrow L_*(g^-) \rightarrow L_*(f) \rightarrow L_*(F_-^!) \rightarrow$$

для отображения трансфера относительных групп.

В работах [9], [10] группы LS_* и LP_* определены для произвольной геометрической диаграммы антиструктур. Следовательно, мы можем определить LS_* и LP_* -группы для геометрической диаграммы групп F как соответствующие группы геометрической диаграммы антиструктур $\Phi = \mathcal{F}(F)$:

$$LS_n(F) \stackrel{\text{def}}{=} LS_n(\Phi), \quad LP_n(F) \stackrel{\text{def}}{=} LP_n(\Phi) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \bmod 4. \quad (3.5)$$

В частности, мы обозначим через $LN_*(\pi \rightarrow G, w, \theta, b, \varepsilon)$ группы LS_* для геометрической диаграммы

$$F = \begin{pmatrix} (\pi, w, \theta, b, \varepsilon) & \rightarrow & (\pi, w, \theta, b, \varepsilon) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G, w, \theta, b, \varepsilon) & \rightarrow & (G, w, \theta, b, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

в которой горизонтальные отображения тождественны.

Напомним свойства LS и LP -групп для геометрических диаграмм. Результаты здесь являются переформулировкой результатов для случая геометрических диаграмм антиструктур (см. [1], [2], [6], [9], [10]).

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть F – геометрическая диаграмма групп (3.1). Тогда существуют коммутативные диаграммы точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+1}(G^-) & \longrightarrow & L_{n+2}(j) & \longrightarrow & L_{n+2}(F) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & L_{n+2}(i) & & LS_n(F) & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \rightarrow & L_{n+3}(F) & \longrightarrow & L_n(\tilde{\pi}) & \longrightarrow & L_n(G^-) & \rightarrow \end{array}, \quad (3.8)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+1}(G^-) & \longrightarrow & L_{n+2}(j) & \longrightarrow & L_n(\tilde{\rho}) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & L_{n+1}(H^-) & & LS_n(F) & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \rightarrow & L_{n+1}(\tilde{\rho}) & \longrightarrow & L_{n+1}(g^-) & \longrightarrow & L_n(G^-) & \rightarrow \end{array}, \quad (3.9)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+1}(\tilde{\rho}) & \longrightarrow & L_{n+1}(g^-) & \longrightarrow & L_{n+2}(F) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & L_{n+1}(\tilde{f}) & & LS_n(F) & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \rightarrow & L_{n+3}(F) & \longrightarrow & L_n(\tilde{\pi}) & \longrightarrow & L_n(\tilde{\rho}) & \rightarrow \end{array}. \quad (3.10)$$

ПРИМЕР 3.11. Пусть F – геометрическая диаграмма (3.6). Тогда $LN_*(\pi \rightarrow G) = LS_*(F) \cong L_*(\tilde{\pi})$, как следует из диаграммы (3.8).

ТЕОРЕМА 3.12. В предположениях теоремы 3.7 существуют следующие диаграммы точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+1}(G^-) & \longrightarrow & L_{n+1}(\rho) & \longrightarrow & L_{n+1}(f) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & L_{n+1}(\pi) & & LP_n(F) & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \rightarrow & L_{n+2}(f) & \longrightarrow & L_{n+1}(i_-^!) & \longrightarrow & L_n(G^-) & \rightarrow \end{array}, \quad (3.13)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+2}(j_-^!) & \longrightarrow & L_{n+1}(g_-) & \longrightarrow & L_n(G^-) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & L_{n+1}(H^-) & & LP_n(F) & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \rightarrow & L_{n+1}(G^-) & \longrightarrow & L_{n+1}(\rho) & \longrightarrow & L_{n+1}(j_-^!) & \rightarrow \end{array}, \quad (3.14)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+2}(f) & \longrightarrow & L_{n+1}(i_-^!) & \longrightarrow & L_{n+1}(j_-^!) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & L_{n+2}(F_-^!) & & LP_n(F) & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \rightarrow & L_{n+2}(j_-^!) & \longrightarrow & L_{n+1}(g_-) & \longrightarrow & L_{n+1}(f) & \rightarrow \end{array}, \quad (3.15)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+1}(\rho) & \longrightarrow & L_{n+1}(H) & \longrightarrow & LS_{n-1}(F) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & LP_n(F) & & L_{n+1}(j) & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \rightarrow & LS_n(F) & \longrightarrow & L_n(G^-) & \longrightarrow & L_n(\rho) & \rightarrow \end{array}. \quad (3.16)$$

Диаграмма (3.16) совпадает с диаграммой (1.3) в случае геометрической диаграммы групп (1.2).

