Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, О множествах инъективности преобразования Помпейю, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 11, 51–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm439>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 02:41:27

УДК 517.5

В. В. Волчков

О множествах инъективности преобразования Помпейю

Решена проблема описания множеств инъективности преобразования Помпейю $\mathcal{P}_\varphi$ для широкого класса распределений φ с носителем на единичной сфере.

Библиография: 24 названия.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\text{ISO}(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$, φ – распределение с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. При фиксированном $\mu \in \text{ISO}(n)$ определим распределение $\mu\varphi$, действующее на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ по правилу:

$$\langle \mu\varphi, f(x) \rangle = \langle \varphi, f(\mu^{-1}x) \rangle, \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

(здесь и далее $\mathcal{E}(M)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на гладком многообразии M со стандартной топологией, см., например, [1; гл. 2, §2, п. 2]). Для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ такого, что множество $\Lambda(\mathcal{U}, \varphi) = \{\mu \in \text{ISO}(n) : \text{supp } \mu\varphi \subset \mathcal{U}\}$ непусто, преобразование Помпейю $\mathcal{P}_\varphi$ отображает $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ в $\mathcal{E}(\Lambda(\mathcal{U}, \varphi))$ следующим образом:

$$(\mathcal{P}_\varphi f)(\mu) = \langle \mu\varphi, f \rangle, \quad f \in \mathcal{E}(\mathcal{U}), \quad \mu \in \Lambda(\mathcal{U}, \varphi).$$

Множество $\mathcal{U}$ называется *множеством инъективности* преобразования $\mathcal{P}_\varphi$, если из равенства $\mathcal{P}_\varphi f = 0$ на $\Lambda(\mathcal{U}, \varphi)$ следует, что $f = 0$ на $\mathcal{U}$. Например, если φ – δ -функция Дирака, множествами инъективности $\mathcal{P}_\varphi$ являются все непустые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$. В качестве другого примера рассмотрим случай, когда φ – характеристическая функция (индикатор) шара в $\mathbb{R}^n$ или поверхностная δ -функция, сосредоточенная на сфере в $\mathbb{R}^n$. Для такого распределения φ все пространство $\mathbb{R}^n$ не является множеством инъективности, см. [2; §3].

Для отдельных φ и $\mathcal{U}$ (в основном для $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$) инъективность преобразования Помпейю и близкие вопросы изучались во многих работах (см. обзоры [2], [3] с обширной библиографией, а также [4]–[12]). В общем случае проблема описания множеств инъективности $\mathcal{P}_\varphi$ является весьма трудной и исследована мало. Наиболее общие достаточные условия инъективности получены К. А. Беренстейном, Р. Гэем и А. Ижером, см. [13], [14]. В этих работах показано, что для широкого класса распределений φ всякое множество $\mathcal{U}$, каждая точка которого лежит в

Работа выполнена при частичной поддержке ISF (гранты №№ U9D000, U9D200) и ISSEP (грант № APU071013).

некотором, содержащемся в $\mathcal{U}$, открытом шаре радиуса большего чем $2r(\varphi)$, является множеством инъективности $\mathcal{P}_\varphi$ (здесь $r(\varphi)$ — радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего носитель φ). За исключением отдельных простейших случаев, в которых множествами инъективности $\mathcal{P}_\varphi$ являются все непустые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ или, напротив, все пространство $\mathbb{R}^n$ не является таковым (см., например, [7; § 4]), до настоящего времени не было известно полного описания множеств инъективности $\mathcal{P}_\varphi$ ни для одного распределения φ . В настоящей работе получено решение этой задачи для широкого класса распределений с носителем на единичной сфере.

Точная формулировка основного результата приводится в § 1. В § 2 содержатся основные обозначения и необходимые в дальнейшем сведения. В §§ 3, 4 изучаются свойства преобразования Помпейю на множествах со сферической симметрией. В § 5 доказывается ряд вспомогательных утверждений, связанных с разложениями функций по системе ультрасферических многочленов. В § 6 исследуются множества инъективности $\mathcal{P}_\varphi$ для некоторых классов распределений φ . Доказательство основного результата содержится в § 7.

§ 1. Формулировка основного результата

Пусть S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $\mathcal{D}'(S^{n-1})$ — пространство распределений на S^{n-1} (см., например, [1; гл. 2, § 2, п. 2]), $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ — пространство распределений с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Всякое распределение $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ продолжается до распределения $\varphi^* \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ с носителем на S^{n-1} , при этом $\langle \varphi^*, f \rangle = \langle \varphi, f|_{S^{n-1}} \rangle$ для любой $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, где $f|_{S^{n-1}}$ — сужение f на S^{n-1} . Для любого $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ обозначим через I_ψ совокупность всех множеств инъективности преобразования $\mathcal{P}_\psi$. Если $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$, то положим $I_\varphi = I_\psi$, где $\psi = \varphi^*$.

Пусть $\{Y_l^{(k)}\}$, $1 \leq l \leq a_k$, — фиксированный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$ сферических гармоник степени k на S^{n-1} (см. [15; гл. 4, § 2]). Каждому распределению $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ соответствует ряд Фурье

$$\varphi \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} \varphi_{kl} Y_l^{(k)},$$

где $\varphi_{kl} = \langle \varphi, \overline{Y_l^{(k)}} \rangle$. Обозначим через $\text{спес } \varphi$ спектр распределения φ , т.е. множество всех пар индексов (k, l) , для которых $\varphi_{kl} \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность всех открытых множеств $G \subset \mathbb{R}^n$, обладающих следующим свойством: $G \in \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда всякое непустое открытое подмножество G имеет непустое пересечение с некоторой сферой единичного радиуса, содержащейся в G . Отметим, что в $\mathfrak{M}$ имеются множества, не представимые в виде объединения единичных сфер (например открытый шар радиуса $R = 2$).

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 3$ и $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. $I_\varphi = \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\text{supp } \varphi = S^{n-1}$ и $\text{спес } \varphi$ — бесконечное множество, содержащее пару $(0, 1)$;

2. $I_\varphi = \emptyset$ тогда и только тогда, когда либо $\text{спес } \varphi$ состоит только из пары $(0, 1)$, либо $(0, 1) \notin \text{спес } \varphi$;
3. $I_\varphi \subset \mathfrak{M}$, но $I_\varphi \neq \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда либо $\text{спес } \varphi$ конечен, либо $(0, 1) \notin \text{спес } \varphi$;
4. $\mathfrak{M} \subset I_\varphi$, но $I_\varphi \neq \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\text{supp } \varphi \neq S^{n-1}$ и $(0, 1) \in \text{спес } \varphi$.

Нетрудно видеть, что перечисленные в теореме 1 свойства множества $\text{спес } \varphi$ не зависят от выбора базиса в пространствах $\mathcal{H}_k$. Таким образом, в утверждениях 1, 2 теоремы содержится полное описание множеств инъективности преобразования Помпейю для широкого класса распределений $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$. Поскольку носитель распределения с конечным спектром совпадает с S^{n-1} , всякое распределение из $\mathcal{D}'(S^{n-1})$ удовлетворяет условиям одного из утверждений теоремы 1. Из утверждений 3, 4 следуют соответственно необходимые и достаточные условия инъективности.

