Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Шведов, О комплексном ростке Маслова в абстрактных пространствах,
Матем. сб., 1999, том 190, номер 10, 123–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm434>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:20:50

УДК 517.9

О. Ю. Шведов

О комплексном ростке Маслова в абстрактных пространствах

Для различных эволюционных уравнений на элемент гильбертова пространства используются различные асимптотические методы, позволяющие построить приближенные решения этих уравнений, выражающиеся через зависящие от времени и удовлетворяющие определенным уравнениям элементы гладкого многообразия $\mathcal{U}$ и гильбертова пространства $\mathcal{H}_y$. При достаточно общих предположениях на отображение, сопоставляющее каждой паре $y \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{H}_y$ асимптотическую формулу, исследованы свойства асимптотических решений. Введен аналог понятия комплексного ростка Маслова для абстрактного случая, исследованы его свойства. Рассмотрен аналог теории лагранжевых многообразий с комплексным ростком. В абстрактном случае исследована связь между существованием инвариантного комплексного ростка и устойчивостью решения уравнения на элемент гладкого многообразия $\mathcal{U}$. Полученные результаты могут быть использованы для построения и геометрической интерпретации новых асимптотических решений эволюционных уравнений в случае, если известен некоторый класс асимптотических решений.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение

Наиболее общим методом построения квазиклассических асимптотик в задачах квантовой механики является разработанная В. П. Масловым теория лагранжевых многообразий с комплексным ростком [1], [2] (см. также [3]), которая включает в себя в качестве частных случаев другие квазиклассические методы, такие, как метод ВКБ и осцилляторное приближение. Данная теория позволяет построить приближенные решения уравнений в частных производных с малым параметром при операторе дифференцирования

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\left(t, x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (1)$$

Эти асимптотики $\psi(x, t)$ в каждый момент времени t имеют следующую структуру. В малой окрестности некоторой k -мерной поверхности (размер окрестности порядка $\sqrt{\hbar}$) функция ψ имеет быстро осциллирующий вид, вне этой окрестности ψ экспоненциально мала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01198).

Частным случаем теории лагранжевых многообразий с комплексным ростком при $k = 0$ является теория комплексного ростка в точке, позволяющая построить асимптотические решения уравнения (1), имеющие в каждый фиксированный момент времени t вид волнового пакета с шириной порядка $\sqrt{\hbar}$:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\hbar^{n/4}} e^{\frac{i}{\hbar} S^t} e^{\frac{i}{\hbar} P^t(x - Q^t)} f^t\left(\frac{x - Q^t}{\sqrt{\hbar}}\right), \quad (2)$$

отвечающего движению классической частицы вдоль траектории $(P^t, Q^t) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Одним из возможных способов построения теории лагранжевых многообразий с комплексным ростком является использование теории комплексного ростка в точке [4]–[6] и рассмотрение бесконечной суперпозиции волновых пакетов типа (2):

$$\text{const} \int d\alpha \frac{1}{\hbar^{n/4}} e^{\frac{i}{\hbar} S(\alpha)} e^{\frac{i}{\hbar} P(\alpha)(x - Q(\alpha))} f\left(\alpha, \frac{x - Q(\alpha)}{\sqrt{\hbar}}\right), \quad (3)$$

где α – k -мерный параметр.

Требование, чтобы функция (3) не была экспоненциально малой, приводит к условию изотропности многообразия $dS = P dQ$.

В работе исследуется вопрос об обобщении теории лагранжевых многообразий с комплексным ростком на случай, когда рассматривается проблема построения асимптотических решений уравнений, не относящихся к типу (1), а имеющих более общий вид

$$i \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial t} = H^\varepsilon \psi^\varepsilon, \quad (4)$$

где ψ^ε – неизвестный элемент некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}^\varepsilon$, H^ε – оператор в этом пространстве, ε – устремляемый к нулю малый параметр.

В работах [7]–[10] для некоторых конкретных уравнений типа (4) (таких, как уравнения классической и квантовой механики для стремящегося к бесконечности числа частиц, уравнения для спиновых систем, уравнения в пространстве Фока и т. д.) построены асимптотические решения уравнения (4)

$$\psi_{as}^\varepsilon(t) = K_{y(t)}^\varepsilon f(t), \quad (5)$$

выражающиеся в каждый момент времени t через параметр y , принадлежащий некоторому гладкому многообразию $\mathcal{Y}$, и элемент f некоторого гильбертова пространства $\mathcal{F}$. Многообразие $\mathcal{Y}$ является расширением классического фазового пространства.

Асимптотика (2) относится к типу (5). Действительно, выберем в качестве многообразия $\mathcal{Y}$ $(2n + 1)$ -мерное пространство, $y(t) = (P^t, Q^t, S^t)$, а в качестве $\mathcal{F}$ – пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$. Рассматривая оператор $K_y^\hbar \equiv K_{P, Q, S}^\hbar: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ вида

$$(K_{P, Q, S}^\hbar f)(x) = \frac{1}{\hbar^{n/4}} e^{\frac{i}{\hbar} S} e^{\frac{i}{\hbar} P(x - Q)} f\left(\frac{x - Q}{\sqrt{\hbar}}\right),$$

приводим формулу (2) к виду (5) при $\varepsilon = \hbar$.

Из соотношения

$$K_{P+p, Q+q, S+s}^\hbar = K_{P, Q, S}^\hbar e^{\frac{i}{\hbar}(s - (P + \frac{p}{2})q)} e^{\frac{i}{\sqrt{\hbar}} p \xi - \frac{q}{\sqrt{\hbar}} \frac{\partial}{\partial \xi}},$$

где ξ – аргумент f , вытекают следующие свойства оператора $K_{P, Q, S}^\hbar$.

1. При сдвиге P, Q, S на величину порядка $\hbar$ имеем

$$\|K_{P+\hbar p, Q+\hbar q, S+\hbar s}^{\hbar} f - e^{i(s-Pq)} K_{P,Q,S}^{\hbar} f\| \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0.$$

2. При сдвиге P, Q, S на величину порядка $\sqrt{\hbar}$ для сингулярно зависящего от $\hbar$ числового множителя $c^{\hbar} = e^{\frac{i}{\sqrt{\hbar}}(s-Pq) - \frac{i}{2}pq}$ имеем

$$\|K_{P+\sqrt{\hbar}p, Q+\sqrt{\hbar}q, S+\sqrt{\hbar}s}^{\hbar} f - c^{\hbar} K_{P,Q,S}^{\hbar} e^{i(p\xi - q\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi})} f\| \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0.$$

Аналогично операторы K_y^{ε} , рассмотренные в [7]–[10], удовлетворяет следующим свойствам.

1. При сдвиге параметра y на величину порядка ε оператор K_y^{ε} домножается на регулярный при $\varepsilon \rightarrow 0$ множитель $e^{-i\omega(\delta y)}$,

$$\|K_{y+\varepsilon\delta y}^{\varepsilon} f - e^{-i\omega(\delta y)} K_y^{\varepsilon} f\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (6)$$

выражающийся через значение дифференциальной 1-формы ω на касательном векторе δy к многообразию $\mathcal{Y}$ в точке y . 1-форма ω является аналогом 1-формы действия.

2. Сдвиг параметра y на величину порядка $\sqrt{\varepsilon}$ равносильно преобразованию f ,

$$\|K_{y+\sqrt{\varepsilon}\delta y}^{\varepsilon} f - c^{\varepsilon} K_y^{\varepsilon} e^{i\Omega(\delta y)} f\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (7)$$

где c^{ε} – числовой множитель, $\Omega(\delta y)$ – некоторый оператор.

Асимптотика (5) может быть проинтерпретирована в рамках теории комплексного ростка. В работах [7]–[10] для каждого типа уравнений вводится понятие комплексного ростка. Но оказывается, что данное понятие может быть введено и в общем случае. При этом свойства (6) и (7) преобразования оператора K могут быть положены в основу теории ростка.

В данной работе вводится понятие абстрактного комплексного ростка, обобщающее аналогичное понятие для асимптотики (2). Исследуется эволюция абстрактного комплексного ростка во времени; показывается, что зависимость параметров $y(t)$ и $f(t)$, входящих в асимптотику (5), не может быть произвольной. Устанавливаются определенные тождества на эти параметры.

На асимптотические решения уравнения (4) наложены определенные требования, сформулированные в § 2 в определении абстрактного канонического оператора $K_y^{\varepsilon}: \mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{H}^{\varepsilon}$, где $y \in \mathcal{Y}$ – элемент гладкого многообразия, являющегося расширением фазового пространства. Исследованы общие свойства абстрактного канонического оператора, показано, что ему однозначно сопоставляются 1-форма ω , являющаяся аналогом 1-формы действия, и операторнозначная 1-форма Ω .

В § 3 введено понятие морфизма абстрактных канонических операторов, являющееся обобщением понятия преобразования эволюции асимптотических решений. Исследованы общие свойства морфизмов, из которых, в частности, вытекают тождества на асимптотики решений уравнения (4) и утверждение об инвариантности 1-форм ω и Ω относительно группового сдвига в случае, если абстрактный канонический оператор отвечает представлению группы Ли.

При исследовании асимптотических решений уравнений часто возникают пространства с нетривиальной топологией [9], [10]: в случае, если разным точкам многообразия $\mathcal{U}$ отвечают одинаковые асимптотики, эти точки могут быть отождествлены. Соответствующее понятие редукции абстрактного канонического оператора введено с использованием языка теории категорий.

В § 4 вводится понятие абстрактного комплексного ростка, обобщающее понятие комплексного ростка Маслова в точке, которое вводится для асимптотик типа (2). В случае, если на фазовом пространстве глобально определен комплексный росток, абстрактный канонический оператор изоморфен каноническому оператору специального вида. Если росток задан локально, то изоморфизм является локальным.

В § 5 рассмотрено обобщение на абстрактный случай теории лагранжевых многообразий с комплексным ростком. Рассмотрена бесконечная суперпозиция асимптотик, построенных с помощью абстрактного канонического оператора. Исследованы ее свойства. Показывается, что важную роль играет понятие изотропности многообразия.

Полученные результаты могут быть использованы для построения и геометрической интерпретации новых асимптотических решений эволюционных уравнений в случае, если известен некоторый класс асимптотических решений.

В стационарной теории комплексного ростка Маслова для уравнений типа (1) вопрос о существовании инвариантного комплексного ростка связан с исследованием устойчивости точки покоя или периодической траектории соответствующей классической системы. Эта связь исследована в § 6 для более общего случая абстрактного уравнения (4).

Автор благодарит В. П. Маслова и С. Ю. Доброхотова за полезное обсуждение ряда вопросов и ценные замечания.

§ 2. Абстрактный канонический оператор

Сформулируем требования, накладываемые на оператор, входящий в формулу (5). Будем предполагать, что при каждом значении параметра ε , пробегающего некоторое подмножество $\{\varepsilon\}$ числовой прямой, содержащее нуль в качестве предельной точки, заданы гильбертовы пространства $\mathcal{H}^\varepsilon$, играющие роль области значений оператора $K_y^\varepsilon, \psi_{as}^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$. Параметр y пробегает некоторое (конечномерное или бесконечномерное) гладкое многообразие $\mathcal{U}$, а f — вектор некоторого предгильбертова пространства $\mathcal{F}_y$, зависящего, возможно, от y . В случае бесконечномерного $\mathcal{U}$ будем предполагать, что каждая карта отображается на гильбертово пространство. Упорядоченную пару $(y, f) = z$ можно рассматривать как элемент пространства векторного расслоения $\mathcal{L}$, отображение, ставящее в соответствие этой паре точку y на многообразии $\mathcal{U}$, — как проекцию π , а многообразие $\mathcal{U}$ — как базу расслоения. Пространства $\mathcal{F}_y$ рассматриваются как слои расслоения.

Сформулируем определение абстрактного канонического оператора. В конечномерном случае обозначим через d размерность многообразия $\mathcal{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что задан *абстрактный канонический оператор*, если выполнены следующие условия.

1. Задано векторное (локально тривиальное) расслоение $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$, являющееся совокупностью топологического пространства $\mathcal{Z}$ (пространства расслоения), гладкого многообразия $\mathcal{Y}$ (базы) и непрерывного отображения π . На каждом слое расслоения $\pi^{-1}y \subset \mathcal{Z}$ определены операции суммирования, умножения на число и скалярного произведения, непрерывные в топологии пространства $\mathcal{Z}$ и превращающие $\pi^{-1}y$ в предгильбертово пространство, состоящее более чем из одного нулевого элемента.

2. При $\varepsilon \in \{\varepsilon\}$ заданы гильбертовы пространства $\mathcal{H}^\varepsilon$.

3. Задана совокупность отображений $K^\varepsilon: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$, удовлетворяющая следующим свойствам.

(а) $K^\varepsilon(z_1 + \alpha z_2) = K^\varepsilon z_1 + \alpha K^\varepsilon z_2$ при $z_1, z_2 \in \pi^{-1}y, \alpha \in \mathbb{C}$.

(б) Пусть $z(t)$ — гладкая кривая на $\mathcal{Z}$. Тогда

$$\|K^\varepsilon z(\sqrt{\varepsilon})\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|z(0)\|. \quad (8)$$

(в) Пусть $\{(y, f)\}$ ($y = (y_1, \dots, y_d)$, f — элемент предгильбертова пространства $\mathcal{F}$) — локальные координаты на расслоении $\mathcal{Z}$. Существуют такие гладкие вещественные функции $(\omega_1(y), \dots, \omega_d(y))$ и не зависящий от ε линейный оператор $V_y[\xi]: \mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{F}_y$, что для любой пары гладких кривых $(y_1(t), \dots, y_d(t); f(t))$ и $(\xi_1(t), \dots, \xi_d(t))$ имеет место

$$\|K_{y(\sqrt{\varepsilon})+\sqrt{\varepsilon}\xi(\sqrt{\varepsilon})}^\varepsilon f(\sqrt{\varepsilon}) - e^{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_k \omega_k(y(\sqrt{\varepsilon})) \xi_k(\sqrt{\varepsilon})} K_{y(\sqrt{\varepsilon})}^\varepsilon V_{y(0)}[\xi(0)] f(0)\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (9)$$

Множество $D_y \subset \mathcal{F}_y$, состоящее из всех таких элементов $f \in \mathcal{F}_y$, что отображение $\xi \mapsto V_y[\xi]f$ гладкое, является всюду плотным в $\mathcal{F}_y$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В бесконечномерном случае вместо векторов $y = (y_1, \dots, y_d)$, $(\omega_1, \dots, \omega_d)$ и $(\xi_1, \dots, \xi_d)$ рассматриваются элементы пространства l^2 .

Обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}_y$ гильбертово пространство, являющееся пополнением предгильбертова пространства $\mathcal{F}_y$. Рассмотрим сначала конечномерный случай.

ЛЕММА 1. *Существуют самосопряженные операторы $\Omega_1^y, \dots, \Omega_d^y$ в $\tilde{\mathcal{F}}_y$, в область определения которых входит $D_y \subset \tilde{\mathcal{F}}_y$, такие, что*

$$V_y[\xi]f = \exp\left\{-\frac{i}{2} \sum_{kl=1}^d \frac{\partial \omega_k(y)}{\partial y_l} \xi_k \xi_l\right\} \exp\left\{i \sum_{k=1}^d \Omega_k^y \xi_k\right\} f, \quad f \in \mathcal{F}_y. \quad (10)$$

Операторы $\Omega_1^y, \dots, \Omega_d^y$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\Omega_k^y, \Omega_l^y]f = i\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial y_l} - \frac{\partial \omega_l}{\partial y_k}\right)f, \quad f \in D_y. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости введем следующее обозначение. Для векторов $\psi_1^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ и $\psi_2^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ будем писать $\psi_1^\varepsilon \sim \psi_2^\varepsilon$, если $\|\psi_1^\varepsilon - \psi_2^\varepsilon\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Из неравенства треугольника вытекает, что данное отношение является отношением эквивалентности.

