Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Артамонов, К теореме Лефшеца о совпадениях,
Матем. сб., 2009, том 200, номер 7, 3–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:06:04

УДК 515.142.22

Д. В. Артамонов

К теореме Лефшеца о совпадениях

Для двух отображений некомпактных, неориентируемых топологических многообразий одной размерности строится число Лефшеца, доказывается, что если оно отлично от нуля, то имеется точка совпадения этих отображений.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: точки совпадения, числа Лефшеца, отображения многообразий.

Пусть M, N – n -мерные многообразия, ориентируемые, без края, возможно некомпактные. Пусть f, g – непрерывные отображения $M \rightarrow N$, при этом f компактное, g собственное. В работе [1] в данной ситуации определено число Лефшеца совпадений отображений f, g и доказано, что неравенство этого числа нулю влечет наличие точки совпадения у отображений f и g .

В работе [2] рассмотрен случай, когда M, N – n -мерные ориентируемые многообразия с краями, вообще говоря, некомпактные. При этом вводится дополнительное предположение, что $f(\partial M) \subset \partial N$. В этом случае также определено число Лефшеца совпадений отображений f, g и доказано, что неравенство этого числа нулю влечет наличие точки совпадения у отображений f и g .

В работе [3] рассмотрен случай, когда многообразия M, N компактны, но, может быть, неориентируемы и имеют края. При этом налагается два дополнительных требования. Первое состоит в том, что отображение g ориентируемо, т.е. $g^* \mathcal{H}_n(N) = \mathcal{H}_n(M)$. Здесь $\mathcal{H}_n(M)$ – ориентирующий пучок многообразия M (определяемый как продолжение на край ∂M ориентирующего пучка многообразия $\text{int } M$, образованного локальными гомологиями $H_n(M, M \setminus x; R)$ в точках $x \in \text{int } M$ с коэффициентами в R). Второе требование имеет два варианта: либо $f(\partial M) \subset \partial N$, либо $g(\partial M) \subset \partial N$. В каждой из этих двух ситуаций определено число Лефшеца совпадений отображений f, g и доказано, что неравенство этого числа нулю влечет наличие точки совпадения у отображений f и g .

В случае многообразий без края эти два способа определения числа Лефшеца совпадений эквивалентны. В случае же непустых краев, когда $f(\partial M) \subset \partial N$ и $g(\partial M) \subset \partial N$ одновременно, имеются два различных способа определения числа Лефшеца совпадений. В работе [3] доказывается, что их разность с точностью до знака совпадает с числом Лефшеца пары отображений $f|_{\partial M}, g|_{\partial M}: \partial M \rightarrow \partial N$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00463).

В настоящей работе рассмотрен общий случай, когда M, N не предполагаются ни ориентируемыми, ни компактными. При этом отображение f компактно, g собственнo и ориентируемо. Это минимальные условия, обеспечивающие возможность определения числа Лефшеца совпадений. Компактность f обеспечивает конечномерность образов гомологий или когомологий. Необходимость участия в определении числа Лефшеца двойственности Пуанкаре, которая сохраняет носители, объясняет обязательное требование для одного из отображений быть собственным. Кроме того, двойственность Пуанкаре заставляет ввести в оборот в виде ориентирующего пучка $\mathcal{H}_n$ локально постоянные коэффициенты, в связи с чем необходимо дополнительное требование ориентируемости соответствующего этим коэффициентам отображения. Так же, как в работах [2], [3], предполагается, что M, N – многообразия с краями. Как и в [3], будет налагаться одно из следующих дополнительных ограничений: либо $f(\partial M) \subset \partial N$, либо $g(\partial M) \subset \partial N$. В каждом из этих двух случаев будет определено число Лефшеца совпадений и будет доказано, что при неравенстве нулю данного числа отображения f и g имеют точки совпадения (теоремы 1, 2).

В случае, когда $f(\partial M) \subset \partial N$ и $g(\partial M) \subset \partial N$ одновременно, получаются два способа определения числа Лефшеца совпадений. В теореме 3 устанавливается, что разность между этими числами – число Лефшеца для отображений краев.

В настоящей работе везде, кроме особо отмечаемых случаев, используются сингулярные гомологии и когомологии.

§ 1. Определения. Формулировка результатов

Пусть R – поле. Символом R будем обозначать также постоянный пучок. Пусть $\mathcal{H}_n(M)$ – ориентирующий пучок многообразия M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *На произвольном n -мерном многообразии M имеются изоморфизмы двойственности Пуанкаре*

$$H_p(M; \mathcal{H}_n(M)) = H^{n-p}(M, \partial M; R), \quad H_p(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M)) = H^{n-p}(M; R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, согласно [4; гл. 5, § 9] имеется равенство

$$H^{n-p}(M, \partial M; R) = H^{n-p}(\text{int } M; R) = H_p^\varphi(\text{int } M; \mathcal{H}_n(M)),$$

где φ – семейство содержащихся в $\text{int } M$ замкнутых в M множеств. Далее, в системе включений $\text{int } M \subset M \subset \text{int } \bar{M} \subset \bar{M}$, где $\bar{M} = M \cup (\partial M \times [0, 1])$, включение $M \subset \bar{M}$ индуцирует изоморфизм H_p как собственная гомотопическая эквивалентность. Включение же $\text{int } M \subset \text{int } \bar{M}$ при переходе от H_p^φ и соответствующих H_p^φ к двойственным по Пуанкаре когомологиям $H^{n-p}(M, \partial M; R)$ и $H^{n-p}(\bar{M}, \partial \bar{M}; R)$ индуцирует по той же причине их изоморфизм. Поэтому включение $\text{int } M \subset M$ индуцирует изоморфизм

$$H_p^\varphi(\text{int } M; \mathcal{H}_n(M)) = H_p(M; \mathcal{H}_n(M)).$$

Также справедливы равенства

$$H_p(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M)) = H_p(\text{int } M; \mathcal{H}_n(M)) = H^{n-p}(\text{int } M; R) = H^{n-p}(M; R),$$

где последнее равенство имеет место, так как $\text{int } M \subset M$ – гомотопическая эквивалентность.

Определим числа Лефшеца совпадений отдельно в случаях, когда $g(\partial M) \subset \partial N$ и когда $f(\partial M) \subset \partial N$.

Пусть сначала $g(\partial M) \subset \partial N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под *отображением* θ_q пространства $H^q(N; R)$ в себя понимается следующая композиция:

$$\begin{aligned} H^q(N; R) &\rightarrow_{f^*} H^q(M; R) =_D H_{n-q}(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M)) \\ &\rightarrow_{g_*} H_{n-q}(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N)) =_D H^q(N; R). \end{aligned}$$

Здесь D – двойственность Пуанкаре. Заметим, что отображение g_* существует в силу того, что g ориентируемо, собственно и отображает край в край.

При этом несложно заметить, что в силу компактности f образ θ_q конечномерен. Так как для пространств M, N пучковые и сингулярные когомологии совпадают, то мы можем доказать данный факт для пучковых когомологий. Отображение f^* разлагается в композицию $H^q(N; R) \rightarrow H^q([f(M)]; R) \rightarrow H^q(M; R)$, где $[f(M)]$ – замыкание образа f . Но в силу компактности $[f(M)]$ для пучковых когомологий образ первого отображения конечномерен (см. [4; гл. 2, теорема 16.4, п. (b)]). Значит, и образ всей композиции θ_q конечномерен.

Поэтому $H^q(N; R)$ распадается в прямую сумму содержащегося в $\ker \theta_q$ подпространства A^q и конечномерного инвариантного подпространства B^q , содержащего образ θ_q . Выбором базиса в этом втором подпространстве определяется след $\text{Sp } \theta_q$ отображения θ_q .

Корректность определения $\text{Sp } \theta_q$ – следствие совпадения со следом Лере, определяемым для отображения h в себя векторного пространства E с конечномерным факторпространством $E/N(h)$, где $N(h)$ – подпространство элементов, отображающихся в нуль под действием некоторых степеней h . След Лере – обычный след определяемого h отображения конечномерного векторного пространства $E/N(h)$ в себя. Обозначается он как $\text{Tr } h$.

