Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Бахтурин, М. В. Зайцев, С. К. Сегал, G -тождества неассоциативных алгебр,
Матем. сб., 1999, том 190, номер 11, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 11:01:05

УДК 512.8

Ю. А. Бахтурин, М. В. Зайцев, С. К. Сегал

 G -тождества неассоциативных алгебр

Основным классом алгебр, рассматриваемых в данной работе, являются алгебры лиевского типа. Он включает, в частности, ассоциативные алгебры, алгебры и супералгебры Ли, алгебры Лейбница, квантовые алгебры Ли и многие другие. Доказано, что если конечная группа G действует на такой алгебре A автоморфизмами и антиавтоморфизмами и A при этом удовлетворяет существенному G -тождеству, то она удовлетворяет обычному тождеству, степень которого ограничена функцией от степени первоначального тождества и порядка G . Для случая обычных лиевских алгебр показано, что если L – алгебра Ли, конечная группа G действует на ней автоморфизмами и антиавтоморфизмами и порядок G взаимно прост с характеристикой поля, то наличие тождества на кососимметричных элементах влечет наличие тождества на всей алгебре в целом с сохранением зависимости между степенями тождеств. Наконец, мы обобщаем теорему Амицура о полиномиальных тождествах в ассоциативных алгебрах с инволюцией на случай альтернативных алгебр с инволюцией.

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

В нашей предыдущей статье [1] мы изучали так называемые G -тождества ассоциативных алгебр. Рассматривалась ситуация, когда на алгебре A над полем F конечная группа G действует автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Было показано, что если такая алгебра удовлетворяет *существенному* G -тождеству, то она удовлетворяет также обычному полиномиальному тождеству, степень которого ограничена некоторой функцией от степени G -тождества и порядка G . В качестве следствий мы получили усиление классических теорем Амицура [2], [3] о том, что любое нетривиальное $*$ -тождество на ассоциативной алгебре с инволюцией $*$ влечет обычное тождество, и о том, что если подпространство A_+ (соответственно A_-) симметричных (соответственно кососимметричных) элементов является PI-подпространством, то и сама алгебра A является PI-алгеброй. В работах Амицура не было показано, что существует зависимость между степенями $*$ -тождеств и обычных тождеств. Соответственно, техника Амицура не позволяла найти взаимосвязь между степенями тождеств на A_+ или A_- и на самой алгебре A . В упомянутых работах авторов такая зависимость установлена, но более важно то, что техника доказательств является комбинаторной и может быть перенесена на другие классы алгебр.

Основным классом алгебр, рассматриваемых в данной работе, являются алгебры *лиевого типа* (см. [4]). Он включает, в частности, ассоциативные алгебры,

Первые два автора выполнили работу при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 96-01-00146, 96-15-96050).

Третий автор выполнил работу при частичной поддержке NSERC (грант № A-5300).

алгебры и супералгебры Ли, алгебры Лейбница [5], квантовые алгебры Ли [6] и многие другие. Наш первый результат (теорема 2) утверждает, что если конечная группа G действует на такой алгебре A автоморфизмами и антиавтоморфизмами и A при этом удовлетворяет существенному G -тождеству, то она удовлетворяет обычному тождеству, степень которого ограничена функцией от степени первоначального тождества и порядка G .

Наш второй результат (теорема 3) утверждает, что если L – алгебра Ли, конечная группа G действует на ней автоморфизмами и антиавтоморфизмами и порядок G взаимно прост с характеристикой поля, то наличие тождества на кососимметричных элементах влечет наличие тождества на всей алгебре в целом с сохранением зависимости между степенями тождеств.

Аналогичный результат неверен, если заменить кососимметричные элементы симметричными.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Алгебра Ли с инволюцией может иметь нетривиальное тождество на подпространстве L_+ и не иметь тождеств на всех своих элементах.

Дело в том, что любая алгебра Ли обладает инволюцией вида $x^* = -x$. В самом деле, $[x, y]^* = -[x, y]$ и $[y^*, x^*] = [-y, -x] = -[x, y]$. Но тогда все элементы алгебры кососимметричны и $x = 0$ – тождество на симметричной части. Этот пример показывает также, что произвольное $*$ -тождество на L не всегда влечет обычное тождество.

Наконец, мы обобщаем теорему Амицура о полиномиальных тождествах в ассоциативных алгебрах с инволюцией (с ограничениями на степени) на случай альтернативных алгебр с инволюцией.

§ 2. G -тождества

Напомним основной результат работы [4]. Сначала введем необходимые понятия и обозначения. Пусть Q – абелева группа. Алгебру A над полем F называют Q -градуированной, если A является прямой суммой своих подпространств A_q , $q \in Q$, и $A_q A_{q'} \subset A_{q+q'}$. Элементы из A_q называют *однородными степенями q* . Мы говорим, что Q -градуировка *конечна*, если существует конечное подмножество P в Q такое, что $A_q = \{0\}$ для любого $q \notin P$. (Без потери общности можно считать, что $0 \in P$.) Другими словами,

$$A = \sum_{q \in P} A_q, \quad |P| = s < \infty.$$

Далее, мы говорим, что $A = \sum A_q$ – алгебра *лиевского типа*, если для любых $g, h, k \in Q$ существуют такие скаляры $\alpha, \beta \in F$, что