Из доказательства теоремы 1 видно (см. §7), что утверждения 2, 4 теоремы сохраняют силу и в двумерном случае. Утверждения 1 и 3 в приведенной выше формулировке при $n = 2$ неверны. Тем не менее, для специально выбранного базиса в $\mathcal{H}_k$ (см. §2) при $n = 2$ имеют место аналоги утверждений 1, 3, в которых условие бесконечности спектра заменяется более сильным требованием: $\text{спес } \varphi$ содержит бесконечное число пар вида $(k, 1)$ и бесконечное число пар вида $(m, 2)$ (см. леммы 12, 24 и доказательство теоремы 1).

Автор благодарит профессоров К. А. Беренштейна и Л. Зальцмана за предоставленную литературу и полезные обсуждения.

§2. Обозначения и вспомогательные конструкции

Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ обозначаются соответственно множества натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел. Для векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ положим $xy = \sum_{\nu=1}^n x_\nu y_\nu$. Замыкание множества $G \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\overline{G}$. Пусть ρ , σ — полярные координаты в $\mathbb{R}^n$ ($\rho = |x|$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) = x/\rho \in S^{n-1}$). Для любых $0 < \delta \leq 1$, $R > 0$ обозначим $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 - \delta < |x| < 1 + \delta\}$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$.

Пусть $\text{SO}(n)$ — группа вращений $\mathbb{R}^n$ с нормированной мерой Хаара $d\tau$, $T^k(\tau)$ — сужение квазирегулярного представления группы $\text{SO}(n)$ на пространство $\mathcal{H}_k$ (см. [16; гл. 9, §2, п. 7]), $\{t_{lp}^k\}$ — матрица представления $T^k(\tau)$, т.е.

$$Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{a_k} t_{lp}^k(\tau) Y_p^{(k)}(\sigma), \quad \tau \in \text{SO}(n). \quad (1)$$

При $k = 0$ имеем $a_k = 1$, $Y_1^{(k)}(\sigma) = 1$, $t_{11}^k(\tau) = 1$ для всех $\sigma \in S^{n-1}$, $\tau \in \text{SO}(n)$. При $n = 2$ и $k \geq 1$ всюду в дальнейшем будет использоваться следующий базис в $\mathcal{H}_k$: $Y_1^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k$, $Y_2^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 - i\sigma_2)^k$. Если τ — поворот на угол θ в $\mathbb{R}^2$, то для этого базиса $t_{11}^k(\tau) = e^{-ik\theta}$, $t_{22}^k(\tau) = e^{ik\theta}$, $t_{12}^k(\tau) = t_{21}^k(\tau) = 0$.

Всякой функции $f \in \mathcal{E}(K_\delta)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad 1 - \delta < \rho < 1 + \delta, \quad (2)$$

где $f_{kl}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\omega(\sigma)$ (здесь и далее $d\omega$ – нормированная поверхностная мера на S^{n-1}). При $n = 2$ из последнего равенства имеем

$$f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma) = \int_{\text{SO}(2)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{ll}^k(\tau)} d\tau. \quad (3)$$

Если $n \geq 3$, представления $T^k(\tau)$ неприводимы (см. [16; гл. 9, § 2, п. 10]). Отсюда следует (см. [7]), что при всех $1 \leq l, p \leq a_k$

$$f_{kl}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) = a_k \int_{\text{SO}(n)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{lp}^k(\tau)} d\tau. \quad (4)$$

Разложение (2) имеет место и для $f \in \mathcal{E}(B_R)$, при этом $0 < \rho < R$. Формулы (3), (4) показывают, что в этом случае слагаемые ряда (2) можно доопределить в точке $x = 0$ так, что они станут функциями класса $\mathcal{E}(B_R)$. В дальнейшем, используя выражения в левой части равенств (3), (4) для $f \in \mathcal{E}(B_R)$, будем предполагать, что они продолжены в B_R до функций класса $\mathcal{E}(B_R)$.

Пусть $\lambda > 0$, $P_k^\lambda(t)$ – ультрасферический многочлен степени k , ассоциированный с λ (см. [15; гл. 4, § 2]). Используя производящую функцию для P_k^λ (см. [15; гл. 4, § 2]), нетрудно получить равенства

$$P_k^\lambda = \frac{\lambda}{\lambda + k} (P_k^{\lambda+1} - P_{k-2}^{\lambda+1}), \quad k \geq 2, \quad (5)$$

$$t P_{k-1}^{\lambda+1} = \frac{k}{2(\lambda + k)} P_k^{\lambda+1} + \frac{2\lambda + k}{2(\lambda + k)} P_{k-2}^{\lambda+1}, \quad k \geq 2. \quad (6)$$

Пусть также $P_k^0(t) = \cos(k \arccos t)$ – многочлен Чебышёва первого рода степени k .

Далее, как обычно, символами J_ν , N_ν обозначаются соответственно функции Бесселя и Неймана порядка ν (см., например, [17; гл. 1, § 2]). Для удобства положим $\alpha_n(\rho) = \rho^{1-n/2} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho)$, $\beta_n(\rho) = \rho^{1-n/2} N_{\frac{n}{2}-1}(\rho)$. Обозначим через Δ оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Одним из решений уравнения $\Delta f = 0$ в области $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 0\}$ является функция

$$\gamma_n(\rho) = \begin{cases} \ln \rho & \text{при } n = 2, \\ \rho^{2-n} & \text{при } n > 2. \end{cases}$$

Пусть $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{U}$ – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ такое, что $\Lambda(\mathcal{U}, \psi) \neq \emptyset$. Обозначим через $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$ ядро преобразования $\mathcal{P}_\psi$ на $\mathcal{U}$, т.е. множество функций $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, для которых $\mathcal{P}_\psi f = 0$ на $\Lambda(\mathcal{U}, \psi)$. Если $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$, то положим $\mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$, где $\psi = \varphi^*$ (см. § 1).

§ 3. Свойства ядра преобразования Помпейю

Во всех утверждениях этого параграфа, за исключением леммы 1, предполагается, что множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ обладает сферической симметрией, т.е. $\tau\mathcal{U} = \mathcal{U}$ для всех $\tau \in \text{SO}(n)$.