ПРИМЕР 3.17. Пусть F – геометрическая диаграмма (3.6). Тогда, как следует из диаграммы (3.15), $LP_*(F) \cong L_{*+1}(i_-^!) \cong L_{*+1}(j_-^!)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.18. Используя соглашения §1, мы можем рассматривать все L -группы в этом параграфе как L -группы с декорацией “ s ”. Аналогичные результаты имеют место также для L -групп с декорациями “ p ” или “ h ”.

§4. LS^p и LP^p -группы для конечных 2-групп

В этом параграфе мы рассматриваем только случай групп с декорациями “ p ”. Далее LS_* обозначает LS_*^p , LP_* обозначает LP_*^p и аналогично для L -групп, если это не вызывает недоразумений. В остальном мы сохраняем обозначения §3 в случае $T = \mathbb{Z}$; например,

$$L_*(\pi) = L_*^p(\pi, w, \theta, b, \varepsilon) = L_*^p(\mathbb{Z}\pi, \alpha, u),$$

где $(\mathbb{Z}\pi, \alpha, u)$ – ассоциированная антиструктура.

Мы будем использовать нижний индекс 2 на объекте для L_*^p , LS_*^p и LP_*^p -групп в случае $T = \widehat{\mathbb{Z}}_2$. Например,

$$L_*(\pi_2) = L_*^p(\pi_2) = L_*^p(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi, \alpha, u),$$

где $(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi, \alpha, u)$ – ассоциированная антиструктура.

Пусть $L_*^{\text{rel}}(\pi)$ обозначает относительную L -группу $L_*(\mathbb{Z}\pi \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_2\pi, \alpha, u)$ для геометрической антиструктуры $\pi = (\pi, w, \theta, b, \varepsilon)$. Аналогичное определение мы будем использовать для LS_* , LP_* , LN_* и относительных L -групп. Следовательно, мы имеем точные последовательности

$$\rightarrow L_*(\pi) \rightarrow L_*(\pi_2) \rightarrow L_*^{\text{rel}}(\pi) \rightarrow, \quad (4.1)$$

$$\rightarrow LP_*(F) \rightarrow LP_*(F_2) \rightarrow LP_*^{\text{rel}}(F) \rightarrow, \quad (4.2)$$

$$\rightarrow LS_*(F) \rightarrow LS_*(F_2) \rightarrow LS_*^{\text{rel}}(F) \rightarrow. \quad (4.3)$$

ТЕОРЕМА 4.4. *Теоремы 3.7 и 3.12 верны в случае групп, снабженных верхним индексом “rel”.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Относительные версии этих диаграмм получаются стандартными методами с использованием L -спектров (см. [20], [21]).

Пусть теперь в геометрической диаграмме (3.1) группы π , ρ , G и H являются конечными 2-группами. Сначала мы опишем $LS_*(F_2)$ и $LP_*(F_2)$ -группы и некоторые естественные отображения в случае $T = \widehat{\mathbb{Z}}_2$.

ТЕОРЕМА 4.5 [12]. *Для любой геометрической антиструктуры на конечной 2-группе π имеет место изоморфизм*

$$L_n(\pi_2) = L_n^p(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi, \alpha, u) \xrightarrow{\cong} L_n^p(\mathbb{Z}/2, \text{Id}, 1) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

ЛЕММА 4.6. *Пусть f – произвольный морфизм геометрических антиструктур $(\pi, w, \theta, b, \varepsilon) \rightarrow (\rho, w', \theta', b', \varepsilon')$, тогда индуцированное отображение $f_*: L_n^p(\pi_2) \rightarrow L_n^p(\rho_2)$ является изоморфизмом для любого $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$.*

В частности,

$$L_n^p(F_2) = L_n^p(f_2) = L_n^p(g_2) = L_n^p(j_2) = L_n^p(i_2) = 0$$

для геометрической диаграммы (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фактически результат следует (см. [12]) из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_n^p(\pi_2) & \xrightarrow{f_*} & L_n^p(\rho_2) \\ \searrow \cong & & \swarrow \cong \\ & L_n^p(\mathbb{Z}/2, \text{Id}, 1) & \\ & \parallel & \\ & \mathbb{Z}/2 & \end{array}.$$

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть в геометрической диаграмме (3.1) группы π , ρ , G и H являются конечными 2-группами. Тогда

$$LS_n^p(F_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим длинную точную последовательность

$$\rightarrow L_{n+1}(g_2^-) \rightarrow LS_n(F_2) \rightarrow L_n(\tilde{\rho}) \rightarrow$$

из диаграммы (3.10), где g_2^- – морфизм геометрических антиструктур. Теперь результат следует из леммы 4.6.