$$a(bc) = \alpha(ab)c + \beta(ac)b \quad (1)$$

для всех $a \in A_g, b \in A_h, c \in A_k$, причем $\alpha \neq 0$. Если $\alpha = 1, \beta = 0$ для всех $g, h, k \in G$, то A – обычная ассоциативная алгебра с Q -градуировкой. Если A – алгебра Ли над F , то $\alpha = 1, \beta = -1$. Соотношения вида (1) выполняются в любой супералгебре Ли с $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой, а также в более общем классе цветных супералгебр Ли. Так называемые *квантовые алгебры Ли* (см. [6]) также удовлетворяют подобным соотношениям. Основной результат из [4] можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$A = \sum_{q \in Q} A_q$$

– алгебра лиевского типа над произвольным полем F с конечной Q -градуировкой, где Q – некоторая группа. Предположим, что в нейтральной однородной компоненте A_0 выполняется нетривиальное тождество вида

$$x_0 x_1 \cdots x_{d-1} \equiv \sum_{\sigma \in \text{Sym}(d-1), \sigma \neq e} \alpha_\sigma x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(d-1)}, \quad (2)$$

в котором $x_0 x_1 \cdots x_{d-1}$ и все $x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(d-1)}$ – левонормированные коммутаторы, а $\alpha_\sigma \in F$. Тогда сама алгебра A удовлетворяет нетривиальному тождеству вида (2).

Заметим, что в [4] этот результат был доказан в более общем случае, когда Q – произвольная полугруппа с единицей и с сокращением.

Пусть теперь A – алгебра лиевского типа и конечная группа G действует на ней автоморфизмами и антиавтоморфизмами, причем любая однородная компонента A_q переходит при действии элемента $g \in G$ в компоненту $A_{g \circ q}$, где $\circ$ означает действие G на Q автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Например, пусть $A = M_n(F)$ – алгебра матриц со стандартной целочисленной градуировкой:

$$E_{ij} \in A^k \iff j - i = k.$$

Рассмотрим подгруппу G , порожденную в $\text{Aut}^* A$ всеми сопряжениями $x \mapsto g x g^{-1}$, в которых $g = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in GL(n, F)$, и транспонированием. Тогда, очевидно, $h(A_k) \subseteq A_k$, если h – автоморфизм, и $h(A_k) \subseteq A_{-k}$, если h – антиавтоморфизм. Другой естественный пример дает групповая алгебра $A = FG$ произвольной группы G . Нетрудно заметить, что A – G -градуированная алгебра и все внутренние автоморфизмы G действуют автоморфизмами на алгебре A , переводя однородные в G -градуировке элементы в однородные.

Определим теперь (G, Q) -тождества на A .

Сначала разложим G в объединение $G = G_+ \cup G_-$, где G_+ действует автоморфизмами, а G_- – антиавтоморфизмами. Пусть H – векторное пространство с базисом из элементов $g \pi_q$, $g \in G$, $q \in Q$. Пусть $T = T(H)$ – тензорная алгебра H (все тензоры с нулевым свободным членом). Пусть X – некоторое множество и $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X|G, Q)$ – линейная оболочка в свободной неассоциативной алгебре $T\langle X \rangle$ всех элементов вида $t_v v$, где v – мономы от элементов X , а t_v – однородный тензор из T , причем $\deg v = \deg t_v$. Ясно, что $\mathcal{F}$ – подалгебра в $T\langle X \rangle$ и $(t_u u)(t_v v) = (t_u \otimes t_v)(uv)$.

Мы можем превратить $\mathcal{F}$ в Q -градуированную алгебру, положив $g \pi_q x \in \mathcal{F}_{g \circ q}$ для любых $g \in G$, $q \in Q$, $x \in X$. Далее, по индукции, если $t_u u \in \mathcal{F}_p$, $t_v v \in \mathcal{F}_q$, то $(t_u \otimes t_v)(uv) \in \mathcal{F}_{pq}$. Тогда $\mathcal{F}_p \mathcal{F}_q \subseteq \mathcal{F}_{pq}$, как и необходимо.

Теперь зададим действие G на $\mathcal{F}$, положив

$$g * ((g_1 \pi_{q_1} \otimes \cdots \otimes g_s \pi_{q_s})u) = ((gg_1) \pi_{q_1} \otimes \cdots \otimes (gg_s) \pi_{q_s})u, \quad (3)$$

если $g \in G_+$, и

$$g * ((g_1 \pi_{q_1} \otimes \cdots \otimes g_s \pi_{q_s})u) = ((gg_s) \pi_{q_s} \otimes \cdots \otimes (gg_1) \pi_{q_1})u^* \quad (4)$$

для $g \in G_-$, где u^* – результат применения к u стандартной инволюции на группоиде $\langle X \rangle$, продолжающей тождественное отображение на X (т.е. $(x_1(x_2x_3))^* = ((x_3x_2)x_1)$). Из определения следует, что $g * \mathcal{F}_q \subset \mathcal{F}_{g \circ q}$. Например, в случае (3) мы получаем

$$g * \mathcal{F}_{(g_1 \circ q_1) \dots (g_s \circ q_s)} \subset \mathcal{F}_{g \circ ((g_1 \circ q_1) \dots (g_s \circ q_s))} = \mathcal{F}_{(gg_1 \circ q_1) \dots (gg_s \circ q_s)}.$$

В этом случае мы пользовались тем, что g действует на Q как автоморфизм. Аналогично проверяется случай (4).