ЛЕММА 1. Пусть $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$. Тогда все частные производные функции f принадлежат $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in \text{ISO}(n)$ и $\text{supp } \mu\psi \subset \mathcal{U}$. Из условия следует, что $\langle \mu\psi, f(x + \zeta) \rangle = 0$ при любом $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ с достаточно малой нормой $|\zeta|$. Дифференцируя это равенство по ζ_ν ($\nu = 1, \dots, n$), получаем утверждение леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$. Тогда все слагаемые ряда (2) принадлежат $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$. Более того, при $n \geq 3$ $f_{kl}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$ для всех $k \geq 0$, $1 \leq l, p \leq a_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in \text{ISO}(n)$ и $\text{supp } \mu\psi \subset \mathcal{U}$. Тогда $\langle \mu\psi, f(\tau^{-1}x) \rangle = 0$ для любого $\tau \in \text{SO}(n)$. Умножая это равенство на $\overline{t_{lp}^k(\tau)}$ и интегрируя на $\text{SO}(n)$, из (3) и (4) получаем утверждение леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть $n \geq 3$, $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и для некоторой гармоники W степени k функция $f(\rho)W(\sigma)$ принадлежит $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$. Тогда:

- а) $(f'(\rho) - kf(\rho)\rho^{-1})Y_p^{(k+1)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$ при всех $1 \leq p \leq a_{k+1}$;
- б) если $k \geq 1$, то $((n+k-2)f(\rho)\rho^{-1} + f'(\rho))Y_p^{(k-1)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$ при всех $1 \leq p \leq a_{k-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(f(\rho)W(\sigma)) = \rho^{-1}f(\rho)U(\sigma) + (f'(\rho) - kf(\rho)\rho^{-1})\sigma_1 W(\sigma),$$

где $U(\sigma) = 0$, если $k = 0$, и $U(\sigma) = \rho^{1-k} \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho^k W(\sigma)) \in \mathcal{H}_{k-1}$ при $k \geq 1$. Учитывая, что $\sigma_1 W(\sigma) \in \mathcal{H}_1$ при $k = 0$ и $\sigma_1 W(\sigma) = U_0(\sigma) + U_1(\sigma)$ при $k \geq 1$, где $U_0 \in \mathcal{H}_{k-1}$, $U_1 \in \mathcal{H}_{k+1}$ (см. [15; гл. 6, лемма 3.4]), из лемм 1, 2 получаем утверждение а).

Пусть $U_2(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k$, $U_\nu(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1}\sigma_\nu$, где $k \geq 1$, $3 \leq \nu \leq n$. Так как $U_\nu \in \mathcal{H}_k$, из условия и леммы 2 следует, что $F_\nu \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$, где $F_\nu(x) = f(\rho)U_\nu(\sigma)$, $\nu = 2, \dots, n$. Поскольку

$$(\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1}(f'(\rho) + (n+k-2)f(\rho)\rho^{-1}) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - i \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \sum_{\nu=3}^n \frac{\partial F_\nu}{\partial x_\nu}$$

и $(\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1} \in \mathcal{H}_{k-1}$, из последнего равенства и лемм 1, 2 имеем утверждение б) леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и при некотором $l \in \{1, \dots, a_k\}$ функция $f(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$ принадлежит $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$. Тогда:

- а) если $k \geq 1$, то

$$\left(f'(\rho) \pm k \frac{f(\rho)}{\rho}\right) Y_l^{(k \mp 1)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U});$$

- б) если $k = 0$, то $f'(\rho)Y_p^{(1)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$ при всех $1 \leq p \leq a_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) следует из лемм 1, 2 и легко проверяемого тождества

$$2\frac{\partial}{\partial x_1}(f(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)) = \left(f'(\rho) - \frac{k}{\rho}f(\rho)\right)Y_l^{(k+1)}(\sigma) + \left(f'(\rho) + \frac{k}{\rho}f(\rho)\right)Y_l^{(k-1)}(\sigma)$$

(см. §2). Пусть теперь $k = 0$. В этом случае $a_k = 1, l = 1, Y_l^{(k)} = 1$ и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \pm i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)f(\rho) = 2f'(\rho)(\sigma_1 + i\sigma_2).$$

Отсюда и из леммы 1 получаем утверждение б).

ЛЕММА 5. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\text{спес } \varphi$ содержит пару (k, l) для некоторого $l \in \{1, \dots, a_k\}$. Предположим, что $S^{n-1} \subset \mathcal{U}$ и $f(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ при всех $1 \leq p \leq a_k$. Тогда $f(1) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что $f(\rho)W(\sigma) \in \mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ при любом $W \in \mathcal{H}_k$. Полагая $W = \overline{Y_l^{(k)}}$, имеем (см. §1)

$$f(1) = \varphi_{kl}^{-1} \langle \varphi^*, \overline{f(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)} \rangle = 0,$$

что и требовалось.

ЛЕММА 6. Пусть $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ и $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда:

- а) если при некотором $a \neq 0$ функция $c_1\alpha_n(a\rho) + c_2\beta_n(a\rho)$ принадлежит $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$, то функция $(c_1\alpha_{n+2m}(a\rho) + c_2\beta_{n+2m}(a\rho))Y_p^{(m)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$ при всех $m \geq 1, 1 \leq p \leq a_m$;
- б) если функция $c_1 + c_2\gamma_n(\rho)$ принадлежит $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$, то функция

$$c_2\rho^{2-n-m}Y_p^{(m)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$$

при всех $m \geq 1, 1 \leq p \leq a_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \geq 3$. Последовательно применяя утверждение а) леммы 3 для $k = 0, \dots, m-1$ к функциям $(c_1\alpha_{n+2k}(a\rho) + c_2\beta_{n+2k}(a\rho))Y_p^{(k)}(\sigma)$ и используя рекуррентные соотношения для цилиндрических функций (см. [17; гл. 1, §6]), получаем утверждение а) леммы 6. В двумерном случае подобный результат следует из леммы 4. Утверждение б) доказывается аналогично.

§4. Преобразование Помпейю на множествах специального вида

В этом параграфе изучается множество $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$ для некоторых конкретных $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Сначала рассмотрим случай, когда $\mathcal{U}$ — шар.

ЛЕММА 7. Пусть $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{U} = B_R$. Тогда либо $\mathcal{U} \in I_\psi$, либо $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$ содержит ненулевую радиальную функцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U} \notin I_\psi$, тогда существует ненулевая функция $f \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$. По лемме 2 каждое слагаемое ряда (2) принадлежит $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$. Пусть k – наименьшее из целых неотрицательных чисел, для которых существует $l \in \{1, \dots, a_k\}$ такое, что множество $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$ содержит ненулевую функцию вида $g(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$ (такое k существует, поскольку $f \neq 0$ в B_R). Предположим, что $k \geq 1$. Тогда из лемм 3, 4 следует, что функция

$$(g'(\rho) + (n + k - 2)g(\rho)\rho^{-1})Y_l^{(k-1)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U}).$$

Отсюда и из определения k имеем $g'(\rho)\rho = (2 - k - n)g(\rho)$. Так как $g(\rho)$ непрерывна в B_R , из последнего равенства получаем $g(\rho) = 0$, что противоречит выбору функции $g(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$. Таким образом, $k = 0$ и лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. *Предположим, что $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$, спрес φ содержит пару $(0, 1)$ и спрес $\varphi \neq \{(0, 1)\}$. Пусть $\mathcal{U} = B_R$ и f – ненулевая радиальная функция, принадлежащая $\mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$. Тогда при любом $m \in \mathbb{N}$ функции $\Delta^\nu f$, $\nu = 0, 1, \dots, m$, линейно независимы в $\mathcal{U}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда для некоторого $m \in \mathbb{N}$ найдутся константы $c_0, c_1, \dots, c_m$, не все равные нулю и такие, что $\sum_{\nu=0}^m c_\nu \Delta^\nu f = 0$ в B_R . далее будем считать, что m – наименьшее из натуральных чисел с этим свойством. Обозначим $p(z) = \sum_{\nu=0}^m c_\nu z^\nu$, $q(z) = p(z)/(z - a)$, где a – один из корней полинома p . Пусть $F = q(\Delta)f$, тогда F радиальна и по лемме 1 $F \in \mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$. Из определения $q(z)$ следует, что $\Delta F = aF$ в B_R . Если $a = 0$, то $\Delta F = 0$, откуда F – константа в B_R . Поскольку спрес φ содержит пару $(0, 1)$, из леммы 5 получаем, что $F = 0$ в B_R , что противоречит выбору m . Таким образом, $a \neq 0$. В этом случае $F = c\alpha_n(\sqrt{a}\rho)$, где $\sqrt{a}$ – любой из квадратных корней числа a , $c \in \mathbb{C}$ и $c \neq 0$. По условию существует пара $(k, l) \in \text{спрес } \varphi$ и $(k, l) \neq (0, 1)$. Из утверждения а) леммы 6 имеем:

$$\alpha_{n+2k}(\sqrt{a}\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\psi(\mathcal{U})$$