ЛЕММА 4.8. Пусть $i: (\pi, w, \theta, b, \varepsilon) \rightarrow (G, w, \theta, b, \varepsilon)$ – вложение индекса 2 геометрических антиструктур. Тогда отображения трансфера $(i^!): L_n^p(G_2) \rightarrow L_n^p(\pi_2)$, $(i_-^!): L_n^p(G_2^-) \rightarrow L_n^p(\pi_2)$ тривиальны и

$$L_n^p((i_{\pm}^!)_2) = \mathbb{Z}/2 \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму (3.16) для квадрата (3.6), в котором вертикальные отображения совпадают с отображением i :

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n+1}(\pi_2) & \xrightarrow{i_*} & L_{n+1}(G_2) & \longrightarrow & L_{n-1}(\tilde{\pi}_2) & \rightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & L_{n+1}((i_-^!)_2) & & L_{n+1}(j_2) & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \rightarrow & L_n(\tilde{\pi}_2) & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & L_n(G_2^-) & \xrightarrow{i_-^!} & L_n(\pi_2) & \rightarrow \end{array} \quad (4.9)$$

Строки этой диаграммы будут цепными комплексами. Теперь тривиальность отображения $i_-^!$ (см. [12]) следует из леммы 4.6. Следовательно, относительная точная последовательность для отображения $i_-^!$ дает точные последовательности

$$0 \rightarrow L_n(\pi_2) \rightarrow L_n((i_-^!)_2) \rightarrow L_{n-1}(G_2) \rightarrow 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \pmod{4},$$

и результат следует из теоремы 4.5. Результат для отображения $i^!$ следует из аналогичной диаграммы, построенной для морфизма $\pi \rightarrow G^-$ геометрических антиструктур.

ТЕОРЕМА 4.10. В предположениях теоремы 4.7

$$LP_n^p(F_2) = \mathbb{Z}/2 \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим длинную точную последовательность

$$\rightarrow L_{n+2}(f_2) \rightarrow L_{n+1}((i_-^!)_2) \rightarrow LP_n(F_2) \rightarrow$$

из диаграммы (3.15), где $L_{n+2}(f_2) = 0$ по лемме 4.6.

Теперь мы опишем относительные члены в точных последовательностях (4.1) и (4.2). Напомним необходимые факты из работы [12].

Имеет место разложение группового кольца $\mathbb{Q}\pi$ в прямую сумму простых алгебр

$$\mathbb{Q}\pi = \prod A_\phi, \quad (4.11)$$

где $A_\phi = a_\phi(\mathbb{Q}\pi)$, для некоторого центрального идемпотента a_ϕ . Мы имеем $1 = \sum a_\phi$, и каждый идемпотент a_ϕ не выражается как сумма нетривиальных центральных идемпотентов. Пусть α – антиавтоморфизм $\mathbb{Q}\pi$, индуцированный геометрической антиструктурой $(\pi, w, \theta, b, \varepsilon)$. Обозначим через $a_{\alpha(\phi)}$ идемпотент $\alpha(a_\phi)$. Это дает разложение ассоциированной антиструктуры

$$(\mathbb{Q}\pi, \alpha, u) = \prod_{\phi=\alpha(\phi)} (A_\phi, \alpha_\phi, u_\phi) \times \prod_{\phi \cong \alpha(\phi)} (A_\phi \times A_{\alpha(\phi)}, \alpha_\phi \times \alpha_{\alpha(\phi)}, u_\phi \times u_{\alpha(\phi)}),$$

так как α^2 является внутренним автоморфизмом. Произведение по $\phi \cong \alpha(\phi)$ имеет тип GL (произведение простых алгебр, переставляемых антиавтоморфизмом α) и не дает вклада в L -группы. Аналогичное разложение мы имеем для антиструктур $(\mathbb{Z}[1/2]\pi, \alpha, u)$, $(\widehat{\mathbb{Q}}_2\pi, \alpha, u)$. Обозначим

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}[1/2]\pi, \alpha, u) &= \prod_{\phi=\alpha(\phi)} (\Lambda_\phi, \alpha_\phi, u_\phi) \times \prod_{\phi \cong \alpha(\phi)} (\Lambda_\phi \times \Lambda_{\alpha(\phi)}, \alpha_\phi \times \alpha_{\alpha(\phi)}, u_\phi \times u_{\alpha(\phi)}), \\ (\widehat{\mathbb{Q}}_2\pi, \alpha, u) &= \prod_{\phi=\alpha(\phi)} (\widehat{\Lambda}_{\phi_2}, \alpha_\phi, u_\phi) \times \prod_{\phi \cong \alpha(\phi)} (\widehat{\Lambda}_{\phi_2} \times \widehat{\Lambda}_{\alpha(\phi)_2}, \alpha_\phi \times \alpha_{\alpha(\phi)}, u_\phi \times u_{\alpha(\phi)}). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.12 [12]. Для любой геометрической антиструктуры $(\pi, w, \theta, b, \varepsilon)$ мы имеем следующее разложение относительных L -групп ассоциированной антиструктуры

$$L_n^p(\mathbb{Z}\pi \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_2\pi, \alpha, u) \xrightarrow{\cong} L_n^K(\mathbb{Z}[1/2]\pi \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}}_2\pi, \alpha, u) \xrightarrow{\cong} \prod_{\phi=\alpha(\phi)} L_n^{K1}(\Lambda_\phi \rightarrow \widehat{\Lambda}_{\phi_2}, \alpha_\phi, u_\phi).$$

