Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Усманов, Операторнозначные веса на вещественных W^* -алгебрах и обратимых JW -алгебрах, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 10, 105–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 08:01:00

УДК 517.986

Ш. М. Усманов

Операторнозначные веса на вещественных W^* -алгебрах и обратимых JW -алгебрах

Изучаются операторнозначные веса на вещественных W^* -алгебрах и JW -алгебрах. Получен критерий существования операторнозначных весов на вещественных W^* -алгебрах и обратимых JW -алгебрах.

Библиография: 29 названий.

Введение

Теория вещественных алгебр фон Неймана (вещественных W^* -алгебр) и вещественных C^* -алгебр является в последнее время динамично развивающейся частью теории операторных алгебр. Она предоставляет богатые возможности получения новых примеров операторных алгебр (в особенности инъективных) и тесно связана как с теорией вещественных динамических систем и теорией автоморфизмов и антиавтоморфизмов операторных алгебр, так и с теорией йордановых операторных алгебр (так называемых JW -алгебр). В настоящее время в основном построены структурная теория, теория следов и классификация вещественных W^* -алгебр по типам, для них имеется развитая теория непрерывных линейных функционалов и условных ожиданий, исследованы связи с комплексными W^* -алгебрами и JW -алгебрами (см. [1]–[4]).

Теория условных ожиданий (положительных проекций, сохраняющих единичный оператор) на алгебрах фон Неймана, имеющая важное значение для теории некоммутативного интегрирования, развивалась многими авторами, начиная с Томиямы [5]–[7]. Наиболее общий результат – необходимое и достаточное условие существования условного ожидания на подалгебре – был получен Такесаки в работе [8]. В работах [4], [9], [10] исследовались условные ожидания на JW -алгебрах. В работе [4] было получено необходимое и достаточное условие существования на обратимой JW -алгебре условного ожидания, инвариантного относительно точного нормального линейного функционала (состояния).

Операторнозначные веса являются операторнозначными аналогами неограниченных линейных функционалов. Теория операторнозначных весов на W^* -алгебрах, обобщающая теорию условных ожиданий, была развита Хагерупом в [11], [12]; опираясь на теорию стандартных форм и пространственную теорию W^* -алгебр, он получил условия существования точных нормальных полуконечных весов со значениями в расширенной положительной части W^* -подалгебры, построил для них обратные операторнозначные веса и модулярные группы автоморфизмов, ассоциированные с операторнозначным весом.

Настоящая работа посвящена теории операторнозначных весов на вещественных W^* -алгебрах и JW -алгебрах. В ней мы определяем и изучаем расширенную

положительную часть вещественной W^* -алгебры; даем определение операторнозначного веса на вещественной W^* -алгебре со значениями в расширенной положительной части ее вещественной W^* -подалгебры и устанавливаем необходимые и достаточные условия существования такого операторнозначного точного нормального веса. Для этого мы используем пространственную теорию W^* -алгебр и непрерывное разложение вещественных W^* -алгебр (см. [13]). Полученные результаты мы применяем для изучения операторнозначных весов на JW -алгебрах. Отметим, что, обращаясь к работам Хагерупа [11], [12], мы будем для удобства читателя ссылаться на подробное изложение его результатов в монографии Стратилы [14]; при обращении к общеизвестным фактам теории W^* -алгебр мы будем ссылаться в основном на монографию Стратилы и Зидо [15].

В §1 приводятся необходимые сведения из теории W^* -алгебр (преимущественно из теории весов) и теории вещественных W^* -алгебр.

В §2 строится пространственная теория для вещественных W^* -алгебр.

В §3 вводится расширенная положительная часть вещественной W^* -алгебры.

В §4 определяется операторнозначный вес на вещественной W^* -алгебре со значениями в расширенной положительной части ее вещественной W^* -подалгебры. В теореме 4.1 даны необходимые и достаточные условия существования операторнозначного точного нормального полуконечного веса.

В §5 определяется операторнозначный вес на обратимой JW -алгебре со значениями в JW -подалгебре. В теореме 5.4 сформулировано необходимое и достаточное условие существования такого веса на обратимой JW -алгебре (в терминах модулярных косинус-групп положительных линейных преобразований).

Автор благодарен профессору Ш. А. Аюпову и профессору В. И. Чилину за полезные обсуждения, а также рецензенту за замечания, относящиеся к первому варианту работы.

§1. Предварительные сведения

Веса на W^* -алгебрах. Пусть M – алгебра фон Неймана, или W^* -алгебра, M^+ – множество ее положительных элементов. *Весом* на M называется аддитивная функция φ на множестве M^+ , принимающая значения в $[0, +\infty]$ и удовлетворяющая условию $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty]$ (как обычно, принимая $0 \cdot \infty = 0$). Вес φ называется *нормальным*, если $x_i \nearrow x$ влечет $\varphi(x_i) \nearrow \varphi(x)$ для всех $x_i, x \in M^+$; и *точным*, если $\varphi(x^*x) = 0$ влечет $x = 0$. Пусть $\mathcal{R}_\varphi = \{x \in M : \varphi(x^*x) < +\infty\}$; тогда $\mathcal{R}_\varphi$ – левый идеал в M , $\mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi$ – W^* -подалгебра в M . Вес φ называется *полуконечным*, если $\mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi$ плотна в M в ультраслабой топологии. Вес φ однозначно определяет линейный функционал на $\mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi$, который естественно также обозначить через φ .

Рассмотрим на $\mathcal{R}_\varphi$ полускалярное произведение $(x, y)_\varphi = \varphi(y^*x)$. Профакторизуем $\mathcal{R}_\varphi$ по ядру этого полускалярного произведения и дополним по норме $\|x\|_\varphi = \varphi(x^*x)$; мы получим гильбертово пространство H_φ . Пусть Λ_φ – соответствующее вложение $\mathcal{R}_\varphi$ в H_φ , π_φ – $*$ -представление Гельфанда–Найма–Сигала (ГНС) W^* -алгебры M в H_φ , сопоставляющее элементу $x \in M$ оператор в H_φ , определяемый левым умножением на x в $\mathcal{R}_\varphi$ (учитывая факторизацию и продолжение по непрерывности). Если вес φ точный, нормальный и полуконечный, то π_φ – $*$ -изоморфизм M и $\pi_\varphi(M)$.

Предположим, что M действует на гильбертовом пространстве H , M' – коммутант M ; отождествим $\pi_\varphi(M)$ с M . Тогда существует такой левый идеал $\mathcal{R}'_\varphi \subset M'$, что $(\mathcal{R}'_\varphi)^* \mathcal{R}'_\varphi$ – ультраслабо плотная $*$ -подалгебра M' , и существует линейное отображение $\Lambda'_\varphi: \mathcal{R}'_\varphi \rightarrow H_\varphi$ такое, что $\Lambda'_\varphi(xy) = x\Lambda'_\varphi(y)$ для всех $x \in M'$, $y \in \mathcal{R}'_\varphi$, а $\Lambda'_\varphi(\mathcal{R}'_\varphi)$ и $\Lambda_\varphi(\mathcal{R}_\varphi)$ плотны в H_φ . Кроме того, рассмотрим отображение S_0 из $\Lambda_\varphi(\mathcal{R}_\varphi)$ в H_φ такое, что $S_0(\Lambda_\varphi(x)) = \Lambda_\varphi(x^*)$, $x \in \mathcal{R}_\varphi$, и отображение F_0 из $\Lambda'_\varphi(\mathcal{R}'_\varphi)$ в H_φ такое, что $F_0(\Lambda'_\varphi(y)) = \Lambda'_\varphi(y^*)$, $y \in \mathcal{R}'_\varphi$. Это предзамкнутые операторы. Обозначим через S_φ и F_φ соответственно их замыкания; тогда $S_\varphi^* = F_\varphi$. Пусть $S_\varphi = J_\varphi \Delta_\varphi^{1/2}$ – полярное разложение замкнутого оператора S_φ . Оператор Δ_φ называется *модулярным оператором*, построенным по весу φ . Для него выполняется равенство $\Delta_\varphi^{it} M \Delta_\varphi^{-it} = M$ для всех $t \in \mathbb{R}$, что естественным образом порождает на M однопараметрическую группу автоморфизмов σ_t^φ , $t \in \mathbb{R}$ (она называется *группой модулярных автоморфизмов*, связанной или ассоциированной с φ). Оператор J_φ является антилинейной инволюцией и называется *модулярной инволюцией*; для него выполняется соотношение:

$$J_\varphi M J_\varphi = M'.$$

Пусть P_φ – конус в H_φ , порождаемый замыканием множества

$$\{\pi_\varphi(x) J_\varphi \Lambda_\varphi(x), x \in \mathcal{R}_\varphi\}.$$

Конус P_φ является самодуальным (т.е. $P_\varphi = \{\eta \in H_\varphi : (\eta, \zeta)_\varphi \geq 0 \text{ для всех } \zeta \in P_\varphi\}$), и для него справедливы соотношения:

$$P_\varphi \cap (-P_\varphi) = \{0\}; \quad J_\varphi P_\varphi \subset P_\varphi; \quad x J_\varphi x (P_\varphi) \subset P_\varphi$$

для всех $x \in M$.

Подробное изложение теории весов имеется во многих монографиях (см., например, [14], [15]).