при всех $1 \leq p \leq a_k$. Отсюда и из леммы 5 получаем, что $\alpha_{n+2k}(\sqrt{a}) = \alpha_n(\sqrt{a}) = 0$. Поскольку функции Бесселя J_ν с индексами $\nu = n/2 - 1, n/2 - 1 + k$ не имеют общих ненулевых корней (см., например, [17; гл. 2, § 23]), полученное противоречие доказывает лемму 8.

Установим теперь аналогичные результаты в случае, когда $\mathcal{U}$ – шаровой слой в $\mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 9. *Для любого $\alpha \neq 0$ существует положительное число $\zeta = \zeta(\alpha)$ такое, что*

$$J_{\frac{n}{2}+m}(\alpha) N_{\frac{n}{2}-1}(\alpha) \neq N_{\frac{n}{2}+m}(\alpha) J_{\frac{n}{2}-1}(\alpha)$$

при любом целом $m > \zeta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$h_m(\alpha) = J_{\frac{n}{2}+m-1}(\alpha) N_{\frac{n}{2}-1}(\alpha) - N_{\frac{n}{2}+m-1}(\alpha) J_{\frac{n}{2}-1}(\alpha).$$

Имеем (см. [17; § 9]):

$$\begin{aligned} h_0(\alpha) &= 0, & h_1(\alpha) &= -\frac{2}{\alpha\pi}, \\ h_{\nu+2}(\alpha) &= \frac{2\nu+n}{\alpha}h_{\nu+1}(\alpha) + h_\nu(\alpha), & \nu &\in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \tag{7}$$

Если $h_m(\alpha) \neq 0$ при всех $m > |\alpha| - n/2$, то утверждение леммы выполнено при $\zeta(\alpha) = |\alpha|$. Предположим, что $h_k(\alpha) = 0$ при некотором $k > |\alpha| - n/2$. Из (7) следует неравенство

$$|h_{k+p+1}(\alpha)| \geq 2|h_{k+p}(\alpha)| - |h_{k+p-1}(\alpha)|$$

при любом $p \in \mathbb{N}$. Отсюда индукцией по $p = 1, 2, \dots$ получаем, что $|h_{k+p+1}(\alpha)| \geq (1 + p^{-1})|h_{k+p}(\alpha)|$. Заметим, что $h_{k+1}(\alpha) \neq 0$ (в противном случае из (7) следовало бы $h_m(\alpha) = 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$, но $h_1(\alpha) \neq 0$). Поэтому $|h_{k+p}(\alpha)| > 0$ при всех $p \in \mathbb{N}$ и утверждение леммы 9 выполнено при $\zeta(\alpha) = k + 1$.

ЛЕММА 10. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ и $\text{спес } \varphi$ – бесконечное множество, содержащее пару $(0, 1)$. Предположим, что $\mathcal{U} = K_\delta$ и $\mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ содержит ненулевую радиальную функцию f . Тогда при любом $m \in \mathbb{N}$ функции $\Delta^\nu f$, $\nu = 0, 1, \dots, m$, линейно независимы в $\mathcal{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда (см. доказательство леммы 8) существует ненулевая радиальная функция $F \in \mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ такая, что $\Delta F = aF$ в $\mathcal{U}$ при некотором $a \in \mathbb{C}$. Если $a = 0$, то $\Delta F = 0$ и $F = c_1 + c_2\gamma_n(\rho)$ для некоторых $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. По лемме 6 функции $c_2\rho^{1-n/2-k}Y_l^{(k)}(\sigma)$ принадлежат $\mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ при всех $k \geq 1$, $1 \leq l \leq a_k$. Поскольку $\text{спес } \varphi$ – бесконечное множество, из леммы 5 получаем $c_2 = 0$, откуда $F = c_1$. Так как $\text{спес } \varphi$ содержит пару $(0, 1)$, из леммы 5 следует $c_1 = 0$, что противоречит выбору F . Таким образом, $a \neq 0$. В этом случае $F = c_1\alpha_n(\sqrt{a}\rho) + c_2\beta_n(\sqrt{a}\rho)$, где $\sqrt{a}$ – любой из квадратных корней числа a , $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Из условия и утверждения а) леммы 6 получаем (см. доказательство леммы 8), что $c_1\alpha_n(\sqrt{a}) + c_2\beta_n(\sqrt{a}) = c_1\alpha_{n+2k}(\sqrt{a}) + c_2\beta_{n+2k}(\sqrt{a}) = 0$ для бесконечного множества индексов k . Отсюда и из леммы 9 следует, что $c_1 = c_2 = 0$ и $F = 0$ в $\mathcal{U}$. Полученное противоречие доказывает лемму 10.

ЛЕММА 11. Пусть $n \geq 3$, $\mathcal{U} = K_\delta$, $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ и $\text{спес } \varphi$ – бесконечное множество. Тогда либо $\mathcal{U} \in I_\varphi$, либо $\mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ содержит ненулевую радиальную функцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{U} \notin I_\varphi$. Пусть k – наименьшее из целых неотрицательных чисел, для которых существует $l \in \{1, \dots, a_k\}$ такое, что $\mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ содержит ненулевую функцию вида $f(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$ (существование такого k следует из леммы 2). Предположим, что $k \geq 1$. Из определения k следует (см. доказательство леммы 7), что $f'(\rho)\rho = (2 - n - k)f(\rho)$, откуда

$$f(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) = c\rho^{1-n/2-k}Y_l^{(k)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U}).$$

Из леммы 2 получаем, что $f(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ при всех $1 \leq p \leq a_k$. Тогда (см. доказательство леммы 6) функции $c\rho^{1-n/2-m}Y_l^{(m)}(\sigma)$ принадлежат $\mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ при всех $m \geq k$, $1 \leq l \leq a_m$. Поскольку $\text{спес } \varphi$ – бесконечное множество, из леммы 5 получаем $c = 0$, что противоречит выбору функции $f(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$. Итак, $k = 0$ и лемма 11 доказана.

В двумерном случае аналогично доказывается

ЛЕММА 12. Пусть $n = 2$, $\mathcal{U} = K_\delta$, $\varphi \in \mathcal{D}'(S^1)$ и $\text{спес } \varphi$ содержит бесконечно много пар вида $(k, 1)$ и $(m, 2)$. Тогда либо $\mathcal{U} \in I_\varphi$, либо $\mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ содержит ненулевую радиальную функцию.