Кроме того, для отображения h^* комплекса векторных пространств E^* в себя такого, что факторкомплексы $E^q/N(h^q)$ имеют конечный тип (т.е. пространства $E^q/N(h^q)$ конечномерны и отличны от нуля в конечном числе размерностей), вышеописанная конструкция позволяет определить число Лефшеца отображения h (см. [5], а также сводку результатов в [6]).

По свойству (1.13.1) из [6; с. 49] для отображения h в себя конечной прямой суммы $\bigoplus_{i=1}^n E_i$ векторных пространств, являющегося прямой суммой отображений $h_i: E_i \rightarrow E_i$, для каждого из которых имеется след Лере,

$$\text{Tr } \bigoplus_i h_i = \sum_i \text{Tr } h_i.$$

Применяя это к разложению $H^q(N; R) = A^q \oplus B^q$, получаем

$$\text{Tr } \theta_q = \text{Tr } \theta_q|_{A^q} + \text{Tr } \theta_q|_{B^q}.$$

В силу равенства (1.12) из [6; с. 48] след Лере отображений конечномерных пространств совпадает с обычным следом, поэтому $\text{Tr } \theta_q|_{B^q} = \text{Sp } \theta_q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В ситуации $g(\partial M) \subset \partial N$ определим число Лефшеца $\Lambda'_{f,g}$ как $\sum_q (-1)^q \text{Sp } \theta_q$.

Теперь рассмотрим случай, когда $f(\partial M) \subset \partial N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Под отображением θ_q пространства $H^q(N, \partial N; R)$ в себя понимаем следующую композицию:

$$\begin{aligned} H^q(N, \partial N; R) &\xrightarrow{f^*} H^q(M, \partial M; R) =_D H_{n-q}(M; \mathcal{H}_n(M)) \\ &\xrightarrow{g_*} H_{n-q}(N; \mathcal{H}_n(N)) =_D H^q(N, \partial N; R). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Образ θ_q конечномерен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что образ отображения f^* конечномерен. Для рассматриваемых пар сингулярные когомологии совпадают с пучковыми, поэтому сделаем это в терминах пучковой теории.

Действительно, отображение f^* разлагается в композицию

$$H^q(N, \partial N; R) \rightarrow H^q([f(M)], [f(M)] \cap \partial N; R) \rightarrow H^q(M, \partial M; R).$$

Проверим, что образ первого отображения конечномерен.

Пусть L' – компактное множество такое, что

$$L \subset \text{int } L', \quad L \cap \partial N \subset \text{int}_{\partial N}(L' \cap \partial N).$$

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H^{q-1}(\partial N; R) & \longrightarrow & H^q(N, \partial N; R) & \longrightarrow & H^q(N; R) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow k \\ H^{q-1}(L' \cap \partial N; R) & \longrightarrow & H^q(L', L' \cap \partial N; R) & \longrightarrow & H^q(L'; R) \\ \downarrow h & & \downarrow & & \downarrow \\ H^{q-1}(L \cap \partial N; R) & \longrightarrow & H^q(L, L \cap \partial N; R) & \longrightarrow & H^q(L; R) \end{array}$$

В соответствии с [4; теорема 16.4, пп. (а), (b)] образы гомоморфизмов h, k конечномерны, поэтому в соответствии с [4; п. 16.3] конечномерен образ композиции в среднем столбце.

Так как образ θ_q конечномерен, то определение следа $\text{Sp } \theta_q$ этого отображения, как и в первой ситуации, корректно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. В ситуации $f(\partial M) \subset \partial N$ определим число совпадений Лефшеца: $\Lambda''_{f,g} = \sum_q (-1)^q \text{Sp } \theta_q$.

Сформулируем теперь результаты. Пусть f – компактное отображение, а g – собственное и ориентируемое отображение из n -мерного многообразия M в n -мерное многообразие N . Многообразия M, N топологические, возможно, некомпактные, неориентируемые, имеющие края.

ТЕОРЕМА 1. Если $g(\partial M) \subset \partial N$ и $\Lambda'_{f,g} \neq 0$, то отображения f, g имеют точку совпадения.

ТЕОРЕМА 2. Если $f(\partial M) \subset \partial N$ и $\Lambda''_{f,g} \neq 0$, то f, g имеют точку совпадения.

Пусть теперь одновременно $f(\partial M) \subset \partial N$ и $g(\partial M) \subset \partial N$. Обозначим через $\partial f, \partial g$ отображения $\partial M \rightarrow \partial N$, являющиеся ограничениями на ∂M отображений f, g . Так как многообразия $\partial M, \partial N$ не имеют края, то для них оба определения числа Лефшеца отображений $\partial f, \partial g$ совпадают. Соответствующее число Лефшеца обозначим $\Lambda_{\partial f, \partial g}$. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 3. Если $f(\partial M) \subset \partial N$ и $g(\partial M) \subset \partial N$, то $\Lambda'_{f,g} - \Lambda''_{f,g} = \Lambda_{\partial f, \partial g}$.

§ 2. Редукция теоремы 1 к теореме 2. Доказательство теоремы 3

Теорема 2, в частности, применима к многообразиям без края. С учетом этого, следуя рассуждениям Давидяна в [2] для ориентируемого случая, можно вывести теорему 1. Приведем эти рассуждения.

Подклеим “воротники” к краю каждого многообразия и получим многообразия без краев

$$\widehat{M} = M \cup (\partial M \times [0, 1)), \quad \widehat{N} = N \cup (\partial N \times [0, 1)).$$

Отображение $\widehat{f}$ из $\widehat{M}$ в $\widehat{N}$ определяется как композиция ретракции из $\widehat{M}$ в M , отображения f из M в N и вложения N в $\widehat{N}$. Отображение $\widehat{g}$ определяется как совпадающее с g на M , а на “воротнике” $\partial M \times [0, 1)$ – как отображение, действующее так: $\widehat{g}(x, t) = (g(x), t)$, где $x \in \partial M, g(x) \in \partial N$. При этом $\widehat{f}$ остается компактным, а $\widehat{g}$ собственным и ориентируемым.

Присоединение “воротников” не меняет когомологий многообразий $H^*(N; R)$, а гомологии пары $(M, \partial M)$ изоморфны гомологиям $\widehat{M}$. Действительно, для произвольных локально постоянных коэффициентов $\mathcal{A}$ имеют место канонические изоморфизмы

$$H_*(\overline{M}, \partial \overline{M}; \mathcal{A}) = H_*(\widehat{M}; \mathcal{A}) \rightarrow H_*(\text{int } M; \mathcal{A}) = H_*(\overline{M}, \overline{M} \setminus \text{int } M; \mathcal{A})$$

в силу собственной гомотопической эквивалентности пар $(\overline{M}, \partial \overline{M})$ и $(\overline{M}, \overline{M} \setminus \text{int } M)$ (здесь $\overline{M} = M \cup (\partial M \times [0, 1])$). В то же время канонически изоморфны $H_*(M, \partial M; \mathcal{A})$ и $H_*(\text{int } M; \mathcal{A})$, так что имеется канонический изоморфизм $H_*(M, \partial M; \mathcal{A}) \simeq H_*(\widehat{M}; \mathcal{A})$.

Тем самым, $\Lambda_{\widehat{f}, \widehat{g}} = \Lambda'_{f,g}$ и из $\Lambda'_{f,g} \neq 0$ следует наличие точек совпадения у $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$, а потому и у отображений f и g . Таким образом, теорема 1 сведена к теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Оно проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.9 в [3]. Именно, рассматривается коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} H^{q-1}(\partial N; R) & \longrightarrow & H^q(N, \partial N; R) & \longrightarrow & H^q(N; R) & \longrightarrow & H^q(\partial N; R) \\ \downarrow \theta_{q-1}^\partial & & \downarrow \theta_q'' & & \downarrow \theta_q' & & \downarrow \theta_q^\partial \\ H^{q-1}(\partial N; R) & \longrightarrow & H^q(N, \partial N; R) & \longrightarrow & H^q(N; R) & \longrightarrow & H^q(\partial N; R) \end{array}$$

При этом θ''_q обозначает гомоморфизм θ_q , использовавшийся при определении $\Lambda''_{f,g}$, θ'_q обозначает гомоморфизм θ_q , использовавшийся при определении $\Lambda'_{f,g}$, а θ^∂_q – гомоморфизм θ_q , используемый для определения $\Lambda_{\partial f, \partial g}$.