Вещественные W^* -алгебры. Вещественной W^* -алгеброй называется вещественная $*$ -алгебра R ограниченных линейных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H , содержащая единицу, замкнутая в слабой операторной топологии и такая, что $R \cap iR = \{0\}$ (в такой форме определение впервые было дано, по-видимому, в [16], хотя такие алгебры фактически появились уже в [17]). Обертывающая W^* -алгебра $\mathcal{U}(R)$ для R (т.е. наименьшая W^* -алгебра, содержащая R) имеет вид $\mathcal{U}(R) = R + iR$, при этом R определяет на $\mathcal{U}(R)$ инволютивный $*$ -антиавтоморфизм α_R : $\alpha_R(x + iy) = x^* + iy^*$, где $x, y \in R$. Соответственно R определяется при помощи α_R : $R = \{x \in \mathcal{U}(R) : \alpha_R(x) = x^*\}$.

Вещественные W^* -алгебры R и Q , порождающие одну и ту же W^* -алгебру $\mathcal{U}$: $\mathcal{U}(Q) = \mathcal{U}(R) = \mathcal{U}$, $*$ -изоморфны тогда и только тогда, когда α_R и α_Q на $\mathcal{U}$ сопряжены, т.е. существует $*$ -автоморфизм $\theta \in \text{Aut } \mathcal{U}$ такой, что $\alpha_R = \theta \cdot \alpha_Q \cdot \theta^{-1}$ (см. [2] или [18]). Множество всех инволютивных $*$ -антиавтоморфизмов W^* -алгебры M будем обозначать через $\text{Ant } M$.

Пусть R^+ – множество положительных элементов вещественной W^* -алгебры R . Так же как для комплексных W^* -алгебр, назовем *весом* на R аддитивную функцию φ на R^+ , принимающую значения в $[0, +\infty]$ и удовлетворяющую условию

$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty]$ и $x \in R^+$. Нормальность, точность и полуконечность для φ определяются так же, как для веса на комплексной W^* -алгебре.

Пусть $\mathcal{R}(R)_\varphi = \{x \in R : \varphi(x^*x) < +\infty\}$; тогда $\mathcal{R}(R)_\varphi$ – левый идеал в R , $\mathcal{M}(R)_\varphi = \mathcal{R}(R)_\varphi^* \mathcal{R}(R)_\varphi$ – $*$ -подалгебра в R . Вес φ однозначно определяет линейный функционал на $\mathcal{M}(R)_\varphi = \mathcal{R}(R)_\varphi^* \mathcal{R}(R)_\varphi$, также обозначаемый через φ .

Если вес φ мы доопределим до веса $\overline{\varphi}$ на $\mathcal{U}(R)^+$ следующим образом: $\overline{\varphi}(a + ib) = \varphi(a)$, где $a + ib \in \mathcal{U}(R)^+$, $a \in R^+$, $b \in R$, $b^* = -b$ (см. [1], [19]), то вес $\overline{\varphi}$ будет α_R -инвариантным (здесь α_R – инволютивный $*$ -антиавтоморфизм $\mathcal{U}(R)$, порождающий R).

Пусть ψ – точный нормальный вес на $\mathcal{U}(R)$. Рассмотрим следующие $*$ -подалгебры $\mathcal{U}(R)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\psi &= \mathcal{R}_\psi^* \mathcal{R}_\psi = \{x_1 - x_2 + ix_3 - ix_4 : x_j \in \mathcal{U}(R)^+, \psi(x_j) < \infty, j = \overline{1, 4}\}; \\ \mathcal{U}(R)_\psi &= \{x \in \mathcal{U}(R) : \psi(xy) = \psi(yx) \ \forall y \in \mathcal{U}(R)\} \quad (\text{централизатор веса } \psi). \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.1. *Пусть вес ψ α_R -инвариантен. Тогда:*

- (1) $\mathcal{R}_\psi = \mathcal{R}_\psi \cap R + i\mathcal{R}_\psi \cap R = \mathcal{R}(R)_\psi + i\mathcal{R}(R)_\psi$;
- (2) $\mathcal{M}_\psi = \mathcal{M}_\psi \cap R + i\mathcal{M}_\psi \cap R = \mathcal{M}(R)_\psi + i\mathcal{M}(R)_\psi$;
- (3) $\mathcal{U}(R)_\psi = \mathcal{U}(R)_\psi \cap R + i\mathcal{U}(R)_\psi \cap R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Очевидно, $\mathcal{R}_\psi \supset \mathcal{R}_\psi \cap R + i\mathcal{R}_\psi \cap R$. Докажем обратное включение. По определению если $x \in \mathcal{R}_\psi$, то $\psi(x^*x) < +\infty$, и тогда $\psi(x^*x) = \psi(\alpha(x^*x)) = \psi(\alpha(x)\alpha(x)^*) = \psi(\alpha(x^*)^*\alpha(x)^*)$, откуда $\alpha(x^*) \in \mathcal{R}_\psi$. Тогда для любого $x = a + ib \in \mathcal{R}_\psi$, $a, b \in R$, имеем: $a \in \mathcal{R}_\psi$, $b \in \mathcal{R}_\psi$, откуда $a, b \in \mathcal{R}_\psi \cap R = \mathcal{R}(R)_\psi$.

(2) Очевидно, $\mathcal{M}_\psi \supset \mathcal{M}_\psi \cap R + i\mathcal{M}_\psi \cap R$.

Пусть $x = a + ib \in \mathcal{M}_\psi^+$, $a, b \in R$. Тогда $a = a^*$, $b = -b^*$, и так как $\psi \cdot \alpha_R = \psi$, то $\psi(a + ib) = \psi(\alpha_R(a + ib)) = \psi(a - ib)$, т.е. $\psi(a + ib) = \psi(a - ib) = \psi(a) < +\infty$. Тогда $a - ib \in \mathcal{M}_\psi^+$, откуда $a = 1/2(x + \alpha_R(x)) \in \mathcal{M}_\psi$, $b = 1/(2i)(x - \alpha_R(x)) \in \mathcal{M}_\psi$, т.е. $\mathcal{M}_\psi = \mathcal{M}_\psi \cap R + i\mathcal{M}_\psi \cap R = \mathcal{M}(R)_\psi + i\mathcal{M}(R)_\psi$.

(3) Централизатор $\mathcal{U}(R)_\psi$ является W^* -подалгеброй $\mathcal{U}(R)$ и потому порождается своими самосопряженными элементами. Пусть $x = a + ib \in (\mathcal{U}(R)_\psi)_{sa}$, $a, b \in R$. Тогда $a^* = a$, $b^* = -b$. Покажем, что элемент $\alpha_R(x) = a - ib$ лежит в $\mathcal{U}(R)_\psi$. Пусть σ_t^ψ – группа модулярных автоморфизмов, ассоциированных с ψ . По лемме 1.1 из [20]

$$\sigma_t^\psi = \alpha_R \cdot \sigma_{-t}^{\psi \cdot \alpha_R} \cdot \alpha_R = \alpha_R \cdot \sigma_{-t}^\psi \cdot \alpha_R.$$

Поскольку $x \in \mathcal{U}(R)_\psi$, то $\sigma_t^\psi(x) = x$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sigma_t^\psi(\alpha_R(x)) = \alpha_R(\sigma_{-t}^\psi(x)) = \alpha_R(x)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Отсюда $\alpha_R(x) \in \mathcal{U}(R)_\psi$ и тогда $a = 1/2(x + \alpha_R(x)) \in \mathcal{U}(R)_\psi$, $b = 1/(2i)(x - \alpha_R(x)) \in \mathcal{U}(R)_\psi$, т.е. $\mathcal{U}(R)_\psi \subset \mathcal{U}(R)_\psi \cap R + i\mathcal{U}(R)_\psi \cap R$. Обратное включение очевидно. Доказательство окончено.

Основные сведения о теории вещественных W^* -алгебр содержатся в [1] и [2].

JW-алгебры. *JW-алгеброй* называется вещественное линейное подпространство самосопряженных операторов из $B(H)$, замкнутое относительно йорданова умножения $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ и замкнутое в слабой операторной топологии. В частности, всякая *JW-алгебра* замкнута относительно операции $U_x(y) = 2x \cdot (x \cdot y) - x^2 \cdot y = xyx$. Пусть A – *JW-алгебра*; обозначим через $R(A)$ слабо замкнутую вещественную $*$ -алгебру в $B(H)$, порожденную A , через $\mathcal{U}(A)$ – слабо замкнутую W^* -алгебру в $B(H)$, порожденную A . *JW-алгебра* называется *обратимой*, если $x_1 x_2 \cdots x_n + x_n x_{n-1} \cdots x_1 \in A$ для всех $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$. *JW-алгебра* A обратима тогда и только тогда, когда $A = R(A)_{sa} = \{x \in R(A) : x^* = x\}$ (см. [1; предложение 3.2]). Всякая обратимая *JW-алгебра* разлагается единственным образом по центру в прямую сумму *JW-алгебр* A_r и A_c : $A = A_r \oplus A_c$, где A_c – эрмитова часть W^* -алгебры $\mathcal{U}(A_c)$, а A_r – эрмитова часть вещественной W^* -алгебры $R(A_r)$ (см. [1]). В последнем случае *JW-алгебра* A_r имеет вид $A_r = \{x \in \mathcal{U}(A_r)_{sa} : \alpha_{R(A_r)}(x) = x\}$. При этом инволютивный $*$ -антиавтоморфизм $\alpha_{R(A_r)}$, порождающий A_r , мы будем обозначать еще и через α_{A_r} .

Общая теория *JW-алгебр* изложена в [21], [19], [1] и [2].