Рассмотрим теперь алгебру A с Q -градуировкой, на которой группа $G = G_+ \cup G_-$ действует так, что $g * A_p \subset A_{g \circ p}$, G_+ действует автоморфизмами, а G_- – антиавтоморфизмами. Тогда любое отображение $\varphi: X \rightarrow A$ задает Q -градуированный G -гомоморфизм $\bar{\varphi}: \mathcal{F} \rightarrow A$, т.е. $\bar{\varphi}(\mathcal{F}_p) \subset A_p$, $\bar{\varphi}(g * f) = g * \bar{\varphi}(f)$. Достаточно только положить

$$\bar{\varphi}(f) = u(g_1 * \pi_{q_1}(a_1), \dots, g_s * \pi_{q_s}(a_s)) \quad (5)$$

для $f = (g_1 \pi_{q_1} \otimes \dots \otimes g_s \pi_{q_s})u(x_1, \dots, x_s)$.

Здесь $u(x_1, \dots, x_s)$ – это $x_1 \dots x_s$ с некоторой расстановкой скобок, а $\pi_q(a)$ обозначает q -проекцию $a \in A$ на A_q . Тогда как f , так и $\bar{\varphi}(f)$ являются однородными элементами степени $(g_1 \circ q_1) \dots (g_s \circ q_s)$. Далее, если $g \in G_+$, то

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(g * f) &= u((gg_1) * \pi_{q_1}(a_1), \dots, (gg_s) * \pi_{q_s}(a_s)) \\ &= g * u(g_1 * \pi_{q_1}(a_1), \dots, g_s * \pi_{q_s}(a_s)) = g * \bar{\varphi}(f). \end{aligned}$$

Если $g \in G_-$, то

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(g * f) &= u^*((gg_s) * \pi_{q_s}(a_s), \dots, (gg_1) * \pi_{q_1}(a_1)) \\ &= g * u(g_1 * \pi_{q_1}(a_1), \dots, g_s * \pi_{q_s}(a_s)) = g * \bar{\varphi}(f), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Рассмотрим теперь всевозможные отображения $\varphi: X \rightarrow A$ и все задаваемые ими в (5) Q -градуированные G -гомоморфизмы $\bar{\varphi}: X \rightarrow A$. Положим $I = \bigcap_{\varphi} \text{Ker } \bar{\varphi}$. Любой элемент $f \in I$ назовем Q -градуированным G -тождеством A , или (G, Q) -тождеством A . Тогда верны все обычные результаты о тождествах: любое ненулевое тождество имеет ненулевое полилинейное (по X) следствие. Если поле скаляров бесконечно, то любое тождество эквивалентно системе однородных (по X) тождеств. В случае поля нулевой характеристики всякое тождество эквивалентно системе полилинейных по X тождеств.

Возникает естественный вопрос: верно ли, что нетривиальное (G, Q) -тождество влечет обычное тождество? В общем случае ответ отрицателен даже для $G = \{e\}$ и $Q = \mathbb{Z}_2$. Например, тождество $\pi_1 x = 0$ выполняется в $A = A_0 \oplus A_1$ с $A_1 = \{0\}$, но в качестве A может выступать любая алгебра. Рассмотрим другой пример. Пусть Q – одноэлементная группа, $Q = \{0\}$ и произвольная группа G действует на $A = A_0$ тождественными автоморфизмами. Тогда $g \pi_0 x = \pi_0 x$ – нетривиальное (G, Q) -тождество. Но и в этом случае A может быть произвольной. Заметим также, что тождество нетривиально, так как оно не выполняется, например, в групповой алгебре группы G . Если группа Q бесконечна, например, $Q = \mathbb{Z}$ и число ненулевых слагаемых в $A = \sum_{q \in Q} A_q$ тоже бесконечно, то даже тождество $\pi_0 x = 0$

является слишком слабым условием. Например, абсолютно свободная алгебра $F\langle X \rangle$, градуированная степенями X , удовлетворяет этому тождеству. Наконец, пусть $G = \langle g \rangle_\infty$ – бесконечная циклическая группа и $\lambda \in F$ не является корнем из единицы. Тогда отображение $g: x \mapsto \lambda x \ \forall x \in X$ продолжается до автоморфизма алгебры $F\langle X \rangle$, который не имеет неподвижных точек. Этот пример показывает, что алгебра, на которой действует автоморфизмами бесконечная группа, может не иметь никаких нетривиальных тождеств, даже если подалгебра неподвижных точек удовлетворяет нетривиальному тождеству. Поэтому мы вынуждены ограничиться случаем, когда разложение $A = \sum_{q \in Q} A_q$ конечно и действующая группа G также конечна.