Данная диаграмма получается соответственно определениям гомоморфизмов типа θ_q через гомоморфизмы f^* , D , g_* и D^{-1} как композиция отображений точных последовательностей когомологий пары $(N, \partial N)$ и гомологий пары $(M, \partial M)$. Ее коммутативность – следствие того, что для двойственности Пуанкаре имеют место диаграммы (по одной для M и N) типа

$$\begin{array}{ccc}
 H^{q-1}(\partial M; R) & \xrightarrow{D^\partial} & H_{n-q}(\partial M; \mathcal{H}_{n-1}(\partial M)) \\
 \downarrow \delta & & \downarrow i_* \\
 H^q(M, \partial M; R) & \xrightarrow{D''} & H_{n-q}(M; \mathcal{H}_n(M)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^q(M; R) & \xrightarrow{D'} & H_{n-q}(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M)) \\
 \downarrow i^* & & \downarrow \delta \\
 H^q(\partial M; R) & \xrightarrow{D^\partial} & H_{n-q-1}(\partial M; \mathcal{H}_{n-1}(\partial M))
 \end{array} \quad (*)$$

Здесь i обозначает включение $\partial M \subset M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В диаграмме $(*)$ центральные квадраты коммутируют, а верхние и нижние коммутируют с точностью до знаков $(-1)^{q-1}$ и $(-1)^q$ соответственно (при этом $\mathcal{H}_{n-1}(\partial M) = \mathcal{H}_n(M)|_{\partial M}$).

Прежде чем исследовать диаграмму $(*)$ на коммутативность, уточним входящие в нее отображения. Изоморфизм двойственности Пуанкаре задается с помощью отображения $\frown \mu$, где μ – фундаментальный класс гомологий, принадлежащий группе $H_n(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M))$ в случае D и D' или группе $H_{n-1}(\partial M; \mathcal{H}_{n-1}(\partial M))$ – в случае D^∂ .

Для многообразий без края это доказано в [4; гл. 5, следствие 10.2]. Для многообразий с краем рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 H^q(M, \partial M; R) & \xrightarrow{\frown \mu} & H_{n-q}(M; \mathcal{H}_n(M)) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 H^q_{\varphi}(\text{int } M; R) & \xrightarrow{\frown(\mu|_{\text{int } M})} & H^{\varphi}_{n-q}(\text{int } M; \mathcal{H}_n(M))
 \end{array}$$

Здесь φ – семейство всех подмножеств $\text{int } M$, замкнутых в M . Так как нижняя строка – изоморфизм, то и верхняя – тоже изоморфизм. Значит, $D'' = \frown \mu$. Аналогично доказывается, что и отображение

$$\frown \mu: H^q(M; R) \rightarrow H_{n-q}(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M))$$

есть изоморфизм двойственности, поэтому и $D' = \frown \mu$. Заметим, что для компактных многообразий в случае постоянных коэффициентов эти соотношения суть утверждение теоремы 12 из [7; гл. 6, § 3].

Пусть $[M]$ и $[N]$ – обсуждаемые фундаментальные классы для M и N . Можно считать, что $\delta([M]) = [\partial M]$, где δ – связывающий гомоморфизм в гомологической последовательности пары $(M, \partial M)$. Это следует из того, что δ в наивысшей размерности есть изоморфизм, если край связан, и “диагональное” отображение в общем случае. Убеждаемся в этом, ограничив δ на достаточно малую окрестность U некоторой точки $x \in \partial M$ такую, что пара $(U, U \cap \partial M)$ гомеоморфна паре $(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}^{n-1})$ и ограничения на нее коэффициентов $\mathcal{H}_n(M)$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial M)$ постоянны. Тогда утверждение, что $\delta([M]) = [\partial M]$, есть следствие естественности δ .

Вернемся к вопросу о коммутативности диаграммы, включающей изоморфизмы двойственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Центральный квадрат коммутирует в силу равенства (9) из [4; гл. 5, § 10]. Рассмотрим теперь крайние квадраты, сначала нижний. Воспользуемся вариантом определения $\sim$ -умножения в терминах сингулярных гомологий и когомологий, в том числе для гомологий с любыми замкнутыми носителями, а также для теорий H_* и H^* с непостоянными коэффициентами (ср. с теоремой 10.2 из [8]).

Пусть $a \in H^q(M; R)$. Нам нужно доказать, что $\delta D'(a) = (-1)^q D^\partial i^*(a)$. Имеем

$$\delta D'(a) = \delta(a \frown [M]) = (-1)^q i^* a \frown \delta[M] = (-1)^q i^* a \frown [\partial M] = (-1)^q D^\partial i^*(a).$$

Пусть $a \in H^{q-1}(\partial M; R)$. Тогда

$$i_* D^\partial(a) = i_*(a \frown [\partial M]) = (-1)^{q-1} (\delta a \frown [M]) = (-1)^{q-1} D'' \delta(a).$$

Для классической сингулярной теории эти соотношения – следствия равенств (12.13) и (12.14) из [9; гл. 7, п. 12]. Они справедливы и в рассматриваемой нами общей ситуации (см. [8; §§ 6, 10]) с возможными различиями в знаках, обусловленными неоднозначностью в выборе полного дифференциала в биградуированных комплексах типа $C_* \otimes C^*$ (см. замечания 9.3, 10.16 и рассуждения перед леммой 10.12 в [8]).

Для завершения доказательства теоремы 3 достаточно убедиться, что

$$\sum_{q=0, \dots, n} (-1)^q (\text{Sp } \theta_q'' - \text{Sp } \theta_q' + \text{Sp } \theta_q^\partial) = 0.$$

Это есть следствие следующего наблюдения.

ЛЕММА 1. Пусть $f_*: C_* \rightarrow C_*$ – отображение в себя цепного комплекса векторных пространств с конечномерными образами $f_q: C_q \rightarrow C_q$, и пусть $C_k = 0$ при $|k| > N$ для некоторого числа N . В случае, если $H_*(C_*) = 0$, имеет место соотношение $\sum_q (-1)^q \text{Sp } f_q = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеется точная тройка векторных пространств $0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow L \rightarrow 0$ и ее отображение в себя посредством отображений φ^Q , $\varphi^P = \varphi^Q|_P$ и факторотображения φ^L с конечномерными образами. В силу свойства (1.13.2) из [6; с. 49] и равенства следов Sp и Tr в этой ситуации $\text{Sp } \varphi^Q = \text{Sp } \varphi^P + \text{Sp } \varphi^L$.

Разложим точный комплекс C_* в композицию точных троек вида

$$0 \rightarrow \operatorname{Im} d_{q+1} \rightarrow C_q \rightarrow \operatorname{Im} d_q \rightarrow 0.$$

Тогда получим, что $\operatorname{Sp} f_q = \operatorname{Sp} f_q|_{\operatorname{Im} d_{q+1}} + \operatorname{Sp} f_q|_{\operatorname{Im} d_q}$. Следовательно,

$$\sum_q (-1)^q \operatorname{Sp} f_q = \sum_q (-1)^q \operatorname{Sp} f_q|_{\operatorname{Im} d_{q+1}} + \sum_q (-1)^q \operatorname{Sp} f_q|_{\operatorname{Im} d_q} = 0.$$

§ 3. Индекс совпадения. Редукция теоремы 2 к теореме 4

При условии $f(\partial M) \subset \partial N$ в дополнение к числу Лефшеца $\Lambda'_{f,g} = \Lambda_{f,g}$ определим индекс $I_{f,g}$ совпадений отображений f, g . Для этого построим сначала произведения $\times, \frown, \smile$ для сингулярных гомологий и когомологий с локально постоянными коэффициентами.