§ 2. Пространственная теория для вещественных W^* -алгебр

Пусть M и N – W^* -алгебры, $N \subset M$, и на M существует инволютивный $*$ -антиавтоморфизм α такой, что $\alpha(N) = N$. Положим $\alpha_0 = \alpha|_N$, и пусть $R = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$ и $Q = \{x \in N : \alpha_0(x) = x^*\}$ – вещественные W^* -алгебры, порождаемые α в M и N соответственно. Предположим, кроме того, что M реализована в ГНС-представлении по α -инвариантному точному нормальному полуконечному весу ω , тогда гильбертово пространство H является пополнением $\mathfrak{R}_\omega = \{x \in M : \omega(x^*x) < +\infty\}$ по норме $\omega(x^*x)^{1/2}$ и, кроме того, имеет вид: $H = K + iK$, где K – вещественное гильбертово пространство, являющееся пополнением по той же норме множества $\{x \in R : \omega(x^*x) < +\infty\}$. Легко проверяется, что в силу α -инвариантности ω соответствующее скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\omega$ принимает вещественные значения на K ; если мы вложим вещественную W^* -алгебру $B(K)$ в $B(H)$, продолжив операторы из $B(K)$ на H по линейности, и обозначим вложение $B(K)$ через R_0 , то тогда очевидно, что $Q \subset R \subset R_0$. Как известно, для соответствующей унитарной инволюции J выполняется: $JMJ = M'$, где M' – коммутант M (см. [15]). Обозначим через α_0 инволютивный антиавтоморфизм Jx^*J на $B(H)$, порождающий R_0 . Определим для R и Q , следуя [2], вещественные коммутанты $R' = JRJ \subset M$ и $Q' = JQJ \subset N$; тогда $R' \subset Q'$ и $\alpha_{R'} = \text{Ad } J \cdot \alpha \cdot \text{Ad } J$, $\alpha_{Q'} = \text{Ad } J \cdot \alpha_1 \cdot \text{Ad } J$ (см. [2]).

Рассмотрим построение пространственной производной Конна для $\alpha_{R'}$ -инвариантного веса на M'^+ . Пусть ψ – точный нормальный полуконечный $\alpha_{R'}$ -инвариантный вес на M'^+ ; пусть $\mathfrak{R}_\psi = \{x \in R : \psi(x^*x) < +\infty\}$, H_ψ – гильбертово пространство, полученное пополнением $\mathfrak{R}_\psi$ по норме $\|x\|_\psi = \psi(x^*x)^{1/2}$, Λ_ψ – каноническое вложение $\mathfrak{R}_\psi$ в H_ψ , π_ψ – регулярное представление M' на H_ψ (см., например, [15]). Определим для произвольного вектора $h \in H$ оператор $T_h^\psi : H_\psi \rightarrow H$:

$$T_h^\psi \Lambda_\psi(x) = xh, \quad x \in \mathfrak{R}_\psi,$$

с областью определения $D(T_h^\psi) = \Lambda_\psi(\mathfrak{R}_\psi)$. Назовем вектор h *ψ -ограниченным*, если оператор T_h^ψ ограничен; продолжим T_h^ψ до ограниченного линейного опера-

тора на всем H_ψ (с тем же обозначением T_h^ψ). Множество $D(H, \psi)$ всех ψ -ограниченных векторов является плотным в H подпространством [15].

Рассмотрим теперь для нормального полуконечного веса φ на M^+ положительно определенную квадратичную форму

$$q_\varphi(h) = \varphi(T_h^\psi(h) T_h^\psi(h)^*),$$

определенную на $D(q_\varphi)$. Она полунепрерывна снизу и, следовательно, замыкаема. Тогда по теореме Фридрихса существует единственный положительный самосопряженный присоединенный к $B(H)$ оператор $A^{1/2}$ такой, что

$$\bar{q}_\varphi(h) = \|A^{1/2}h\|^2 = (Ah, h) \in [0, \infty]$$

для всех $h \in H$. Оператор A был введен Конном в [22]; он называется *пространственной производной веса φ по весу ψ* и обозначается как $d\varphi/d\psi$. С его помощью можно реализовать действия модулярных групп автоморфизмов этих весов:

$$\text{Ad } u_t|_M = \sigma_t^\varphi, \quad \text{Ad } u_t^*|_{M'} = \sigma_t^\psi$$

для $u_t = (d\varphi/d\psi)^{it}$, $t \in \mathbb{R}$ (см. [22]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Если вес φ α -инвариантен, а вес ψ $\alpha_{R'}$ -инвариантен, то оператор $A = d\varphi/d\psi$ присоединен к R_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вес ψ $\alpha_{R'}$ -инвариантен, то оператор T_h^ψ переводит вещественное гильбертово подпространство $K_\psi \subset H_\psi$, порожденное пополнением множества $\mathfrak{R}_\psi \cap R'$ по норме $\|x\|_\psi = \psi(x^*x)^{1/2}$, в вещественное гильбертово пространство K . В самом деле, если $x \in R'$, то $\Lambda_\psi(x) \in K_\psi$, и если $h \in K$, то $T_h^\psi(\Lambda_\psi(x)) = xh \in K$ (так как $R'(K) \subset K$ по построению). Так как $J_\psi \Lambda_\psi(x) = \Lambda_\psi \alpha_{R'}(x^*)$, то $T_h^\psi \cdot J_\psi = J \cdot T_{Jh}^\psi$, где J_ψ – унитарная инволюция, сопряженная с ГНС-представлением R' по ψ .

Покажем теперь, что если вес φ α -инвариантен, то для $q_\varphi(h) = \varphi(T_h^\psi(h) T_h^\psi(h)^*)$ выполняется: $q_\varphi \cdot J = q_\varphi$ (и тогда то же верно и для $\bar{q}_\varphi$). Пусть $x \in M'$, и пусть h – произвольный вектор из H ; тогда

$$T_{Jh}^\psi(\Lambda_\psi(x)) = xJh = J J x J h = J \alpha_{R'}(x^*)h = J T_h^\psi \Lambda_\psi(\alpha_{R'}(x^*)) = J T_h^\psi(J_\psi \Lambda_\psi(x)),$$

т.е. $T_{Jh}^\psi = J \cdot T_h^\psi \cdot J_\psi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} q_\varphi(Jh) &= \varphi(T_{Jh}^\psi(T_{Jh}^\psi)^*) = \varphi(J \cdot T_h^\psi \cdot J_\psi(J \cdot T_h^\psi \cdot J_\psi)^*) \\ &= \varphi(J \cdot T_h^\psi(T_h^\psi)^* \cdot J) = \varphi(\alpha(T_h^\psi(T_h^\psi)^*)) \end{aligned}$$

и в силу α -инвариантности φ имеем:

$$\varphi(\alpha(T_h^\psi(T_h^\psi)^*)) = \varphi(T_h^\psi(T_h^\psi)^*) = q_\varphi(h).$$

Предположим теперь, что оператор $A^{1/2}$ такой, что $\bar{q}_\varphi(h) = \|A^{1/2}h\|^2 = (Ah, h)$ для всех $h \in H$, и пусть

$$A^{1/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$$

– спектральное разложение $A^{1/2}$ в сильно сходящийся интеграл по соответствующему спектральному семейству проекторов $\{e_\lambda, -\infty < \lambda < +\infty\}$. Рассмотрим положительный самосопряженный оператор A_1 такой, что для его спектрального семейства $\{e_\lambda^1, -\infty < \lambda < +\infty\}$ выполняется: $e_\lambda^1 = \alpha_0(e_\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Учитывая непрерывность α , получаем: $A_1 = \alpha_0(A^{1/2}) = J(A^{1/2})^*J = JA^{1/2}J$. Тогда для A_1 имеем равенство

$$(A_1h, A_1h) = (JA^{1/2}Jh, JA^{1/2}Jh) = (A^{1/2}Jh, A^{1/2}Jh) = \bar{q}_\varphi(Jh) = \bar{q}_\varphi(h),$$

поэтому $A_1 = A^{1/2}$ (в силу единственности $A^{1/2}$), откуда $\alpha_0(e_\lambda) = e_\lambda$ для всех $\lambda \in R$, и тогда A присоединен к R_0 .

§3. Расширенная положительная часть вещественной W^* -алгебры

Напомним определение расширенной положительной части $\hat{N}^+$ W^* -алгебры N и операторнозначного следа на W^* -алгебре M^+ со значениями в расширенной положительной части $\hat{N}^+$ W^* -подалгебры $N \subset M$ (см. [11]). Пусть N_*^+ – множество всех нормальных положительных линейных функционалов на N . Рассмотрим на N_*^+ множество $\hat{N}^+$ всех положительно-однородных аддитивных полунепрерывных снизу функций $m: N_*^+ \rightarrow [0, +\infty]$; вложим в $\hat{N}^+$ конус N^+ , отождествляя произвольный элемент $x \in N^+$ с функцией m_x , где $m_x(f) = f(x)$ для всех $f \in N_*^+$. Для неограниченного самосопряженного положительного оператора x с носителем e , присоединенного к N , определим функцию m_x следующим образом:

$$m_x(f) = \sum f(\bar{e}_n x) + (+\infty)f(1 - e),$$

где f – произвольный функционал из N_*^+ , $\bar{e}_n = e_{[n-1, n]}$ – спектральные проекторы x , отвечающие множеству $[n-1, n]$, $n \in \overline{1, \infty}$. В [11] было показано, что для любого $m \in \hat{N}^+$ существует такой положительный самосопряженный, возможно, неограниченный оператор A , присоединенный к N , что $m = m_A$.