Обозначим через $P \subset Q$ конечное подмножество $P = \{q_1, \dots, q_m\}$ такое, что $A = \sum_{q \in P} A_q$. Обозначим через ε элемент $e\pi_{q_1} + \dots + e\pi_{q_m} \in H$. Тогда, продолжая отображение $x \mapsto a$, мы получим $\varepsilon x \mapsto a$. Положим $\varepsilon_n = \underbrace{\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon}_n$.

Тогда любое обычное тождество алгебры A является и (G, Q) -тождеством. Оно имеет форму

$$\sum_v \alpha_v \varepsilon_n v(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \alpha_v \in F, \quad (6)$$

где $v = v(x_1, \dots, x_n)$ – одночлен из $F\langle X \rangle$. Если A удовлетворяет соотношению (6), то для любых $a_1, \dots, a_n \in A$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_v \alpha_v v(e\pi_{q_1}(a_1) + \dots + e\pi_{q_m}(a_1), \dots, e\pi_{q_1}(a_n) + \dots + e\pi_{q_m}(a_n)) \\ = \sum_v \alpha_v v(a_1, \dots, a_n) = 0. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к алгебрам лиевского типа. Если A – такая алгебра, то из (1) следует, что любой элемент алгебры $\mathcal{F}$ по модулю I (т.е. по модулю (G, Q) -тождеств алгебры A) может быть записан как линейная комбинация левонормированных одночленов (мы покажем это позже). Это дает нам возможность предполагать, что если A имеет какое-то нетривиальное тождество, то она имеет также тождество $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, в котором левая часть – это полином вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} t_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}, \quad (7)$$

где $t_\sigma \in T$ и все одночлены левонормированы.

Объединяя подходы работ [4], [1], мы получаем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (G, Q) -тождество вида (7) называется *существенным*, если t_1 равно -1 . Другими словами, существенное тождество имеет вид

$$\varepsilon_n x_0 x_1 \dots x_n = \sum_{\sigma \neq 1} t_\sigma x_0 x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}. \quad (8)$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат нашей статьи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть L – алгебра лиевского типа с конечной Q -градуировкой, на которой группа G действует автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Если L удовлетворяет существенному (G, Q) -тождеству степени d , то она удовлетворяет обычному тождеству степени D (такой же формы, что и (8), но со скалярными коэффициентами $t_\sigma = \alpha_\sigma \varepsilon_D$, $\alpha_\sigma \in F$), причем D зависит только от d , $|G|$ и числа $|P|$ ненулевых слагаемых в Q -градуировке A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим естественный порядок на $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, положив $x_i < x_j$, если $i < j$, и продолжим его лексикографически до частичного порядка на всех неассоциативных одночленах на X . Сначала докажем два технических результата, которые помогут нам сравнивать элементы из $\mathcal{F}$ по модулю определенного ранее идеала I .

ЛЕММА 1. Пусть b, y и z – одночлены на X степеней k, m и n соответственно. Тогда для любого $t \in H^{\otimes k+m+n}$ существуют $t_1, t_2, t'_1, t'_2 \in H^{\otimes k+m+n}$ такие, что

$$tbyz \equiv t_1b(yz) + t_2bzy \pmod{I}, \quad (9)$$

$$tb(yz) \equiv t'_1byz + t'_2bzy \pmod{I}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала t будет тензором ранга один. Тогда

$$t = t_b \otimes t_y \otimes t_z, \quad t_b \in H^{\otimes k}, \quad t_y \in H^{\otimes m}, \quad t_z \in H^{\otimes n}$$

и все t_b, t_y, t_z ранга 1. Рассмотрим одночлен

$$tb(yz) = (t_b b)((t_y y)(t_z z)).$$

Заметим, что $tbyz$ и $tb(yz)$ однородны по Q -градуировке и лежат в одной компоненте $\mathcal{F}_q$. Если $q \notin P$, то $tbyz, tb(yz) \in I$. Если же $q \in P$, то применяем (1). Поскольку t_b, t_y, t_z имеют ранг 1, элементы $t_b b, t_y y$ и $t_z z$ однородны по Q -градуировке в $\mathcal{F}$. Используя (1), получаем

$$\begin{aligned} tb(yz) &\equiv \alpha(t_b b)(t_y y)(t_z z) + \beta(t_b b)(t_z z)(t_y y) \\ &= \alpha(t_b \otimes t_y \otimes t_z)byz + \beta(t_b \otimes t_z \otimes t_y)bzy = \alpha tbyz + \beta t'bzy \end{aligned}$$

с $0 \neq \alpha \in F$. Следовательно, можно взять $t_1 = \alpha^{-1}t$, $t_2 = -\beta\alpha^{-1}t'$, $t'_1 = \alpha t$, $t'_2 = \beta t$, и для тензора ранга 1 лемма доказана. Поскольку тензоры ранга 1 образуют базис $H^{\otimes k+m+n}$, доказательство леммы 1 закончено.