Рассмотрим эпиморфизм $g: (G, w, \theta, b, \varepsilon) \rightarrow (H, w', \theta', b', \varepsilon')$ геометрических антиструктур с конечными 2-группами G и H . Обозначим через g индуцированный эпиморфизм ассоциированных антиструктур

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}G &= \underbrace{\prod_{\phi=\alpha(\phi)} (A_\phi, \alpha_\phi, u_\phi) \times \prod_{\phi \cong \alpha(\phi)} (A_\phi \times A_{\alpha(\phi)}, \alpha_\phi \times \alpha_{\alpha(\phi)}, u_\phi \times u_{\alpha(\phi)})}_{\downarrow g} \\ \mathbb{Q}H &= \underbrace{\prod_{\phi'=\alpha(\phi')} (A_{\phi'}, \alpha_{\phi'}, u_{\phi'}) \times \prod_{\phi' \cong \alpha(\phi')} (A_{\phi'} \times A_{\alpha(\phi')}, \alpha_{\phi'} \times \alpha_{\alpha(\phi')}, u_{\phi'} \times u_{\alpha(\phi')})}_{\downarrow g}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ядро эпиморфизма g является двусторонним идеалом I кольца $\mathbb{Q}G$, и отображение $\mathbb{Q}G/I \rightarrow \mathbb{Q}H$ будет изоморфизмом. Поскольку это кольцо полупросто, идеал I является прямым произведением некоторых простых алгебр $\prod_1 A_\phi$ из (4.13). Теперь мы можем записать разложение (4.13) алгебры $\mathbb{Q}G$ в форме

$$\mathbb{Q}G = \prod_1 A_{\phi_1} \times \prod_2 A_{\phi_2} = P_1 \times P_2,$$

где $g|_{\prod_2} = g|_{P_2}$ — изоморфизм. Отображение $g|_{P_2}$ будет изоморфизмом антиструктур, так как $g: \mathbb{Q}G \rightarrow \mathbb{Q}H$ — морфизм антиструктур. Следовательно, отображение $g: \mathbb{Q}G \rightarrow \mathbb{Q}H$ является проекцией антиструктур

$$g: P_1 \times P_2 \rightarrow P_2. \quad (4.14)$$

ЛЕММА 4.15. *Эпиморфизм g геометрических антиструктур индуцирует расщепляющиеся проекции $g_*: L_n^{\text{rel}}(G) \rightarrow L_n^{\text{rel}}(H)$ для любого $n = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$, и*

$$L_n^{\text{rel}}(G) \cong L_{n+1}^{\text{rel}}(g) \oplus L_n^{\text{rel}}(H).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.12 следуют изоморфизмы

$$\begin{aligned} L_n^{\text{rel}}(G) &= L_n^p(\mathbb{Z}G \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_2 G, \alpha, u) \xrightarrow{\cong} L_n^K(\mathbb{Z}[1/2]G \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}}_2 G, \alpha, u), \\ L_n^{\text{rel}}(H) &= L_n^p(\mathbb{Z}H \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_2 H, \alpha, u) \xrightarrow{\cong} L_n^K(\mathbb{Z}[1/2]H \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}}_2 H, \alpha, u). \end{aligned}$$

Рассмотрим коммутативный квадрат антиструктур

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}[1/2]G, \alpha, u) & \rightarrow & (\widehat{\mathbb{Q}}_2 G, \alpha, u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{Z}[1/2]H, \alpha', u') & \rightarrow & (\widehat{\mathbb{Q}}_2 H, \alpha', u') \end{array},$$

в котором вертикальные отображения индуцированы g . Как следует из (4.14), мы можем записать этот квадрат в форме

$$\begin{array}{ccc} R \times S & \rightarrow & \widehat{R}_2 \times \widehat{S}_2 \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ R & \rightarrow & \widehat{R}_2 \end{array},$$

где

$$\begin{aligned} R \times S &= (\mathbb{Z}[1/2]G, \alpha, u), & \widehat{R}_2 \times \widehat{S}_2 &= (\widehat{\mathbb{Q}}_2 G, \alpha, u), \\ \widehat{R}_2 &= (\widehat{\mathbb{Q}}_2 H, \alpha', u'), & R &= (\mathbb{Z}[1/2]H, \alpha', u'). \end{aligned}$$