Пусть M – W^* -алгебра, N – ее W^* -подалгебра. *Операторнозначным весом* на W^* -алгебре M со значениями в $\hat{N}$, или *N -значным весом*, называется линейное отображение $E: M \rightarrow \hat{N}$ такое, что $E(yxy^*) = yE(x)y^*$, $x \in M^+$, $y \in N$, см. [11]. (Нормальность, точность и полуконечность для E определяются так же, как и для линейных функционалов.)

Обозначим множество $\{x \in M : \|E(x^*x)\| < \infty\} = \{x \in M : E(x^*x) \in N^+\}$ через M_E . Известно, что M_E – граневая подалгебра в M , являющаяся N -бимодулем (т.е. $N \cdot M_E \cdot N \subset M_E$ и $E(yxz) = yE(x)z \ \forall x \in M_E, \forall y, z \in N$), при этом E продолжается единственным образом до линейного отображения $E: M_E \rightarrow N$ и $E(M_E)$ – двусторонний идеал в N . Отсюда следует, что E можно продолжить единственным образом до отображения $\bar{E}: \hat{M}^+ \rightarrow \hat{N}^+$ (см. [11]).

Дадим теперь определение расширенной положительной части $\hat{R}^+$ вещественной W^* -алгебры R . Пусть $(R_*^+)_r$ – множество всех нормальных положительных линейных функционалов на R таких, что они равны нулю на кососимметричных элементах из R ; тогда каждый из этих функционалов имеет единственное α_R -инвариантное нормальное продолжение на $\mathcal{U}(R)$ (см. [1]). Рассмотрим на $(R_*^+)_r$ множество $\hat{R}^+$ всех положительно-однородных аддитивных полунепрерывных снизу функций $m: (R_*^+)_r \rightarrow [0, +\infty]$; вложим в $\hat{R}^+$ конус R^+ , отождествляя произвольный элемент $x \in R^+$ с функцией m_x , где $m_x(f) = f(x)$ для всех

$f \in (R_*^+)_r$. Если же x – неограниченный самосопряженный положительный оператор с носителем e , присоединенный к R , то определим функцию m_x следующим образом:

$$m_x(f) = \sum f(\bar{e}_n x) + (+\infty)f(1 - e),$$

где f – произвольный функционал из $(R_*^+)_r$, $\bar{e}_n = e_{[n-1, n]}$ – спектральные проекторы x , $n \in \overline{1, \infty}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расширенной положительной частью* вещественной W^* -алгебры R мы будем называть множество $\widehat{R}^+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для любого $m \in \widehat{R}^+$ существуют проектор $e \in K$ и положительный самосопряженный, возможно, неограниченный оператор A на eH , присоединенный к R , такой, что $m = m_A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через M обертывающую W^* -алгебру $\mathcal{U}(R) = R + iR$ вещественной W^* -алгебры R . Пусть f – функционал из $(R_*^+)_r$, $\bar{f}$ – продолжение f на M^+ по линейности; тогда $f \in M_*^+$ и f представляется как сумма векторных линейных форм (т.е. линейных функционалов вида $\omega_\xi: \omega_\xi(x) = (x\xi, \xi)$, $x \in M^+$, $\xi \in H$, см. [15]). Так как $\bar{f}$ α -инвариантен, то, как легко убедиться, в разложении $\bar{f} = \sum_{i=1}^n \omega_{\xi_i}$ имеет место: $\xi_i \in K$. В самом деле,

$$\omega_{\xi_i}(\alpha(x)) = (Jx^*J\xi_i, \xi_i) = (xJ\xi_i, J\xi_i), \quad \omega_{\xi_i}(x) = (x\xi_i, \xi_i)$$

для произвольного $x \in M^+$ такого, что $x\xi_i \neq 0$, и тогда $J\xi = \xi$.

Заметим, что для m_A и векторной линейной формы ω_ξ выполняется: $m_A(\omega_\xi) = \|A^{1/2}\xi\|^2$, если $\xi \in D(A^{1/2}) \subset eH$; $m_A(\omega_\xi) = +\infty$, если $\xi \notin D(A^{1/2})$.

Теперь для векторной линейной формы ω_ξ рассмотрим квадратичную форму $q(\xi) = m(\omega_\xi)$; она положительно определена и полунепрерывна снизу (см. [15; лемма 9.9]). По леммам 11.2 и 11.4 из [14] существует проектор $e \in M$ такой, что $\overline{D(q)} = eH$, и существует единственный положительный самосопряженный оператор A , присоединенный к eH , такой, что $\|A^{1/2}\xi\|^2 = q(\xi) = m(\omega_\xi) = m_A(\omega_\xi)$. Если ω_ξ – α -инвариантная векторная линейная форма, то $q(J\xi) = m(\omega_{J\xi}) = m(\omega_\xi) = q(\xi)$, и, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.1, мы видим, что A присоединен к R_0 . В этом случае проектор e , являющийся носителем A , также принадлежит R_0 . Доказательство окончено.

Пусть $\widehat{M}^+$ – расширенная положительная часть W^* -алгебры $M = \mathcal{U}(R)$. Из предложения 3.1 следует, что $\widehat{R}^+ \subset \widehat{M}^+$.

§4. Существование операторнозначного веса на вещественной W^* -алгебре

Пусть R, Q – вещественные W^* -алгебры, $Q \subset R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Операторнозначным весом* на вещественной W^* -алгебре R со значениями в расширенной положительной части $\widehat{Q}^+$ вещественной W^* -подалгебры Q , или *Q -значным весом*, называется линейное отображение $T: R^+ \rightarrow \widehat{Q}^+$ такое, что $T(yxy^*) = yT(x)y^*$, $x \in R^+$, $y \in Q$.

Операторнозначный вес T на R называется:

- *нормальным*, если $x_i \nearrow x$ влечет $T(x_i) \nearrow T(x)$ для $x_i, x \in R^+$;

- *точным*, если $T(x^*x) = 0$ влечет $x = 0$;
- *полуконечным*, если множество $R_T = \{x \in R : \|T(x^*x)\| < \infty\}$ ультра-слабо плотно в R .

Легко проверить, что R_T – также граневая подалгебра в R , являющаяся вещественным Q -бимодулем; что T продолжается единственным образом до линейного отображения $T: R_T \rightarrow Q$; что $T(R_T)$ – двусторонний идеал в Q и что T можно продолжить единственным образом до отображения $\bar{T}: \hat{R}^+ \rightarrow \hat{Q}^+$.

Пусть R, Q – вещественные W^* -алгебры, $Q \subset R$, $\mathcal{U}(R)$ и $\mathcal{U}(Q)$ – их обертывающие W^* -алгебры, $\alpha_R \in \text{Ant } R$ и $\alpha_Q \in \text{Ant } Q$ – порождающие их инволютивные антиавтоморфизмы. Как показал Хагеруп, если на $\mathcal{U}(R)$ существует точный нормальный полуконечный вес φ и на $\mathcal{U}(Q)$ – точный нормальный полуконечный вес ψ такие, что сужение на $\mathcal{U}(Q)$ действия группы модулярных автоморфизмов σ^φ , ассоциированной с φ , совпадает с действием σ^ψ , то на $\mathcal{U}(R)$ существует точный нормальный полуконечный $\mathcal{U}(Q)$ -значный вес T такой, что $\psi \cdot T = \varphi$ (см. [11], [12]). Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия существования нормального Q -значного веса на R .

ТЕОРЕМА 4.1. *Следующие условия эквивалентны:*

- (1) *на $\mathcal{U}(R)^+$ существует точный нормальный полуконечный α_R -инвариантный вес φ и на $\mathcal{U}(Q)^+$ существует точный нормальный полуконечный α_Q -инвариантный вес ψ такие, что $\sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^\psi(x)$ для всех $x \in \mathcal{U}(Q)$, $t \in \mathbb{R}$;*
- (2) *на R существует единственный точный нормальный Q -значный вес T такой, что $\psi \cdot T = \varphi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (2) $\Rightarrow$ (1) Обозначим через M обертывающую W^* -алгебру $\mathcal{U}(R) = R + iR$, через N – обертывающую W^* -алгебру $\mathcal{U}(Q) = Q + iQ$. Пусть на R существует точный нормальный Q -значный вес $T: R^+ \rightarrow \hat{Q}^+$; пусть ψ_1 – точный нормальный полуконечный вес на Q^+ . Тогда вес $\varphi_1 = \psi_1 \cdot T$ будет точным нормальным и полуконечным. Пусть φ – вес на M^+ , являющийся таким продолжением φ_1 , что $\varphi(a + ib) = \varphi_1(a)$, где $a + ib \in M^+$, $a, b \in R$, $a^* = a$, $b^* = -b$; тогда φ также будет точным нормальным и полуконечным и, кроме того, α_R -инвариантным (см. [1]). Пусть ψ – такое же α_Q -инвариантное продолжение веса ψ_1 с Q^+ на $\mathcal{U}(Q)^+$. Докажем, что $\sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^\psi(x)$ для всех $x \in N$, $t \in \mathbb{R}$.

Напомним, что элемент $x \in N$ называется *аналитическим* на вертикальной полосе $\{\gamma \in \mathbb{C} : \lambda_1 < \text{Re } \gamma < \lambda_2, 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq +\infty\}$, если существует N -значная функция F , определенная и слабо непрерывная на этой полосе и аналитическая внутри нее, такая, что

$$F(it) = \sigma_t^\psi(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В этом случае для любого $\gamma \in \mathbb{C}$ такого, что $\lambda_1 < \text{Re } \gamma < \lambda_2$, мы положим: $\sigma_\gamma^\psi(x) = F(\gamma)$.