Полагая $y(\sqrt{\varepsilon}) = y + \sqrt{\varepsilon}\zeta$, $\xi = \eta$ в формуле (9), имеем

$$K_{y+\sqrt{\varepsilon}\zeta+\sqrt{\varepsilon}\eta}^\varepsilon f \sim \exp\left\{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^d \omega_k(y + \sqrt{\varepsilon}\zeta)\eta_k\right\} K_{y+\sqrt{\varepsilon}\zeta}^\varepsilon V_y[\eta]f.$$

Подставляя в (9) $V_y[\eta]f$ вместо f и ζ вместо ξ , получаем

$$K_{y+\sqrt{\varepsilon}\zeta}^\varepsilon V_y[\eta]f \sim \exp\left\{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^d \omega_k(y)\zeta_k\right\} K_y^\varepsilon V_y[\zeta]V_y[\eta]f.$$

Отсюда вытекает, что

$$K_{y+\sqrt{\varepsilon}(\zeta+\eta)}^\varepsilon f \sim \exp\left\{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^d (\omega_k(y + \sqrt{\varepsilon}\zeta)\eta_k + \omega_k(y)\zeta_k)\right\} K_y^\varepsilon V_y[\zeta]V_y[\eta]f. \quad (12)$$

С другой стороны, формула (9) дает

$$K_{y+\sqrt{\varepsilon}(\zeta+\eta)}^\varepsilon f \sim \exp\left\{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^d \omega_k(y)(\eta_k + \zeta_k)\right\} K_y^\varepsilon V_y[\zeta + \eta]f. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что

$$\left\| K_y^\varepsilon \left[\exp\left\{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^d (\omega_k(y + \sqrt{\varepsilon}\zeta) - \omega_k(y))\eta_k\right\} V_y[\zeta]V_y[\eta]f - V_y[\zeta + \eta]f \right] \right\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (14)$$

В силу (8) из (14) вытекает равенство

$$\left\| \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left\{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^d (\omega_k(y + \sqrt{\varepsilon}\zeta) - \omega_k(y))\eta_k\right\} \right) V_y[\zeta]V_y[\eta]f - V_y[\zeta + \eta]f \right\| = 0.$$

Отсюда получаем свойство

$$V_y[\zeta + \eta] = \exp\left\{-i \sum_{kl=1}^d \frac{\partial \omega_k}{\partial y_l} \zeta_l \eta_k\right\} V_y[\zeta]V_y[\eta].$$

Введем операторы

$$U_y[\xi] = \exp\left\{\frac{i}{2} \sum_{kl=1}^d \frac{\partial \omega_k}{\partial y_l} \xi_k \xi_l\right\} V_y[\xi],$$

удовлетворяющие свойству

$$U_y[\zeta + \eta] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{kl=1}^d \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial y_l} - \frac{\partial \omega_l}{\partial y_k} \right) \zeta_l \eta_k \right\} U_y[\zeta] U_y[\eta]. \quad (15)$$

Из свойства (15), в частности, вытекает, что операторы $U_y[t\xi]$, $t \in \mathbb{R}$, образуют однопараметрическую группу, так как

$$U_y[(t_1 + t_2)\xi] = U_y[t_1\xi] U_y[t_2\xi]. \quad (16)$$

При $\xi = 0$ из (9) получаем $U_y[0] = 1$, а при $t_1 = -t_2 = \pm t$ из (16) вытекает $(U_y[t\xi])^{-1} = U_y[-t\xi]$, поэтому операторы $U_y[t\xi]$ обратимы. Поскольку в силу (8) $\|K_{y(\sqrt{\varepsilon})+\sqrt{\varepsilon}\xi}^\varepsilon f(\sqrt{\varepsilon})\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|f(0)\|$, а

$$\left\| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^d \omega_k \xi_k \right\} K_{y(\sqrt{\varepsilon})}^\varepsilon V_{y(0)}[\xi] f(0) \right\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|V_{y(0)}[\xi] f(0)\|,$$

из (9) и неравенства треугольника вытекает: $\|V_y[\xi]f\| = \|f\|$. Поэтому операторы $V_y[\xi]$ и $U_y[\xi]$ являются изометричными, а значит, унитарными ввиду их обратимости. Таким образом, операторы $\{U_y[t\xi], t \in \mathbb{R}\}$ образуют однопараметрическую группу унитарных операторов, продолжаемых до операторов в $\tilde{\mathcal{F}}_y$, которая в силу теоремы Стоуна (см., например, [11]) имеет вид

$$U_y[t\xi] = e^{it\Omega^y[\xi]} \quad (17)$$

для некоторого самосопряженного оператора $\Omega^y[\xi]$, определяющегося из соотношения $\Omega^y[\xi]f = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} U_y[t\xi]f$ на $D_y \subset \mathcal{F}_y$. Из (15) и (17) вытекает: $\Omega^y[\zeta + \eta] = \Omega^y[\zeta] + \Omega^y[\eta]$, а из (15) — $\Omega^y[t\xi] = t\Omega^y[\xi]$. Таким образом, для некоторых самосопряженных операторов Ω_k^y справедлива формула (10). Из (15) следуют коммутационные соотношения (11). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Дифференциальная 1-форма $\omega = \sum_{k=1}^d \omega_k dy_k$ и операторнозначная 1-форма $\Omega = \sum_{k=1}^d \Omega_k^y dy_k$ инвариантны относительно выбора локальных координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{y}$ — другие локальные координаты на $\mathcal{Y}$. Обозначим через $\tilde{K}_{\tilde{y}}^\varepsilon$ абстрактный канонический оператор в других координатах, т.е. $\tilde{K}_{\tilde{y}(y)}^\varepsilon f = K_y^\varepsilon f$. Отсюда имеем

$$\tilde{K}_{\tilde{y}(y+\varepsilon\zeta)}^\varepsilon f \sim \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^d \omega_k \zeta_k \right\} \tilde{K}_{\tilde{y}(y)}^\varepsilon f. \quad (18)$$

Полагая в (9) $\xi = \sqrt{\varepsilon}\zeta$, имеем

$$K_{y+\varepsilon\zeta}^\varepsilon f \sim \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^d \omega_k \zeta_k \right\} K_y^\varepsilon f.$$

Поскольку

$$\tilde{y}_i(y + \varepsilon \zeta) = \tilde{y}_i + \varepsilon \sum_{j=1}^d \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial y_j} \zeta_j + o(\varepsilon),$$

из (9) вытекает

$$\tilde{K}_{\tilde{y}(y+\varepsilon\zeta)}^\varepsilon f \sim \exp \left\{ -i \sum_{k,j=1}^d \tilde{\omega}_k \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial y_j} \zeta_j \right\} \tilde{K}_{\tilde{y}(y)}^\varepsilon f. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что

$$\sum_{k=1}^d \omega_k \zeta_k = \sum_{k,j=1}^d \tilde{\omega}_k \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial y_j} \zeta_j, \quad (20)$$

что означает $\sum_{k=1}^d \omega_k dy_k = \sum_{k=1}^d \tilde{\omega}_k d\tilde{y}_k$.

Рассмотрим теперь операторнозначную 1-форму Ω . В силу (9) аналогично получаем

$$\begin{aligned} K_{y+\sqrt{\varepsilon}\xi}^\varepsilon f &\sim \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^d \omega_k \xi_k - \frac{i}{2} \sum_{kl=1}^d \frac{\partial \omega_k}{\partial y_l} \xi_k \xi_l \right\} K_y^\varepsilon \exp \left\{ i \sum_{k=1}^d \Omega_k^y \xi_k \right\} f, \\ \tilde{K}_{\tilde{y}(y+\sqrt{\varepsilon}\xi)}^\varepsilon f &\sim e^{\varkappa} \tilde{K}_{\tilde{y}}^\varepsilon \exp \left\{ i \sum_{k,j=1}^d \tilde{\Omega}_k^y \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial y_j} \xi_j \right\} f, \\ \varkappa &= -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k,j=1}^d \tilde{\omega}_k \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial y_j} \xi_j - \frac{i}{2} \sum_{ijk=1}^d \tilde{\omega}_i \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial y_j \partial y_k} \xi_j \xi_k - \frac{i}{2} \sum_{ijkl=1}^d \frac{\partial \tilde{\omega}_k}{\partial \tilde{y}_l} \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial y_j} \frac{\partial \tilde{y}_l}{\partial y_m} \xi_j \xi_m. \end{aligned}$$

В силу (20) отсюда вытекает, что

$$K_y^\varepsilon \exp \left\{ i \sum_{k=1}^d \Omega_k^y \xi_k \right\} f \sim \tilde{K}_{\tilde{y}}^\varepsilon \exp \left\{ i \sum_{k,j=1}^d \tilde{\Omega}_k^y \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial y_j} \xi_j \right\} f.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^d \Omega_k^y \xi_k = \sum_{k,j=1}^d \tilde{\Omega}_k^y \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial y_j} \xi_j,$$

т.е. $\sum_{k=1}^d \Omega_k^y dy_k = \sum_{k=1}^d \tilde{\Omega}_k^y d\tilde{y}_k$.

В бесконечномерном случае лемма 1 формулируется следующим образом.

ЛЕММА 1'. *Существует такое линейное отображение Ω^y , сопоставляющее каждому вектору $\xi \in l^2$ самосопряженный оператор $\Omega^y[\xi]$ в $\mathcal{F}_y$, в область определения которого входит $D_y \subset \mathcal{F}_y$, что*

$$V_y[\xi]f = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{kl=1}^{\infty} \frac{\partial \omega_k(y)}{\partial y_l} \xi_k \xi_l \right\} e^{i\Omega^y[\xi]} f, \quad f \in \mathcal{F}_y.$$

Операторы $\Omega^y[\xi]$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\Omega^y[\xi], \Omega^y[\eta]]f = i \sum_{kl=1}^{\infty} \xi_k \eta_l \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial y_l} - \frac{\partial \omega_l}{\partial y_k} \right) f, \quad f \in D_y.$$

Доказательство аналогично конечномерному случаю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Коммутационное соотношение (11) может быть представлено в виде

$$[\Omega^y(\xi_1), \Omega^y(\xi_2)] = \frac{1}{i} d\omega^y(\xi_1, \xi_2),$$

где $\Omega^y(\xi)$ – значение 1-формы Ω на касательном векторе ξ к многообразию $\mathcal{Y}$ в точке y , $d\omega$ – дифференциал 1-формы ω , а $d\omega^y(\xi_1, \xi_2)$ – его значение на паре касательных векторов ξ_1, ξ_2 в точке y .

Приведем примеры абстрактных канонических операторов.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{2n+1} = \{(S, P, Q) : S \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}^n, Q \in \mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{F} = L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Y}$ – тривиальное расслоение, $\mathcal{H}^\varepsilon = L^2(\mathbb{R}^n)$, а оператор $K^\varepsilon : \mathbb{R}^{2n+1} \times L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$ имеет вид

$$(K^\varepsilon(S, P, Q; f))(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/4}} e^{\frac{i}{\varepsilon}S} e^{\frac{i}{\varepsilon}P(x-Q)} f\left(\frac{x-Q}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad (21)$$

где $(S, P, Q) \in \mathcal{Y}$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ему отвечают 1-формы

$$\omega = -dS + P dQ, \quad \Omega = dP \xi - dQ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим тривиальное расслоение с базой $\mathcal{Y}$, рассмотренной в предыдущем примере, и слоем $\mathcal{F} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Пусть ε пробегает дискретный набор значений: $\varepsilon = 1/N$, N – целое, а $\mathcal{H}^\varepsilon$ – N -мерное пространство. Оператор

$$(K^\varepsilon(S, P, Q; f))_k = \frac{1}{N^{1/4}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{iNS} e^{iNP(\frac{k}{N} - Q - l)} f\left(\sqrt{N}\left(\frac{k}{N} - Q - l\right)\right) \quad (22)$$

используется при построении приближенных решений разностных уравнений [2]; 1-формы ω, Ω совпадают с примером 1.

ПРИМЕР 3. Пусть $2l+1$ – целое число, $\mathcal{H}^{1/l}$ – комплексное $(2l+1)$ -мерное пространство последовательностей $(\psi_{-l}, \psi_{-l+1}, \dots, \psi_{l-1}, \psi_l)$. Определим оператор $W_l : l^2 \rightarrow \mathcal{H}^{1/l}$ вида $(W_l f)_m = f_{l-m}$, $f = (f_0, f_1, \dots)$. Рассмотрим представление $T_g^l : \mathcal{H}^{1/l} \rightarrow \mathcal{H}^{1/l}$ группы $SU(2)$ в пространстве $\mathcal{H}^{1/l}$, определяющееся однозначно из соотношений на однородные многочлены:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-l}^l (T_g^l \varphi)_m \sqrt{\frac{(2l)!}{(l-m)!(l+m)!}} x^{l+m} y^{l-m} \\ = \sum_{m=-l}^l \varphi_m \sqrt{\frac{(2l)!}{(l-m)!(l+m)!}} (\alpha x - \beta^* y)^{l+m} (\beta x + \alpha^* y)^{l-m}; \end{aligned}$$

здесь принята параметризация группы $SU(2)$ вида $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Пусть $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times SU(2)$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \times l^2$ – тривиальное расслоение. Определим оператор $K^\varepsilon : \mathbb{R} \times SU(2) \times l^2 \rightarrow \mathcal{H}^{1/l}$ как

$$K^\varepsilon(S, g, f) = e^{\frac{i}{\varepsilon}S} T_g^l W_l f, \quad \varepsilon = 1/l. \quad (23)$$

Обозначим через $a^\pm$ операторы в l^2 вида $(a^+ f)_n = \sqrt{n} f_{n-1}$, $(a^- f)_{n-1} = \sqrt{n} f_n$. Формы ω и Ω имеют вид

$$\omega = 2i(\alpha^* d\alpha - \beta d\beta^*) - dS,$$

$$\Omega = -\sqrt{2}i((\alpha^* d\beta - \beta d\alpha^*)a^+ - (\alpha d\beta^* - \beta^* d\alpha)a^-).$$

Они левоинвариантны относительно действия группы $SU(2)$. Это свойство является достаточно общим.