Вертикальные отображения являются естественными проекциями, а верхнее отображение является прямым произведением отображений $R \rightarrow \widehat{R}_2$ и $S \rightarrow \widehat{S}_2$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & L_n^K(R) & \rightarrow & L_n^K(\widehat{R}_2) & \rightarrow & L_n^{\text{rel}}(H) & \rightarrow \\
 & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \chi & \\
 \rightarrow & L_n^K(R \times S) & \rightarrow & L_n^K(\widehat{R}_2 \times \widehat{S}_2) & \rightarrow & L_n^{\text{rel}}(G) & \rightarrow , \\
 & \downarrow p_* & & \downarrow q_* & & \downarrow g_* & \\
 \rightarrow & L_n^K(R) & \rightarrow & L_n^K(\widehat{R}_2) & \rightarrow & L_n^{\text{rel}}(H) & \rightarrow
 \end{array}$$

где верхний индекс K обозначает K_1 . Здесь верхние вертикальные отображения φ , ψ и χ являются Морита отображениями в циклической L -теории [20; пример 5.12]. Отображение χ существует, так как соответствующая триада L -групп определена. Отображения φ , ψ расщепляют отображения p_* и q_* [20], т.е. отображения $p_* \circ \varphi$ и $q_* \circ \psi$ — изоморфизмы. Следовательно, композиция $g_* \circ \chi$ является изоморфизмом, и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.16. Результаты работы [12] дают полное описание относительных групп $L_n^{\text{rel}}(G)$, $L_n^{\text{rel}}(H)$ в рассматриваемом случае. Следовательно, лемма 4.15 дает группы $L_*^{\text{rel}}(g)$ для любого эпиморфизма антиструктур $g: G \rightarrow H$.

ТЕОРЕМА 4.17. *В предположениях теоремы 4.7 существуют естественные изоморфизмы*

$$LS_n^{\text{rel}}(F) \cong L_{n+1}^{\text{rel}}(g^-) \oplus L_n^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму (3.10) для относительных групп:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \xrightarrow{\tilde{f}_*} & L_{n+1}^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) & \xrightarrow{\tau} & L_{n+1}^{\text{rel}}(g^-) & \longrightarrow & L_{n+2}^{\text{rel}}(F) & \longrightarrow \\
 & \nearrow \quad \searrow \partial & & \nearrow \nu \quad \searrow & & \nearrow \quad \searrow & \\
 & & L_{n+1}^{\text{rel}}(\tilde{f}) & & LS_n^{\text{rel}}(F) & & \\
 & \searrow \quad \nearrow & \searrow \quad \nearrow \sigma & & \searrow p_* \quad \nearrow \partial & & \\
 \longrightarrow & L_{n+3}^{\text{rel}}(F) & \longrightarrow & L_n^{\text{rel}}(\tilde{\pi}) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & L_n^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) & \xrightarrow{\tau}
 \end{array}$$

По лемме 4.15 отображение $\tilde{f}_*$ является эпиморфизмом для всех n . Следовательно, отображение ∂ тривиально. Далее, $\tau = \nu \partial = 0$ и мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow L_{n+1}^{\text{rel}}(g^-) \rightarrow LS_n^{\text{rel}}(F) \xrightarrow{p_*} L_n^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) \rightarrow 0.$$

Пусть $\delta: L_n^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) \rightarrow L_n^{\text{rel}}(\tilde{\pi})$ обозначает правое обратное отображение к отображению $\tilde{f}_*$. Существование этого отображения следует из леммы 4.15. Теперь $p_* \circ (\sigma \circ \delta) = (p_* \circ \sigma) \circ \delta = \tilde{f}_* \circ \delta = \text{Id}$, т.е. отображение $\sigma \circ \delta$ расщепляет отображение p_* , и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.18. *В предположениях теоремы 4.7 существуют естественные изоморфизмы*

$$LP_n^{\text{rel}}(F) = L_{n+1}^{\text{rel}}(g^-) \oplus L_{n+1}^{\text{rel}}(j_-^!) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму (3.14) для относительных L -групп:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & L_{n+2}^{\text{rel}}(j_-^!) & \xrightarrow{\chi} & L_{n+1}^{\text{rel}}(g_-) & \xrightarrow{\sigma} & L_n^{\text{rel}}(G^-) & \rightarrow \\
 & \nearrow \tau \searrow & & \nearrow \partial \searrow \lambda & & \nearrow \nu \searrow g_* & \\
 & & L_{n+1}^{\text{rel}}(H^-) & & LP_n^{\text{rel}}(F) & & \\
 & \searrow g_* \nearrow & \rightarrow & \searrow \nearrow & \rightarrow & \searrow \nearrow & \\
 \rightarrow & L_{n+1}^{\text{rel}}(G^-) & & L_{n+1}^{\text{rel}}(\rho) & \rightarrow & L_{n+1}^{\text{rel}}(j_-^!) & \rightarrow
 \end{array}$$

По лемме 4.15 отображение g_* является эпиморфизмом для всех n . Следовательно, отображение ∂ тривиально. Далее, $\chi = \partial \circ \tau = 0$ и мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow L_{n+1}^{\text{rel}}(g_-) \xrightarrow{\lambda} LP_n^{\text{rel}}(F) \rightarrow L_{n+1}^{\text{rel}}(j_-^!) \rightarrow 0.$$

Как следует из леммы 4.15, существует левое обратное отображение $p: L_n^{\text{rel}}(G^-) \rightarrow L_{n+1}^{\text{rel}}(g_-)$ отображению σ . Следовательно, $(p \circ \nu) \circ \lambda = p \circ (\nu \circ \lambda) = p \circ \sigma = \text{Id}$ и отображение $p \circ \nu$ будет левым обратным к отображению λ . Это доказывает теорему.