Пусть $D(\sigma_\gamma^\psi)$ – множество элементов из N , аналитических на какой-либо вертикальной полосе, содержащих γ (см. [14; предложение 2.14]). Если $x \in D(\sigma_\gamma^\psi)$, то $x^* \in D(\sigma_{\bar{\gamma}}^\psi)$. Однако легко проверить, что если $x \in D(\sigma_\gamma^\psi)$, то $\alpha_Q(x) \in D(\sigma_{\bar{\gamma}}^\psi)$:

$$\sigma_t^\psi(\alpha_Q(x)) = \alpha_Q(\sigma_{-t}^{\psi \cdot \alpha_Q}(x)) = \alpha_Q(\sigma_{-t}^\psi(x)) = \alpha_Q(F(-it)) = F_1(-it)$$

(см. [20]) и функция F_1 определена и слабо непрерывна на вертикальной полосе, зеркальной по отношению к исходной, и аналитична внутри нее, откуда $\alpha_Q(x) \in D(\sigma_\gamma^\psi)$. Теперь для любого $x = a + ib \in N$, $a, b \in Q$, выполняется: $\alpha_Q(x^*) = a - ib \in D(\sigma_\gamma^\psi)$, откуда $a = (x + \alpha_Q(x)) \in D(\sigma_\gamma^\psi)$, и аналогично $b \in D(\sigma_\gamma^\psi)$, т.е. $D(\sigma_\gamma^\psi) = Q \cap D(\sigma_\gamma^\psi) + iQ \cap D(\sigma_\gamma^\psi)$.

Пусть $a \in Q \cap D(\sigma_{-i}^\psi)$, $b = \sigma_{-i}^\psi(a) \in N$. Но $\sigma_{-i}^\psi(\alpha_Q(a)) = \alpha_Q(\sigma_i^{\psi \cdot \alpha_Q}(a)) = \alpha_Q(\sigma_{-i}^\psi(a))$ и σ_{-i}^ψ коммутирует с α_Q , т.е. $b \in Q$. По предложению 3.12 из [14] $a \in D(\sigma_{-i/2}^\psi)$, $b \in D(\sigma_{-i/2}^\psi)$. Тогда существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$\psi(aya^*) \leq \lambda^2 \psi(y), \quad \psi(byb^*) \leq \lambda^2 \psi(y)$$

для всех $y \in N^+$. Пусть $y \in Q^+$; эти неравенства справедливы для всех $y \in \widehat{Q}^+$ и

$$\varphi_1(aya^*) \leq \lambda^2 \varphi_1(y), \quad \varphi_1(byb^*) \leq \lambda^2 \varphi_1(y)$$

для всех $y \in R^+$. Для произвольного элемента $z = y_1 + iy_2 \in M^+$ имеет место: $y_1^* = y_1$, $y_2^* = -y_2$, значит,

$$\begin{aligned} \varphi(aza^*) &= \varphi_1(ay_1a^*) \leq \lambda^2 \varphi_1(y_1) = \lambda^2 \varphi(z), \\ \varphi(bzb^*) &= \varphi_1(by_1b^*) \leq \lambda^2 \varphi_1(y_1) = \lambda^2 \varphi(z) \end{aligned}$$

в силу α_R -инвариантности φ , и тогда неравенства

$$\varphi(aya^*) \leq \lambda^2 \varphi(y), \quad \varphi(byb^*) \leq \lambda^2 \varphi(y)$$

справедливы для всех $z \in M^+$.

По предложению 3.12 из [14] $a\mathcal{R}_\varphi^* \subset \mathcal{R}_\varphi^*$, $\mathcal{R}_\varphi b \subset \mathcal{R}_\varphi$.

Теперь покажем, что $\varphi(az) = \varphi(zb)$ для всех $\mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi$. Пусть сначала $z = z_1^* z_2$, $z_1, z_2 \in (\mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi) \cap R_T$, т.е. $\varphi(z_i^* z_i) < +\infty$, $T(z_i^* z_i) \in R^+$, $i = 1, 2$. Тогда $az = (z_1 a^*)^* z_2 \in (\mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi) \cap R_T$, $zb = ((b^* z_2^*) z_1)^* \in (\mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi) \cap R_T$, откуда $z \in R_T$ и $T(z) \in \mathcal{R}_\psi^* \mathcal{R}_\psi$. По свойствам T , φ_1 и ψ_1 и по свойствам модулярной группы автоморфизмов (см. [14; леммы 11.6, 3.15 и теорема 11.12]) имеем:

$$\varphi(az) = \psi_1(T(az)) = \psi_1(aT(z)) = \psi_1(T(z)b) = \psi_1(T(zb)) = \varphi_1(zb) = \varphi(zb).$$

Теперь пусть $z = z_1^* z_2$, $z_1, z_2 \in \mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi \cap R$, т.е. $z_1, z_2 \in R$, $\varphi(z_i^* z_i) < +\infty$, $i = 1, 2$; так как $\varphi(T(z_i)) < +\infty$ и вес φ точный, то для любого проектора $e_t^{(i)}$, $t > 0$, из спектрального разложения

$$z_i = \int_{-\infty}^{+\infty} t de_t$$

мы имеем:

$$z_i e_t^{(i)} \in \mathcal{R}_\varphi \cap R_T, \quad i = 1, 2,$$

и

$$\begin{aligned} \varphi((z_i e_t^{(i)} - z_i)^* (z_i e_t^{(i)} - z_i)) &= \psi \cdot T((z_i e_t^{(i)} - z_i)^* (z_i e_t^{(i)} - z_i)) \\ &= \psi((\mathbf{1} - e_t^{(i)}) T(z_i^* z_i) (\mathbf{1} - e_t^{(i)})) \\ &= \psi\left(\int_t^{+\infty} r dr\right) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$. Отсюда, рассуждая аналогично доказательству теоремы 11.12 из [14], легко видеть, что

$$\varphi(az) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(a(z_1 e_t^{(1)})^* (z_2 e_t^{(2)})) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi((z_1 e_t^{(1)})^* (z_2 e_t^{(2)})b) = \varphi(zb).$$

Наконец, предположим, что $z = z_1^* z_2$, $z_1, z_2 \in \mathcal{R}_\varphi$, $i = 1, 2$. Тогда из леммы 1.1 следует, что $\mathcal{R}_\varphi$ порождается $\mathcal{R}_\varphi \cap R$, а $\mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi$ порождается $\mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi \cap R$. Отсюда для элементов разложения $z = p + iq$, $p, q \in R$, имеет место: $p \in \mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi \cap R$, $q \in \mathcal{R}_\varphi^* \mathcal{R}_\varphi \cap R$, и тогда

$$\varphi(az) = \varphi T(a(p + iq)) = \varphi(ap) + i\varphi(aq) = \varphi(pb) + i\varphi(qb) = \varphi(zb).$$

По теореме 3.15 из [14] из этого равенства и из выражения

$$a\mathcal{R}_\varphi^* \subset \mathcal{R}_\varphi^*, \quad \mathcal{R}_\varphi b \subset \mathcal{R}_\varphi$$

следует, что $a \in Q \cap D(\sigma_{-i}^\varphi)$, $b = \sigma_{-i}^\varphi(a) \in N$, а по предложению 11.11 из [14] $\sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^\psi(x)$ для всех $x \in N$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Докажем, что если на $\mathcal{U}(R)$ существует точный нормальный полуконечный α_R -инвариантный вес φ и на $\mathcal{U}(Q)$ – точный нормальный полуконечный α_Q -инвариантный вес ψ такие, что $\sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^\psi(x)$ для всех $x \in N$, то на R существует точный нормальный Q -значный вес. Вначале докажем утверждение теоремы для случая, когда φ и ψ – точные нормальные полуконечные следы. Пусть h – произвольный элемент из R^+ ; тогда функционал $\varphi(h_\cdot)|_{N^+}$ является нормальным весом на N^+ и по теореме Радона–Никодела для следов на W^* -алгебре (см. [23]) существует единственный элемент $T(h)$, присоединенный к N и лежащий в $\tilde{N}^+$, такой, что $\varphi(hx) = \psi(T(h)x)$ для всех $x \in N^+$. Предположим, что $T(h)$ не присоединен к Q ; тогда существует спектральный проектор e_0 элемента $T(h)$ такой, что $\psi(T(h)e_0) < +\infty$, который не лежит в Q . В силу α_R -инвариантности φ вес $\psi(T(h)x)$ будет α_Q -инвариантным и тогда $\psi(T(h)e_0) = \psi(\alpha_Q(T(h)e_0)) = \psi(\alpha_Q(e_0)T(h))$. Рассмотрим элемент $h_1 = he_0$; пусть $e_0 = a + ib$, $a, b \in Q$, – разложение e_0 на вещественные составляющие; так как $h_1 > 0$, то $a > 0$, $b^* = -b$ (см. [1]). Заметим, что проектор $\alpha_Q(e_0)$ коммутирует с $T(h)$:

$$T(h)\alpha_Q(e_0) = \alpha_Q(e_0\alpha_Q(T(h))) = \alpha_Q(e_0T(h)) = \alpha_Q(T(h)e_0) = \alpha_Q(e_0)T(h).$$

Следовательно, $\alpha_Q(e_0)$ коммутирует с h_1 . Поскольку e_0 – проектор из спектрального семейства $T(h)$, то

$$T(h)h_1 = T(h)e_0h_1 = h_1^2 = a^2 - b^2 + i(ab + ba)$$

и

$$\psi(T(h)h_1) = \psi(h_1^2) = \psi(a^2 - b^2 + i(ab + ba)) = \psi(a^2 - b^2)$$

(в силу α_Q -инвариантности ψ);

$$\begin{aligned} \psi(\alpha_Q(h_1)T(h)) &= \psi((a^* + ib^*)T(h)) = \psi((a - ib)T(h)) \\ &= \psi((a - ib)e_0T(h)) = \psi((a - ib)h_1) \\ &= \psi((a - ib)(a + ib)) = \psi(a^2 + b^2 + i(ab - ba)) = \psi(a^2 + b^2), \end{aligned}$$

и поскольку вес ψ точен, а элемент $-b^2$ положителен, то $b = 0$. Перебирая все спектральные проекторы $T(h)$, мы убеждаемся таким образом, что они лежат в Q . Отсюда $T(h) \in \widehat{Q}^+$.