В любой представляющей конкретный интерес ситуации прежде всего фиксируем некоторый определяющий гомологии сингулярный цепной комплекс. А именно, при заданных на пространстве X локально постоянных коэффициентах $\mathcal{G}$ фиксируем некоторое достаточно малое по отношению к $\mathcal{G}$ открытое покрытие X . Через $C_*^c(X; \mathcal{G})$ будем обозначать комплекс конечных сингулярных цепей с коэффициентами в $\mathcal{G}$, порождаемый всеми сингулярными симплексами, носители которых содержатся в множествах покрытия. Стандартным образом (см. [9; гл. III, предложение 7.3] или [7; гл. 4, § 4, теорема 14] или [10; гл. VII, теорема 8.2]) устанавливается, что включение в $C_*^c(X; \mathcal{G})$ подкомплексов, определяемых более мелкими открытыми покрытиями X , суть цепные гомотопические эквивалентности, чем в свою очередь подтверждается независимость определяемых посредством $C_*^c(X, \mathcal{G})$ гомологий $H_*(C_*^c(X, \mathcal{G})) = H_*(X, \mathcal{G})$ от выбора исходного открытого покрытия.

Используемые нами гомологии каноническим образом изоморфны сингулярным гомологиям с локальными коэффициентами (представленными, например, в [7]). В этом можно убедиться, проверив справедливость для них теоремы о покрытии из [10; гл. VII, п. 8]. Для этого, считая, что B_0 – тождественный изоморфизм e , индукцией по размерности цепей n определим оператор B_n барицентрического подразделения в цепях с локально постоянными коэффициентами как $B_n(\gamma\sigma_n) = \gamma_c\sigma_*^n(cB_{n-1}\partial\Delta^n)$, где $\sigma^n: \Delta^n \rightarrow X$ – сингулярный симплекс, γ – элемент слоя системы коэффициентов $\mathcal{G}$ над $\sigma^n(a_0)$ вершины a_0 стандартного симплекса Δ^n , $\partial\Delta^n$ – алгебраическая граница Δ^n , $cB_{n-1}\partial\Delta^n$ – “конус” над $B_{n-1}\partial\Delta_{n-1}$ с вершиной в центре c симплекса Δ^n , σ_*^n – определяемое σ^n отображение цепей и γ_c – перенос γ в слой $\mathcal{G}$ над $\sigma^n(c)$ вдоль образа при отображении σ^n отрезка $[a_0, c]$. Стандартная проверка дает $\partial B_n = B_{n-1}\partial$. Аналогично стандартным образом индукцией по n (считая комплекс цепей C_* бесконечным в обе стороны) для цепей с локальными коэффициентами определяется оператор гомотопии $D_n: C_n \rightarrow C_{n+1}$, для которого $B_n - e = \partial D_n + D_{n-1}\partial$ (как и в случае постоянных коэффициентов, это есть следствие того, что $\partial(B_n - e - D_{n-1}\partial) = 0$). Отсюда, как и в [10], вытекает, что гомологии с локальными коэффициентами определяются сингулярными симплексами мелкости любого открытого покрытия.

Ниже будет использоваться также понятие пары подпространств в пространстве X , вырезаемой по отношению к локально постоянным коэффициентам $\mathcal{G}$ на X . Данное в [7; гл. 4, § 6] определение вырезаемой пары стандартным образом распространяется на сингулярные гомологии с локально постоянными коэффициентами. Кроме того, использование сингулярных цепей типа $C_*^c(X, \mathcal{G})$ (вместо классических) подтверждает справедливость стандартных характерных свойств вырезаемости, представленных в [7] и в [9; гл. III, предложение 8.1].

Для локально постоянных коэффициентов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ на X , Y через $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ обозначается система $\pi_1^* \mathcal{A} \otimes \pi_2^* \mathcal{B}$ на произведении $X \times Y$ (см. [4], [11]; π_1 , π_2 – проекции $X \times Y$ на X , Y).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для пар (X, A) , (Y, B) с локально постоянными коэффициентами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ на них, для которых пара $\{X \times B, A \times Y\}$ подпространств в $X \times Y$ вырезаема для сингулярных гомологий с коэффициентами $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$, определены декартовы произведения классов гомологий и когомологий*

$$\begin{aligned} \times : H_p^c(X, A; \mathcal{A}) \otimes H_q^c(Y, B; \mathcal{B}) &\rightarrow H_{p+q}^c(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y); \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}), \\ \times : H^p(X, A; \mathcal{A}) \otimes H^q(Y, B; \mathcal{B}) &\rightarrow H^{p+q}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y); \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \end{aligned}$$

(внешние умножения, ср. [9; гл. VII]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [7; гл. 5, упражнение I8] комплекс $C_*^c(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})$ естественно гомотопически эквивалентен $C_*^c(X; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(Y; \mathcal{B})$. Ограничением на A , Y и $A \times Y$, на X , B и $X \times B$ получаются аналогичные эквивалентности для соответствующих этим пространствам цепных комплексов, поэтому так же получается эквивалентность комплексов

$$\begin{aligned} &C_*^c(X, A; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(Y, B; \mathcal{B}), \\ &C_*^c(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) / (C_*^c(A \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) + C_*^c(X \times B; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})) \end{aligned}$$

(ср. [9; гл. VII, п. 12]). В случае, когда пара $\{X \times B, A \times Y\}$ вырезаема с коэффициентами $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$, последний комплекс дает гомологии $H_{p+q}^c(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y); \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})$ (ср. [9; гл. VI, следствие 12.8]). Декартово произведение классов гомологий получается переходом от групп цепей к гомологиям в отображении

$$\begin{aligned} &C_*^c(X, A; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(Y, B; \mathcal{B}) \\ &\rightarrow C_*^c(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) / (C_*^c(A \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) + C_*^c(X \times B; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})). \end{aligned}$$

При этом, так как данное отображение есть цепная эквивалентность и мы всюду имеем дело с векторными пространствами, в силу [9; гл. VI, теорема 9.13] операция $\times$ обеспечивает изоморфизм гомологий

$$H_p^c(X, A; \mathcal{A}) \otimes H_q^c(Y, B; \mathcal{B}) = H_{p+q}^c(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y); \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}).$$

Воспользуемся тем, что, применяя к группе цепей с конечномерными локально постоянными коэффициентами функтор $\text{Hom}_R(\cdot, R)$, мы получаем группу

коцепей с теми же коэффициентами (см. [7; гл. 5, упражнение J4]). Имеется отображение

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_R(C_*^c(X, A; \mathcal{A}), R) \otimes \text{Hom}_R(C_*^c(Y, B; \mathcal{B}), R) \\ & \rightarrow \text{Hom}_R(C_*^c(X, A; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(Y, B; \mathcal{B}), R) \\ & \simeq \text{Hom}_R(C_*^c(X \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) / (C_*^c(A \times Y; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) + C_*^c(X \times B; \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})), R) \end{aligned}$$

(см. [7; гл. 5, § 5]). При переходе к группам когомологий оно дает указанную выше операцию декартова произведения классов когомологий

$$\times : H^p(X, A; \mathcal{A}) \otimes H^q(Y, B; \mathcal{B}) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y); \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если пара $A_1, A_2 \subset X$ вырезаема для сингулярных гомологий с коэффициентами в $\mathcal{B}$, то определено умножение

$$\frown : H^q(X, A_1; \mathcal{A}) \otimes H_n^c(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{B}) \rightarrow H_{n-q}^c(X, A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

(см. [7; гл. 5, § 6, п. 15]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C_*, C'_* – цепные комплексы. Определим отображение $h : \text{Hom}_R(C'_*, R) \otimes (C_* \otimes C'_*) \rightarrow C_*$. Для этого достаточно задать значения $h(f \otimes (c \otimes c'))$, где $f \in \text{Hom}_R(C'_*, R)$, $c' \in C'_*$, $c \in C_*$ (при этом элемент c цепного комплекса C_* есть набор элементов $\{c_n\}$ – по одному для каждой размерности n , соответственно $f \in \text{Hom}_R(C'_*, R)$ есть набор гомоморфизмов $\{f_n\}$ – по одному для каждой размерности n). Это мы сделаем с помощью формулы $h(f \otimes (c \otimes c')) = f(c')c$ (см. [7; гл. 5, § 6, п. 15]).