Рассмотрим естественное отображение $\Upsilon: F \rightarrow \Psi$ геометрических диаграмм групп

$$\left(\begin{array}{ccc} (\pi, w, \theta, b, \varepsilon) & \xrightarrow{f} & (\rho, w', \theta', b', \varepsilon') \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ (G, w, \theta, b, \varepsilon) & \xrightarrow{g} & (H, w', \theta', b', \varepsilon') \end{array} \right) \xrightarrow{\Upsilon} \left(\begin{array}{ccc} (\rho, w', \theta', b', \varepsilon') & \rightarrow & (\rho, w', \theta', b', \varepsilon') \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ (H, w', \theta', b', \varepsilon') & \rightarrow & (H, w', \theta', b', \varepsilon') \end{array} \right).$$

Отображение Υ индуцирует естественные отображения LS и LP -групп. Тогда по теоремам 4.17, 4.18 мы имеем расщепляющиеся короткие точные последовательности

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow L_{n+1}^{\text{rel}}(g_-) \rightarrow LS_n^{\text{rel}}(F) \rightarrow LS_n^{\text{rel}}(\Psi) \rightarrow 0, \\
 0 &\rightarrow L_{n+1}^{\text{rel}}(g_-) \rightarrow LP_n^{\text{rel}}(F) \rightarrow LP_n^{\text{rel}}(\Psi) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Напомним, что

$$\begin{aligned}
 LS_*^p(\Psi) &\cong LN_*^p(\rho \rightarrow H) = L_*^p(\tilde{\rho}), & LP_*^p(\Psi) &\cong L_{*+1}^p(j_-^!), \\
 LS_*^p(\Psi_2) &\cong LN_*^p((\rho \rightarrow H)_2) = L_*^p(\tilde{\rho}_2), & LP_*^p(\Psi_2) &\cong L_{*+1}^p((j_-^!)_2),
 \end{aligned}$$

и мы имеем аналогичные результаты для “rel”-групп.

Теперь мы можем вычислить все естественные отображения в диаграмме (3.16) для L^{rel} -групп.

ТЕОРЕМА 4.19. *Отображение Υ индуцирует естественное разложение диаграммы*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & L_{n+1}^{\text{rel}}(\rho) & \longrightarrow & L_{n+1}^{\text{rel}}(H) & \longrightarrow & LS_{n-1}^{\text{rel}}(F) & \rightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & LP_n^{\text{rel}}(F) & & L_{n+1}^{\text{rel}}(j) & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \rightarrow & LS_n^{\text{rel}}(F) & \longrightarrow & L_n^{\text{rel}}(G^-) & \longrightarrow & L_n^{\text{rel}}(\rho) & \rightarrow
 \end{array}$$

в прямую сумму двух диаграмм

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & L_{n+1}^{\text{rel}}(\rho) & \longrightarrow & L_{n+1}^{\text{rel}}(H) & \longrightarrow & LN_{n-1}^{\text{rel}}(\rho \rightarrow H) & \rightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & L_{n+1}^{\text{rel}}(j_-^!) & & L_{n+1}^{\text{rel}}(j) & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \rightarrow & LN_n^{\text{rel}}(\rho \rightarrow H) & \longrightarrow & L_n^{\text{rel}}(H^-) & \longrightarrow & L_n^{\text{rel}}(\rho) & \rightarrow \\
 u & & & & & & \\
 \rightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L_n^{\text{rel}}(g^-) & \rightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & L_{n+1}^{\text{rel}}(g_-) & & 0 & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \rightarrow & L_{n+1}^{\text{rel}}(g^-) & \longrightarrow & L_{n+1}^{\text{rel}}(g^-) & \longrightarrow & 0 & \rightarrow
 \end{array}$$

Напомним здесь, что отображения в диаграмме (3.16) для квадрата Ψ в случае “rel”-групп были вычислены в [12].

Точная последовательность (4.3) и теорема 4.7 дают точные последовательности

$$\begin{array}{c}
 0 \rightarrow LS_{2n+1}^{\text{rel}}(F) \xrightarrow{\partial_{2n+1}'} LS_{2n}^p(F) \xrightarrow{\sigma} \underbrace{LS_{2n}^p(F_2)}_{\mathbb{Z}/2} \xrightarrow{\psi} LS_{2n}^{\text{rel}}(F) \xrightarrow{\partial_{2n}'} LS_{2n-1}^p(F) \rightarrow 0, \\
 \quad \quad \quad \parallel \\
 \quad \quad \quad \mathbb{Z}/2
 \end{array} \quad (4.20)$$

где F – геометрическая диаграмма групп (3.1) и $n = 0, 1 \pmod 2$.