Рассмотрим отображение $T: h \rightarrow T(h)$; в [11], [12] показано, что T – точный нормальный полуконечный N -значный вес такой, что $\varphi = \psi \cdot T$.

Как мы показали, $T(R^+) \subset \widehat{Q}^+$ и сужение T_1 веса T на R^+ будет искомым Q -значным точным нормальным полуконечным весом на R .

Теперь докажем теорему в общем виде. Напомним построение операторно-значного веса для комплексных W^* -алгебр, данное Хагерупом в [12]. Пусть $\sigma^\varphi|_{\mathcal{U}(Q)} = \sigma^\psi$. Рассмотрим скрещенное произведение $P = M \times_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$ W^* -алгебры M на группу автоморфизмов σ^φ , т.е. W^* -алгебру на гильбертовом пространстве $H_1 = L^2(H, \mathbb{R})$, порожденную операторами вида $\pi_{\sigma^\varphi}(x)$, $x \in M$, и $\lambda_{\sigma^\varphi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned}\pi_{\sigma^\varphi}(x)f(s) &= (\sigma_{-s}^\varphi(x)f)(t), \quad s \in \mathbb{R}; \\ \lambda_{\sigma^\varphi}(t)f(s) &= f(s-t), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad f \in H_1\end{aligned}$$

(см. [24]). Пусть $P_1 = N \times_{\sigma^\psi} \mathbb{R}$ – скрещенное произведение N на σ^ψ ; очевидно, из $\sigma^\varphi|_{\mathcal{U}(Q)} = \sigma^\psi$ следует, что можно вложить P_1 в P : $P_1 \subset P$, и для двойственных действий $\theta^\varphi = \widehat{\sigma}^\varphi$:

$$\begin{aligned}\theta_s^\varphi \pi_{\sigma^\varphi}(x) &= \pi_{\sigma^\varphi}(x), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}; \\ \theta_s^\varphi \lambda_{\sigma^\varphi}(s) &= e^{-ist} \lambda_{\sigma^\varphi}(t), \quad t, s \in \mathbb{R};\end{aligned}$$

и $\theta^\psi = \widehat{\sigma}^\psi$:

$$\begin{aligned}\theta_s^\psi \pi_{\sigma^\psi}(x) &= \pi_{\sigma^\psi}(x), \quad x \in N, \quad t \in \mathbb{R}; \\ \theta_s^\psi \lambda_{\sigma^\psi}(s) &= e^{-ist} \lambda_{\sigma^\psi}(t), \quad t, s \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(см. [25]), выполняется:

$$\theta_s^\varphi|_{P_1} = \theta_s^\psi$$

для всех $s \in \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Пусть $E_\varphi: P^+ \rightarrow \widehat{M}^+$ и $E_\psi: P_1^+ \rightarrow \widehat{N}^+$ – канонические операторнозначные веса:

$$E_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_s^\varphi(x) ds, \quad E_\psi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_s^\psi(y) ds$$

для произвольных $x \in P^+$, $y \in P_1^+$. Тогда выполняется: $E_\varphi|_{P_1} = E_\psi$ (см. [12]).

Пусть теперь $\widehat{\varphi} = \varphi \cdot E_\varphi$ и $\widehat{\psi} = \psi \cdot E_\psi$ – двойственные веса, τ_φ и τ_ψ – канонические нормальные полуконечные следы на P^+ и P_1^+ соответственно: $\tau_\varphi = \widehat{\varphi}(h.)$, $\tau_\psi = \widehat{\psi}(k.)$, где h – производящий оператор однопараметрического семейства $\lambda_{\sigma^\varphi}(t)$ (т.е. $\lambda_{\sigma^\varphi}(t) = h^{it}$), $t \in \mathbb{R}$, k – производящий оператор однопараметрического семейства $\lambda_{\sigma^\psi}(t)$: $\lambda_{\sigma^\psi}(t) = k^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда, как было доказано в [12], на P существует точный нормальный полуконечный P_1 -значный вес $\overline{T}$ такой, что $\tau_\varphi = \tau_\psi \cdot \overline{T}$. Операторнозначный вес из M^+ в $\widehat{N}^+$ строится как сужение $\overline{T}$ на M^+ .

Докажем, что если вес φ α_R -инвариантен и вес ψ α_Q -инвариантен, то $\overline{T}(R^+) \subset \widehat{Q}^+$. По теореме 1(2) из [13] на P существует инволютивный антиавтоморфизм $\overline{\alpha}_R$ такой, что

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_R|_{\pi_{\sigma\varphi}(M)} &= \pi_{\sigma\varphi} \cdot \alpha_R, \\ \overline{\alpha}_R(\lambda_{\sigma\varphi}(t)) &= \lambda_{\sigma\varphi}^*(t), \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

и на P_1 существует инволютивный антиавтоморфизм $\overline{\alpha}_Q$ такой, что

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_Q|_{\pi_{\sigma\psi}(N)} &= \pi_{\sigma\psi} \cdot \alpha_Q, \\ \overline{\alpha}_Q(\lambda_{\sigma\psi}(t)) &= \lambda_{\sigma\psi}^*(t), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Тогда по теореме 2(2) из [13] θ^φ коммутирует с $\overline{\alpha}_R$ и θ^ψ коммутирует с $\overline{\alpha}_Q$, откуда легко видеть, что $E_\varphi \cdot \overline{\alpha}_R(x) = \alpha_R \cdot E_\varphi(x)$ для всех $x \in P_{E_\varphi}$, $E_\psi \cdot \overline{\alpha}_Q(x) = \alpha_Q \cdot E_\psi(x)$ для всех $x \in (P_1)_{E_\psi}$. Отсюда следует, что вес $\widehat{\varphi} = \varphi \cdot E_\varphi$ будет $\overline{\alpha}_R$ -инвариантным, а вес $\widehat{\psi} = \psi \cdot E_\psi$ будет $\overline{\alpha}_Q$ -инвариантным, а так как $\overline{\alpha}_R(\lambda_{\sigma\varphi}(t)) = \lambda_{\sigma\varphi}^*(t)$, $\overline{\alpha}_Q(\lambda_{\sigma\psi}(t)) = \lambda_{\sigma\psi}^*(t)$, $t \in \mathbb{R}$, то для производящего оператора h такого, что $h^{it} = \lambda_{\sigma\varphi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, выполняется: $\overline{\alpha}_R(h) = h$; аналогично, для производящего оператора k такого, что $k^{it} = \lambda_{\sigma\psi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, выполняется: $\overline{\alpha}_Q(k) = k$, и тогда для следов τ_φ и τ_ψ имеем: $\tau_\varphi \cdot \overline{\alpha}_R = \tau_\varphi$ и $\tau_\psi \cdot \overline{\alpha}_Q = \tau_\psi$. Обозначим через R_1 вещественную W^* -алгебру $\{x \in P : \overline{\alpha}_R(x) = x^*\}$, через Q_1 – вещественную W^* -алгебру $\{x \in P : \overline{\alpha}_Q(x) = x^*\}$. Как мы показали выше, на R_1 существует единственный точный нормальный полуконечный Q_1 -значный вес $T_1: R_1^+ \rightarrow \widehat{Q}_1^+$ (являющийся сужением точного нормального полуконечного следа $\overline{T}_1: P^+ \rightarrow \widehat{P}_1^+$) такой, что $\tau_\varphi = \tau_\psi \cdot T_1$. Как показано в [12],

$$\overline{T}_1(M^+) \subset \widehat{N}^+.$$

Тогда

$$\overline{T}_1(R^+) \subset \widehat{Q}^+.$$

Обозначим $\overline{T}_1|_{R^+}$ через T ; тогда $\varphi = \psi \cdot T$. Доказательство теоремы окончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в условиях теоремы 4.1 сужение веса φ является точным нормальным полуконечным весом, то, как показано в доказательстве основной теоремы работы [9], на R существует условное ожидание со значениями в Q .

§ 5. Операторнозначные веса на JW -алгебрах

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть M – W^* -алгебра, A – обратимая JW -подалгебра M такая, что $Z(A) = Z(\mathcal{U}(A)_{sa})$, φ – точный нормальный полуконечный α -инвариантный вес на M^+ такой, что

$$\sigma_t^\varphi(x) + \sigma_{-t}^\varphi(x) \in A \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A.$$

Тогда

$$\sigma_t^\varphi(\mathcal{U}(A)) = \mathcal{U}(A), \quad t \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая, когда φ – ограниченный линейный функционал, утверждение предложения доказано в [4] (см. следствие 4.3). Мы сведем наше доказательство к этому случаю.