Пусть далее

$$C'_* = C_*^c(X; \mathcal{A}), \quad C_* = C_*^c(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

Ограничение пучка $\mathcal{A} \widehat{\otimes} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ на диагональ в $X \times X$ дает пучок $\mathcal{B}$, поэтому диагональное вложение $X \subset X \times X$ дает диагональное отображение $C_*^c(X; \mathcal{B}) \rightarrow C_*^c(X \times X; \mathcal{A} \widehat{\otimes} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}))$. Согласно [7; гл. 5, упражнение I8], последний комплекс естественно эквивалентен $C_*^c(X; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Пусть $\varphi : C_*^c(X; \mathcal{B}) \rightarrow C_*^c(X; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ – композиция диагонального отображения и этой эквивалентности. Таким образом, мы можем построить отображение

$$\text{Hom}_R(C_*^c(X; \mathcal{A}), R) \otimes C_*^c(X; \mathcal{B}) \rightarrow C_*^c(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}),$$

определяемое на элементах вида $f \otimes c$, где $f \in \text{Hom}_R(C_*^c(X; \mathcal{A}), R)$, $c \in C_*^c(X; \mathcal{B})$, формулой $h(f \otimes \varphi(c))$.

При этом верно соотношение

$$dh(f \otimes \varphi(c)) = (-1)^{n-q} h(\delta f \otimes \varphi(c)) + h(f \otimes \varphi(dc)),$$

где $n = \deg c$, $q = \deg f$, d – оператор границы и δ – оператор кограницы (см. [7; гл. 5, § 6, п. 15]). Поэтому мы получаем произведение

$$\frown : H^q(X; \mathcal{A}) \otimes H_n^c(X; \mathcal{B}) \rightarrow H_{n-q}^c(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

Как и в [7; гл. 5, § 6, п. 15], убедимся в том, что данное произведение задает отображение

$$\begin{aligned} \cap: H^q(X, A_1; \mathcal{A}) \otimes H_n(C_*^c(X; \mathcal{B})/C_*^c(A_1; \mathcal{B}) + C_*^c(A_2; \mathcal{B})) \\ \rightarrow H_{n-q}^c(X, A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Действительно, если коцепь $f \in \text{Hom}_R(C_*^c(X; \mathcal{A}), R)$ обращается в нуль при ограничении на A_1 , то для любой цепи $c \in C_*^c(A_1; \mathcal{B})$ имеем $h(f \otimes \varphi(c)) = 0$. Если при этом f — коцикл пары (X, A_1) , а $c \in C_*^c(X; \mathcal{B})$ представляет цикл в $C_*^c(X; \mathcal{B})/(C_*^c(A_1; \mathcal{B}) + C_*^c(A_2; \mathcal{B}))$, то $dh(f \otimes \varphi(c)) \in C_{n-q}^c(A_2; \mathcal{B})$. Если сверх того f — кограница в комплексе $\text{Hom}_R(C_*^c(X; \mathcal{A}), R)$ или c — граница в факторкомплексе $C_*^c(X; \mathcal{B})/(C_*^c(A_1; \mathcal{B}) + C_*^c(A_2; \mathcal{B}))$, то $h(f \otimes \varphi(c))$ — граница в $C_*^c(X, A_2; \mathcal{B})$.

Из всего вышесказанного следует, что уже построенное произведение задает также отображение

$$\begin{aligned} \cap: H^q(X, A_1; \mathcal{A}) \otimes H_n(C_*^c(X; \mathcal{B})/(C_*^c(A_1; \mathcal{B}) + C_*^c(A_2; \mathcal{B}))) \\ \rightarrow H_{n-q}^c(X, A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}). \end{aligned}$$

В случае если пара $\{A_1, A_2\}$ вырезаема для сингулярных гомологий с коэффициентами в $\mathcal{B}$, то мы так же, как и в случае постоянных коэффициентов, получаем отображение

$$\cap: H^q(X, A_1; \mathcal{A}) \otimes H_n^c(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{B}) \rightarrow H_{n-q}^c(X, A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для вырезаемых для сингулярных гомологий с коэффициентами в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ пар $A_1, A_2 \subset X$ определено произведение когомологий*

$$\smile: H^q(X, A_1; \mathcal{A}) \otimes H^p(X, A_2; \mathcal{B}) \rightarrow H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

(ср. [7; гл. 5, § 6, п. 15]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем отображение

$$\psi: C_*^c(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow C_*^c(X; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(X; \mathcal{B}),$$

являющееся композицией отображения $C_*^c(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow C_*^c(X \times X; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})$, индуцированного диагональным вложением $X \subset X \times X$, и эквивалентности $C_*^c(X \times X; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \rightarrow C_*^c(X; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(X; \mathcal{B})$. Применив функтор $\text{Hom}_R(\cdot, R)$, получим отображение

$$\text{Hom}_R(C_*^c(X; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(X; \mathcal{B}), R) \rightarrow C^*(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

Его композицией с естественным отображением

$$\text{Hom}_R(C_*^c(X; \mathcal{A}), R) \otimes \text{Hom}_R(C_*^c(X; \mathcal{B}), R) \rightarrow \text{Hom}_R(C_*^c(X; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(X; \mathcal{B}), R)$$

определяется произведение $\smile: C^*(X; \mathcal{A}) \otimes C^*(X; \mathcal{B}) \rightarrow C^*(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Заметим, что если имеется подмножество $A \subset X$ и элементы $f_1 \in C^p(X; \mathcal{A})$, $f_2 \in C^q(X; \mathcal{B})$, то ограничение $f_1 \smile f_2$ на A будет совпадать с произведением

ограничений f_1 и f_2 на A . Поэтому если f_1 обращается в нуль на A_1 , а f_2 обращается в нуль на A_2 , то их произведение обращается в нуль на $C_*^c(A_1; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) + C_*^c(A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Следовательно, если пара вырезаема для сингулярных гомологий с коэффициентами в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, то получается отображение умножения

$$\smile: H^p(X, A_1; \mathcal{A}) \otimes H^q(X, A_2; \mathcal{B}) \rightarrow H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

С помощью построенного выше $\smile$ -умножения для произвольного локально постоянного пучка $\mathcal{A}$ такого, что $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} = R$, определяется отображение, называемое индексом Кронекера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Индекс Кронекера* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть отображение $H^p(X, A_1; \mathcal{A}) \smile H_p^c(X, A_1; \mathcal{A}) \rightarrow H_0^c(X) = R$ (пара $\{A_1, \emptyset\}$ всегда вырезаема).

Нашей следующей задачей будет определение индекса совпадений $I_{f,g}$. Будем предполагать, как и в [3], что $g(M) \subset \text{int } N$. Это ограничение не является существенным. Пусть теорема 2 верна в этом предположении. Имеется собственная гомотопия $G(\cdot, \cdot): [0, 1] \times M \rightarrow N$, $G(0, \cdot) = g(\cdot)$, обладающая тем свойством, что $G((0, 1] \times M) \subset \text{int } N$. Такая гомотопия не меняет числа Лефшеца. Если оно ненулевое, то f имеет точку совпадения с каждым отображением $G(t, \cdot)$: имеются точки x_t, y_t , где $t \in (0, 1]$, такие, что $f(x_t) = G(t, x_t) = y_t$. В силу компактности образа f имеем $y_t \rightarrow y \in N$. В силу собственности $G(\cdot, \cdot)$ множество $\{(t, x_t)\}$ имеет предельную точку $(0, x)$, которая под действием G переходит в y , так что $g(x) = y$. В силу непрерывности также $f(x) = y$.

Перед определением индекса $I_{f,g}$ определим сначала вспомогательные классы гомологий $\mu_K \in H_n^c(M, (M \setminus K) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M))$ для компактных $K \subset M$ и когомологий

$$\tau \in H^n(N \times \text{int } N, (\partial N \times \text{int } N) \cup (N \times \text{int } N) \setminus \Delta; R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(M)),$$

где Δ – диагональ в $N \times \text{int } N$.