ПРИМЕР 4. Пусть $\mathcal{F}$ – бозонное пространство Фока с бесконечным числом степеней свободы. Элементами этого пространства являются наборы $(f^{(0)}, f_{i_1}^{(1)}, f_{i_1 i_2}^{(2)}, \dots, f_{i_1 \dots i_n}^{(n)}, \dots)$, симметричных по $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots\}$ функций $f_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$, удовлетворяющие свойству

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1 \dots i_n=1}^{\infty} |f_{i_1 \dots i_n}^{(n)}|^2 < \infty.$$

Скалярное произведение в $\mathcal{F}$ вводится следующим образом:

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1 \dots i_n=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_n}^{(n)*} g_{i_1 \dots i_n}^{(n)}.$$

Определим операторы рождения и уничтожения [12] $a_i^\pm$ следующим образом:

$$(a^+ f)_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \delta_{ii_k} f_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_n}^{(n-1)}, \quad (a_i^- f)_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} = \sqrt{n} f_{i i_1 \dots i_{n-1}}^{(n)}.$$

Положим $\mathcal{H}^\varepsilon = \mathcal{F}$, $\pi: \mathbb{R} \times l^2 \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \times l^2$ – тривиальное расслоение, $\mathcal{Y} = \{(S, \varphi)\}$, S – вещественное число, φ – элемент комплексного пространства l^2 . Оператор $K^\varepsilon(S, \varphi, f) = e^{\frac{i}{\varepsilon} S} e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k a_k^+ - \varphi_k^* a_k^-)} f$ используется при построении приближенных решений вторично квантованных уравнений. Формы ω и Ω имеют вид

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^* d\varphi_k - \varphi_k d\varphi_k^*) - dS, \quad \Omega = \sum_{k=1}^{\infty} (d\varphi_k a_k^+ - d\varphi_k^* a_k^-).$$

ПРИМЕР 5. Пусть $\mathcal{H}^{1/N}$ – пространство симметричных функций $f_{i_1 \dots i_N}$ с суммируемым квадратом ($i_1, \dots, i_N = 1, 2, \dots$), $\mathcal{X}$ – множество всех векторов комплексного пространства l^2 с единичной нормой, $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \mathcal{X}$. Рассмотрим тривиальное расслоение $\tilde{\pi}: \tilde{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathcal{Y}$ со слоем $\mathcal{F}$, $\mathcal{Z} = \mathbb{R} \times \mathcal{X} \times \mathcal{F}$, и его подрасслоение $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ такое, что $\mathcal{Z}$ состоит из всех пар $(y, f) = (S, \varphi, f)$, удовлетворяющих свойству $\sum_{i_1=1}^{\infty} \varphi_{i_1}^* f_{i_1 \dots i_k}^{(k)} = 0$. Оператор

$$K^\varepsilon(S, \varphi, f)_{i_1 \dots i_N} = \sum_{p=0}^N \frac{e^{iNS}}{\sqrt{N^p p!}} \sum_{1 \leq k_1 \neq \dots \neq k_p \leq N} f_{i_{k_1} \dots i_{k_p}}^p \prod_{k \neq k_1 \dots k_p} \varphi_{i_k}$$

используется при построении приближенных решений многочастичных уравнений. Формы ω и Ω имеют вид

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^* d\varphi_k - \varphi_k d\varphi_k^*) - dS,$$

$$\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(d\varphi_k - \sum_{l=1}^{\infty} d\varphi_l \varphi_l^* \varphi_k \right) a_k^+ - d\varphi_k^* - \sum_{l=1}^{\infty} d\varphi_l^* \varphi_l \varphi_k^* a_k^- \right).$$

§ 3. Морфизмы абстрактных канонических операторов

3.1. Определение морфизма. Абстрактные канонические операторы K^ε , рассмотренные в примерах предыдущего параграфа, используются для построения асимптотических решений абстрактных уравнений типа (4). При этом существует взаимно однозначное соответствие между начальным условием $\psi^\varepsilon(0)$ для задачи Коши и точным решением $\psi^\varepsilon(t)$, а также аналогичное соответствие между асимптотиками в начальный момент времени и момент t . Таким образом, определены такие отображения $\mathcal{U}^\varepsilon: \mathcal{H}^\varepsilon \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$ и $U_t: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$, что $\|\mathcal{U}_t^\varepsilon K^\varepsilon z_0 - K^\varepsilon U_t z_0\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. В качестве обобщения данного понятия преобразования эволюции введем понятие морфизма абстрактных канонических операторов.

При рассмотрении уравнения (1) отображение U_t переводит начальные данные (P^0, Q^0, S^0, f^0) , входящие в асимптотику (2), в (P^t, Q^t, S^t, f^t) . Определены отображения $y^0 = (P^0, Q^0, S^0) \mapsto y^t = (P^t, Q^t, S^t)$ и $W_{y^0}: f^0 \mapsto f^t$. Известно, что преобразование $(P^0, Q^0) \mapsto (P^t, Q^t)$ сохраняет симплектическую структуру фазового пространства, а величина $S^t - S^0$ является производящей функцией этого преобразования и действием на классической траектории. Таким образом, преобразование $y^0 \mapsto y^t$ обладает определенными свойствами. Эволюция функции f , определяющей форму волнового пакета, также не может быть произвольной. Известно, что комплексный росток, однозначно сопоставляемый асимптотике (2) в случае гауссовских волновых пакетов, может двигаться только вдоль системы в вариациях для соответствующей системы Гамильтона.

Оказывается, что аналогичные свойства устанавливаются и для морфизмов абстрактных канонических операторов (теорема 1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *морфизмом абстрактных канонических операторов* $K_1^\varepsilon: \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1^\varepsilon$ и $K_2^\varepsilon: \mathcal{Z}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2^\varepsilon$ такую совокупность преобразования гильбертовых пространств $\mathcal{U}^\varepsilon: \mathcal{H}_1^\varepsilon \rightarrow \mathcal{H}_2^\varepsilon$, сохраняющего норму, и морфизма векторных расслоений [13] $U: \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$, что

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon K_1^\varepsilon z(\sqrt{\varepsilon}) - K_2^\varepsilon U z(\sqrt{\varepsilon})\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (24)$$

для любой гладкой кривой $z(t)$ на $\mathcal{Z}_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Абстрактные канонические операторы образуют категорию (например, в смысле [11]).

Морфизму расслоений $U: \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$, представляющему собой коммутатив-

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_1 & \xrightarrow{U} & \mathcal{Z}_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ \mathcal{Y}_1 & \xrightarrow{u} & \mathcal{Y}_2 \end{array},$$

однозначно сопоставляются гладкое отображение

и гладких многообразий $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, а также операторы $W_y, y \in \mathcal{Y}_1$, сильно непрерывные по y , действующие из векторного пространства $\pi_1^{-1}y$ в $\pi_2^{-1}(uy)$, совпадающие на области определения с U . Обозначим через u^*y индуцированное отображение касательных пространств $u^*y: (T\mathcal{Y}_1)_y \rightarrow (T\mathcal{Y}_2)_{uy}$ к многообразиям $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ в точках y и uy .

Обозначим через ω_1 , ω_2 и Ω_1 , Ω_2 1-формы, отвечающие согласно лемме 2 абстрактным каноническим операторам K_1^ε и K_2^ε , а через $\omega_{1,2}^y(\xi)$ и $\Omega_{1,2}^y(\xi)$ — значения этих форм на касательном векторе ξ в точке y . Установим некоторые свойства 1-форм.

ТЕОРЕМА 1. 1. Оператор W_y сохраняет норму.

2. Справедливы свойства

$$\omega_1^y(\xi) = \omega_2^{uy}(u^{*y}\xi); \quad W_y \Omega_1^y(\xi) f = \Omega_2^{uy}(u^{*y}\xi) W_y f, \quad f \in D_y. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. В силу неравенства треугольника

$$\| \mathcal{U}^\varepsilon K_1^\varepsilon z(\sqrt{\varepsilon}) \| - \| K_2^\varepsilon U z(\sqrt{\varepsilon}) \| \leq \| \mathcal{U}^\varepsilon K_1^\varepsilon z(\sqrt{\varepsilon}) - K_2^\varepsilon U z(\sqrt{\varepsilon}) \|. \quad (26)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\| \mathcal{U}^\varepsilon K_1^\varepsilon z(\sqrt{\varepsilon}) \| = \| K_1^\varepsilon z(\sqrt{\varepsilon}) \| \rightarrow \| z(0) \|$. В силу свойства (8) $\| K_2^\varepsilon U z(\sqrt{\varepsilon}) \| \rightarrow \| U z(0) \|$. Из (24) и (26) вытекает: $\| U z(0) \| = \| z(0) \|$. Поэтому оператор W_y , совпадающий с U на слое $\pi^{-1}y$, сохраняет норму.

2. В силу свойства (9) имеем $K_{1,y+\varepsilon\zeta}^\varepsilon f \sim e^{-i\omega_1^y(\zeta)} K_{1,y}^\varepsilon f$. Отсюда в силу изометричности операторов $\mathcal{U}^\varepsilon$ получаем

$$\mathcal{U}^\varepsilon K_{1,y+\varepsilon\zeta}^\varepsilon f \sim \mathcal{U}^\varepsilon e^{-i\omega_1^y(\zeta)} K_{1,y}^\varepsilon f. \quad (27)$$

Из (24) вытекает, что

$$\mathcal{U}^\varepsilon K_{1,y+\varepsilon\zeta}^\varepsilon f \sim K_{2,u(y+\varepsilon\zeta)}^\varepsilon W_y f, \quad \mathcal{U}^\varepsilon K_{1,y}^\varepsilon f \sim K_{2,u(y)}^\varepsilon W_y f. \quad (28)$$

Поскольку $u(y + \varepsilon\zeta) = uy + \varepsilon u^{*y}\zeta + o(\varepsilon)$, из (9) следует, что

$$K_{2,u(y+\varepsilon\zeta)}^\varepsilon W_y f \sim e^{-i\omega_2^{uy}(u^{*y}\zeta)} K_{2,uy}^\varepsilon W_y f. \quad (29)$$

Из формул (27), (28) и (29) получаем

$$e^{-i\omega_1^y(\zeta)} K_{2,uy}^\varepsilon W_y f \sim e^{-i\omega_2^{uy}(u^{*y}\zeta)} K_{2,uy}^\varepsilon W_y f.$$

Отсюда вытекает первое из свойств (25).

3. В силу (9) аналогично получаем:

$$\begin{aligned} & K_{2,u(y+\sqrt{\varepsilon}\xi)}^\varepsilon W_y f \sim \mathcal{U}^\varepsilon K_{1,y+\sqrt{\varepsilon}\xi}^\varepsilon f \\ & \sim \exp\left\{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_k \omega_k^1(y) \xi_k - \frac{i}{2} \sum_{kl} \frac{\partial \omega_k^1}{\partial y_l} \xi_k \xi_l\right\} \mathcal{U}^\varepsilon K_{1,y}^\varepsilon \exp\left\{i \sum_k \Omega_k^1(y) \xi_k\right\} f; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & K_{2,u(y+\sqrt{\varepsilon}\xi)}^\varepsilon W_y f \sim e^{\varkappa} K_{2,y}^\varepsilon \exp\left\{i \sum_{kj} \Omega_k^2(uy) \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \xi_j\right\} W_y f, \\ & \varkappa = -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_k \omega_k^2(uy) \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \xi_j - \frac{i}{2} \sum_{ijk} \omega_i^2(uy) \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_j \partial y_k} \xi_j \xi_k \\ & \quad - \frac{i}{2} \sum_{ijkl} \frac{\partial \omega_k^2(uy)}{\partial u_l} \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \frac{\partial u_l}{\partial y_m} \xi_j \xi_m. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (30) и (31) с учетом (28) и первого из свойств (25) вытекает: $W_y e^{i\Omega_1^y(\xi)} f = e^{i\Omega_2^{uy}(u^{*y}\xi)} W_y f$. Отсюда следует второе из свойств (25). Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из свойств (25) вытекают тождества на асимптотические решения уравнений, рассмотренные в [14].

Приведем пример морфизма абстрактных канонических операторов.

ПРИМЕР. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое гильбертово пространство, $w_\varepsilon: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$ – некоторый оператор, $\mathcal{G}$ – группа Ли, T_g^ε – представление этой группы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon$. Рассмотрим тривиальное расслоение $\pi: \mathbb{R} \times \mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{G}$ с базой $\mathbb{R} \times \mathcal{G}$ и слоем $\mathcal{F}$. Рассмотрим абстрактный канонический оператор

$$K^\varepsilon(S, g, f) = e^{\frac{i}{\varepsilon} S} T_g^\varepsilon w_\varepsilon f. \quad (32)$$

Структуру (32) имеет, в частности, абстрактный канонический оператор из примера 3. Операторы типа (32) рассматриваются в теории обобщенных когерентных состояний [15]. Пусть h – фиксированный элемент группы $\mathcal{G}$. Рассмотрим морфизм $K^\varepsilon \rightarrow K^\varepsilon$, являющийся совокупностью отображений $U: (S, g, f) \mapsto (S, hg, f)$ и $\mathcal{U}^\varepsilon: \psi^\varepsilon \mapsto T_h^\varepsilon \psi^\varepsilon$. Свойство (24) очевидно. Из тождеств теоремы 1 вытекает утверждение о левоинвариантности форм ω и Ω .

3.2. Редуцированный абстрактный канонический оператор. Многие абстрактные канонические операторы инвариантны относительно некоторых групп преобразований. Они имеют вид

(а) для оператора (22)

$$P \rightarrow P + 2\pi k, \quad S \rightarrow S + 2\pi Qk + 2\pi n, \quad Q \rightarrow Q + l, \quad k, l, n \in \mathbb{Z}; \quad (33)$$

(б) для оператора (23)

$$S \rightarrow S + \phi, \quad \alpha \rightarrow \alpha e^{-i\phi/2}, \quad \beta \rightarrow \beta e^{i\phi/2}, \quad f \rightarrow e^{-ia^+ a^- \phi} f, \quad \phi \in \mathbb{R}; \quad (34)$$

(в) для оператора из примера 5

$$\varphi \rightarrow \varphi e^{i\alpha}, \quad S \rightarrow S - \alpha, \quad f \rightarrow e^{i\alpha \sum_k a_k^+ a_k^-} f, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

Таким образом, оказывается, что разные точки на расслоении $\mathcal{X}$ отвечают одной и той же асимптотической формуле. В работах [9], [10] для конкретных случаев рассматривается соответствующий редуцированный канонический оператор, причем фазовое пространство оказывается топологически нетривиальным.

Определим редуцированный абстрактный канонический оператор в общем случае, используя язык теории категорий.

Пусть $K^\varepsilon: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$ – абстрактный канонический оператор. Рассмотрим категорию $C(K)$, объектами которой являются такие морфизмы данного канонического оператора в другие абстрактные канонические операторы, для которых

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{H}^\varepsilon \\ \downarrow U & & \parallel \\ \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{H}^\varepsilon \end{array}, \text{ а } U\mathcal{X} = \mathcal{X}', \quad W_y(\pi^{-1}y) = \pi^{-1}(uy).$$

Морфизмом из объекта $K \rightarrow K'$ в объект $K \rightarrow K''$ назовем такой морфизм абстрактных канонических операторов $K'' \rightarrow K'$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & \uparrow \\ & & K'' \\ K & \longrightarrow & K'' \end{array}$$

яющий объект. Обозначим его через $K \rightarrow [K]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем называть абстрактный канонический оператор $[K]^\varepsilon$ *редуцированным* абстрактным каноническим оператором, отвечающим оператору K .

ТЕОРЕМА 2. 1. *Редуцированный абстрактный канонический оператор определен однозначно с точностью до изоморфизма.*

2. Пусть $\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \longrightarrow & \mathcal{H}^\varepsilon \\ \downarrow U & & \parallel \\ \mathcal{Z}' & \longrightarrow & \mathcal{H}^\varepsilon \end{array}$ – морфизм абстрактных канонических операторов K и K' , причем $U\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$ и существует $[K]$. Тогда $[K] = [K']$ с точностью до изоморфизма.

3. Пусть при $y_1 \neq y_2$, $z_1 \in D_{y_1}$, $z_2 \in D_{y_2}$ предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ выражения $(K^\varepsilon z_1, K^\varepsilon z_2)$ равен нулю или не существует. Тогда с точностью до изоморфизма $[K] = K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $[K]_1$ и $[K]_2$ – два редуцированных абстрактных канонических оператора. Это значит, что существуют единственные морфизмы $\alpha: [K]_1 \rightarrow [K]_2$ и $\beta: [K]_2 \rightarrow [K]_1$, для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & [K]_1 \\ \parallel & & \downarrow \alpha \\ K & \longrightarrow & [K]_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & [K]_2 \\ \parallel & & \uparrow \beta \\ K & \longrightarrow & [K]_1 \end{array}$$

для которых коммутативны диаграммы $\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & [K]_2 \\ \parallel & & \downarrow \alpha\beta \\ K & \longrightarrow & [K]_2 \end{array}$ и $\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & [K]_1 \\ \parallel & & \uparrow \beta\alpha \\ K & \longrightarrow & [K]_1 \end{array}$.