Заметим, что [12] дает точные последовательности

$$\begin{array}{c}
 0 \rightarrow L_{2n+1}^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) \xrightarrow{\partial_{2n+1}'} L_{2n}^p(\tilde{\rho}) \xrightarrow{\sigma'} \underbrace{L_{2n}^p(\tilde{\rho}_2)}_{\mathbb{Z}/2} \xrightarrow{\psi'} L_{2n}^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) \xrightarrow{\partial_{2n}'} L_{2n-1}^p(\tilde{\rho}) \rightarrow 0 \\
 \quad \quad \quad \parallel \\
 \quad \quad \quad \mathbb{Z}/2
 \end{array} \quad (4.21)$$

для $n = 0, 1 \pmod 2$. Аналогичные результаты мы имеем для всех других геометрических антиструктур, которые рассматривались выше. Более того, отображение ψ' вычислено в работе [12]. Мы применим эти результаты к вычислению отображений ψ в (4.20).

Пусть $\psi_{\tilde{\rho}} = \psi'$, и рассмотрим аналогичные отображения:

$$\begin{aligned}
 \psi_{G^-} &: \mathbb{Z}/2 \rightarrow L_{2n}^{\text{rel}}(G^-), \\
 \psi_{H^-} &: \mathbb{Z}/2 \rightarrow L_{2n}^{\text{rel}}(H^-), \\
 \psi_{\tilde{\pi}} &: \mathbb{Z}/2 \rightarrow L_{2n}^{\text{rel}}(\tilde{\pi})
 \end{aligned}$$

для $n = 0, 1 \pmod 2$.

ТЕОРЕМА 4.22. *Если по крайней мере одно из отображений $\psi_{\tilde{\rho}}$, ψ_{G^-} или ψ_{H^-} является мономорфизмом, то отображение ψ в точной последовательности (4.20) будет также мономорфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диаграмма (3.9) естественна. Следовательно, существуют отображения точной последовательности (4.20) в аналогичные точные последовательности для групп G^- , H^- и $\tilde{\rho}$. Например, для группы $\tilde{\rho}$ мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \rightarrow & LS_k^{\text{rel}}(F) & \xrightarrow{\partial_k} & LS_{2n}^p(F) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\psi} & LS_{2n}^{\text{rel}}(F) & \xrightarrow{\partial_{2n}} & LS_m^p(F) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \text{epi} & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \text{epi} & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & L_k^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) & \xrightarrow{\partial'_k} & L_{2n}^p(\tilde{\rho}) & \xrightarrow{\sigma'} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\psi'} & L_{2n}^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) & \xrightarrow{\partial'_{2n}} & L_m^p(\tilde{\rho}) & \rightarrow 0 \end{array},$$

где $k = 2n + 1$, $m = 2n - 1$. Здесь вертикальные отображения индуцированы Υ . Теперь в случае, когда $\psi_{\tilde{\rho}}$ взаимно однозначно, получаем результат. Для других групп рассуждения аналогичны.

ТЕОРЕМА 4.23. *Если отображение $\psi_{\tilde{\pi}}$ тривиально, то отображение ψ в точной последовательности (4.20) является также тривиальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует естественное отображение точной последовательности (4.21) для группы $\tilde{\pi}$ в точную последовательность (4.20). Теперь результат получается аналогично доказательству предыдущей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.24. *В предположениях теоремы 4.7 существует точная последовательность*

$$0 \rightarrow L_{2n+2}^{\text{rel}}(g^-) \rightarrow LS_{2n}^p(F) \xrightarrow{\Upsilon_*} L_{2n}^p(\tilde{\rho}) \xrightarrow{\Delta} L_{2n+1}^{\text{rel}}(g^-) \rightarrow LS_{2n-1}^p(F) \xrightarrow{\Upsilon_*} L_{2n-1}^p(\tilde{\rho}) \rightarrow 0,$$

где отображения Υ_* индуцированы отображением Υ , $n = 0, 1 \pmod{2}$. Правое отображение Υ_* расщепляется, и отображение Δ либо нулевое, либо $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{Z}/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим вертикальные столбцы диаграммы из теоремы 4.22 точными последовательностями. Тогда получаем утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.25. $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{Z}/2$ только в случае, когда $\psi' = 0$ и ψ — мономорфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.26. Фактически коммутативная диаграмма теоремы 4.22 дает диаграмму точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & LS_n^p(F) & \rightarrow & L_n^p(\tilde{\rho}_2) & \rightarrow & L_n^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) & \rightarrow \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & L_n^p(\tilde{\rho}) & & LS_n^{\text{rel}}(F) & & \\ & \nearrow & \searrow & \text{mono} \nearrow & \searrow & \nearrow & \\ \rightarrow & L_{n+1}^{\text{rel}}(\tilde{\rho}) & \xrightarrow{0} & L_{n+1}^{\text{rel}}(g^-) & \rightarrow & LS_{n-1}^p(F) & \rightarrow \end{array},$$

где $L_n^p(\tilde{\rho}_2) = \mathbb{Z}/2, 0$ для $n = 0, 1 \pmod{2}$ соответственно.