§ 5. Ряды Фурье–Якоби для некоторых классов функций

Из результатов § 4 следует, что на множествах со сферической симметрией ядро преобразования Помпейю при некоторых условиях содержит достаточно много линейно независимых радиальных функций. В этом параграфе изучаются некоторые свойства таких функций, связанные с разложением по системе ультрасферических многочленов.

ЛЕММА 13. Пусть V – сферическая гармоника степени k и

$$\Phi(\xi, \eta) = \int_{\text{SO}(n)} V(\tau\xi) \overline{V(\tau\eta)} d\tau, \quad \xi, \eta \in S^{n-1}. \quad (8)$$

Тогда:

- а) если $n \geq 3$, то $\Phi(\xi, \eta) = cP_k^{n/2-1}(\xi\eta)$, где c – ненулевая постоянная, не зависящая от ξ, η ;
- б) если $n = 2$ и $V(\sigma) = \text{Re}(\sigma_1 + i\sigma_2)^k$, то $\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}P_k^0(\xi\eta)$ при $k \geq 1$ и $\Phi(\xi, \eta) = 1$ при $k = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \geq 3$. Из (8) имеем $\Phi(\xi, \eta) = \Phi(\tau\xi, \tau\eta)$ для любого $\tau \in \text{SO}(n)$ и $\Phi(\xi, \xi) > 0$. Отсюда и из (1) следует, что при фиксированном $\eta \in S^{n-1}$ функция $\Phi(\xi, \eta)$ есть сферическая гармоника степени k . Таким образом, при некотором $\alpha \in \mathbb{C}$ функция $\alpha\Phi(\xi, \eta)$ является зональной гармоникой с полюсом η по переменной ξ (см. [15; гл. 4, следствие 2.13]). Отсюда $\Phi(\xi, \eta) = cP_k^{n/2-1}(\xi\eta)$ (см. [15; гл. 4, теорема 2.14]) и утверждение а) доказано.

Утверждение б) можно проверить прямым вычислением интеграла (8), используя явный вид меры Хаара на $\text{SO}(2)$ (см. [16; гл. 2, § 2, формула (1)]).

ЛЕММА 14. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$ фиксировано, $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$, $f(\rho) \in \mathcal{N}_\varphi(K_\delta)$. Тогда если спес φ содержит пару (k, l) при некотором $l \in \{1, \dots, a_k\}$, то

$$\int_{S^{n-1}} f(|\zeta + r\sigma|) P_k^{n/2-1}(\zeta\sigma) d\omega(\sigma) = 0 \quad (9)$$

при любом $r \in (0, \delta)$ и всех $\zeta \in S^{n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует, что

$$\int_{S^{n-1}} f(|\alpha + r\sigma|) \overline{W(\alpha)} d\omega(\alpha) = 0, \quad (10)$$

где $W(\alpha) = Y_l^{(k)}(\alpha)$, $\sigma \in S^{n-1}$, $r \in (0, \delta)$. Отсюда (см. [15; гл. 1, § 4, п. 14])

$$\int_{\text{SO}(n)} f(|r\sigma + \tau\zeta|) \overline{W(\tau\zeta)} d\tau = 0$$

при любом $\zeta \in S^{n-1}$. Умножая это равенство на $W(\sigma)$ и интегрируя на S^{n-1} , после перемены порядка интегрирования будем иметь

$$\int_{\text{SO}(n)} \int_{S^{n-1}} f(|r\sigma + \tau\zeta|) W(\sigma) d\omega(\sigma) \overline{W(\tau\zeta)} d\tau = 0.$$

С помощью замены переменной внутренний интеграл приводится к виду

$$\int_{S^{n-1}} f(|r\sigma + \zeta|) W(\tau\sigma) d\omega(\sigma).$$

Снова меняя порядок интегрирования и используя утверждение а) леммы 13, получаем равенство (9) при $n \geq 3$. Такие же рассуждения позволяют доказать (9) при $n = 2$ и $k = 0$ (в этом случае нужно положить $W = 1$ и использовать второе утверждение леммы 13). Пусть теперь $n = 2$ и $k \geq 1$. Из радиальности f и выбора базиса в $\mathcal{H}_k$ (см. §2) следует, что если равенство (10) выполнено при $W = Y_1^{(k)}$, то оно выполнено и при $W = Y_2^{(k)}$, и наоборот. Поэтому из условия леммы 14 следует, что (10) имеет место при всех $W \in \mathcal{H}_k$. Полагая $W = \operatorname{Re}(\sigma_1 + i\sigma_2)^k$ и повторяя приведенные выше рассуждения, из утверждения б) леммы 13 получаем требуемое равенство леммы 14.

Условие (9) при $\zeta = (1, 0, \dots, 0)$ означает, что коэффициент с номером k соответствующего разложения Фурье–Якоби (см. [18; гл. 7, §4]) функции $f(\sqrt{1+r^2+2r\sigma_1})$ равен нулю. Далее мы изучим некоторые свойства таких разложений. При этом будет использоваться хорошо известное утверждение о том, что для функций класса $C^\infty[-1, 1]$ ряды Фурье–Якоби сходятся равномерно на $[-1, 1]$ (см., например, [18; гл. 7, теорема 7.6]).

ЛЕММА 15. Пусть $n \geq 3$, $0 < \varepsilon < 1$, $f(\rho) \in C^\infty(\overline{K}_\varepsilon)$ и

$$f(\sqrt{1+r^2+2rt}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r) P_k^{n/2-1}(t) \quad (11)$$

при всех $t \in [-1, 1]$, $r \in [0, \varepsilon]$. Тогда если $f_0(r) = 0$ на $[0, \varepsilon]$, то при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} r f_k(r) &= (n+2k-4)^{-1} (r f'_{k-1}(r) - (k-1) f_{k-1}(r)) \\ &\quad - (n+2k)^{-1} (r f'_{k+1}(r) + (n+k-1) f_{k+1}(r)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \in C^\infty$, ряд (11) сходится равномерно на $[-1, 1]$ при любом $r \in [0, \varepsilon]$ (см. [18; гл. 7, теорема 7.6]). Пусть $u(r, t) = f(\sqrt{1+r^2+2rt})$, тогда

$$f_k(r) = c_{k,n} \int_{-1}^1 u(r, t) P_k^{n/2-1}(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt, \quad (12)$$

где $c_{k,n} = \frac{2^{2-n}(2k+n-2)\Gamma(k+n-2)\Gamma(k+1)}{\Gamma^2(k+\frac{n-1}{2})}$ (см. [18; гл. 7, §4, формула (2)]).

Из определения u имеем $r \frac{\partial u}{\partial r} = (r+t) \frac{\partial u}{\partial t}$. Учитывая, что

$$\frac{d}{dt} P_k^{n/2-1}(t) = (n-2) P_{k-1}^{n/2}(t)$$

(см. [15; гл. 4, §2]), из условия леммы и (12) получаем (см. [19; гл. 7, §7.1])

$$(t+r) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} (n-2)(t+r) f_k(r) P_{k-1}^{n/2}(t), \quad (13)$$

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} r f'_k(r) P_k^{n/2-1}(t), \quad (14)$$

при этом ряды (13), (14) сходятся равномерно на $[-1, 1]$ при любом $r \in [0, \varepsilon]$ (см. [18; гл. 7, теорема 7.6]). Используя формулы (5), (6) при $\lambda = n/2 - 1$, представим разность рядов (13) и (14) в виде ряда Фурье–Якоби по многочленам $P_k^{n/2}$. Из равенства нулю коэффициентов этого ряда следует утверждение леммы 15.