В силу универсальности объектов $K \rightarrow [K]_1$ и $K \rightarrow [K]_2$ морфизмы $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются единичными, поэтому абстрактные канонические операторы $[K]_1$ и $[K]_2$ изоморфны.

2. По определению 3 существует единственный морфизм $K' \xrightarrow{\alpha} [K]$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K' & \longrightarrow & K'' \\ \parallel & & \downarrow \alpha \\ K & \longrightarrow & [K] \end{array}$$

с универсальным отталкивающим объектом категории $C(K')$. Для этого достаточно доказать, что для любого морфизма $\beta: K' \rightarrow K''$ существует единственный морфизм $\gamma: K'' \rightarrow [K]$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K' & \xrightarrow{\beta} & K'' \\ \parallel & & \downarrow \gamma \\ K' & \longrightarrow & [K] \end{array} \quad (36)$$

Но по определению 3 существует морфизм γ , замыкающий коммутативную диа-

грамму

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{\beta} & K'' \\
 \downarrow & & & & \downarrow \gamma \\
 [K] & \xlongequal{\quad} & [K] & \xlongequal{\quad} & [K]
 \end{array} \quad (37)$$

В силу свойства $U\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$ он замыкает и диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{\beta} & K'' \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\
 [K] & \xlongequal{\quad} & [K] & \xlongequal{\quad} & [K]
 \end{array}$$

Далее, пусть существуют два морфизма γ_1 и γ_2 , замыкающих диаграмму (36). Но тогда они замыкают и диаграмму (37), что противоречит определению 3.

3. В силу определения 3 достаточно проверить, что для любого морфизма $K^\varepsilon: \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$

$$\begin{array}{ccc}
 K \rightarrow K' \text{ вида} & \downarrow U & \parallel \\
 K^\varepsilon: \mathcal{Z}' \longrightarrow \mathcal{H}^\varepsilon & & \text{существует единственный морфизм } K' \rightarrow K, \\
 & & K \longrightarrow K' \\
 & & \parallel \\
 & & K \longleftarrow K'
 \end{array}$$

замыкающий коммутативную диаграмму $\parallel$. Это утверждение равно-

сильно обратимости морфизма векторных расслоений $U: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}'$.

Покажем, что отображение $u: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}'$ взаимно однозначно. Предположим противное, т.е. $uy_1 = uy_2$, а $y_1 \neq y_2$. По определению 2 $K_{y_1}^\varepsilon f_1 \sim K_{uy_1}^{\varepsilon'} W_{y_1} f_1$, $K_{y_2}^\varepsilon f_2 \sim K_{uy_2}^{\varepsilon'} W_{y_2} f_2$. В силу условий теоремы и неравенства Коши–Буняковского предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ выражения $(K_{uy_1}^{\varepsilon'} W_{y_1} f_1, K_{uy_2}^{\varepsilon'} W_{y_2} f_2)$ равен нулю или не существует. По свойству (8) имеем $(K_{uy_1}^{\varepsilon'} W_{y_1} f_1, K_{uy_2}^{\varepsilon'} W_{y_2} f_2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (W_{y_1} f_1, W_{y_2} f_2)$. Поэтому $(W_{y_1} f_1, W_{y_2} f_2) = 0$. В силу свойства $W_y \mathcal{F}_y = \mathcal{F}'_{\pi_y}$ получаем, что пространство $\mathcal{F}'_{\pi_y}$ состоит только из нулевого элемента. Приходим к противоречию. Поэтому отображение u взаимно однозначно.

Проверим, что отображение $W_y: \mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{F}'_{uy}$ взаимно однозначно. Пусть $W_y f_1 = W_y f_2$. По определению 2 имеем $K_y^\varepsilon f_1 \sim K_{uy}^{\varepsilon'} W_y f_1$, $K_y^\varepsilon f_2 \sim K_{uy}^{\varepsilon'} W_y f_2$, поэтому $K_y^\varepsilon f_1 \sim K_y^\varepsilon f_2$, т.е. $\|K_y^\varepsilon (f_1 - f_2)\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Отсюда $f_1 = f_2$. Теорема 2 доказана.

ПРИМЕРЫ.

1. Абстрактные канонические операторы из примеров 1 и 4 удовлетворяют условиям п. 3 теоремы 2, поэтому для них $[K] = K$.

2. Как следует из теоремы 2, для абстрактного канонического оператора из примера 2 оператор $[K]^\varepsilon$ строится следующим образом. Рассмотрим факторпространство пространства $\mathbb{R}^3$ по отношению эквивалентности (33), $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}/\sim$. Определим соответствующее тривиальное расслоение $\mathcal{Y}' \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Y}'$ и отображение $[K]^\varepsilon: \mathcal{Y}' \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$ вида

$$[K]^\varepsilon([y], f) = K^\varepsilon(y, f), \quad (38)$$

где y – произвольный представитель класса эквивалентности $[y] \in \mathcal{Y}'$.

3. Для абстрактных канонических операторов из примеров 3 и 5 оператор $[K]^\varepsilon$ строится следующим образом. На расслоении $\mathcal{Z}$ задано отношение эквивалентности $\sim$ (34) или (35). Строится расслоение $\pi': \mathcal{Z}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ следующим образом.

В качестве пространства расслоения выбирается факторпространство $\mathcal{X}' = \mathcal{X}/\sim$. На $\mathcal{Y}$ вводится отношение эквивалентности $y_1 \sim y_2$, если $z_1 \sim z_2$ для некоторых $z_1 \in \pi^{-1}y_1$ и $z_2 \in \pi^{-1}y_2$. Соответствующее факторпространство $\mathcal{Y}/\sim = \mathcal{Y}'$ выбирается в качестве базы расслоения. Определим проекцию $\pi': \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ из соотношения $\pi'[z] = [\pi z]$, где $z \in [z]$. Положим

$$[K]^\varepsilon[z] = K^\varepsilon z. \quad (39)$$

Формулы (38) и (39) не зависят от выбора класса эквивалентности.

§ 4. Абстрактный комплексный росток

4.1. Определение абстрактного комплексного ростка. При построении асимптотических решений эволюционных уравнений важную роль играет понятие комплексного ростка Маслова [1]. Это понятие позволяет задать с точностью до числового множителя элемент пространства $\mathcal{F}_y$ “в терминах классической механики”, т.е. используя только понятия, связанные с базой $\mathcal{Y}$ расслоения $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Дадим определение абстрактного комплексного ростка, обобщающее понятие комплексного ростка Маслова в точке.

Обозначим через $T\mathcal{Y}_y^\mathbb{C}$ комплексифицированное касательное пространство к многообразию $\mathcal{Y}$ в точке y . 1-формы ω и Ω продолжаются на комплексифицированное касательное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем подпространство $\mathcal{G} \subset T\mathcal{Y}_y^\mathbb{C}$ *абстрактным комплексным ростком*, если

(а) существует такой ненулевой вектор $f_0 \in D_y$, что

$$\Omega^y(\xi)f_0 = 0 \quad (40)$$

при всех $\xi \in \mathcal{G}$;

(б) система векторов

$$\{\Omega^y(\xi_1^*) \cdots \Omega^y(\xi_k^*)f_0, \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{G}, k = 0, 1, 2, \dots\} \quad (41)$$

полна в $\mathcal{F}_y$.

Вектор f_0 , $\|f_0\| = 1$, будем называть *вакуумным вектором*, отвечающим ростку $\mathcal{G}$.

ПРИМЕРЫ.

1. Для абстрактного канонического оператора из примера 1 при $n = 1$ элементы касательного пространства можно отождествить с наборами $(\delta S, \delta P, \delta Q) \in \mathbb{C}^3$, а

$$\Omega(\delta S, \delta P, \delta Q) = \delta P \xi - \delta Q \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Рассмотрим подпространство, натянутое на вектор $(0, b, c)$:

$$\mathcal{G} = \{\alpha(0, b, c) : \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Уравнение (40) принимает вид:

$$\left(b\xi - c \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) f_0 = 0.$$

Оно имеет решение из $L^2(\mathbb{R})$:

$$f_0 = \text{const} \exp \left\{ \frac{i}{2} \frac{b}{c} \xi^2 \right\}$$

при $\text{Im}(b/c) > 0$. Так как система (41) в данном случае полна в $L^2(\mathbb{R})$, подпространство $\mathcal{G}$ является комплексным ростком.

2. Рассмотрим подпространство, натянутое на векторы $(0, b, c)$ и $(1, 0, 0)$. В силу свойства $\Omega(1, 0, 0) = 0$ оно является комплексным ростком.

3. Для абстрактного канонического оператора из примера 4 элементы комплексифицированного касательного пространства отождествляются с наборами $(\delta S, \delta \varphi, \overline{\delta \varphi})$, $\delta \varphi$ и $\overline{\delta \varphi}$ – элементы комплексного пространства l^2 , $\delta S \in \mathbb{C}$,

$$\Omega(\delta S, \delta \varphi, \overline{\delta \varphi}) = \sum_k (\delta \varphi_k a_k^+ - \overline{\delta \varphi} a_k^-).$$

Рассмотрим пространство вида

$$\{(0, \alpha \zeta, \zeta) : \zeta \in l^2\},$$

где $(\alpha z)_i = \alpha_i z_i$. Уравнение (40) принимает вид

$$(\alpha_i a_i^+ - a_i^-) f_0 = 0.$$

Отсюда

$$f_0 = \text{const} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i^+ a_i^+ \right\} \Phi^{(0)}.$$

Данное выражение определяет вектор пространства Фока [12], если $|\alpha_i| < 1$ для всех i и $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$. Первое из этих условий является аналогом условия диссипативности ростка, второе специфично для бесконечномерного случая.

Исследуем некоторые свойства комплексного ростка.

ЛЕММА 3. Для комплексного ростка $\mathcal{G}$ выполнены свойства

- (а) $d\omega^y(\xi_1, \xi_2) = 0$ при $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{G}$;
- (б) $\frac{1}{i} d\omega^y(\xi, \xi^*) \geq 0$ при $\xi \in \mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое свойство вытекает из соотношения

$$0 = [\Omega^y(\xi_1), \Omega^y(\xi_2)] f_0 = \frac{1}{i} d\omega^y(\xi_1, \xi_2) f_0,$$

а второе – из положительной определенности скалярного произведения

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\Omega^y(\xi^*) f_0, \Omega^y(\xi^*) f_0) = (f_0, \Omega^y(\xi) \Omega^y(\xi^*) f_0) \\ &= (f_0, [\Omega^y(\xi), \Omega^y(\xi^*)] f_0) = \frac{1}{i} d\omega^y(\xi, \xi^*) \|f_0\|^2. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. *Существует единственный с точностью до числового множителя вектор $f \in D_y$, который аннулируется всеми операторами $\Omega^y(\xi)$, $\xi \in \mathcal{G}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование вектора вытекает из определения ростка. Предположим, что существует еще один вектор $f_1 \in D_y$, $f_1 \neq cf_0$, для которого

$$\Omega^y(\xi)f_1 = 0 \quad (42)$$

при всех $\xi \in \mathcal{G}$. Не ограничивая общности, можно считать

$$(f_1, f_0) = 0, \quad f_1 \neq 0. \quad (43)$$

В противном случае вместо f_1 можно рассмотреть вектор $f_1^\perp = f_1 - f_0 \frac{(f_0, f_1)}{(f_0, f_0)}$, который удовлетворяет свойствам (43). При $k \geq 1$ из (42) вытекает

$$(\Omega^y(\xi_1^*) \cdots \Omega^y(\xi_k^*)f_0, f_1) = (\Omega^y(\xi_2^*) \cdots \Omega^y(\xi_k^*)f_0, \Omega^y(\xi_1)f_1) = 0.$$

Поэтому вектор f_1 ортогонален полной системе векторов (41), а значит, $f_1 = 0$. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть $\Omega^y(\zeta)f_0 = 0$. Тогда $\zeta = \xi + \eta$, где $\xi \in \mathcal{G}$, а $\Omega^y(\eta)f_0 = \Omega^y(\eta^*)f_0 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вектор $\Omega^y(\xi^*)f_0$. При $k > 1$ имеем

$$\begin{aligned} (\Omega^y(\xi_1^*) \cdots \Omega^y(\xi_k^*)f_0, \Omega^y(\zeta^*)f_0) &= (\Omega^y(\xi_2^*) \cdots \Omega^y(\xi_k^*)f_0, [\Omega^y(\xi_1), \Omega^y(\zeta^*)]f_0) \\ &= \frac{1}{i} d\omega^y(\zeta_1, \xi^*)(\Omega^y(\xi_3^*) \cdots \Omega^y(\xi_k^*)f_0, \Omega^y(\xi_2)f_0) = 0. \end{aligned}$$

Далее, $(f_0, \Omega^y(\zeta^*)f_0) = (\Omega^y(\zeta)f_0, f_0) = 0$. В силу полноты системы (41) вектор $\Omega^y(\zeta^*)f_0$ представляется в виде линейной комбинации векторов $\Omega^y(\xi_i^*)f_0$, т.е. $\Omega^y(\zeta^*)f_0 = \Omega^y(\xi^*)f_0$, $\xi \in \mathcal{G}$. При $\eta = \zeta - \xi$ отсюда вытекает $\Omega^y(\eta^*)f_0 = 0$, а $\Omega^y(\eta)f_0 = -\Omega^y(\xi)f_0 = 0$, так как $\xi \in \mathcal{G}$. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. *Пусть $(\Omega^y(\eta) - \alpha)f_0 = 0$, $(\Omega^y(\eta^*) - \alpha^*)f_0 = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда оператор $\Omega^y(\eta)$ является оператором умножения на число α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что операторы $\Omega^y(\eta) - \alpha$ коммутируют с $\Omega^y(\xi^*)$, $\xi \in \mathcal{G}$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= ((\Omega^y(\eta^*) - \alpha^*)f_0, \Omega^y(\xi^*)f_0) \\ &= (f_0, (\Omega^y(\eta) - \alpha)\Omega^y(\xi^*)f_0) = [\Omega^y(\eta) - \alpha, \Omega^y(\xi^*)](f_0, f_0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(\Omega^y(\eta) - \alpha)\Omega^y(\xi_1^*) \cdots \Omega^y(\xi_k^*)f_0 = 0$. Таким образом, на плотном множестве справедливо равенство $\Omega^y(\eta) - \alpha = 0$. Лемма 6 доказана.