ЛЕММА 2. Пусть a – левонормированный одночлен степени m по X , $y_1, \dots, y_n \in X$ и $y_1 > y_2, \dots, y_n$. Тогда для любого $t \in H^{\otimes m+n}$ можно найти $t' \in H^{\otimes m+n}$ такой, что

$$tay_1 \cdots y_n - t'a(y_1 \cdots y_n) \equiv \sum t_w w \pmod{I},$$

где $t_w \in T$, все w – левонормированные одночлены, причем $w < ay_1 \cdots y_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим соотношение (9) из леммы 1 к $b = a$, $y = y_1$, $z = y_2$:

$$tay_1y_2y_3 \cdots y_n \equiv t_1a(y_1y_2)y_3 \cdots y_n + t_2ay_2y_1y_3 \cdots y_n \pmod{I}.$$

Второе слагаемое левонормировано и меньше, чем $ay_1 \cdots y_n$. Применим (9) к первому слагаемому при $b = a$, $y = y_1y_2$, $z = y_3$:

$$t_1a(y_1y_2)y_3 \cdots y_n \equiv t_{11}a(y_1y_2y_3) \cdots y_n + t_{12}ay_3(y_1y_2) \cdots y_n \pmod{I}.$$

Согласно (10) второе слагаемое является суммой левонормированных одночленов вида $t'w$, где $w = ay_3 \cdots$ меньше, чем $ay_1 \cdots y_n$. Повторяя эту процедуру, мы получаем требуемое выражение для $tay_1 \cdots y_n$ по модулю I .

Теперь пусть m – некоторое натуральное число. Полилинейный левонормированный (G, Q) -одночлен tw , $t \in T$, $w = y_0y_1y_2 \cdots y_n$, $y_0 = x_0$, $y_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$, $i = 1, \dots, n$, назовем m -неразложимым, если найдутся m индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ таких, что $y_{i_1} > y_k$ для всех $i_m \geq k > i_1$, $y_{i_2} > y_k$ для всех $i_m \geq k > i_2$ и т. д. Например, для i_{m-1} должно выполняться условие $y_{i_{m-1}} > y_k$ для всех $i_m \geq k > i_{m-1}$. В противном случае мы говорим, что tw m -разложим.

Сначала покажем, что любой полилинейный левонормированный одночлен из $\mathcal{F}$ есть линейная комбинация m -неразложимых одночленов по модулю I , где $m = d - 1$ и d – степень существенного (G, Q) -тождества в L .

Проведем доказательство от противного. Пусть tw – лексикографически минимальный контрпример, т.е. минимальный m -разложимый одночлен, не выражающийся через m -неразложимые. Предположим, что $tw = ty_1 \cdots y_n$ и индексы $i_1 < \cdots < i_m$ задают m -разложение на tw . Тогда построим разбиение нашего слова на подслова, чтобы применить к нему существенное тождество. Положим $a_0 = y_0y_1 \cdots y_{i_1-1}$, если $i_1 > 1$, и $a_0 = y_0$ в противном случае. Далее, положим $a_{m+1} = Ry_{i_m+1} \cdots Ry_n$ при $i_m < n$ либо будем считать a_{m+1} пустым словом, если $i_m = n$, где R_j означает правое умножение на y_j . Для всех $j = 1, \dots, m - 1$ мы положим

$$a_j = y_{i_j}y_{i_j+1} \cdots y_{i_{j+1}-1}$$

и $a_m = y_{i_m}$. Применяя m раз лемму 2 к $a_0a_1, a_0a_1a_2, \dots, a_0a_1 \cdots a_m$, мы получим, что

$$tw \equiv \bar{t}(a_0a_1 \cdots a_m)a_{m+1} \pmod{I} \quad (11)$$

для некоторого $\bar{t} \in H^{\otimes^{n+1}}$.

Алгебра L удовлетворяет существенному тождеству степени $d = m + 1$:

$$\varepsilon_m x_0 x_1 \cdots x_m = \sum_{\sigma \neq 1} t_\sigma x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)}. \quad (12)$$

Элемент из правой части (11) может быть записан как сумма

$$(t_0 \otimes t_1 \otimes \cdots \otimes t_m \otimes t_{m+1})a_0a_1 \cdots a_ma_{m+1}, \quad (13)$$

в которой $t_0, \dots, t_m$ – тензоры ранга 1, т.е. t_i имеет вид

$$t_i = g_1 \pi_{b_1} \otimes \cdots \otimes g_k \pi_{b_k}.$$

В этом случае элемент $t_i a_i$ однороден и $t_i \in \mathcal{F}_{r_i}$, где $r_i = (g_1 \circ b_1) \cdots (g_k \circ b_k)$. Если $r_i \notin P$, то $t_i a_i \in I$ и элемент (13) лежит в I . Предположим теперь, что все $r_0, r_1, \dots, r_m$ лежат в P . Тогда отображение

$$\varphi(g\pi_{r_i}) = (g \circ t_i) a_i, \quad \varphi(g\pi_r) = 0, \quad r \neq r_i, \quad i = 0, \dots, m,$$

может быть продолжено до Q -градуированного G -гомоморфизма $\bar{\varphi}$ такого, что $\bar{\varphi}(\varepsilon x_i) = t_i a_i$. Нетрудно заметить, что

$$\bar{\varphi}(t_\sigma x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)}) = t'_\sigma a_0 a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(m)}.$$

Следовательно, из (12) вытекает, что (13) совпадает с суммой произведений вида $t'_\sigma a_0 a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(m)}$ по модулю I , в которых $\sigma \neq 1$. После подстановки в (11) мы получаем

$$tw \equiv \sum_{1 \neq \sigma} \bar{t}_\sigma a_0 a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(m)} a_{m+1} \pmod{I}.$$