При $n = 2$ аналогом леммы 15 является

ЛЕММА 16. Пусть $n = 2$, $0 < \varepsilon < 1$, $f(\rho) \in C^\infty(\overline{K}_\varepsilon)$ и

$$f(\sqrt{1 + 2r \cos \theta + r^2}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r) \cos k\theta \quad (15)$$

при всех $r \in [0, \varepsilon]$, $\theta \in [0, \pi]$. Тогда если $f_0(r) = 0$ на $[0, \varepsilon]$, то при $k \geq 1$

$$2kr f_k(r) = r f'_{k-1}(r) - r f'_{k+1}(r) - (k-1)f_{k-1}(r) - (k+1)f_{k+1}(r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $v(r, \theta) = f(\sqrt{1 + 2r \cos \theta + r^2})$, тогда

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(r + \cos \theta) + \frac{\partial v}{\partial r} r \sin \theta = 0.$$

Используя (15), разложим функцию в левой части последнего равенства в ряд Фурье по системе $\{\sin k\theta\}$ на $[0, \pi]$. Из равенства нулю коэффициентов этого ряда следует утверждение леммы 16.

ЛЕММА 17. Пусть $n \geq 2$, $0 < \varepsilon < 1$, $f(\rho) \in C^\infty(\overline{K}_\varepsilon)$ и при некотором $q \in \mathbb{N}$ для коэффициентов ряда (11) выполнены условия:

- а) $f_0(r) = f_q(r) = 0$ при всех $r \in [0, \varepsilon]$;
- б) $f_1^{(\nu)}(0) = f_1^{(\nu)}(\varepsilon) = 0$ при всех $\nu \leq 2n + 2q$.

Тогда $f = 0$ на $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (11) $r = 0$, имеем

$$f_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Из условия б) следует (см. [20; гл. 9, §6]), что функцию f_1 можно разложить на $(0, \varepsilon]$ в равномерно сходящийся ряд:

$$f_1(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m r^{1-n/2} J_{\frac{n}{2}}\left(\lambda_m \frac{r}{\varepsilon}\right), \quad (17)$$

где $\{\lambda_m\}$ — возрастающая последовательность положительных корней функции $J_{\frac{n}{2}}$ и $c_m = O(\lambda_m^{-2n-2q})$ при $m \rightarrow \infty$. Используя соотношения между бесселевыми функциями с соседними индексами (см. [20; гл. 8, формула (7.2)]), из (16), (17) и лемм 15, 16 индукцией по $p = 1, \dots, q$ получаем, что

$$f_p(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m b_p \left(\frac{1}{\lambda_m}\right) J_{\frac{n}{2}+p-1}\left(\lambda_m \frac{r}{\varepsilon}\right) r^{1-n/2}, \quad (18)$$

где $p \in \{1, \dots, q\}$, b_p – многочлен степени $p - 1$ с рациональными коэффициентами, зависящими только от n и p (возможность почленного дифференцирования рядов (18) обеспечивается условием быстрого убывания коэффициентов c_m , см. [20; гл. 9, § 7]). При $p = q$ из (18) и условия а) следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m b_q \left(\frac{1}{\lambda_m} \right) J_{\frac{n}{2}+q-1} \left(\lambda_m \frac{r}{\varepsilon} \right) = 0. \quad (19)$$

Применяя к функции в левой части равенства (19) оператор дифференцирования $\left(r^{-1} \frac{d}{dr} \right)^{q-1} r^{n/2+q-1}$, понижающий индекс бесселевой функции (см. [20; гл. 8, формула (7.1)]), из (19) имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m b_q \left(\frac{1}{\lambda_m} \right) \lambda_m^{q-1+n/2} J_{\frac{n}{2}} \left(\lambda_m \frac{r}{\varepsilon} \right) = 0,$$

откуда $c_m b_q (1/\lambda_m) = 0$, см. [20; гл. 9, § 1]. Поскольку $1/\lambda_m$ – трансцендентное число (см. [21; гл. 6, § 2]), из последнего равенства следует, что $c_m = 0$ и $f_1 = 0$ на $[0, \varepsilon]$. Учитывая, что $f_0 = 0$ на $[0, \varepsilon]$, из равенства (16) и лемм 15, 16 получаем, что $f_m = 0$ на $[0, \varepsilon]$ при всех $m \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда и из (11) следует утверждение леммы 17.

§ 6. Множества инъективности преобразования Помпейю

В этом параграфе изучаются свойства множеств инъективности преобразования $\mathcal{P}_\varphi$ для некоторых классов распределений $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$.

ЛЕММА 18. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$. Тогда:

- а) если $\text{supp } \varphi = S^{n-1}$, то $I_\varphi \subset \mathfrak{M}$;
- б) если $\text{sres } \varphi$ не содержит пару $(0, 1)$, то $I_\varphi = \emptyset$;
- в) если $\text{sres } \varphi = \{(0, 1)\}$, то $I_\varphi = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U} \in I_\varphi$. Предположим, что существует открытое множество $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, не имеющее общих точек ни с одной единичной сферой, содержащейся в $\mathcal{U}$. Поскольку $\text{supp } \varphi = S^{n-1}$, откуда имеем $\text{supp } \mu\varphi \subset \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$ для любого $\mu \in \Lambda(\mathcal{U}, \varphi)$. Это означает, что всякая ненулевая функция $f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, равная нулю на $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$, принадлежит $\mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$, т.е. $\mathcal{U} \notin I_\varphi$. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}$, откуда следует утверждение а).

Для доказательства б) достаточно заметить, что если $\text{sres } \varphi$ не содержит пару $(0, 1)$, то функция $f = 1$ принадлежит $\mathcal{N}_\varphi(\mathbb{R}^n)$.

Пусть теперь $\text{sres } \varphi = \{(0, 1)\}$. В этом случае распределение φ^* (см. § 1) действует на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\langle \varphi^*, f \rangle = c \int_{S^{n-1}} f(\sigma) d\omega(\sigma), \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),$$

где постоянная c не зависит от f . Поскольку существует ненулевая функция f из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\int_{S^{n-1}} f(\mu\sigma) d\omega(\sigma) = 0$ для любого $\mu \in \text{ISO}(n)$ (см., например, [11; § 3]), откуда имеем утверждение в) леммы 18.