Из лемм 5 и 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $\Omega^y(\zeta)f_0 = 0$. Тогда $\zeta = \xi + \eta$, где $\xi \in \mathcal{G}$, а $\Omega^y(\eta) = 0$.*

ЛЕММА 7. Пусть $\xi \in \mathcal{G}$ и $d\omega^y(\xi, \xi^*) = 0$. Тогда

- (а) $\Omega^y(\xi) = \Omega^y(\xi^*) = 0$;
- (б) $d\omega^y(\eta, \xi^*) = 0$ при $\eta \in \mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$(\Omega^y(\xi^*)f_0, \Omega^y(\xi^*)f_0) = (f_0, [\Omega^y(\xi), \Omega^y(\xi^*)]f_0) = \frac{1}{i} d\omega^y(\xi, \xi^*)(f_0, f_0) = 0,$$

то $\Omega^y(\xi^*)f_0 = 0$. Так как $\xi \in \mathcal{G}$, то и $\Omega^y(\xi)f_0 = 0$. В силу следствия из лемм 5 и 6 получаем первое утверждение леммы. Второе утверждение леммы вытекает из свойства

$$0 = (\Omega^y(\eta^*)f_0, \Omega^y(\xi^*)f_0) = (f_0, [\Omega^y(\eta), \Omega^y(\xi^*)]f_0) = (f_0, f_0) \frac{1}{i} d\omega^y(\eta, \xi^*).$$

ЛЕММА 8. Для любого $\zeta \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$ оператор $\Omega^y(\zeta)$ представляется в виде

$$\Omega^y(\zeta) = \Omega^y(\xi_1^*) + \Omega^y(\xi_2) + \alpha, \quad (44)$$

где $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{G}$. Оператор умножения на число α в формуле (44) определен однозначно. Векторы ξ_1 и ξ_2 определены с точностью до добавления вектора η такого, что $\Omega^y(\eta) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k > 1$ аналогично доказательству леммы 5 имеем: $(\Omega^y(\xi_1^*) \cdots \Omega^y(\xi_k^*)f_0, \Omega^y(\zeta)f_0) = 0$, поэтому $\Omega^y(\zeta)f_0 = \Omega^y(\xi_1^*)f_0 + \alpha_1 f_0$ для $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ и $\xi_1 \in \mathcal{G}$. Аналогично $\Omega^y(\zeta^*)f_0 = \Omega^y(\xi_2^*)f_0 + \alpha_2 f_0$. Так как

$$(f_0, \Omega^y(\zeta)f_0) = (f_0, \Omega^y(\xi_1^*)f_0) + \alpha_1(f_0, f_0) = (\Omega^y(\xi_1)f_0, f_0) + \alpha_1(f_0, f_0) = \alpha_1 \|f_0\|^2$$

и $(f_0, \Omega^y(\zeta)f_0) = (f_0, \Omega^y(\zeta^*)f_0)^* = \alpha_2^* \|f_0\|^2$, то $\alpha_1^* = \alpha_2$. Рассмотрим оператор $\Omega^y(\zeta - \xi_1^* - \xi_2) = \Omega^y(\zeta) - \Omega^y(\xi_1^*) - \Omega^y(\xi_2)$. По лемме 6 этот оператор равен оператору умножения на число α_1 . Лемма 8 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Любой вектор $\zeta \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$ представляется в виде суммы векторов $\xi_1 \in \mathcal{G}$, $\xi_2 \in \mathcal{G}^*$ и такого вектора ξ_0 , что оператор $\Omega^y(\xi_0)$ является оператором умножения на число.

4.2. Структура абстрактного канонического оператора. В ряде случаев использование понятия комплексного ростка позволяет исследовать структуру абстрактного канонического оператора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем комплексный росток $\mathcal{G}$ минимальным, если не существует такого комплексного ростка $\tilde{\mathcal{G}} \subset T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$, что $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$ и $\tilde{\mathcal{G}} \neq \mathcal{G}$.

Отметим, что комплексный росток из примера 1 п. 4.1 минимален, а из примера 2 — нет.

ЛЕММА 9. Пусть $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ — два ростка, причем $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. Тогда вакуумные векторы для них совпадают с точностью до константы.

Действительно, вакуумный вектор для ростка $\mathcal{G}_2$ должен являться и вакуумным вектором для ростка $\mathcal{G}_1$. Из утверждения о единственности такого вектора вытекает лемма 9.

ЛЕММА 10. Пусть $\mathcal{G}_2$ – комплексный росток, а операторы $\Omega^y(\xi)$, $\xi \in \mathcal{G}_2$, обращаются в нуль тогда и только тогда, когда $\xi = 0$. Тогда $\mathcal{G}_2$ – минимальный росток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ – комплексный росток. Рассмотрим такой вектор $\xi \in \mathcal{G}_2$, что $\xi \notin \mathcal{G}_1$. По лемме 8

$$\Omega^y(\xi) = \Omega^y(\eta_1^*) + \Omega^y(\eta_2) + \alpha, \quad (45)$$

где $\eta_1^* \in \mathcal{G}_1^*$, $\eta_2 \in \mathcal{G}_1$, α – оператор умножения на число $\alpha \in \mathbb{C}$. Так как $0 = (f_0, \Omega^y(\xi)f_0) = \alpha(f_0, f_0)$, то $\alpha = 0$. Из (45) вытекает, что $0 = \Omega^y(\xi)f_0 = \Omega^y(\eta_1^*)f_0 + \Omega^y(\eta_2)f_0 = \Omega^y(\eta_1^*)f_0$. Из леммы 6 получаем, что $\Omega^y(\eta_1^*) = \Omega^y(\eta_1) = 0$. Отсюда из условий леммы $\eta_1 = 0$. Таким образом, $\Omega^y(\xi - \eta_2) = 0$, следовательно, $\xi - \eta_2 = 0$. Поэтому $\xi \in \mathcal{G}_1$. Полученное противоречие доказывает лемму 10.

ЛЕММА 11. Росток $\mathcal{G}$ минимален тогда и только тогда, когда из того, что $d\omega^y(\xi, \xi^*) = 0$, $\xi \in \mathcal{G}$, вытекает $\xi = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть из $d\omega^y(\xi, \xi^*) = 0$ вытекает $\xi = 0$. Тогда $\Omega^y(\xi) = 0$ для элементов $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$. Из леммы 10 вытекает минимальность ростка $\mathcal{G}$.

Пусть теперь росток минимален, но $d\omega^y(\xi_0, \xi_0^*) = 0$ для $\xi_0 \neq 0$. Поскольку касательное пространство $T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$ само предполагается гильбертовым пространством относительно некоторого скалярного произведения, таковым является и росток $\mathcal{G}$. Но тогда он представляется в виде прямой суммы одномерного пространства, натянутого на вектор ξ_0 , и ортогонального дополнения $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$. Это дополнение является комплексным ростком в силу свойства $\Omega^y(\eta + \alpha\xi_0) = \Omega^y(\eta)$.

ЛЕММА 12. Пусть $\mathcal{G}$ – комплексный росток. Тогда существует минимальный росток $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейное многообразие вида $\text{nul}(\mathcal{G}) = \{\xi \in \mathcal{G} : d\omega^y(\xi, \xi^*) = 0\}$. По лемме 7 это множество совпадает с множеством всех таких $\xi \in \mathcal{G}$, что $\Omega^y(\xi) = 0$. В силу непрерывности отображения $\xi \mapsto V(\xi)f$ на D_y данное множество является замкнутым подпространством комплексифицированного касательного пространства. Отсюда вытекает, что $\mathcal{G} = \text{nul}(\mathcal{G}) \oplus \tilde{\mathcal{G}}$. Из леммы 10 следует, что $\tilde{\mathcal{G}}$ является минимальным комплексным ростком.

Обозначим $\text{nul} = \{\xi \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}} : \Omega^y(\xi) = 0\}$. Комплексифицированное касательное пространство представляется в виде: $T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}} = T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}'} \oplus \text{nul}$. Обозначим через s подпространство $s \subset T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}'}$, состоящее из всех векторов $\xi' \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}'}$ таких, что оператор $\Omega^y(\xi')$ является оператором умножения на число.

ЛЕММА 13. 1. Подпространство s одномерно или нульмерно.

2. Пространство $T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$ раскладывается в прямую сумму $T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^* \oplus s \oplus \text{nul}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует такое $\zeta \neq 0$, $\zeta \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}'}$, что оператор $\Omega^y(\zeta)$ является оператором умножения на число $\alpha_0 \neq 0$. Тогда при $\xi \in s$ имеем $\Omega^y(\xi) = \alpha$. Тогда $\Omega^y\left(\xi - \frac{\alpha}{\alpha_0}\zeta\right) = 0$. Поэтому $\xi = \frac{\alpha}{\alpha_0}\zeta$. В этом случае пространство s одномерно. Если же не существует такого вектора $\zeta \neq 0$, что $\Omega^y(\zeta) = \alpha_0$,

то подпространство s нульмерно. Первое утверждение леммы доказано. Второе следует из леммы 8.

Понятие комплексного ростка оказывается весьма полезным для исследования общей структуры абстрактного канонического оператора.

Сопоставим гладкому многообразию $\mathcal{Y}$ расслоения

$$u(\mathcal{Y}): U(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Y} \quad \text{и} \quad v(\mathcal{Y}): V(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Y}$$

с базой $\mathcal{Y}$. Слоем $u^{-1}y$ расслоения u является совокупность всех подпространств комплексифицированного касательного пространства $T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$. Слоем $v^{-1}y$ расслоения v является совокупность всех реперов

$$\left\{ (e_1, \dots, e_k) : e_i \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}, \frac{1}{i} d\omega^y(e_i^*, e_j) = \delta_{ij} \right\},$$

где k конечное или бесконечное. Слои $u^{-1}y$ и $v^{-1}y$ являются бесконечномерными аналогами многообразий Грассмана и Штифеля [13]. Так как каждому реперу $e \in v^{-1}y$ однозначно сопоставляется подпространство $\langle e \rangle \in u^{-1}y$ комплексифицированного касательного пространства $T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$, натянутое на этот репер, то определен морфизм α расслоений u и v , $\alpha(e) = \langle e \rangle$, $e \in v^{-1}y$. Обозначим через $\tilde{u}(\mathcal{Y})$ подрасслоение расслоения $u(\mathcal{Y})$, $\tilde{u}(\mathcal{Y}): \tilde{U}(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Y}$, слои которого состоят из таких элементов $\mathcal{G} \in u^{-1}y$, что евклидово пространство $\mathcal{G}$ является минимальным комплексным ростком и полно относительно скалярного произведения $(\eta, \xi) = \frac{1}{i} d\omega^y(\xi, \eta^*)$. Через $\tilde{v}(\mathcal{Y})$ обозначим подрасслоение расслоения $v(\mathcal{Y})$, слои которого состоят из всех таких элементов $e \in v^{-1}y$, что $\alpha(e) \in \tilde{u}(\mathcal{Y})$. Таким образом, слоями расслоения $\tilde{u}$ являются комплексные ростки, а слоями расслоения $\tilde{v}$ — базисы на этих ростках.

Рассмотрим некоторое сечение расслоения $\tilde{v}$, $y \mapsto e_y$, предполагая, что оно существует. Морфизм α сопоставляет ему сечение расслоения $\tilde{u}$, $y \mapsto \mathcal{G}_y = \langle e_y \rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сечение расслоения $\tilde{u}$ является аналогом понятия поляризации в теории геометрического квантования [16], [17], [19].

Каждому сечению расслоения $\tilde{u}$ однозначно сопоставляется подрасслоение $\tilde{\pi}$ расслоения $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, состоящее из всех таких элементов $f \in \mathcal{X}$, что $\|f\| = 1$ и $\Omega^{\pi f}(\mathcal{G}_{\pi f})f = 0$. Из свойств комплексного ростка следует, что слои расслоения $\tilde{\pi}$ изоморфны единичной окружности на комплексной плоскости. Рассмотрим сечение $y \mapsto f_y$ расслоения $\tilde{\pi}$.

В предположении существования сечений расслоений $\tilde{v}$ и $\tilde{\pi}$ построим изоморфизм абстрактного канонического оператора общего вида и абстрактного канонического оператора K' , отвечающего тривиальному расслоению $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ со слоем $\mathcal{F}'$, являющимся пространством Фока, построенным следующим образом. Через $\mathcal{F}'_n$ обозначим пространство наборов $\{\Phi_{i_1 \dots i_n}^{(n)}\}$ комплексных чисел $(i_1, \dots, i_n = 1, \dots, k, k - \text{размерность каждого из элементов сечения } \tilde{u})$, симметричных по $i_1, \dots, i_n$, для которых ряд $\sum_{i_1 \dots i_n} |\Phi_{i_1 \dots i_n}^{(n)}|^2$ сходится. Рассмотрим скалярное произведение в $\mathcal{F}'_n$:

$$(\Phi_1^{(n)}, \Phi_2^{(n)}) = \sum_{i_1 \dots i_n} (\Phi_{1, i_1 \dots i_n}^{(n)}, \Phi_{2, i_1 \dots i_n}^{(n)}), \quad \Phi_1^{(n)}, \Phi_2^{(n)} \in \mathcal{F}'_n.$$

Обозначим через $\mathcal{F}'$ прямую сумму пространств $\mathcal{F}'_n$: $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_0 \oplus \mathcal{F}'_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}'_n \oplus \dots$; n -ю компоненту элемента $\Phi \in \mathcal{F}'$ будем обозначать через $\Phi^{(n)}$.

Абстрактный канонический оператор K' определим следующим образом. Обозначим через Λ_i^+ , Λ_i операторы $\Lambda_i^+ = \Omega^y(e_i^{y*})$, $\Lambda_i = \Omega^y(e_i^y)$, действующие в $\mathcal{F}_y \in \pi^{-1}y$, где $(e_1^y, e_2^y, \dots)$ – компоненты элемента сечения $y \mapsto e^y$. Рассмотрим оператор $w_e^y: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}_y$ вида

$$w_e^y \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{i_1 \dots i_n} \Lambda_{i_1}^+ \dots \Lambda_{i_n}^+ \Phi_{i_1 \dots i_n}^{(n)} f_y,$$

где f_y – точка на сечении $y \mapsto f_y$ расслоения $\tilde{\pi}$.

ЛЕММА 14. *Оператор w_e^y сохраняет норму и обратим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$(w_e^y \Phi, w_e^y \Phi) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m! n!}} \sum_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_n} \Phi_{i_1 \dots i_m}^{(m)*} \Phi_{j_1 \dots j_n}^{(n)} (f_y, \Lambda_{i_1} \dots \Lambda_{i_m} \Lambda_{j_1}^+ \dots \Lambda_{j_n}^+ f_y).$$

Из свойства $\Lambda_i f_y = 0$, соотношений $[\Lambda_i, \Lambda_j] = [\Lambda_i^+, \Lambda_j^+] = 0$, $[\Lambda_i, \Lambda_j^+] = \delta_{ij}$, вытекающих из коммутационных соотношений операторов Ω , и ортонормированности базиса относительно скалярного произведения $\frac{1}{i} d\omega(\xi, \eta^*)$ следует, что

$$(w_e^y \Phi, w_e^y \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_n} |\Phi_{j_1 \dots j_n}^{(n)}|^2 \|f_y\|^2.$$

Поэтому оператор w_e^y сохраняет норму. Далее, из полноты системы векторов (41) следует, что образ оператора w_e^y совпадает с $\mathcal{F}_y$, а из сохранения нормы – что ядро оператора w_e^y состоит из одного нуля. Поэтому оператор w_e^y обратим. Лемма 14 доказана.

Рассмотрим абстрактный канонический оператор $K'^\varepsilon f' = K^\varepsilon w_e^{\pi} f'$. Из приведенных рассуждений вытекает

ТЕОРЕМА 3. *При условии существования сечений расслоений $\tilde{v}$ и $\tilde{\pi}$ построенный абстрактный канонический оператор K' изоморфен K .*

4.3. Поведение комплексного роста при морфизмах. Понятие комплексного роста может быть также использовано для исследования изоморфизмов абстрактных канонических операторов.

Рассмотрим два абстрактных канонических оператора

$$K_1^\varepsilon: \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1^\varepsilon \quad \text{и} \quad K_2^\varepsilon: \mathcal{Z}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2^\varepsilon$$

и их изоморфизм, являющийся совокупностью унитарных преобразований гильбертовых пространств $\mathcal{U}^\varepsilon: \mathcal{H}_1^\varepsilon \rightarrow \mathcal{H}_2^\varepsilon$ и изоморфизма векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_1 & \xrightarrow{U} & \mathcal{Z}_2 \\ \left\{ \begin{array}{cc} \pi_1 & \pi_2 \end{array} \right\} & & \\ \left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{Y}_1 & \xrightarrow{u} \mathcal{Y}_2 \end{array} \right\} & & \end{array} \quad \text{Обозначим, как и ранее, через } W_y: \pi_1^{-1}y \rightarrow \pi_2^{-1}(uy) \text{ операторы,} \\ \text{совпадающие с } U \text{ на } \pi_1^{-1}y.$$

Пусть $\mathcal{G}$ – комплексный росток, являющийся подпространством комплексифицированного касательного пространства $(T\mathcal{Y}_1)_y^{\mathbb{C}}$ к многообразию $\mathcal{Y}_1$ в точке y . Рассмотрим подпространство $u^{*y}\mathcal{G} \subset (T\mathcal{Y}_2)_{uy}^{\mathbb{C}}$ вида $\{u^{*y}\xi : \xi \in \mathcal{G}\}$, где u^{*y} – отображение комплексифицированных касательных пространств, индуцированное отображением u .