Теперь рассмотрим одно из слагаемых $b = \bar{t}_\sigma a_0 a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(m)} a_{m+1}$. По лемме 1 это сумма левонормированных одночленов от $y_0, y_1, \dots, y_n$. Но так как $\sigma \neq 1$, а $i_1, \dots, i_m$ задают m -разложение на $y_1 \cdots y_n$, то любое слагаемое строго меньше, чем $tw = ty_0 y_1 \cdots y_n$. По выбору tw (лексикографически минимальный контрпример) b является линейной комбинацией m -неразложимых одночленов по модулю I . Следовательно, и сам tw является подобной комбинацией, что противоречит его выбору.

Теперь рассмотрим все одночлены $\varepsilon_n x_0 x_1 \cdots x_n = \sum_{\sigma \neq 1} t_\sigma x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$. По модулю I они лежат в F -линейной оболочке

$$W = \langle tx_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \rangle,$$

где $x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ — m -неразложимое слово, $t = g_0 \pi_{r_0} \otimes \cdots \otimes g_n \pi_{r_n}$, а $g_0, \dots, g_n \in G$, $r_0, \dots, r_n \in P$. Следовательно, $\dim W \leq |G|^n \cdot |P|^n a_m(n)$, где $a_m(n)$ обозначает число m -неразложимых полилинейных слов от n переменных. Известно (см. [1]), что существует такая функция $f(x, y)$ от двух переменных, что для любого натурального m и любого $c > 0$ выполнено неравенство $a_m(n) < n!/c^n$, если $n > f(m, c)$. Следовательно, для $c = |G| \cdot |P| + 1$ мы получаем $\dim W < n!$, и элементы $\varepsilon x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ линейно зависимы по модулю I . Эта линейная зависимость и дает нам требуемое тождество на L .

§3. Алгебры Ли с тождествами на кососимметричных инвариантах

Эту часть статьи мы начинаем с изучения обычных алгебр Ли. Пусть G — конечная группа, действующая на алгебре Ли L автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Пусть ${}^G L$ обозначает подпространство косых инвариантов этого действия, т.е. если $g \in G$ — автоморфизм, то $g(x) = x$, иначе $g(x) = -x$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть L — алгебра Ли над полем F характеристики, не равной двум. Если ${}^G L$ удовлетворяет нетривиальному тождественному соотношению степени d и $(\text{char } F, |G|) = 1$, то L также удовлетворяет нетривиальному тождеству, степень которого зависит только от d и $|G|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим G в объединение $G = G_+ \cup G_-$, где G_+ – нормальная подгруппа из элементов, действующих на L как автоморфизмы, а G_- – класс элементов, действующих как антиавтоморфизмы. Пусть $M = L^{G_+}$ – подалгебра неподвижных точек действия G_+ . Тогда ${}^G L \subset M$. Если мы докажем, что M удовлетворяет нетривиальному тождеству, то теорема будет доказана, как следует из результатов работы [7]. В частности, если $G = G_+$, то ${}^G L = M$, и теорема доказана. В противном случае найдется $g_0 \in G \setminus G_+$. Тогда $G_- = g_0 G_+$. Поскольку нормальная подгруппа G_+ из G действует на M тривиально, мы получаем действие $G/G_+ \cong \langle * \rangle_2$, заданное соотношением $x^* = g_0(x)$. При этом $M = M_- \oplus M_+$, где $M_- = \{x : x^* = -x\}$ и $M_+ = \{x : x^* = x\}$. Тогда для любых $x, y \in M_-$ имеем:

$$[x, y]^* = g_0([x, y]) = [g_0(y), g_0(x)] = [y^*, x^*] = [-y, -x] = -[x, y],$$

т.е. $[M_-, M_-] \subset M_-$. Аналогично $[M_-, M_+] \subset M_+$, $[M_+, M_+] \subset M_+$. Следовательно, построенное выше разложение для M является $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой. При этом $M_- = {}^G L$, $M_+ = L^G$. Теперь из теоремы 1 следует, что M удовлетворяет тождеству, степень которого зависит только от d , и доказательство теоремы закончено.

Мы уже отмечали во введении, что в последней теореме нельзя заменить косые инварианты ${}^G L$ на обычные L^G .

Ряд следствий может быть получен и для других алгебр лиевского типа.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – ассоциативная алгебра, на которой конечная группа G действует автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Пусть также $(|G|, \text{char } F) = 1$. Если ${}^G A$ или A^G удовлетворяет нетривиальному полиномиальному тождеству степени d , то и сама A удовлетворяет нетривиальному полиномиальному тождеству, степень которого ограничена функцией от d и $|G|$.

Для доказательства следствия 1 нам потребуются следующие результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть L – лиевская подалгебра ассоциативной алгебры A над полем F . Предположим, что существует нетривиальный ассоциативный полином $f = f(x_1, \dots, x_n)$, тождественно равный нулю на элементах из L в A . Тогда найдется лиевский полином вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma [x_0, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}],$$

который также равен нулю на L тождественно.