ЛЕММА 19. Пусть $0 < \delta \leq 1$, $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ и $\text{спес } \varphi$ содержит пару $(0, 1)$. Тогда:

- а) если $n \geq 3$ и $\text{спес } \varphi$ – бесконечное множество, то $K_\delta \in I_\varphi$;
- б) если $n = 2$ и φ удовлетворяет условию леммы 12, то $K_\delta \in I_\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $K_\delta \notin I_\varphi$. Пусть $(q, l) \in \text{спес } \varphi$ и $q \neq 0$. Из условия и лемм 10–12 следует, что при любом $n \geq 2$ множество $\mathcal{N}_\varphi(K_\delta)$ содержит $4(n+q) + 3$ линейно независимых функций $g_m(\rho) = \Delta^m(g(\rho))$, $m = 0, 1, \dots, 4(n+q) + 2$. По лемме 14 эти функции удовлетворяют условию (9) при $\zeta = (1, 0, \dots, 0)$ и $k = 0, q$. Это означает (см. (12)), что для любого положительного $\varepsilon < \delta$ коэффициенты разложения (11) функций $g_m(\sqrt{1+r^2+2rt})$ с номерами $k = 0, q$ равны нулю на $[0, \varepsilon]$. Далее, при фиксированном $\varepsilon \in (0, \delta)$ из формулы (12) для $k = 1$ получаем, что существует линейная комбинация

$$f(\rho) = \sum_{m=0}^{4(n+q)+2} c_{m,\varepsilon} g_m(\rho), \quad \sum_{m=0}^{4(n+q)+2} |c_{m,\varepsilon}| \neq 0,$$

удовлетворяющая условиям леммы 17. Из определения g_m и леммы 17 имеем

$$\sum_{m=0}^{4(n+q)+2} c_{m,\varepsilon} \Delta^m(g(\rho)) = 0, \quad 1 - \varepsilon < \rho < 1 + \varepsilon. \quad (20)$$

Отсюда следует (см. [22; часть 3, гл. 7, теорема 7.5.1]), что функция $g(\rho)$ вещественно-аналитична в K_ε . В силу произвольности $\varepsilon < \delta$ получаем, что $g(\rho)$ вещественно-аналитична в K_δ . Тогда по теореме единственности равенство (20) выполнено при $1 - \delta < \rho < 1 + \delta$, что противоречит линейной независимости функций g_m . Итак, $K_\delta \in I_\varphi$ и лемма 19 доказана.

ЛЕММА 20. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$, $\text{спес } \varphi$ содержит пару $(0, 1)$ и $\text{спес } \varphi \neq \{(0, 1)\}$. Тогда $B_R \in I_\varphi$ при $R \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что $(q, l) \in \text{спес } \varphi$ при некотором $l \in \{1, \dots, a_q\}$. Предположим, что $B_2 \notin I_\varphi$. Тогда из лемм 7, 8 получаем, что множество $\mathcal{N}_\varphi(B_2)$ содержит $4(n+q) + 3$ линейно независимых функций

$$g_m(\rho) = \Delta^m(g(\rho)), \quad m = 0, 1, \dots, 4(n+q) + 2.$$

Отсюда следует (см. доказательство леммы 19), что функция $g(\rho)$ вещественно-аналитична в K_1 и существуют константы c_m , $m = 0, 1, \dots, 4(n+q) + 2$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{m=0}^{4(n+q)+2} c_m \Delta^m(g(\rho)) = 0, \quad 0 < \rho < 2.$$

Поскольку $g(\rho) \in \mathcal{E}(B_2)$, последнее равенство выполнено и при $\rho = 0$, что противоречит линейной независимости функций g_m . Таким образом, $B_2 \in I_\varphi$, откуда $B_R \in I_\varphi$ при $R \geq 2$.

ЛЕММА 21. Пусть $n = 2$, $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ и $\text{supp } \varphi \neq S^{n-1}$. Тогда φ удовлетворяет условию леммы 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi \in \mathcal{E}(S^{n-1})$, утверждение леммы есть очевидное следствие принципа симметрии и теоремы единственности для аналитических функций. Общий случай сводится к рассмотренному стандартным приемом сглаживания (см., например, [23; часть 1, гл. 1, п. 2.3]).

ЛЕММА 22. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ и $\text{supp } \varphi \neq S^{n-1}$. Тогда $I_\varphi \neq \mathfrak{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{sres } \varphi$ не содержит пару $(0, 1)$, лемма следует из утверждения б) леммы 18. Поэтому далее предполагается, что $(0, 1) \in \text{sres } \varphi$. Поскольку $\text{supp } \varphi$ — замкнутое подмножество S^{n-1} и $\text{supp } \varphi \neq S^{n-1}$, существует $\tau \in \text{SO}(n)$ такое, что $\text{supp } \tau\varphi$ содержится в полосе $\{x \in \mathbb{R}^n : h_1 \leq x_n \leq h_2\}$, где $h_1 \geq -1, h_2 < 1$.

Далее будем считать, что $L_\nu \cap \text{supp } \tau\varphi \neq \emptyset$, где $L_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = h_\nu\}$, $\nu = 1, 2$. Пусть $h = \frac{1}{4}(h_2 - h_1 + 6)$. Обозначим $G = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_{n-1} = 0, x_n \geq h\}$. Для любых $\xi, \eta > 0$ положим $\Omega(\xi, \eta) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < \xi, 0 < x_n < \eta\}$. Докажем теперь, что множество $\mathcal{U} = G \setminus L$ принадлежит I_φ . Пусть $F \in \mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$. Из условия следует, что $\text{sres } \varphi$ — бесконечное множество. Кроме того, при $n = 2$ из леммы 21 получаем, что φ удовлетворяет условию леммы 12. Тогда $K_\delta \in I_\varphi$ по лемме 19, поэтому $F = 0$ на каждой единичной сфере, содержащейся в $\mathcal{U}$. Следовательно, $F = 0$ на множестве $\mathcal{U} \setminus \Omega(\xi, \eta)$ при $\xi = h(2 - h), \eta = 2 - h$. Продолжим F на $\mathbb{R}^n$, полагая $F = 0$ на $L \cup (\mathbb{R}^n \setminus G)$. Пусть $g(x) = F(-x)$. Рассмотрим распределение $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, действующее на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\langle \psi, f \rangle = \langle \chi * g, f(-x) \rangle, \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),$$

где $\chi = \tau\varphi^* \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (см. §1), $\chi * g$ — свертка распределений χ и g . Поскольку $F \in \mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$ и $F = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega(h(2 - h), 2 - h)$, из определения свертки получаем, что $\text{supp } \psi$ содержится в полупространстве $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n \leq -h_1\}$. По теореме о выпуклой оболочке носителя свертки (см. [24; часть 1, гл. 3, §2, п. 2.1]) это может быть лишь в случае, когда $F = 0$ в G . Таким образом, $\mathcal{U} \in I_\varphi$. Далее, при достаточно малых ξ, η множество $\Omega(\xi, \eta)$ не имеет общих точек ни с одной единичной сферой, содержащейся в $\mathcal{U}$. Это означает, что $\mathcal{U} \notin \mathfrak{M}$, откуда следует утверждение леммы 22.