ТЕОРЕМА 4. 1. *Подпространство $u^{*y}\mathcal{G}$ является комплексным ростком.*

2. *Оператор W_y восстанавливается по преобразованию u однозначно с точностью до оператора умножения на число, модуль которого равен единице.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим вектор $W_y f_0 \in \pi_2^{-1}(uy)$, где f_0 – вакуумный вектор, отвечающий ростку $\mathcal{G}_0$. В силу теоремы 1

$$0 = W_y \Omega_1^y(\xi) f_0 = \Omega_2^{uy}(u^{*y}) W_y f_0, \quad (46)$$

поэтому свойство (40) выполнено для подпространства $u^{*y}\mathcal{G}$ и вектора $W_y f_0$. Таким образом, достаточно проверить полноту системы векторов

$$\{\Omega_2^{uy}(\xi_1^*) \cdots \Omega_2^{uy}(\xi_k^*) W_y f_0, \xi_1' = u^{*y}\xi_1, \dots, \xi_k' = u^{*y}\xi_k\},$$

представляющихся в виде $W_y \Omega_1^y(\xi_1^*) \cdots \Omega_1^y(\xi_k^*) f_0$, $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{G}$. В случае изоморфизма оператор W_y обратим, поэтому полнота данной системы векторов равносильна полноте системы векторов (41). Первое утверждение доказано.

2. Пусть f_0 – вакуумный вектор для ростка $\mathcal{G}$, а $\tilde{f}_0$ – вакуумный вектор для ростка $u^{*y}\mathcal{G}$. В силу соотношений (46) и леммы о единственности вакуумного вектора выполнено соотношение $W_y f_0 = c \tilde{f}_0$ для некоторого числового множителя c , $|c| = 1$. В силу теоремы 1 имеем $W_y \Omega_1^y(\xi_1^*) \cdots \Omega_1^y(\xi_k^*) f_0 = c \Omega_2^{uy}(\xi_1^*) \cdots \Omega_2^{uy}(\xi_k^*) \tilde{f}_0$. Таким образом, оператор W_y однозначно определяется константой c на всюду плотной области определения. В силу изометричности и ограниченности оператора W_y продолжается на все пространство $\pi_1^{-1}y$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, если в качестве изоморфизма рассматривается преобразование эволюции, теорема 4 позволяет получить тождества на асимптотические решения абстрактных уравнений [14].

§ 5. Лагранжевы многообразия с комплексным ростком

Помимо асимптотических решений уравнений квантовой механики типа (2), построенных с помощью теории комплексного ростка Маслова в точке, рассматриваются также волновые функции, отвечающие лагранжевым многообразиям с комплексным ростком, имеющие вид бесконечной суперпозиции волновых функций, отвечающих ростку в точке.

Аналогом понятия комплексного ростка в точке для рассматриваемого в работе абстрактного случая является понятие абстрактного комплексного ростка, рассмотренное в предыдущем параграфе. В этом параграфе рассматривается аналог понятия лагранжева многообразия с комплексным ростком.

5.1. Канонический оператор, отвечающий изотропному многообразию. Рассмотрим отображение $Z^k: \tau \mapsto z(\tau)$ из $\mathbb{R}^k$ в $\mathcal{X}$, для которого $z(\tau) = 0$

вне некоторого шара конечного радиуса. Аналогично (3) рассмотрим суперпозицию вида

$$\psi^\varepsilon = \int \frac{d\tau}{\varepsilon^{k/4}} z(\tau) \in \mathcal{H}^\varepsilon.$$

Квадрат нормы элемента $\psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ представляется в виде

$$\|\psi^\varepsilon\|^2 = \int d\tau d\alpha (K^\varepsilon z(\alpha), K^\varepsilon z(\tau + \alpha\sqrt{\varepsilon})). \quad (47)$$

В силу формулы (9) скалярное произведение $(K^\varepsilon z(\alpha), K^\varepsilon z(\tau + \alpha\sqrt{\varepsilon}))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ содержит быстро осциллирующий множитель

$$\exp\left\{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{a=1}^k \omega\left(\frac{\partial y}{\partial \tau_a}\right) \alpha_a\right\}, \quad y(\tau) = \pi z(\tau).$$

В случае, если он отличен от нуля, интеграл (47) будет экспоненциально мал при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ограничимся поэтому рассмотрением случая

$$\omega\left(\frac{\partial y}{\partial \tau_a}\right) = 0, \quad a = 1, \dots, k. \quad (48)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем k -мерную гладкую поверхность $y(\tau) \in \mathcal{Y}$, $\tau \in \mathbb{R}^k$, для которой выполнено свойство (48), *топологически тривиальным изотропным многообразием*.

ЛЕММА 15. Пусть поверхность $\Lambda^k = \pi Z^k$ изотропна, а

$$|(K^\varepsilon z(\alpha), K^\varepsilon z(\tau + \alpha\sqrt{\varepsilon}))| \leq \phi(\tau, \alpha) \quad (49)$$

для некоторой интегрируемой функции ϕ . Тогда

$$\|\psi^\varepsilon\|^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int d\tau d\alpha \left(z(\tau), \exp\left\{i \sum_{a=1}^k \Omega\left(\frac{\partial y}{\partial \tau_a}\right) \alpha_a\right\} z(\tau) \right). \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В локальных координатах $z = (y, f)$ формула (47) принимает вид

$$\|\psi^\varepsilon\|^2 = \int d\tau d\alpha (K_{y(\tau)}^\varepsilon f(\tau), K_{y(\tau+\alpha\sqrt{\varepsilon})}^\varepsilon f(\tau + \alpha\sqrt{\varepsilon})). \quad (51)$$

По формуле (9)

$$\begin{aligned} & K_{y(\tau+\alpha\sqrt{\varepsilon})}^\varepsilon f(\tau + \alpha\sqrt{\varepsilon}) \\ & \sim K_{y+\sum_{a=1}^k \frac{\partial y}{\partial \tau_a} \alpha_a \sqrt{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{a,b=1}^k \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_a \partial \tau_b} \alpha_a \alpha_b}^\varepsilon f(\tau) \\ & \sim \exp\left\{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{ia} \omega_i \frac{\partial y_i}{\partial \tau_a} \alpha_a - \frac{i}{2} \sum_{iab} \omega_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial \tau_a \partial \tau_b} \alpha_a \alpha_b\right\} K_{y(\tau)}^\varepsilon V_{y(\tau)} \left[\sum_a \frac{\partial y}{\partial \tau_a} \alpha_a\right] f. \end{aligned}$$

Из леммы 1 и условия изотропности (48) отсюда вытекает, что

$$K_{y(\tau+\alpha\sqrt{\varepsilon})}^{\varepsilon} f(\tau+\alpha\sqrt{\varepsilon}) \sim K_{y(\tau)}^{\varepsilon} \exp \left\{ i \sum_{j,a} \Omega_j \frac{\partial y_j}{\partial \tau_a} \alpha_a \right\} f(\tau).$$

В силу свойства (8) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(K^{\varepsilon} z_1, K^{\varepsilon} z_2) &= \frac{1}{2} [\|K^{\varepsilon}(z_1 + z_2)\|^2 - \|K^{\varepsilon} z_1\|^2 - \|K^{\varepsilon} z_2\|^2] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re}(z_1, z_2), \\ \operatorname{Im}(K^{\varepsilon} z_1, K^{\varepsilon} z_2) &= \frac{1}{2i} [\|K^{\varepsilon}(z_1 + iz_2)\|^2 - \|K^{\varepsilon} z_1\|^2 - \|K^{\varepsilon} z_2\|^2] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Следовательно, $(K^{\varepsilon} z_1, K^{\varepsilon} z_2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (z_1, z_2)$. В силу неравенства Коши–Буняковского $(K^{\varepsilon} z_1, \psi^{\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (z_1, z_2)$ при $\psi^{\varepsilon} \sim K^{\varepsilon} z_2$. Отсюда следует, что

$$(K_{y(\tau)}^{\varepsilon} f(\tau), K_{y(\tau+\alpha\sqrt{\varepsilon})}^{\varepsilon} f(\tau+\alpha\sqrt{\varepsilon})) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f(\tau), \exp \left\{ i \sum_{j,a} \Omega_j \frac{\partial y_j}{\partial \tau_a} \alpha_a \right\} f(\tau) \right). \quad (52)$$

По теореме Лебега из оценки (49) вытекает допустимость перестановки взятия предела при $\varepsilon \rightarrow 0$ и интегрирования. Тем самым из (51) и (52) вытекает утверждение леммы.

Определим теперь канонический оператор, отвечающий топологически тривиальному изотропному многообразию, который является аналогом канонического оператора Маслова на лагранжевом многообразии с комплексным ростком.

Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство, являющееся прямым произведением пространств $\mathcal{H}^{\varepsilon}$. Элементами $\mathcal{L}$ являются отображения $\varepsilon \mapsto \psi^{\varepsilon} \in \mathcal{H}^{\varepsilon}$, $\varepsilon \in \{\varepsilon\}$. Введем в $\mathcal{L}$ отношение эквивалентности $\mathcal{R}$. Будем говорить, что элементы ψ_1 и ψ_2 пространства $\mathcal{L}$ эквивалентны, $\psi_1 \sim_{\mathcal{R}} \psi_2$, если $\|\psi_1^{\varepsilon} - \psi_2^{\varepsilon}\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Соответствующее факторпространство, рассмотренное в [18], обозначим через $\mathcal{L}/\mathcal{R}$. Будем обозначать через $[\psi] \in \mathcal{L}/\mathcal{R}$ класс эквивалентности, отвечающий элементу $\psi \in \mathcal{L}$.

Пусть Λ^k – изотропное многообразие $\tau \mapsto y(\tau) \in \mathcal{Y}$ без самопересечений, а $d\sigma$ – мера на этом многообразии. Рассмотрим сужение π_{Λ^k} расслоения $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ на базу Λ^k , $\pi_{\Lambda^k}: \mathcal{Z}_{\Lambda^k} \rightarrow \Lambda^k$. Каждому сечению z расслоения π_{Λ^k} однозначно сопоставляется функция $z(\tau)$, причем $\pi z(\tau) = y(\tau)$. Рассмотрим пространство $Z(\Lambda^k)$ сечений z расслоения π_{Λ^k} , удовлетворяющих условию $z = 0$ при $\pi z = y(\tau)$, $|\tau| > R$ для некоторого $R > 0$, и условию (49). Назовем два сечения z_1 и z_2 эквивалентными, $z_1 \sim z_2$, если для любого сечения $z \in Z(\Lambda^k)$

$$\int d\sigma d\alpha \frac{D\sigma}{D\tau} \left(z(\tau), \exp \left\{ i \sum_{a=1}^k \Omega \left(\frac{\partial y}{\partial \tau_a} \right) \alpha_a \right\} (z_1(\tau) - z_2(\tau)) \right) = 0. \quad (53)$$

Введем в факторпространстве $Z(\Lambda^k)/\sim$ скалярное произведение

$$([z_1], [z_2]) = \int d\sigma d\alpha \frac{D\sigma}{D\tau} \left(z_1(\tau), \exp \left\{ i \sum_{a=1}^k \Omega \left(\frac{\partial y}{\partial \tau_a} \right) \alpha_a \right\} z_2(\tau) \right),$$

не зависящее от выбора представителей классов эквивалентности $z_1 \in [z_1]$ и $z_2 \in [z_2]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Назовем *каноническим оператором* K_{Λ^k} , отвечающим топологически тривиальному изотропному многообразию Λ^k с мерой $d\sigma$, отображение $K_{\Lambda^k}: Z(\Lambda^k)/\sim \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{R}$ вида

$$K_{\Lambda^k}[z] = [\psi], \quad (54)$$

где $\psi^\varepsilon = \int \frac{d\tau}{\varepsilon^{k/4}} K^\varepsilon z(\tau)$, $[z] \in Z(\Lambda^k)/\sim$.

ЛЕММА 16. 1. *Определение (54) не зависит от выбора представителя класса эквивалентности $z \in [z]$.*

2. *При $[\psi_1] = K_{\Lambda^k}[z_1]$, $[\psi_2] = K_{\Lambda^k}[z_2]$ выполнено соотношение $(\psi_1^\varepsilon, \psi_2^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} ([z_1], [z_2])$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки первого утверждения достаточно проверить, что

$$\left\| \int \frac{d\tau}{\varepsilon^{k/4}} K^\varepsilon (z_1(\tau) - z_2(\tau)) \right\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{при } z_1, z_2 \in [z].$$

Это утверждение вытекает из формул (50) и (53). Второе утверждение следует из (50). Лемма 16 доказана.

Пространство $Z(\Lambda^k)/\sim$ можно параметризовать также следующим образом. Пусть $T_k \subset T\mathcal{Y}_y$ — k -мерное подпространство касательного пространства к $\mathcal{Y}$ в точке y с мерой $d\tilde{\sigma} = cd x_1 \cdots dx_k$, удовлетворяющее условию $d\omega(\xi_1, \xi_2) = 0$, $\xi_1, \xi_2 \in T_k$. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — произвольный базис на T_k . Рассмотрим не зависящее от выбора базиса пространство $\mathcal{F}_y(T_k)$ обобщенных векторов из D'_y , представляющееся в виде

$$f = \int d\alpha \exp \left\{ i \sum_{a=1}^k \Omega^y(e_a) \alpha_a \right\} f_0, \quad f_0 \in \mathcal{F}_y. \quad (55)$$

В $\mathcal{F}_y(T_k)$ введем скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \int d\tilde{\sigma} \left(f_0, \exp \left\{ i \sum_{a=1}^k \Omega^y(e_a) \alpha_a \right\} g_0 \right),$$

не зависящее от выбора базиса.

Рассмотрим расслоение $w(\Lambda^k): W(\Lambda^k) \rightarrow \Lambda^k$ со слоями $\mathcal{F}_y(T\Lambda_y^k)$, где $T\Lambda_y^k$ — касательное пространство к Λ^k в точке y с мерой $\frac{D\sigma}{D\alpha} d\alpha_1 \cdots d\alpha_k$, выражающейся через меру $d\sigma$ на многообразии Λ^k . Сечения расслоения $w(\Lambda^k)$ можно отождествить с элементами пространства $Z(\Lambda^k)/\sim$, поскольку любому элементу $z(\tau) \in \mathcal{F}_{y(\tau)}(T\Lambda_{y(\tau)}^k)$ сопоставляется элемент $z(\tau) \in \mathcal{F}_{y(\tau)}$ с точностью до отношения эквивалентности (53).