ЛЕММА 4.27. В предположениях теоремы 4.7 естественные отображения

$$LP_n(F_2) \rightarrow L_{n+1}((j_-^!)_2)$$

из диаграмм (3.14), (3.15) являются изоморфизмами для $n = 0, 1, 2, 3 \pmod 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из рассмотрения диаграммы (3.15).

ТЕОРЕМА 4.28. В предположениях теоремы 4.7 существует следующая диаграмма точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow LP_n^p(F) & \rightarrow & \mathbb{Z}/2 & \rightarrow & L_{n+1}^{\text{rel}}(j_-^!) & \rightarrow & \\
 & \searrow & \nearrow & & \nearrow_{\text{epi}} & \searrow & \\
 & & L_{n+1}^p(j_-^!) & & LP_n^{\text{rel}}(F) & & \\
 & \nearrow & \searrow & \text{mono} \nearrow & \searrow & \nearrow & \\
 \rightarrow L_{n+2}^p(j_-^!) & \xrightarrow{0} & L_{n+1}^{\text{rel}}(g^-) & \rightarrow & LP_{n-1}^p(F) & \rightarrow &
 \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 4.10, 4.18, леммы 4.27 и естественности диаграмм (3.14), (3.15).

Список литературы

1. Wall C. T. C. Surgery on compact manifolds. London: Academic Press, 1970.
2. Ranicki A. A. Exact sequences in the algebraic theory of surgery. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981.
3. Browder W., Livesay G. R. Fixed point free involutions on homotopy spheres // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 242–245.
4. Lopez de Medrano S. Involutions on manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
5. Cappell S. E., Shaneson J. L. Pseudo-free actions // Lecture Notes in Math. 1979. V. 763. P. 395–447.
6. Hambleton I. Projective surgery obstructions on closed manifolds // Lecture Notes in Math. 1982. V. 967. P. 101–131.
7. Ахметьев П. М. Расщепление гомотопических эквивалентностей вдоль одностороннего подмногообразия коразмерности 1 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. №2. С. 211–241.
8. Харишладзе А. Ф. Обобщенный инвариант Браудера–Ливси // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. №2. С. 379–401.
9. Муранов Ю. В. Группы препятствий к расщеплению и квадратичные расширения антиструктур // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. №6. С. 107–132.
10. Муранов Ю. В., Реновиш Д. Группы препятствий к перестройкам и расщеплениям для пары многообразий // Матем. сб. 1997. Т. 188. №3. С. 127–142.
11. Ranicki A. The L-theory of twisted quadratic extensions // Canad. J. Math. 1987. V. 39. P. 345–364.
12. Hambleton I., Taylor L. R., Williams B. An introduction to maps between surgery obstruction groups // Lecture Notes in Math. 1984. V. 1051. P. 49–127.
13. Hambleton I., Taylor L. R., Williams B. Detection theorems for K-theory and L-theory // J. Pure Appl. Algebra. 1990. V. 63. P. 247–299.
14. Wall C. T. C. On the classification of Hermitian forms. VI. Group rings // Ann. of Math. (2). 1976. V. 103. P. 1–80.
15. Hambleton I., Madsen I. On the computation of the projective surgery obstruction groups // K-Theory. 1993. V. 7. №6. P. 537–574.
16. Wall C. T. C. Formulae for surgery obstructions // Topology. 1976. V. 15. P. 189–210.

17. *Новиков С. П.* Алгебраическая конструкция и свойства эрмитовых аналогов К-теории для колец с инволюцией // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 2. С. 253–288.
18. *Wall C. T. C.* Foundations of algebraic L-theory // Lecture Notes in Math. 1973. V. 343. P. 266–300.
19. *Wall C. T. C.* On the axiomatic foundation of the theory of Hermitian forms // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1970. V. 67. P. 243–250.
20. *Hambleton I., Ranicki A., Taylor L.* Round L-theory // J. Pure Appl. Algebra. 1987. V. 47. P. 131–154.
21. *Муранов Ю. В.* Относительные группы Уолла и декорации // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 12. С. 79–100.

Витебский государственный технологический университет;

МакМастерский университет, Онтарио, Канада

E-mail: `mur@vstu.unibel.by`, `hamblton@mcmail.CIS.McMaster.CA`

Поступила в редакцию

12.01.1999