Предположим, что существуют $e \in A$, $t_0 \in \mathbb{R}$ такие, что $\sigma_{t_0}^\varphi(e) \notin \mathcal{U}(A)$. Так как по спектральной теореме для JW -алгебр (см. [21], [1] или [2]) всякий элемент JW -алгебры разлагается в слабо сходящийся интеграл по спектральному семейству проекторов, то мы можем без ограничения общности взять проектор $e \in A$, а в силу полуконечности φ мы можем выбрать e таким, что $\varphi(e) < +\infty$. Пусть $\sigma_{t_0}^\varphi(e) = p + iq$, $q \neq 0$. Пусть $g = s_{\mathcal{U}(A)_\varphi}(e)$ – относительный носитель e в W^* -алгебре $\mathcal{U}(A)_\varphi$, которая является централизатором веса φ :

$$\mathcal{U}(A)_\varphi = \{x \in \mathcal{U}(A) : \sigma_t^\varphi(x) = x \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Как и всякий центральный носитель в W^* -алгебре, g имеет вид: $g = \bigcup \{e' \in \mathcal{U}(A)_\varphi : e' \preceq e\}$. Так как $e \in A$, то $a_A(e) = e$, откуда если $e' \preceq e$, то $\alpha_A(e') \preceq e$, и тогда $g \in \mathcal{U}(A)_\varphi \cap A$. Так как вес φ является точным нормальным α_A -инвариантным полуконечным следом на σ -конечной W^* -алгебре $\mathcal{U}(A)_\varphi$, то существует последовательность $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ попарно ортогональных проекторов из $\mathcal{U}(A)_\varphi \cap A$ таких, что $g = \sum_{n=1}^\infty g_n$ и, кроме того, $\varphi(g_n) < \infty$ для всех n . Разложим проектор g по $\{g_n\}$:

$$e = \sum_{n=1}^\infty e_{n,m},$$

где $e_{n,m} = g_n e g_m + g_m e g_n$ при $n \neq m$, $e_{n,n} = g_n e g_n$. Так как проекторы g_n выбраны из $\mathcal{U}(A)_\varphi$, то

$$g_n(p + iq)g_m = g_n(\sigma_{t_0}^\varphi(e))g_m = \sigma_{t_0}^\varphi(g_n e g_m).$$

Так как $p + iq \notin \mathcal{U}(A)$, то существуют числа n_0, m_0 такие, что $g_{n_0}(p + iq)g_{m_0} = \sigma_{t_0}^\varphi(g_{n_0} e g_{m_0}) \notin \mathcal{U}(A)$. Пусть теперь $r = g_{n_0} + g_{m_0}$, $s = rer$; тогда для точного нормального ограниченного линейного функционала $\psi = \varphi|_{\mathcal{U}(A)_\varphi}$ на W^* -алгебре $r(\mathcal{U}(A))r$ выполняется:

$$\sigma_t^\psi(x) + \sigma_{-t}^\psi(x) = \sigma_t^\varphi(rxr) + \sigma_{-t}^\varphi(rxr) = r(\sigma_t^\varphi(x))r + r(\sigma_{-t}^\varphi(x))r \in rAr$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in rAr$ и одновременно

$$\sigma_{t_0}^\psi(rer) = r(\sigma_{t_0}^\varphi(e))r \notin r(\mathcal{U}(A))r.$$

Мы получаем противоречие с утверждением следствия 4.3 из [4]. Доказательство окончено.

Пусть теперь A – обратимая JW -алгебра, A_1 – ее JW -подалгебра. Напомним, что в работах [19], [26]–[28] была построена теория Томиты–Такесаки для JBW -алгебр. В рамках этой теории для нормального полуконечного веса φ на A^+ определяется аналог группы модулярных автоморфизмов – косинус-группа $\{\rho_t^\varphi, t \in \mathbb{R}\}$ слабо непрерывных положительных линейных отображений на A , сохраняющих единичный оператор, таких, что $\varphi(\rho_t^\varphi(x) \cdot y) = \varphi(x \cdot \rho_t^\varphi(y))$ для всех

$x, y \in A$ и выражение $s(x, y) = \int \varphi(x \cdot \rho_t^\varphi(y)) \operatorname{ch}(\pi t)^{-1} dt$ определяет самополярную форму, ассоциированную с φ . Для обратимой JW -алгебры A таким косинусным семейством является семейство

$$\rho_t^\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_t^{\overline{\varphi}} + \sigma_{-t}^{\overline{\varphi}})|_A,$$

где $\overline{\varphi}$ — α_A -инвариантное продолжение φ на $\mathcal{U}(A)^+$, α_A — инволютивный $*$ -анти-автоморфизм $\mathcal{U}(A)$, порождающий $R(A)$ и $\mathcal{U}(A)$ (см. [1]). Используя предложение 5.1 и основную теорему работы [9], мы можем как следствие сформулировать необходимое и достаточное условие существования условного ожидания на обратимой JW -алгебре в терминах модулярных косинус-групп.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Следующие условия эквивалентны:*

- (1) на A^+ существует точный нормальный полуконечный вес φ такой, что его сужение ψ на A_1^+ является точным нормальным полуконечным весом и $\rho_t^\varphi(A_1) = A_1$ для всех $t \in \mathbb{R}$;
- (2) существует точное нормальное условное ожидание $T: A \rightarrow A_1$ такое, что $\varphi \cdot T(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основной теореме работы [9] доказано, что утверждение (2) выполняется тогда и только тогда, когда сужение φ на A_1^+ является точным нормальным полуконечным весом и $\sigma_t^\varphi(x) + \sigma_{-t}^\varphi(x) \in A_1$ для всех $x \in A_1, t \in \mathbb{R}$. Из предложения 5.1 немедленно получаем утверждение следствия.

Определим расширенную положительную часть обратимой JW -алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расширенной положительной частью $\widehat{A}^+$ обратимой JW -алгебры A называется расширенная положительная часть вещественной обертывающей W^* -алгебры $R(A)$ для A .*

Легко видеть, что если $A = A_r \oplus A_c$, где A_c — эрмитова часть W^* -алгебры $\mathcal{U}(A_c)$, а A_r — эрмитова часть вещественной W^* -алгебры $R(A_r)$, то $\widehat{A}^+ = \widehat{R}(A)^+ = \widehat{\mathcal{U}}(A_c)^+ \oplus \widehat{R}(A_r)^+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Операторнозначным весом на обратимой JW -алгебре A со значениями в расширенной положительной части $\widehat{A}_1^+$ JW -подалгебры A_1 , или A_1 -значным весом, называется линейное отображение $T: A^+ \rightarrow \widehat{A}_1^+$ такое, что $T(U_y(x)) = U_y(T(x))$, $x \in A^+, y \in A_1$.*

Обозначим через A_T^+ множество $\{x \in A^+ : \|T(x)\| < \infty\}$, через A_T — множество $A_T^+ - A_T^+ = \{x - y : x, y \in A_T^+\}$ и через A_T^2 — множество $\{a \in A : a^2 \in A_T^+\}$.

Так же как и для весов на комплексных и вещественных W^* -алгебрах, операторнозначный вес T на A называется:

- *нормальным*, если $x_i \nearrow x$ влечет $T(x_i) \nearrow T(x)$ для $x_i, x \in A^+$;
- *точным*, если $T(x^*x) = 0$ влечет $x = 0$;
- *полуконечным*, если множество A_T ультраслабо плотно в A .

Напомним, что *квадратичным идеалом* в йордановой алгебре A называется линейное подпространство $J \subset A$ такое, что $x \in J, y \in A \Rightarrow U_x(y) = 2(x \cdot (x \cdot y)) - x^2 \cdot y = xyx \in J$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. (1) Множество A_T – йорданова подалгебра в A ;
 (2) A_T и A_T^2 – квадратичные идеалы в A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Ясно, что A_T – линейное подпространство A со свойством $0 \leq x \leq y \in A_T^+ \Rightarrow y \in A_T^+$ (нормальность). Пусть $x = p - q$, $p, q \in A_T^+$; тогда $x^2 \leq 2(p^2 + q^2)$. По теореме 1.1 из [1; гл. I] имеем: $0 \leq p \leq \|p\| \cdot 1$, $0 \leq q \leq \|q\| \cdot 1$. Умножая эти неравенства с двух сторон на элементы p и q соответственно, получаем: $p^2 \leq \|p\|p$, $q^2 \leq \|q\|q$, откуда $x^2 \leq 2(\|p\|p + \|q\|q) \in A_T^+$. Так как $4(x \cdot y) = (x + y)^2 - (x - y)^2$, то A_T является йордановой подалгеброй A .

(2) Так как $(p + q)^2 \leq 2(p^2 + q^2) \quad \forall p, q \in A_T^+$ (см. [1]), то A_T^2 – линейное подпространство A . Поскольку $p^2 \leq \|p\|p$, $p \in A^+$, и $U_p(q) \leq \|q\|q^2$, $p \in A$, $q \in A^+$, то $A_T \subset A_T^2$; A_T^2 и A_T – квадратичные идеалы в A . Доказательство окончено.

Из предложения 5.3 (1) следует, что T можно единственным образом продолжить с A_T^+ до линейного отображения на A_T .