Имеется диагональное вложение $d: (M, \partial M) \rightarrow (M \times M, \partial M \times M)$ и такое же отображение пар

$$d: (M, (M \setminus K) \cup \partial M) \rightarrow (M \times M, (\partial M \times M) \cup ((M \times M) \setminus d(K))).$$

Соответствующее отображение гомологий будет обозначаться

$$\begin{aligned} d_*: H_*^c(M, (M \setminus K) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M)) \\ \rightarrow H_*^c(M \times M, (\partial M \times M) \cup ((M \times M) \setminus d(K)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(M)). \end{aligned}$$

Пусть $C = \{x \in M : f(x) = g(x)\}$ – множество точек совпадения. Оно компактно. Действительно, в силу компактности f и собственности g множество $g^{-1}([f(M)])$ компактно. Множество C замкнуто и содержится в $g^{-1}([f(M)])$, поэтому и оно компактно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Для каждого компактного K пусть

$$\mu_K \in H_n^c(M, (M \setminus K) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M))$$

– образ фундаментального класса $\mu \in H_n(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M))$ при ограничении в группу

$$H_n(M, (M \setminus K) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M)) \simeq H_n^c(M, (M \setminus K) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M)).$$

В частности, мы можем определить класс $\mu_C \in H_n^c(M, (M \setminus C) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M))$.

Для определения класса τ рассмотрим следующую конструкцию. В силу [4; гл. 2, теорема 12.1 и определение 10.4, п. (a)]

$$H^n(\text{int } N \times \text{int } N, (\text{int } N \times \text{int } N) \setminus \Delta; R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) = H_\varphi^n(\text{int } N \times \text{int } N; R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)),$$

где φ – семейство всех замкнутых множеств произведения $\text{int } N \times \text{int } N$, содержащихся в $\text{int } \Delta$. Ориентирующим пучком многообразия $\text{int } N \times \text{int } N$ является $\mathcal{H}_n(N) \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)$. В соответствии с [12; предложения 6, 7] для любых локально постоянных коэффициентов $\mathcal{E}$ на $\text{int } N \times \text{int } N$ имеет место двойственность Пуанкаре

$$H_\varphi^n(\text{int } N \times \text{int } N; \mathcal{E}) = H_n^\varphi(\text{int } N \times \text{int } N; \mathcal{H}_n(N) \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N) \otimes \mathcal{E}).$$

С учетом того, что гомологии подпространства равны гомологиям всего пространства с носителями в подпространстве, а также замкнутости $\text{int } \Delta$ в $\text{int } N \times \text{int } N$ и того, что ограничение $\mathcal{H}_n(N) \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)$ на диагональ есть R , заключаем, что группа $H_n^\varphi(\text{int } N \times \text{int } N; \mathcal{H}_n(N) \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N) \otimes \mathcal{E})$ есть $H_n(\text{int } \Delta, \mathcal{E}|_{\text{int } \Delta})$. Так как $\text{int } \Delta \simeq \text{int } N$, а ограничение систем $\mathcal{E} = R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)$ или $\mathcal{H}_n(N) \hat{\otimes} R$ на диагональ есть ориентирующий пучок для $\text{int } \Delta$, то получаем, что в этом случае

$$H_n(\text{int } \Delta, \mathcal{E}|_{\text{int } \Delta}) = H_n(\text{int } N; \mathcal{H}_n(N)) = R.$$

Пусть класс τ_{int} образующий в группе

$$\begin{aligned} H^n(\text{int } N \times \text{int } N, (\text{int } N \times \text{int } N) \setminus \Delta; R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ = H^n(\text{int } N \times \text{int } N, (\text{int } N \times \text{int } N) \setminus \Delta; \mathcal{H}_n(N) \hat{\otimes} R), \end{aligned}$$

отвечающий единице в $R = H_n(\text{int } N; \mathcal{H}_n(N))$.

Заметим, что в других терминах определение такого класса для многообразий без края дано в [7; гл. 6, упражнение A3], где он называется классом Тома многообразия (имеющим природу класса Тома касательного расслоения).

Определим, наконец, вспомогательный класс τ . Рассмотрим вложения пар

$$\begin{aligned} (\text{int } N \times \text{int } N, (\text{int } N \times \text{int } N) \setminus \Delta) \\ \subset (N \times \text{int } N, (\partial N \times \text{int } N) \cup ((N \times \text{int } N) \setminus \Delta)) \subset (N \times N, (N \times N) \setminus \Delta). \end{aligned}$$

Согласно [3; следствие 3.7] композиция этих вложений индуцирует изоморфизм

$$\begin{aligned} H^n(\text{int } N \times \text{int } N, (\text{int } N \times \text{int } N) \setminus \Delta; R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(M)) \\ = H^n(N \times N, (N \times N) \setminus \Delta; R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(M)). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Класс τ – элемент группы

$$H^n(N \times \text{int } N, (\partial N \times \text{int } N) \cup ((N \times \text{int } N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(M)),$$

соответствующий классу τ_{int} при индуцированных включениями гомоморфизмах когомологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Индекс совпадения* $I_{f,g}$ есть образ определенного выше класса $\mu_C \in H_n^c(M, (M \setminus C) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M))$ при последовательности гомоморфизмов

$$\begin{aligned} & H_n^c(M, (M \setminus C) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M)) \\ & \rightarrow_{d_*} H_n^c(M \times M, (\partial M \times M) \cup ((M \times M) \setminus d(C)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(M)) \\ & \rightarrow_{(f \times g)_*} H_n^c(N \times \text{int } N, (\partial N \times \text{int } N) \cup (N \times \text{int } N \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ & \rightarrow_{\langle \tau, \cdot \rangle} R, \end{aligned}$$

или, короче,

$$I_{f,g} = \langle \tau, (f \times g)_* d_*(\mu_C) \rangle.$$

Так как при включениях $C \subset K$ класс μ_C является образом отвечающего K класса $\mu_K \in H_n(M, (M \setminus K) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M))$, то в случае, когда $C \neq \emptyset$, для определения $I_{f,g}$ можно использовать любое содержащее C компактное множество K .

Теорема 2 вытекает из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4. *Если $f(\partial M) \subset \partial N$, $g(M) \subset \text{int } N$, то $\Lambda_{f,g} = I_{f,g}$.*

Действительно, заметим, что если $C = \emptyset$, то группа

$$H_n^c(M, (M \setminus C) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M))$$

нулевая, поэтому и элемент μ_C в этом случае нулевой. Следовательно, $I_{f,g} = 0$.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Доказательство следует схеме рассуждений, приведенных в [1] для случая, когда M , N ориентируемы и без края. Сделаем некоторые предварительные замечания и опишем некоторые вспомогательные конструкции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Если пара $\{X \times B, A \times Y\}$ вырезаема с коэффициентами $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$, то имеется произведение (ср. [7; гл 6, § 1])*

$$/: H^n((X, A) \times (Y, B); \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \otimes H_{n-q}^c(Y, B; \mathcal{B}) \rightarrow H^q(X, A; \mathcal{A}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C, C' – цепные комплексы, элементы c^* и c' принадлежат соответственно $\text{Hom}_R((C \otimes C')_n, R)$ и C'_{n-q} , и пусть c^*/c' – элемент $\text{Hom}_R(C_q, R)$, определяемый формулой $\langle c^*/c', c \rangle = \langle c^*, c \otimes c' \rangle$, $c \in C_q$. Так как $\delta(c^*/c') = (\delta c^*)/c' - (-1)^q c^*/dc'$, то данное умножение индуцирует произведение

$$/: H^n(\text{Hom}_R((C \otimes C')_n, R)) \otimes H_{n-q}(C') \rightarrow H^q(\text{Hom}_R(C, R)).$$

Так как пара $\{X \times B, A \times Y\}$ вырезаема, то имеется гомоморфизм

$$\varphi: C_*^c(X, A; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(Y, B; \mathcal{B}) \rightarrow C_*^c((X, A) \times (Y, B); \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}),$$

приводящий к изоморфизму групп гомологий. Возьмем элемент

$$u \in H^n((X, A) \times (Y, B); \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \simeq H^n(\text{Hom}_R(C_*^c((X, A) \times (Y, B); \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}), R));$$

под действием $\varphi^* = \text{Hom}(\varphi, R)$ он переходит в элемент

$$\varphi^* u \in H^n(\text{Hom}(C_*^c(X, A; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(Y, B; \mathcal{B}), R)).$$

Пусть $z \in H_q^c(Y, B; \mathcal{B})$. Согласно предыдущим рассуждениям нами определен элемент $\varphi^* u/z \in H^{n-q}(X, A; \mathcal{A})$. Положим u/z равным $\varphi^* u/z$.