ПРИМЕР. Рассмотрим абстрактный канонический оператор (21), отвечающий одномерному случаю. Многообразие $\mathcal{Y}$ в данном случае трехмерно, $\mathcal{Y} = \{(S, P, Q)\}$, и является прямым произведением $\mathbb{R}$ на фазовое пространство одномерной классической механики. Кривая $(S(\tau), P(\tau), Q(\tau))$ является изотропной, если $\frac{dS}{d\tau} = P \frac{dQ}{d\tau}$. Элементами пространства $\mathcal{F}_y(T\Lambda^k)$ являются в данном случае обобщенные функции $f(\xi)$ вида (55), т.е. $f(\xi) = \delta\left(\frac{dP}{d\tau}\xi - \frac{dQ}{d\tau} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) f_0(\xi)$. При $\dot{Q} = \frac{dQ}{d\tau} \neq 0$ (в “неособых” точках изотропного многообразия) функция $f(\xi)$ имеет вид $f(\xi) = c \exp\left\{\frac{i}{2} \frac{\dot{P}_\tau}{\dot{Q}_\tau} \xi^2\right\}$, причем $\|f\|^2 = |\dot{Q}|c|^2$. Канонический оператор сопоставляет каждой функции

$$f_\tau(\xi) = \frac{\varphi_\tau e^{i\gamma_\tau}}{\sqrt{|\dot{Q}_\tau|}} \exp\left\{\frac{i}{2} \frac{\dot{P}_\tau}{\dot{Q}_\tau} \xi^2\right\}, \quad (56)$$

квадрат нормы которой равен $\|f\|^2 = \int d\tau |\varphi_\tau|^2$, элемент пространства $\mathcal{L}/\mathcal{R}$ вида

$$\psi^\varepsilon(x) = \int \frac{d\tau}{\varepsilon^{1/4}} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon} S_\tau + \frac{i}{\varepsilon} P_\tau(x - Q_\tau)\right\} f_0\left(\tau, \frac{x - Q_\tau}{\varepsilon}\right).$$

Нетрудно показать (см., например, [6]), что величина $\frac{\varphi_\tau e^{i\gamma_\tau}}{\sqrt{|\dot{Q}_\tau|}}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ совпадает со значением ψ^ε в точке Q_τ . Фаза γ_τ , входящая в формулу (56), связана с индексом Маслова [18]. Если на некотором интервале $\dot{Q}_\tau$ не меняет знак, то γ_τ может быть выбрана постоянной. При переходе через особую точку скачок фазы γ_τ выбирается таким образом, чтобы функция f_τ была непрерывна как обобщенная функция. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{|\dot{Q}_\tau|}} \exp\left\{\frac{i}{2} \frac{\dot{P}_\tau}{\dot{Q}_\tau} \xi^2\right\} \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{|\dot{P}_\tau|}} \exp\left\{\pm i \frac{\pi}{4} \text{sign } \dot{P}_\tau\right\} \delta(\xi) \quad \text{при } \dot{Q}_\tau \rightarrow \pm 0,$$

то при определенном выборе $\gamma_{\tau \pm 0}$ функция f_τ непрерывна в обобщенном смысле. Построенный канонический оператор совпадает с одномерным каноническим оператором Маслова [18] (см. также [4]).

5.2. Комплексный росток на изотропном многообразии. Аналогично §4 исследуем структуру канонического оператора, отвечающего изотропному многообразию, используя понятие комплексного ростка.

Покажем сначала, что операторы $\Omega^y(\xi)$ при некоторых $\xi \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$ могут быть продолжены на пространство $D_y(T_k)$ всех векторов вида (55) для $f_0 \in D_y$. Положим

$$\Omega^y(\xi)f = \int d\alpha \Omega^y(\xi) \exp\left\{i \sum_{a=1}^k \Omega^y(e_a) \alpha_a\right\} f_0. \quad (57)$$

ЛЕММА 17. При $d\omega^y(\xi, \eta) = 0$ для всех $\eta \in T_k$ определение (57) корректно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что вектор (57) может быть представлен в виде интеграла (55). В силу свойства $[\Omega^y(\xi), \Omega^y(e_a)] = 0$ имеем

$$\Omega^y(\xi)f = \int d\alpha \exp\left\{i \sum_{a=1}^k \Omega^y(e_a)\alpha_a\right\} \Omega^y(\xi)f_0.$$

Лемма 17 доказана.

ЛЕММА 18. При $f, g \in D_y(T_k)$ и $d\omega^y(\xi, \eta) = 0$ для всех $\eta \in T_k$ справедливо свойство $\langle f, \Omega^y(\xi)g \rangle = \langle \Omega^y(\xi^*)f, g \rangle$.

Доказательство вытекает непосредственно из формулы (57) и определения скалярного произведения в пространстве $\mathcal{F}_y(T_k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Комплексным ростком в точке y топологически тривиального изотропного многообразия Λ^k называется подпространство $\mathcal{G} \subset T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$ такое, что

- (а) для любых $\xi \in \mathcal{G}$, $\eta \in T\Lambda_y^k$ выполнено свойство $d\omega^y(\xi, \eta) = 0$;
- (б) существует такой вектор $f_0 \in D_y(T\Lambda_y^k)$, что $\Omega^y(\xi)f_0 = 0$ при любом $\xi \in \mathcal{G}$;
- (в) система векторов вида $\Omega^y(\xi_1^*) \dots \Omega^y(\xi_k^*)f_0, \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{G}$ полна в $\mathcal{F}_y(T\Lambda_y^k)$.

Комплексный росток $\mathcal{G}$ называется минимальным, если не существует такого комплексного ростка $\tilde{\mathcal{G}}$, что $\tilde{\mathcal{G}} \neq \mathcal{G}$ и $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$.

Все свойства абстрактного комплексного ростка, исследованные в § 4, справедливы и для комплексного ростка в точке изотропного многообразия. Доказательства полностью повторяют рассуждения § 4.

ТЕОРЕМА 5. 1. При $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{G}$ выполнено соотношение $d\omega^y(\xi_1, \xi_2) = 0$.

2. При $\xi \in \mathcal{G}$ справедливо неравенство $\frac{1}{i} d\omega^y(\xi, \xi^*) \geq 0$.

3. Существует единственный с точностью до числового множителя вектор $f \in D_y(T\Lambda_y^k)$, для которого $\Omega^y(\xi)f = 0$ при всех $\xi \in \mathcal{G}$.

4. Пусть $\Omega^y(\zeta) = 0$. Тогда $\zeta = \xi + \eta$, где $\xi \in \mathcal{G}$, а $\Omega^y(\eta) = 0$ на $D_y(T\Lambda_y^k)$.

5. Пусть $\xi \in \mathcal{G}$ и $d\omega^y(\xi, \xi^*) = 0$. Тогда $\Omega^y(\xi) = 0$.

6. Пусть для некоторого $\xi \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$ и любого $\eta \in T\Lambda_y^k$ справедливо свойство $d\omega^y(\xi, \eta) = 0$. Тогда вектор ξ представляется в виде суммы $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_0$, где $\xi_1, \xi_2^* \in \mathcal{G}$, а оператор $\Omega^y(\xi_0)$ является оператором умножения на число.

7. Росток $\mathcal{G}$ минимален тогда и только тогда, когда из $d\omega^y(\xi, \xi^*) = 0$, $\xi \in \mathcal{G}$, вытекает $\xi = 0$.

8. Пусть $\mathcal{G}$ – минимальный росток. Тогда пространство $(T\Lambda_y^k)^{\perp}$ всех векторов $\xi \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$, косоортгоналиных вектору $\eta \in T\Lambda_y^k$, $d\omega^y(\xi, \eta) = 0$, представляется в виде прямой суммы $(T\Lambda_y^k)^{\perp} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^* \oplus c \oplus \text{nul}$, где c – нульмерное или одномерное подпространство $(T\Lambda_y^k)^{\perp}$, состоящее из нулевого вектора и всех таких векторов ξ , что оператор $\Omega^y(\xi)$ является оператором умножения на ненулевое число, а $\text{nul} = \{\xi \in (T\Lambda_y^k)^{\perp} : \Omega^y(\xi) = 0\}$.

Используя понятие минимального комплексного ростка, можно аналогично § 4 определить канонический оператор на изотропном многообразии с комплексным ростком.

Рассмотрим расслоения $u(\Lambda^k): U(\Lambda^k) \rightarrow \Lambda^k$ и $v(\Lambda^k): V(\Lambda^k) \rightarrow \Lambda^k$ с базой Λ^k . Слоями $u^{-1}y$ расслоения u являются совокупности всех подпространств пространства $(T\Lambda_y^k)^\perp$. Слоями $v^{-1}y$ расслоения v являются совокупности всех реперов $\{(e_1, \dots, e_k), e_i \in (T\Lambda_y^k)^\perp, \frac{1}{i} d\omega^y(e_i^*, e_j) = \delta_{ij}\}$, где k конечное или бесконечное. Аналогично §4 определим морфизм α расслоений u и v , сопоставляющий реперу натянутое на него подпространство. Через $\tilde{u}(\Lambda^k)$ обозначим подрасслоение расслоения $u(\Lambda^k)$, $\tilde{u}(\Lambda^k): \tilde{U}(\Lambda^k) \rightarrow \Lambda^k$, слой которого состоит из таких элементов $\mathcal{G} \in u^{-1}y$, что евклидово пространство $\mathcal{G}$ является минимальным комплексным ростком и полно относительно скалярного произведения $(\eta, \xi) = \frac{1}{i} d\omega^y(\xi, \eta^*)$, через $\tilde{v}(\Lambda^k)$ – подрасслоение расслоения $v(\Lambda^k)$, слой которого состоит из всех таких элементов $e \in v^{-1}y$, что $\alpha(e) \in \tilde{u}(\Lambda^k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Сечение расслоения $\tilde{u}$ называется *комплексным ростком на топологически тривиальном изотропном многообразии* Λ^k . Отвечающее ему сечение расслоения $\tilde{v}$ называется *базисом* на ростке. Совокупность изотропного многообразия, ростка и базиса называется *лагранжевым многообразием с комплексным ростком*.

Каждому сечению расслоения $\tilde{u}$ однозначно сопоставляется подрасслоение $\tilde{\pi}$ расслоения $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, состоящее из всех таких элементов $f \in \mathcal{X}$, что $\|f\| = 1$ и $\Omega^{\pi f}(\mathcal{G}_{\pi f})f = 0$. Слоями данного расслоения являются единичные окружности.

Совокупности лагранжева многообразия с комплексным ростком и сечения $y \mapsto f_y$ расслоения $\tilde{\pi}$ сопоставляется канонический оператор следующего вида. Обозначим через $\mathcal{F}(\Lambda^k)$ пространство функций $\{\Phi: \Lambda^k \rightarrow \mathcal{F}'\}$ со значениями в пространстве Фока. Это пространство может быть взаимно однозначно отображено на $Z(\Lambda^k)/\sim$ следующим образом:

$$w: \mathcal{F}(\Lambda^k) \rightarrow Z(\Lambda^k)/\sim,$$

$$w_e \Phi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{i_1 \dots i_n} \Omega^{y(\tau)}(e_{i_1}^*) \dots \Omega^{y(\tau)}(e_{i_n}^*) \Phi_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(\tau) f_{y(\tau)}.$$

Взаимная однозначность отображения w_e проверяется аналогично лемме 14. Оператор $K_{\Lambda^k} w_e$ является аналогом канонического оператора Маслова, отвечающего лагранжеву многообразию с комплексным ростком [1], [2].

ЗАМЕЧАНИЕ. Канонический оператор определяется не только выбором лагранжева многообразия с комплексным ростком, но и выбором сечения расслоения $\tilde{\pi}$. Это позволяет рассматривать канонические операторы при различных условиях квантования (см. ниже).

5.3. Топологически нетривиальный случай. Для исследования топологически нетривиальных изотропных многообразий рассмотрим специальный случай, когда для каждого вещественного s определен такой морфизм ρ_s расслоения $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ в себя, что

$$K^\varepsilon \rho_s z = e^{\frac{i}{\varepsilon} s} K^\varepsilon z. \quad (58)$$

Данному морфизму отвечает преобразование $g_s: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Пространство орбит вида $\{g_s y, y \in \mathcal{Y}\}$ естественно отождествить с фазовым пространством.

Пусть Γ^k — некоторое многообразие с мерой $d\sigma$, M^k — его универсальное накрытие, $\nu_1, \dots, \nu_l$ — базисные 1-формы l -мерного пространства когомологий $H^1(\Gamma^k)$, которые без ограничения общности могут быть выбраны так, что $\oint_{\gamma_i} \nu_m = \delta_{im}$, где $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ — базисные циклы группы гомологий $H_1(\Gamma^k)$. Введем функции $s_1, \dots, s_l$ на M^k такие, что $ds_m = \nu_m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Назовем *изотропным многообразием* такое отображение $y: M^k \rightarrow \mathcal{Y}$, удовлетворяющее свойству (48), что для некоторых отображений $\tilde{y}: \Gamma^k \rightarrow \mathcal{Y}$ и $s: M^k \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$y(\alpha) = g_{s(\alpha)} \tilde{y}(\tilde{\tau}), \quad (59)$$

где $\tilde{\tau}$ — точка многообразия Γ^k , отвечающая точке α универсального накрытия M^k .

ЛЕММА 19. Для того чтобы многообразие $y: M^k \rightarrow \mathcal{Y}$ было изотропно, необходимо и достаточно, чтобы

$$ds = \sum_{ia} \omega_i \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \tau_a} d\tau_a$$

в некоторых локальных координатах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (9) и (48) вытекает, что изотропность многообразия равносильна выполнению соотношения $K_{y(\tau+\alpha\epsilon)}^\epsilon f \sim K_{y(\tau)}^\epsilon f$. В силу (58) и (59) данная формула равносильна соотношению $e^{\frac{i}{\epsilon}s(\tau+\alpha\epsilon)} K_{\tilde{y}(\tau+\alpha\epsilon)}^\epsilon f \sim e^{\frac{i}{\epsilon}s(\tau)} K_{\tilde{y}(\tau)}^\epsilon f$, которое в силу (9) равносильно утверждению леммы 19.

Канонический оператор в топологически нетривиальном случае определим следующим образом. Зафиксируем вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Форма

$$\sum_{ia} \omega_i \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \tau_a} d\tau_a$$

на Γ^k однозначно представляется в виде $\sum_{ia} \omega_i \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \tau_a} d\tau_a = ds_0 + \varkappa_1 \nu_1 + \dots + \varkappa_l \nu_l$, где s_0 — однозначная функция на Γ^k . Обозначим через β_m дробную часть выражения $\frac{\varkappa_m}{2\pi\epsilon} - \alpha_m$.

Вместо сечений расслоения $W(\Lambda^k) \rightarrow \Lambda^k$ со слоями $\mathcal{F}_y(T\Lambda_y^k)$ будем рассматривать сечения расслоения $W(M^k) \rightarrow M^k$ со слоями $\mathcal{F}_y(TM_y^k)$, удовлетворяющие следующему условию: при перемещении из точки τ_1 в точку τ_2 на M^k , соответствующем перемещению вдоль замкнутого контура γ_m на Λ^k , вектор $z(\tau)$ преобразуется как

$$z(\tau_1) = g_{s(\tau_2)-s(\tau_1)} z(\tau_2) e^{-2\pi i \alpha_m}.$$

Канонический оператор сопоставляет каждому такому сечению элемент $[\psi]$ пространства $\mathcal{L}/\mathcal{R}$, где

$$\psi^\epsilon = \int_{\Gamma^k} \frac{d\sigma}{\epsilon^{k/4}} \exp \left\{ -2\pi i \sum_m s_m(\tau) \beta_m \right\} K^\epsilon z(\tau), \quad (60)$$

а интеграл берется по многообразию Γ^k . Определение (60) корректно, так как подынтегральное выражение однозначно определяется точкой на Γ^k и не зависит от отвечающей ей точки на накрытии.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. В данном определении канонического оператора не используются условия квантования (аналогично [19; гл. 3, § 2, замечание 2.2]). При $\beta_m = 0$ выполнены обычно рассматриваемые условия квантования [1].

2. Понятие комплексного ростка вводится аналогично п. 5.2.

3. Варьирование параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ позволяет рассматривать аналоги канонических операторов, отвечающих различным условиям квантования.