Мы используем обозначение $[x, y] = xy - yx$ для элементов x, y из ассоциативной алгебры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть $F\langle X \rangle$ – свободная ассоциативная алгебра со счетным множеством порождающих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Как и прежде, обозначим через P_n подпространство всех полилинейных многочленов в $F\langle X \rangle$, зависящих от $x_1, \dots, x_n$.

Рассмотрим множество I всех *слабых* тождеств пары (A, L) , т.е. все ассоциативные полиномы, тождественно равные нулю на элементах из L в A . Ясно, что I –

идеал в $F\langle X \rangle$. Стандартные рассуждения показывают, что I содержит некоторый полилинейный полином вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)}.$$

Другими словами, выполняется включение

$$x_1 x_2 \cdots x_m - \sum_{1 \neq \sigma \in S_n} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)} \in I. \quad (14)$$

Как и в доказательстве теоремы 2, рассмотрим множество $V^{(m)}$ всех m -неразложимых одночленов от X .

ЛЕММА 3. $P_n \equiv V^{(m)} \cap P_n \pmod{I}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n < m$, то любой одночлен из P_n m -неразложим. Поэтому можно рассматривать только случай $n \geq m$. Теперь предположим, что наше утверждение ложно и существует лексикографически минимальный m -неразложимый одночлен $B = y_1 \cdots y_n$, где $y_1, \dots, y_n$ — некоторые элементы из X , такой, что $B \notin V^{(m)} + I$. Зафиксируем m -разложение на B , т.е. набор индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$, для которых $y_{i_k} > y_t$, $t = i_k + 1, \dots, i_m$.

Как и в доказательстве теоремы 2, обозначим через t_0 ассоциативное произведение $t_0 = y_1 \cdots y_{i_1-1}$, если $i_1 > 1$. При $i_1 = 1$ мы будем считать t_0 пустым словом. Если $i_m < n$, то обозначим $t_{m+1} = y_{i_m+1} \cdots y_n$, иначе считаем t_{m+1} пустым словом. Для всех $k = 1, \dots, m-1$ положим

$$t_k = [y_{i_k}, y_{i_k+1}, \dots, y_{i_{k+1}-1}]$$

и $t_m = y_{i_m}$. Теперь, вычисляя $t_0 t_1 \cdots t_{m+1}$ в $F\langle X \rangle$, мы видим, что старший член этого полинома (в смысле лексикографического порядка) равен $B = y_1 \cdots y_n$. Следовательно,

$$B - t_0 t_1 \cdots t_{m+1} \in V^{(m)} + I,$$

так как B — минимальный контрпример. Но согласно (14)

$$t_0 t_1 \cdots t_{m+1} \equiv \sum_{1 \neq \sigma \in S_m} t_0 t_{\sigma(1)} \cdots t_{\sigma(m)} t_{m+1} \pmod{I}.$$

Заметим, что все одночлены в записи $t_0 t_{\sigma(1)} \cdots t_{\sigma(m)} t_{m+1}$ лексикографически меньше, чем $y_1 \cdots y_n$, если $\sigma \neq 1$, и мы получаем выражение для B в виде линейной комбинации строго меньших одночленов по модулю I . По выбору B все эти одночлены лежат в $V^{(m)} + I$, следовательно, $B \in V^{(m)} + I$. Это противоречие завершает доказательство леммы 3.

Теперь, как и в доказательстве теоремы 2, заметим что существует такая функция $f(x, y)$ от двух переменных, что условие $n > f(m, c)$ влечет ограничение $a_m(n) < n!/c^n$ для любых m, c , например, для $c = 2$ (см. [1]). Следовательно,

$$\dim \frac{P_{n+1}}{P_{n+1} \cap I} < \frac{(n+1)!}{2^n} < n!$$

для некоторого n . Поэтому множество из $n!$ левонормированных лиевских одночленов $[x_0, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$ не может быть линейно независимым по модулю I , и доказательство предложения 1 закончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Если подпространство A^G удовлетворяет тождеству $f(x_1, \dots, x_n)$, то подпространство GA удовлетворяет соотношению $f((x_1 \circ y_1), \dots, (x_n \circ y_n)) = 0$, так как для любых $x, y \in {}^GA$ выполнено включение $x \circ y = xy + yx \in A^G$. Поэтому достаточно рассмотреть только случай косых инвариантов. Обозначим через L алгебру Ли, полученную из A введением обычной коммутаторной скобки. К L применима теорема 3, так как ${}^GL = {}^GA$ по предложению 1 удовлетворяет нетривиальному тождеству.

Частным случаем следствия 1 является теорема Амицура, утверждающая, что если подпространство симметричных (или кососимметричных) элементов ассоциативной алгебры A с инволюцией удовлетворяет нетривиальному тождеству, то сама A является PI-алгеброй. Но, кроме этого, следствие 1 дает связь между степенями тождеств на A, A_+, A_- .

Укажем еще одно обобщение теоремы Амицура. Это обобщение относится к более широкому классу альтернативных алгебр с инволюцией. Инволюция на альтернативной алгебре A определяется как обычно – это линейный оператор порядка 2 $*$: $A \rightarrow A$ такой, что $(xy)^* = y^*x^*$. Симметричная и кососимметричная части также определяются стандартным образом:

$$A_+ = \{a \in A : a^* = a\}, \quad A_- = \{a \in A : a^* = -a\}.$$

Напомним определение альтернативной алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгебра называется *альтернативной*, если любая ее двухпорожденная подалгебра ассоциативна.