ЛЕММА 23. Пусть $m, q \in \mathbb{N}$, $q > m + 1$, $Y \in \mathcal{H}_q$ и $f(x) = \rho^{2-n-q}Y(\sigma)$. Тогда для любого многочлена $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ степени не выше m

$$\int_{S^{n-1}} f(\mu\sigma)P(\sigma) d\omega(\sigma) = 0$$

при всех $\mu \in \text{ISO}(n)$ таких, что $\mu S^{n-1} \subset B_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $d(x) = \int_{S^{n-1}} \gamma_n(|x - \sigma|) d\omega(\sigma)$, тогда функция d радиальна и гармонична в B_1 . Отсюда следует, что $d(x) = d(0)$ при всех $x \in B_1$. Это означает, что функция $\gamma_n(|x|) - d(0)$ имеет нулевые интегралы по всем единичным сферам, содержащимся в B_2 . Из утверждения б) леммы 6 получаем, что

этим же свойством обладает функция f . Тогда f имеет нулевые интегралы по всем сферам в $\mathbb{R}^n$, охватывающим начало координат (поскольку $\lambda^{2-n-q} f(x) = f(\lambda x)$ при $\lambda > 0$). Так как $q > m + 1$, отсюда следует (см. [1; гл. 1, доказательство леммы 2.7]) утверждение леммы 23.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $n \geq 3$, $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ и $\text{спес } \varphi$ конечен. Тогда $I_\varphi \neq \mathfrak{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U} = K_\delta$, тогда $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}$ и $\mathcal{U} \notin I_\varphi$, поскольку при достаточно больших $q \in \mathbb{N}$ функция f из леммы 23 принадлежит $\mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$.

ЛЕММА 24. Пусть $n = 2$, $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ и $\text{спес } \varphi$ содержит не более чем конечное число пар вида (k, m) при некотором $m \in \{1, 2\}$. Тогда $I_\varphi \neq \mathfrak{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = 1$ и $(k, l) \in \text{спес } \varphi$. Простые вычисления показывают, что при достаточно большом $q \in \mathbb{N}$ функция $\rho^{-q} Y_2^{(q)}(\sigma)$ принадлежит $\mathcal{N}_\varphi(K_\delta)$, где $\psi = Y_l^{(k)}$. Поскольку ряд Фурье распределения $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ сходится к φ в $\mathcal{D}'(S^{n-1})$, отсюда имеем $\rho^{-q} Y_2^{(q)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\varphi(K_\delta)$. Таким образом, $K_\delta \notin I_\varphi$, откуда $\mathfrak{M} \neq I_\varphi$. Если $m = 2$, аналогично получаем, что $\rho^{-q} Y_1^{(q)}(\sigma) \in \mathcal{N}_\varphi(K_\delta)$ при достаточно большом $q \in \mathbb{N}$ и $\mathfrak{M} \neq I_\varphi$.

§ 7. Доказательство основного результата

Перейдем к доказательству теоремы 1.

1. Рассмотрим распределение $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$, у которого $\text{supp } \varphi = S^{n-1}$ и $\text{спес } \varphi$ – бесконечное множество, содержащее пару $(0, 1)$. Пусть $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}$ и $f \in \mathcal{N}_\varphi(\mathcal{U})$. По лемме 19 $K_\delta \in I_\varphi$, поэтому $f = 0$ на каждой единичной сфере, содержащейся в $\mathcal{U}$. Тогда из определения $\mathfrak{M}$ получаем, что $f = 0$ в $\mathcal{U}$. Таким образом, $\mathcal{U} \in I_\varphi$ и $\mathfrak{M} \subset I_\varphi$. Отсюда и из утверждения а) леммы 18 имеем $I_\varphi = \mathfrak{M}$.

Обратное утверждение следует из леммы 22, следствия к лемме 23 и утверждения б) леммы 18.

2. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$. Из утверждений б), в) леммы 18 следует, что если $\text{спес } \varphi$ не содержит пару $(0, 1)$ или состоит только из пары $(0, 1)$, то $I_\varphi = \emptyset$.

Предположим теперь, что $\text{спес } \varphi$ содержит пару $(0, 1)$ и для некоторого $k \in \mathbb{N}$ существует $l \in \{1, \dots, a_k\}$ такое, что $(k, l) \in \text{спес } \varphi$. Тогда из леммы 20 получаем, что $B_R \in I_\varphi$ при $R \geq 2$. Следовательно, $I_\varphi \neq \emptyset$ и утверждение 2 доказано.

3. Поскольку у распределения $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ с конечным спектром $\text{supp } \varphi = S^{n-1}$, из утверждения а) леммы 18 и утверждения 1 теоремы получаем, что для такого φ $I_\varphi \subset \mathfrak{M}$, но $I_\varphi \neq \mathfrak{M}$. Аналогичный результат следует из утверждения 2 для распределений, спектр которых не содержит пару $(0, 1)$.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что $\text{спес } \varphi$ – бесконечное множество, содержащее пару $(0, 1)$. Тогда $\mathfrak{M} \subset I_\varphi$ (см. п. 1 доказательства). В этом случае вложение $I_\varphi \subset \mathfrak{M}$ имеет место только при $I_\varphi = \mathfrak{M}$, что противоречит условию.

4. Предположим, что спектр распределения $\varphi \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ содержит пару $(0, 1)$ и $\text{supp } \varphi \neq S^{n-1}$. Тогда $\text{спес } \varphi$ – бесконечное множество и $\mathfrak{M} \subset I_\varphi$ (см. п. 1 доказательства). Кроме того, из утверждения 1 теоремы следует, что $\mathfrak{M} \neq I_\varphi$.

Докажем обратное утверждение. Необходимость условия $(0, 1) \in \text{спес } \varphi$ следует из утверждения 2. Пусть теперь $\text{supp } \varphi = S^{n-1}$. В этом случае из утвержде-

ния а) леммы 18 следует, что $I_\varphi \subset \mathfrak{M}$, и условие $\mathfrak{M} \subset I_\varphi$ не выполняется, если $I_\varphi \neq \mathfrak{M}$.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

1. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
2. Беренштейн К. А., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–111.
3. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations, Proc. NATO Adv. Res. Workshop, Hanstholm/Den. 1991, NATO ASI Ser., Ser. C. V. 365, 1992. P. 185–194.
4. Rawat R., Sitaram A. The injectivity of the Pompeiu transform and L^p -analogues of the Wiener–Tauberian theorem // Israel J. Math. 1995. V. 91. P. 307–316.
5. Harchaoui M. Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (cas de deux boules) // J. Anal. Math. 1995. V. 67. P. 1–37.
6. Quinto E. T. Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds // Israel J. Math. 1993. V. 84. P. 353–363.
7. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 7. С. 71–78.
8. Волчков В. В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 671–680.
9. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 15–34.
10. Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 182–194.
11. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 13–30.
12. Волчков В. В. Теоремы о среднем для одного класса полиномов // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 4. С. 737–745.
13. Berenstein C. A., Gay R. Le problème de Pompeiu locale // J. Anal. Math. 1989. V. 52. P. 133–166.
14. Berenstein C. A., Gay R., Yger A. Inversion of the local Pompeiu transform // J. Anal. Math. 1990. V. 54. P. 259–287.
15. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
16. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
17. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.
18. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976.
19. Хуа Ло-Кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959.
20. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
21. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
22. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
23. Хавин В. П. Методы и структура коммутативного гармонического анализа // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1986. С. 6–134.
24. Паламодов В. П. Обобщенные функции и гармонический анализ // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 72. М.: ВИНТИ, 1991. С. 5–134.

Донецкий государственный университет

Поступила в редакцию
05.05.1998 и 23.08.1999