§ 6. Стационарные задачи

При построении асимптотических собственных функций $\hbar$ -псевдодифференциальных операторов важную роль играют инвариантные лагранжевы многообразия с комплексным ростком, существование которых связано [1] с устойчивостью соответствующих решений классических уравнений. В этом разделе данная связь исследована для абстрактного случая.

6.1. “Квантование” стационарных классических траекторий. Пусть α_t — однопараметрическая группа изоморфизмов абстрактного канонического оператора K в себя. Это означает, что при каждом t заданы однопараметрические группы унитарных операторов $\mathcal{U}_t^\varepsilon: \mathcal{H}^\varepsilon \rightarrow \mathcal{H}^\varepsilon$ и морфизмов векторных расслоений $U_t: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$. Морфизму U_t сопоставлены, в свою очередь, преобразования u_t многообразия $\mathcal{Y}$ и обратимый изометричный оператор $W_y^t: \mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{F}_{u_t y}$, причем выполнено свойство (24).

Пусть на $\mathcal{Z}$ действует однопараметрическая группа ρ_s , для которой выполнено свойство (58) и преобразования которой коммутируют с u_t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Назовем *классической траекторией* кривую $t \mapsto y_t \in \mathcal{Y}$ вида $y_t = u_t y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Назовем точку $z \in \mathcal{Z}$, $z \neq 0$, *стационарной для однопараметрической группы морфизмов α_t* , если

$$\|\mathcal{U}_t^\varepsilon K^\varepsilon z - e^{-iE(\varepsilon)t} K^\varepsilon z\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (61)$$

для некоторого числа $E(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, называемого *энергией* точки z . Назовем точку $y \in \mathcal{Y}$ *стационарной для группы u_t* , если

$$u_t y = g_s(t) y. \quad (62)$$

ЛЕММА 20. Пусть $z \in \mathcal{Z}$ — стационарная точка для группы морфизмов α_t , а $\pi z \in \mathcal{Y}$ — стационарная точка для группы u_t . Тогда $s(t) = -Et$, $\left| E(\varepsilon) - \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{E} + E_1 \right) \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ и $\rho_{\mathcal{E}t} U_t z = z e^{-iE_1 t}$ для некоторых $\mathcal{E}, E_1 \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (9), (58) вытекает, что

$$\mathcal{U}_t^\varepsilon K^\varepsilon z \sim K^\varepsilon U_t z \sim e^{\frac{i}{\varepsilon} s(t)} K^\varepsilon \rho_{-s(t)} U_t z.$$

Используя (61), получаем $K^\varepsilon z' \sim e^{-i(E(\varepsilon)t + \frac{s(t)}{\varepsilon})} K^\varepsilon z$, где $z' = \rho_{-s(t)} U_t z$. Учтывая, что $\pi z' = \pi z$ в силу (62), из (8) получаем

$$(K^\varepsilon z, K^\varepsilon z') \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (z, z'), \quad (K^\varepsilon z, K^\varepsilon z) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (z, z).$$

Поэтому величина $e^{-i(E(\varepsilon)t + \frac{s(t)}{\varepsilon})}$ имеет предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда $E(\varepsilon)t = -\frac{s(t)}{\varepsilon} + s_1(t) + s_2(t, \varepsilon)$, $s_2(t, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Поэтому в формуле (61) величина $E(\varepsilon)t$ может быть выбрана в виде $E(\varepsilon)t = -\frac{s(t)}{\varepsilon} + s_1(t)$, а $\rho_{-s(t)}U_t z = e^{-is_1(t)}z$. Отсюда $s(t) = -\mathcal{E}t$, $s_1(t) = E_1 t$. Лемма 20 доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $z \in D_y$ – стационарная точка группы морфизмов α_t с энергией $\mathcal{E} + \varepsilon E_1$, $y = \pi z \in \mathcal{G}$ – стационарная точка группы u_t , $\xi \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$ – комплексифицированный касательный вектор, удовлетворяющий условию $u_t^{*y}\xi = g_{-\mathcal{E}t}^{*y}\xi e^{i\beta t}$. Тогда при $\frac{1}{i}d\omega^y(\xi, \xi^*) > 0$ существует стационарная точка с энергией $\mathcal{E} + \varepsilon(E_1 + \beta)$, а при $\frac{1}{i}d\omega^y(\xi, \xi^*) < 0$ – стационарная точка с энергией $\mathcal{E} + \varepsilon(E_1 - \beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\frac{1}{i}d\omega^y(\xi, \xi^*) > 0$. Рассмотрим вектор

$$\Omega^y(\xi^*)z \in D_y. \quad (63)$$

Так как $(\Omega^y(\xi^*)z, \Omega^y(\xi^*)z) = (\Omega^y(\xi)z, \Omega^y(\xi)z) + \frac{1}{i}d\omega^y(\xi, \xi^*)\|z\|^2 > 0$, то вектор (63) отличен от нуля. В силу леммы 19 имеем $W_y^t z = \rho_{-\mathcal{E}t} e^{-iE_1 t} z$. Отсюда по доказанному в § 3 вытекает, что

$$\begin{aligned} W_y^t \Omega^y(\xi^*)z &= \Omega^{g_{-\mathcal{E}t}y}(g_{-\mathcal{E}t}^{*y}\xi^*)e^{-i\beta t}W_y^t z \\ &= \Omega^{g_{-\mathcal{E}t}y}(g_{-\mathcal{E}t}^{*y}\xi^*)e^{-i\beta t}\rho_{-\mathcal{E}t}e^{-iE_1 t}z = \rho_{-\mathcal{E}t}\Omega^y(\xi^*)e^{-i(E_1 + \beta)t}z. \end{aligned}$$

Тем самым теорема в случае $\frac{1}{i}d\omega^y(\xi, \xi^*) > 0$ доказана. Второй случай рассматривается аналогично.

В квантовомеханической теории комплексного ростка важную роль играет понятие устойчивости точки покоя. Связь между устойчивостью и существованием инвариантного ростка можно исследовать и в абстрактном случае.

Будем предполагать, что на касательном пространстве $T\mathcal{Y}_y$ введена гильбертова метрика, инвариантная относительно группы g_s .

ТЕОРЕМА 7. Пусть стационарная точка z является вакуумным вектором для некоторого минимального комплексного ростка $\mathcal{G}$, причем пространство $\mathcal{G}$ является полным относительно скалярного произведения $\frac{1}{i}d\omega^y(\xi, \eta^*)$. Пусть для всех векторов $\xi \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$, таких, что $\Omega^y(\xi)$ является оператором умножения на число, выполнено соотношение

$$\|u_t^{*y}\xi\| \leq C < \infty. \quad (64)$$

Тогда соотношение (64) выполнено для любого $\xi \in T\mathcal{Y}_y^{\mathbb{C}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как вытекает из теоремы 4, достаточно проверить утверждение теоремы 7 при $\xi \in \mathcal{G}$. В этом случае норма вектора

$$\begin{aligned} W_y^t \Omega^y(\xi^*)z &= \Omega^{u_t y}(u_t^{*y} \xi^*) W_y^t z \\ &= \Omega^{u_t y}(u_t^{*y} \xi^*) \rho_{-\mathcal{E}t} z e^{-iE_1 t} = \rho_{-\mathcal{E}t} \Omega^y(g_{\mathcal{E}t}^{*u_t y} u_t^* \xi^*) z e^{-iE_1 t} \end{aligned}$$

сохраняется во времени ввиду унитарности W_y , поэтому норма $\|\Omega^y(g_{\mathcal{E}t}^{*u_t y} u_t^* \xi^*)z\|$ постоянна. Таким образом, $\frac{1}{i} d\omega^y(g_{\mathcal{E}t}^{*u_t y} u_t^* \xi, g_{\mathcal{E}t}^{*u_t y} u_t^* \xi^*) = \text{const}$. Ввиду полноты пространства $\mathcal{G}$ относительно скалярного произведения $\frac{1}{i} d\omega^y(\xi, \eta^*)$ получаем, что норма $\|g_{\mathcal{E}t}^* u_t^* \xi\|$ ограничена равномерно по t . Отсюда вытекает утверждение теоремы.

6.2. “Квантование” периодических классических траекторий. Рассмотрим теперь аналог стационарной теории одномерных лагранжевых многообразий с комплексным ростком.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Назовем кривую $z(\tau) \in \mathcal{Z}$, $\tau \in [0, T]$, *стационарной*, если

$$\int \frac{d\tau}{\varepsilon^{1/4}} K^\varepsilon U_t z(\tau) \sim e^{-iE(\varepsilon)t} \int \frac{d\tau}{\varepsilon^{1/4}} K^\varepsilon z(\tau). \quad (65)$$

Величина $E(\varepsilon)$ называется *энергией* кривой.

Стационарные кривые строятся следующим образом. Пусть $Y(\tau)$ – траектория вида $Y(\tau) = u_\tau Y(0)$, удовлетворяющая условию $Y(\tau + T) = g_S Y(\tau)$.

- ЛЕММА 21. 1. Величина $\omega^y(\dot{Y}) = E$ не зависит от τ .
2. Многообразие Λ^1 вида $y(\tau) = g_{E\tau} Y(\tau)$ изотропно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение сразу же вытекает из теоремы 1, поскольку касательный вектор $\dot{Y}$ сдвигается при преобразовании u_t^* вдоль траектории. Из соотношения (9) следует

$$\begin{aligned} K_{y(\tau+\varepsilon\alpha)}^\varepsilon f &= K_{g_{E(\tau+\varepsilon\alpha)} Y(\tau+\varepsilon\alpha)}^\varepsilon f = e^{\frac{i}{\varepsilon} E(\tau+\varepsilon\alpha)} K_{Y(\tau+\varepsilon\alpha)}^\varepsilon f \\ &\sim e^{\frac{i}{\varepsilon} E\tau} K_{Y(\tau)}^\varepsilon e^{-i \sum_m \omega_m \dot{Y}_m \alpha + iE\alpha} f \sim K_{y(\tau)}^\varepsilon f. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает изотропность. Лемма 21 доказана.

Канонический оператор, отвечающий данному топологически нетривиальному изотропному многообразию, дает элементы $\psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ вида

$$\psi^\varepsilon = \int_0^T \frac{d\tau}{\varepsilon^{1/4}} \exp \left\{ -2\pi i \frac{\tau}{T} \left(\frac{S + ET}{2\pi\varepsilon} - \alpha \right) \right\} K^\varepsilon z(\tau), \quad (66)$$

где через $\{\cdot\}$ обозначено выделение дробной части. На z в формуле (66) наложено условие

$$z(\tau + T) = \rho_{S+ET} z(\tau) e^{-2\pi i \alpha}. \quad (67)$$

Подынтегральное выражение в формуле (66) периодически с периодом T .

Исследуем, в каком случае кривая $z(\tau)$ стационарна.

ЛЕММА 22. Пусть

$$\rho_{Et} U_t[z(\tau)] = [e^{-i\omega t} z(\tau + t)]. \quad (68)$$

Тогда кривая $z(\tau)$ инвариантна и $E(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} E + \omega - \frac{2\pi}{T} \left\{ \frac{S + ET}{2\pi\varepsilon} - \alpha \right\}$.

Доказательство заключается в использовании формулы (65) и сдвиге параметра τ на t .

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Через $[z(\tau)]$ обозначен класс эквивалентности кривых в смысле (53).

2. Точки $\rho_{Et} U_t z(\tau)$ и $z(\tau + t)$ принадлежат одному слою.

3. Различный выбор числа α в формуле (67) приводит к одному и тому же значению энергии. Пусть $\rho_{ET} U_T[z(\tau)] = [z(\tau)]e^{-2\pi i\beta}$.

(а) Выбирая $\alpha = \beta, \omega = 0$, получаем

$$E(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} E - \frac{2\pi}{T} \left\{ \frac{S + ET}{2\pi\varepsilon} - \beta \right\}. \quad (69)$$

(б) При $\omega = \frac{2\pi\beta}{T}, \alpha = 0$ имеем

$$E(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} E + \frac{2\pi\beta}{T} - \frac{2\pi}{T} \left\{ \frac{S + ET}{2\pi\varepsilon} \right\}. \quad (70)$$

Величины (69) и (70) совпадают или отличаются на $\frac{2\pi}{T}$.

ТЕОРЕМА 8. 1. Пусть $z(\tau)$ — стационарная кривая, удовлетворяющая условиям (67) и (68). Тогда существует стационарная кривая с энергией $E(\varepsilon) \pm \frac{2\pi}{T}$.

2. Пусть $\xi(\tau) \in T\mathcal{Y}_{y(\tau)}^{\mathbb{C}}$ — комплексифицированный касательный вектор, $\xi(\tau) = u_{\tau}^{*y(0)} \xi(0)$, удовлетворяющий условию $\xi(\tau + T) = g_{-ET}^{*y(\tau)} \xi(\tau) e^{i\beta T}$. Тогда существует стационарная кривая с энергией $E(\varepsilon) + \beta \operatorname{sign}\left(\frac{1}{i} d\omega^y(\xi, \xi^*)\right)$.

3. Пусть для некоторого минимального комплексного ростка $\mathcal{G}$ стационарная кривая z удовлетворяет условию $\Omega^{y(\tau)}(\mathcal{G}_{y(\tau)})[z(\tau)] = 0$, причем $\mathcal{G}$ полно относительно скалярного произведения $\frac{1}{i} d\omega^y(\xi, \eta^*)$. Пусть также для векторов $\xi \in (T\Lambda^1)^{\perp}$, для которых оператор $\Omega(\xi)$ является оператором умножения на число, выполнено соотношение (64). Тогда данное соотношение выполнено для любого $\xi \in (T\Lambda^1)^{\perp}$.

Для доказательства первого утверждения достаточно рассмотреть кривые $e^{\pm i\frac{2\pi}{T}\tau} z(\tau)$. Доказательства второго и третьего утверждений полностью повторяют доказательства теорем 6 и 7 соответственно.

Список литературы

1. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
2. Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
3. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. М.: Наука, 1978.
4. Карасев М. В. Связность на лагранжевых подмногообразиях и некоторые задачи квазиклассического приближения // Записки научн. семинара ЛОМИ. 1989. Т. 172. С. 41–54.
5. Karasev M. V., Vorobjev Yu. M. Hermitian bundles over isotropic submanifolds and correction to Kostant–Souriau quantization rule // Preprint ITP-90-85E. Kiev, 1990.
6. Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного ростка в пространстве Фока. II. Асимптотики, отвечающие конечномерным изотропным многообразиям // ТМФ. 1995. Т. 104. № 3. С. 479–506.
7. Maslov V. P., Shvedov O. Yu. Chaos conservation problem in quantum physics // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 2. P. 173–216.
8. Маслов В. П., Шведов О. Ю. Комплексный метод ВКБ в пространстве Фока // Докл. РАН. 1995. Т. 340. № 1. С. 42–47.
9. Маслов В. П., Шведов О. Ю. О проблеме расходимостей в квантовой теории поля // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 5. С. 604–608.
10. Маслов В. П., Шведов О. Ю. Асимптотика решения уравнения Шрёдингера для спиновых систем // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 4. С. 453–457.
11. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
12. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
13. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
14. Маслов В. П., Шведов О. Ю. О некоторых тождествах для асимптотик решений абстрактных уравнений // Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 2. С. 173–176.
15. Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применение. М.: Наука, 1987.
16. Kostant B. Quantization and unitary representations // Lecture Notes in Math. 1970. V. 170. P. 87–208.
17. Souriau J. M. Quantification geometrique // Comm. Math. Phys. 1966. V. 1. P. 374–398.
18. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
19. Карасев М. В., Маслов В. П. Нелинейная скобка Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: shvedov@qs.phys.msu.su

Поступила в редакцию
28.08.1998 и 08.07.1999