Хорошо известно, что если $\text{char } F \neq 2$, то относительно операции $x \circ y = xy + yx$ алгебра A является йордановой алгеброй, которую обозначают как $A^{(+)}$. Более того, эта йорданова алгебра *специальна*, т.е. изоморфна йордановой подалгебре некоторой ассоциативной алгебры с аналогично заданным умножением $\circ$. В качестве этой ассоциативной алгебры можно взять подалгебру в $\text{End } A$, порожденную правыми умножениями $R_a: x \mapsto xa$. Отображение $a \mapsto R_a$ не является гомоморфизмом A в $\text{End } A$, но это гомоморфизм йордановых алгебр.

Следуя [8], будем говорить, что соотношение $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ – тождество алгебры A , если f – так называемый *существенный* альтернативный полином, т.е. после опускания скобок он превращается в нетривиальный ассоциативный полином. В этом случае мы говорим, что A – альтернативная PI-алгебра.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – альтернативная алгебра с инволюцией над полем F характеристики, не равной 2. Если A_+ или A_- удовлетворяют нетривиальному тождеству, то A является альтернативной PI-алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что если $f = f(x_1, \dots, x_n)$ – тождество на косых элементах в A , то

$$f(x_1y_1 - y_1x_1, \dots, x_ny_n - y_nx_n) \equiv 0$$

– тождество на симметричных переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, поскольку $ab - ba \in A_-$ для любых $a, b \in A_+$. Поэтому достаточно доказать теорему только для симметричного случая.

Нам потребуется следующее предложение, которое фактически содержится в главе 5 из [8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A – альтернативная алгебра над полем F , $\text{char } F \neq 2$ и $J = A^{(+)}$ – построенная по ней йорданова алгебра. Предположим, что некоторый существенный йорданов полином тождественно равен нулю на J . Тогда J – специальная йорданова алгебра с нетривиальным йордановым тождеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если обозначить через R_a правое умножение на a в A , то по леммам 12 и 14 главы 5 из [8] правые умножения на элементы из J удовлетворяют нетривиальному ассоциативному тождеству в $\text{End } A$. Тогда, как и в предложении 1, существует йорданов полином $f = f(x_1, \dots, x_n)$, который равен нулю на $x_1 = R_{a_1}, \dots, x_n = R_{a_n}$ при любых $a_1, \dots, a_n \in J$. Так как отображение $a \mapsto R_a$ является вложением йордановой алгебры $A^{(+)}$ в $(\text{End } A)^{(+)}$, то $f \equiv 0$ – нетривиальное йорданово тождество в J .

Чтобы завершить доказательство теоремы, заметим, что $A^{(+)} = A_+^{(+)} \oplus A_-^{(+)}$ – это $\mathbb{Z}_2$ -градуировка на специальной йордановой алгебре, причем нулевая компонента удовлетворяет нетривиальному йорданову тождеству. Тогда согласно [9] в $A^{(+)}$ выполнено некоторое йорданово тождество. Его и можно взять в качестве нетривиального соотношения на A .

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае йордановых алгебр одно из следствий работы [9] состояло в том, что если конечная разрешимая группа G , $(\text{char } F, |G|) = 1$, действует автоморфизмами на специальной йордановой алгебре J и множество J^G неподвижных точек удовлетворяет нетривиальному тождеству, то и сама J будет йордановой РИ-алгеброй. Поэтому получаем такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть конечная разрешимая группа G , $(\text{char } F, |G|) = 1$, действует на альтернативной алгебре A над полем характеристики, не равной 2, автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Если подпространство инвариантов A^G удовлетворяет нетривиальному тождеству степени d , то сама алгебра A имеет нетривиальное тождество, степень которого зависит только от $|G|$ и d .

Список литературы

1. Bahturin Y., Giambruno A., Zaicev M. G -identities on associative algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. № 1. P. 63–69.
2. Amitsur S. A. Rings with involution // Israel J. Math. 1968. V. 6. P. 99–106.
3. Amitsur S. A. Identities in rings with involutions // Israel J. Math. 1969. V. 7. P. 63–68.
4. Bahturin Y., Zaicev M. Identities of graded algebras // J. Algebra. 1998. V. 205. № 1. P. 1–12.
5. Loday J.-L. Une version non commutative des algebres de Lie: Les algebres de Leibniz // Enseign. Math. (2). 1993. V. 39. № 3–4. P. 269–293.
6. Liu K. Quantum central extensions // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1991. V. 13. № 4. P. 135–140.
7. Linchenko V. Identities of Lie algebras with actions of Hopf algebras // Comm. Algebra. 1997. V. 25. № 10. P. 3179–3187.
8. Жевлаков К. А., Шестаков И. П., Ширшов А. И., Сливко А. М. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
9. Бахтурин Ю. А., Зайцев М. В. Тождества специальных йордановых алгебр с конечной градуировкой // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. Т. 53. № 2. С. 28–31.