Сформулируем теорему о существовании и единственности операторнозначного веса на обратимой JW -алгебре.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть A – обратимая JW -алгебра, A_1 – ее JW -подалгебра. Следующие условия эквивалентны:

- (1) на A^+ существует точный нормальный полуконечный вес φ и на A_1^+ существует точный нормальный полуконечный вес ψ такие, что $\rho_t^\varphi(x) = \rho_t^\psi(x)$ для всех $x \in A_1^+$, $t \in \mathbb{R}$;
- (2) на A существует единственный точный нормальный A_1 -значный вес T такой, что $\psi \cdot T = \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Предположим, что $A = R(A)_{sa}$, где $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$. Пусть $\widehat{\varphi} - \alpha_A$ -инвариантный точный нормальный полуконечный вес, являющийся продолжением веса φ на $\mathcal{U}(A)^+$, $\widehat{\psi}$ – такой же α_{A_1} -инвариантный вес на $\mathcal{U}(A_1)^+$, являющийся продолжением ψ на $\mathcal{U}(A_1)^+$. Из предложения 5.1 мы видим, что

$$\sigma_t^\varphi(\mathcal{U}(A_1)) = \mathcal{U}(A_1) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

По теореме 4.1 на $R(A)^+$ существует единственный точный нормальный полуконечный $R(A_1)$ -значный вес, который и является искомым A_1 -значным весом на A .

Предположим, что $A = \mathcal{U}(A)$; тогда из тех же соображений мы видим, что искомым A_1 -значным весом на A будет $\mathcal{U}(A_1)$ -значный вес на $\mathcal{U}(A)$. Так как всякая обратимая JW -алгебра A имеет разложение $A = A_r \oplus A_c$, где A_c – эрмитова часть W^* -алгебры $\mathcal{U}(A_c)$, а A_r – эрмитова часть вещественной W^* -алгебры $R(A_r)$, то из (1) следует (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть $A = A_r$, т.е. $A = R(A)_{sa}$, где $R(A)$ – вещественная W^* -алгебра. Докажем, что A_1 -значный след на A является $R(A_1)$ -значным следом на $R(A)$. Для этого нам достаточно показать, что $T(yxy^*) = yT(x)y^*$ для всех $x \in A^+$, $y \in R(A_1)$ (не только для всех $y \in A_1$). Пусть y – обратимый элемент из $R(A_1)$; он имеет в $\mathcal{U}(A_1)$ полярное разложение $y = u|y|$, где $|y| \in \mathcal{U}(A_1^+)$, а u – унитарный элемент из $\mathcal{U}(A_1)$. Для $y \in A_1$ выполняется: $y \in A_1^+$, $u \in R(A_1)$ (см. [16]). По теореме 1.4 из [29] всякий унитарный $u \in R(A_1)$ можно представить в следующем виде: $u = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n$, где s_i , $i \in \overline{1, n}$, – самосопряженные унитарные

операторы (симметрии) из $R(A_1)$ и $n \leq 16$. Тогда мы видим:

$$\begin{aligned} T(yxy^*) &= T(u|y|x|y|u^*) = T(s_1s_2 \cdots s_n|y|x|y|s_ns_{n-1} \cdots s_1) \\ &= s_1s_2 \cdots s_n T(|y|x|y|) s_ns_{n-1} \cdots s_1 = s_1s_2 \cdots s_n |y|T(x)|y|s_ns_{n-1} \cdots s_1 \\ &= u|y|T(x)|y|u^* = yT(x)y^*. \end{aligned}$$

Пусть теперь y — произвольный элемент из $R(A_1)$; он имеет в $\mathcal{U}(A_1)$ полярное разложение $y = u|y|$, где $|y| \in \mathcal{U}(A_1^+)$, а u — частичная изометрия из $\mathcal{U}(A_1)$ и $|y| \in A_1$, $u \in R(A_1)$. Рассмотрим элемент $z = u + \varepsilon \mathbf{1}$, где $\varepsilon > 0$. Легко видеть, что он обратим и $T(zxz^*) = zT(x)z^*$. Тогда

$$\begin{aligned} T(zxz^*) &= T((u + \varepsilon \mathbf{1})x(u^* + \varepsilon \mathbf{1})) = T(uxu^*) + T(\varepsilon ux) + T(\varepsilon xu^*) + T(\varepsilon^2 x) \\ &= T(uxu^*) + \varepsilon T(ux) + \varepsilon T(xu^*) + \varepsilon^2 T(x); \end{aligned}$$

аналогично,

$$zT(x)z^* = uT(x)u^* + \varepsilon uT(x) + \varepsilon T(x)u^* + \varepsilon^2 T(x).$$

В силу произвольности выбора ε мы видим, что $T(uxu^*) = uT(x)u^*$, т.е. $T(yxy^*) = yT(x)y^*$.

Теперь мы можем применить теорему 4.1, по которой на $\mathcal{U}(A)^+$ существует точный нормальный полуконечный α_A -инвариантный вес φ и на $\mathcal{U}(A_1)^+$ существует точный нормальный полуконечный α_{A_1} -инвариантный вес ψ такие, что $\sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^\psi(x)$ для всех $x \in \mathcal{U}(A_1)$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда по определению косинус-группы ρ^φ для обратимых JW -алгебр $\rho_t^\varphi(x) = \rho_t^\psi(x)$ для всех $x \in A_1^+$, $t \in \mathbb{R}$.

Поскольку для случая, когда $A = A_c = \mathcal{U}(A)_{sa}$, утверждение теоремы эквивалентно теореме Хагерупа о существовании операторнозначного веса на комплексной W^* -алгебре и для обратимой JW -алгебры всегда выполняется: $A = A_r \oplus A_c$, то доказательство теоремы окончено.

Список литературы

1. Аюпов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: Фан, 1986.
2. Ayupov Sh., Rakhimov A., Usmanov Sh. Jordan, real and Lie structures in operator algebras. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
3. Goodearl K. R., Handelman D. E. Classification of rings and C^* -algebras direct limits of finite-dimensional semisimple real algebras // Mem. Amer. Math. Soc. 1987. V. 372.
4. Haagerup U., Stormer E. Positive projections of von Neumann algebras onto JW -algebras // J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 317–330.
5. Tomiyama J. On the projections of norm one in W^* -algebras. I // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1957. V. 33. P. 608–612.
6. Tomiyama J. On the projections of norm one in W^* -algebras. II // Tôhoku Math. J. 1958. V. 10. P. 204–209.
7. Tomiyama J. On the projections of norm one in W^* -algebras. III // Tôhoku Math. J. 1959. V. 11. P. 125–129.
8. Takesaki M. Conditional expectations in von Neumann algebras // J. Funct. Anal. 1972. V. 9. P. 306–321.
9. Аюпов Ш. А., Азизов Э., Усманов Ш. М. О существовании условных ожиданий в йордановых операторных алгебрах // Узб. матем. журн. 1991. №6. С. 11–14.
10. Edwards C. M. Conditional expectations on Jordan algebras // Fund. Aspects of Quantum Theory, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. 1985. P. 75–93.

11. *Haagerup U.* Operator valued weights in von Neumann algebras. I // J. Funct. Anal. 1979. V. 32. P. 175–206.
12. *Haagerup U.* Operator valued weights in von Neumann algebras. II // J. Funct. Anal. 1979. V. 33. P. 339–361.
13. *Usmanov Sh.* Continuous decomposition of real von Neumann algebras of type III // Proc. Conf. “Algebra and Operator Theory” (Tashkent, Sept.–Oct. 1997). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 111–116.
14. *Stratila S.* Modular theory in operator algebras. Bucuresti: Ed. Academiei, 1981.
15. *Stratila S., Zsido L.* Lectures on von Neumann algebras. Bucuresti: Ed. Academiei, 1979.
16. *Stormer E.* Real structure in the hyperfinite factor // Duke Math. J. 1980. V. 47. P. 145–153.
17. *Stormer E.* Jordan algebras of type I // Acta Math. 1966. V. 111. P. 165–184.
18. *Stormer E.* Conjugacy of involutive antiautomorphisms of von Neumann algebras // J. Funct. Anal. 1986. V. 66. P. 54–66.
19. *Hanche-Olsen H., Störmer E.* Jordan operator algebras. Boston: Pitman, 1984.
20. *Gordano T.* Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs. II // J. Funct. Anal. 1983. V. 51. P. 326–360.
21. *Topping D.* Jordan algebras of self-adjoint algebras // Mem. Amer. Math. Soc. 1965. V. 53. P. 1–48.
22. *Connes A.* On a spatial theory of von Neumann algebras // J. Funct. Anal. 1980. V. 35. P. 153–164.
23. *Pedersen G., Takesaki M.* The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras // Acta Math. 1973. V. 130. P. 53–87.
24. *Zeller-Meier G.* Produit croisé d’une C^* -algèbre par un groupe d’automorphism // J. Math. Pures Appl. 1968. V. 47. P. 102–239.
25. *Takesaki M.* Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III // Acta Math. 1972. V. 131. P. 249–310.
26. *Трунов Н. В.* Интегрирование относительно веса на йордановых алгебрах // Деп. в ВИНТИ, № 4948-84, 10.07.1984.
27. *Трунов Н. В., Шерстнев А. Н.* Введение в теорию некоммутативного интегрирования // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Новейшие достижения. Т. 27. М.: ВИНТИ, 1985. С. 167–190.
28. *Haagerup U., Hanche-Olsen H.* A Tomita–Takesaki theory for Jordan algebras // J. Operator Theory. 1984. V. 11. P. 343–364.
29. *Upmeyer H.* Automorphism groups of Jordan C^* -algebras // Math. Z. 1981. V. 176. P. 21–34.

Институт математики им. В. И. Романовского
 АН Республики Узбекистан, Ташкент
E-mail: root@im.tashkent.su, aratex@uwed.freenet.uz

Поступила в редакцию
 23.07.1998 и 05.04.1999