Пусть V есть замкнутая окрестность ∂N , гомеоморфная $\partial N \times [0, 1]$. Пусть L – компактное подмножество N такое, что $[f(M)] \subset \text{int } L$ и $V \cap L$ имеет вид $BL \times [0, 1]$ для некоторого компактного подмножества $BL \subset \partial N$. Пусть L_1 – также компактное подмножество N такое, что $V \cap L_1$ имеет вид $BL_1 \times [0, 1]$ для некоторого замкнутого подмножества $BL_1 \subset \partial N$ и при этом $L \subset \text{int } L_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пара $\{BL \times \text{int } N, L \times (\text{int } N \setminus L_1)\}$ в $L \times \text{int } N$ вырезается с любыми коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [7; гл. 4, § 6, теорема 4] достаточно проверить, что включение

$$(BL \times \text{int } N, BL \times (\text{int } N \setminus L_1)) \subset ((BL \times \text{int } N) \cup (L \times (\text{int } N \setminus L_1)), L \times (\text{int } N \setminus L_1))$$

задает изоморфизм сингулярных гомологий с любыми коэффициентами. Вторая пара согласно свойству вырезания имеет те же гомологии, что и пара

$$((BL \times \text{int } N) \cup ((L \cap V) \times (\text{int } N \setminus L_1)), (L \cap V) \times (\text{int } N \setminus L_1)).$$

Действительно, эта пара получается из предыдущей удалением множества

$$(L \setminus V) \times (\text{int } N \setminus L_1) \subset \text{int}(L \times (\text{int } N \setminus L_1)).$$

С учетом гомеоморфизма $V \cap L = BL \times [0, 1]$ данная пара оказывается гомотопически эквивалентной первой, что и требовалось.

Аналогичным свойством обладает и пара $\{BL \times N, L \times (N \setminus L_1)\}$ в $L \times N$.

Определим еще один вспомогательный класс когомологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Класс

$$\tau_L \in H^n((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$$

– образ определенного выше класса τ при вложении

$$\begin{aligned} (L, BL) \times (\text{int } N, \text{int } N \setminus L_1) &= (L \times \text{int } N, (BL \times \text{int } N)) \\ &\cup (L \times (\text{int } N \setminus L_1)) \subset (N \times \text{int } N, (\partial N \times \text{int } N)) \cup ((N \times \text{int } N) \setminus \Delta) \end{aligned}$$

и гомотопической эквивалентности пар

$$(L, BL) \times (\text{int } N, \text{int } N \setminus L_1) \subset (L, BL) \times (N, N \setminus L_1).$$

Рассмотрим описанное в предложении 7 /-произведение в случае, когда

$$(X, A) = (L, BL), \quad \mathcal{A} = R, \quad (Y, B) = (N, N \setminus L_1), \quad \mathcal{B} = \mathcal{H}_n(N).$$

Элементом τ_L определяется гомоморфизм

$$\tau_L /: H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow H^q(L, BL; R).$$

Дадим его явное описание в терминах гомологий и когомологий.

ЛЕММА 2. Элемент τ_L представляется в виде

$$\sum_q a^q \times b^{n-q},$$

где $a^q \in H^q(L, BL; R)$, $b^{n-q} \in H^{n-q}(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$.

Здесь $a^q \times b^{n-q} = \times(a^q \otimes b^{n-q})$ – образ элемента $a^q \otimes b^{n-q}$ при построенном выше отображении когомологического декартова произведения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше было проверено, что пара $\{BL \times N, L \times (N \setminus L_1)\}$ вырезаема с любыми коэффициентами. Поэтому имеется изоморфизм, задаваемый прямым произведением классов гомологий

$$\times : H_*^c(L, BL; R) \otimes H_*^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) = H_*^c((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} H^*((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ = \text{Hom}_R(H_*^c((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)), R), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} H^*(L, BL; R) &= \text{Hom}_R(H_*^c(L, BL; R), R), \\ H^*(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) &= \text{Hom}_R(H_*^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)), R). \end{aligned}$$

Также было определено произведение

$$\begin{aligned} \times : H^*(L, BL; R) \otimes H^*(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \\ \rightarrow H^*((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)). \end{aligned}$$

Покажем, что τ_L лежит в образе данного отображения. Из этого немедленно будет следовать утверждение леммы.

Пусть $\{v_\alpha\}$ – базис $H_*^c(L, BL; R)$, а $\{w_\beta\}$ – базис $H_*^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$, тогда элементы $v_\alpha \otimes w_\beta$ образуют базис $H_*^c((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$. Всякий элемент

$$\begin{aligned} h \in H^*((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ = \text{Hom}_R(H_*^c((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)), R) \end{aligned}$$

отождествляется с отображением, сопоставляющим элементу базиса $v_\alpha \otimes w_\beta$ элемент из R , т.е. с системой чисел $a_{\alpha, \beta} = h(v_\alpha \otimes w_\beta) \in R$ – бесконечной матрицей, индексированной элементами указанных базисов. Обратно, по произвольной такой матрице однозначно восстанавливается линейное отображение из $H_*^c((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$ в R . Таким образом, соответствие между указанными матрицами и элементами $H^*((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$ биективно.

Найдем образ отображения

$$\times : H^*(L, BL; R) \otimes H^*(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow H^*((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$$

при такой интерпретации. Для элементов

$$f \in \text{Hom}_R(H_*^c(L, BL; R), R), \quad g \in \text{Hom}_R(H_*^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)), R)$$

значение

$$f \times g \in \text{Hom}_R(H_*^c((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)), R)$$

на $v_\alpha \otimes w_\beta$ есть $a_{\alpha, \beta} = f(v_\alpha)g(w_\beta)$. Данная матрица имеет ранг системы строк 1. Обратно, пусть матрица $a_{\alpha, \beta}$ имеет ранг системы строк 1. Тогда, выбрав представление $a_{\alpha, \beta} = c_\alpha d_\beta$, положим $f(v_\alpha) = c_\alpha$, $g(w_\beta) = d_\beta$, чем зададим элементы $f \in \text{Hom}_R(H_*^c(L, BL; R), R)$, $g \in \text{Hom}_R(H_*^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)), R)$ такие, что элементу $f \times g$ соответствует матрица $a_{\alpha, \beta}$ (заметим, что такие f, g определены не однозначно). Таким образом, элементы $f \times g$ представляются всевозможными (бесконечными) матрицами $(a_{\alpha, \beta})$, ранг системы строк которых равен 1. Образ отображения

$$\times : H^*(L, BL; R) \otimes H^*(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow H^*((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$$

есть линейная оболочка всевозможных элементов вида $f \times g$, где

$$f \in \text{Hom}_R(H_*^c(L, BL; R), R), \quad g \in \text{Hom}_R(H_*^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)), R).$$

Матрица, являющаяся линейной комбинацией матриц, ранг системы строк каждой из которых равен 1, имеет конечный ранг системы строк. Действительно, пусть $A = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$, при этом $\lambda_i \in R$, матрицы A_i имеют ранг 1. Возьмем ненулевые строки $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ в матрицах $A_1, \dots, A_n$. Тогда строки матрицы A являются линейными комбинациями данных строк. Из этого следует, что любые $n+1$ строк матрицы A линейно зависимы. Это означает, что ранг системы строк A не превосходит n .

Докажем обратное: если ранг системы строк конечен, то матрица есть линейная комбинация матриц, ранг системы строк которых есть 1. Пусть ранг системы строк матрицы $A = (a_{\alpha, \beta})$ есть n и $\bar{a}_{\alpha_1}, \dots, \bar{a}_{\alpha_n}$ — линейно независимые строки. Тогда каждая строка $\bar{a}_\alpha$ равна линейной комбинации $\lambda_1^\alpha \bar{a}_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n^\alpha \bar{a}_{\alpha_n}$. Определим матрицу A_t , $t = 1, \dots, n$, так: на месте α, β у нее стоит число $(\bar{a}_{\alpha_t})_\beta \lambda_t^\alpha$, где $(\bar{a}_{\alpha_t})_\beta$ — элемент строки $\bar{a}_{\alpha_t}$, стоящий в столбце β . Непосредственно видно, что строка с номером α матрицы A_t есть строка $\bar{a}_{\alpha_t}$, умноженная на число λ_t^α , так что ранг системы строк данной матрицы равен 1. При этом $A = A_1 + \dots + A_n$.

Значит, образ отображения есть в точности все классы когомологий, которым соответствуют матрицы, ранг системы строк которых конечен.

Таким образом, нужное представление для τ_L существует, если соответствующая τ_L матрица $\tau_L(v_\alpha \otimes w_\beta)$ имеет конечный ранг. Имеет место включение $j : (L, BL) \subset (L_1, BL_1)$. Пусть τ' — образ τ в группе $H^n((L_1, BL_1) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$; тогда $\tau_L = j^*(\tau')$, поэтому $\tau_L(v_\alpha \otimes w_\beta) = \tau'(j_*(v_\alpha) \otimes w_\beta)$. Проверим, что мы можем выбрать базис $\{v_\alpha\}$ так, чтобы только конечное число образов $j_*(v_\alpha)$ были ненулевыми. Для этого достаточно удостовериться в том, что образ отображения гомологий j_* конечномерен. Отображение j разлагается

в композицию включений $(L, BL) \subset (\text{int } L_1, \text{int } L_1 \cap \partial N) \subset (L_1, BL_1)$. Достаточно показать, что образ отображения гомологий, индуцированного первым включением, конечномерен. Соответствующий образ отображения когомологий конечномерен, это было доказано в начале настоящей работы. Но применением функтора $\text{Hom}_R(\cdot, R)$ мы можем перейти от гомологий к когомологиям, и остается заметить, что если образ сопряженного отображения конечномерен, то и образ исходного отображения также конечномерен. Это видно из представления линейного отображения $\varphi: V \rightarrow V'$ векторных пространств в виде композиции $V \xrightarrow{\varphi} \text{Im } \varphi \subset V'$: сопряженное отображение φ^* не имеет ядра на $\text{Im } \varphi$, поэтому $\dim \text{Im } \varphi^* \geq \dim \text{Im } \varphi$.

Итак, выберем базис $\{v_\alpha\}$ так, чтобы только конечное число образов $j_*(v_\alpha)$ были ненулевыми. Тогда в матрице $a_{\alpha, \beta} = \tau_L(v_\alpha \otimes w_\beta) = \tau'(j_*(v_\alpha) \otimes w_\beta)$ ненулевые лишь те строки, для которых $j_*(v_\alpha) \neq 0$, т.е. в матрице имеется конечное число ненулевых строк. Это означает наличие искомого представления для τ_L .

Теперь пусть $\xi \in H_{n-t}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$. Мы знаем, что τ_L представляется в виде $\sum_q a^q \times b^{n-q}$, где $a^q \in H^q(L, BL; R)$, $b^{n-q} \in H^{n-q}(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Имеет место следующее равенство:*

$$\tau_L / \xi = \left(\sum_q a^q \times b^{n-q} \right) / \xi = \langle b^{n-t}, \xi \rangle a^t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент τ_L / ξ лежит в группе $H^t(L, BL; R)$. Поэтому нам достаточно доказать, что для любого элемента $c \in H_t(L, BL; R)$ имеет место равенство

$$\left\langle \left(\sum_q a^q \times b^{n-q} \right) / \xi, c \right\rangle = \langle \langle b^{n-t}, \xi \rangle a^t, c \rangle.$$

Установим следующее соотношение. Пусть имеются $u \in H^q(X, A; \mathcal{A})$, $v \in H^{n-q}(Y, B; \mathcal{B})$, $w \in H_t^c(X, A; \mathcal{A})$, $o \in H_{n-t}^c(Y, B; \mathcal{B})$, а $\times$ обозначает построенные ранее прямые произведения когомологий и гомологий. Тогда имеется равенство $\langle (u \times v) / o, w \rangle = \langle u \times v, w \otimes o \rangle$.

Действительно, возьмем коцикл $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \in C^n((X, A) \times (Y, B); \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$, представляющий элемент $u \times v$, цикл $\mathbf{w} \in C_t^c(X, A; \mathcal{A})$, представляющий w , и цикл $\mathbf{o} \in C_{n-t}^c(Y, B; \mathcal{B})$, представляющий o . Элементу $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ при эквивалентности тензорного произведения цепей сомножителей и цепей произведения пар соответствует элемент $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})'$ из $\text{Hom}_R((C_*^c(X, A; \mathcal{A}) \otimes C_*(Y, B; \mathcal{B}))_n, R)$. По определению коцикл $\mathbf{k}$, представляющий $(u \times v) / o$, таков, что верно $\langle \mathbf{k}, \mathbf{w} \rangle = \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{v})', \mathbf{w} \times \mathbf{o} \rangle$. По определению декартова произведения цепей и коцепей последнее выражение совпадает с $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \times \mathbf{o} \rangle$. Переходя от цепей и коцепей к группам гомологий и когомологий, получаем нужное равенство.

Для тех же классов гомологий и когомологий имеет место следующее: $\langle u \times v, w \times o \rangle$ есть нуль, если $t \neq q$, и $\langle u, w \rangle \langle v, o \rangle$, если $t = q$.

Пусть $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ – коциклы, представляющие u , v . Рассмотрим их как элементы $C^*(X, A; \mathcal{A})$, $C^*(Y, B; \mathcal{B})$. Аналогично рассмотрим циклы $\mathbf{w}$, $\mathbf{o}$ как элементы $C_*^c(X, A; \mathcal{A})$, $C_*^c(Y, B; \mathcal{B})$. Было построено отображение произведения

коцепей

$$\begin{aligned} \times : \operatorname{Hom}_R(C_*^c(X, A; \mathcal{A}), R) \otimes \operatorname{Hom}_R(C_*^c(Y, B; \mathcal{B}), R) \\ \rightarrow \operatorname{Hom}_R(C_*^c(X, A; \mathcal{A}) \otimes C_*^c(Y, B; \mathcal{B}), R) \\ \simeq \operatorname{Hom}_R(C_*^c(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) / (C_*^c(A \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) + C_*^c(X \times B; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})), R). \end{aligned}$$

Первое отображение сопоставляет гомоморфизмам $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ гомоморфизм, принимающий на $\mathbf{w} \otimes \mathbf{o}$ значение $\mathbf{u}(\mathbf{w})\mathbf{v}(\mathbf{o})$. Второй гомоморфизм индуцирован эквивалентностью тензорного произведения цепей сомножителей и цепей произведения пар. Он переводит гомоморфизм, принимающий некоторое значение на $\mathbf{w} \otimes \mathbf{o}$, в гомоморфизм, принимающий то же значение на $\mathbf{w} \times \mathbf{o}$. Из этого получается, что $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \times \mathbf{o} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{o} \rangle$. Переходя к отдельным размерностям и к группам гомологий и когомологий, получаем нужный результат.

Вернемся к изначальной ситуации. Имеются элементы

$$\xi \in H_{n-t}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)), \quad \tau_L = \sum_q a^q \times b^{n-q}.$$

Применяя теперь аддитивность операции $/$, получаем, что

$$\left\langle \left(\sum_q a^q \times b^{n-q} \right) / \xi, c \right\rangle = \langle \langle b^{n-t}, \xi \rangle a^t, c \rangle.$$

В силу произвольности c получаем, что $(\sum_q a^q \times b^{n-q}) / \xi = \langle b^{n-t}, \xi \rangle a^t$.

Отсюда сделаем следующий вывод. Пусть $\{\rho_\alpha^q\}$ – базис векторного пространства $H^q(L, BL; R)$, $\{\eta_\beta^{n-q}\}$ – базис $H^{n-q}(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$. Элемент τ_L представим в виде $\tau_L = \sum_{\alpha, \beta, q} c_{\alpha\beta}^q \rho_\alpha^q \times \eta_\beta^{n-q}$. Гомоморфизм $\tau_L /$ действует на элемент $\xi \in H_{n-t}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$ как

$$\tau_L / \xi = \left(\sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta}^q \rho_\alpha^q \times \eta_\beta^{n-q} \right) / \xi = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta}^t \langle \eta_\beta^{n-t}, \xi \rangle \rho_\alpha^t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.

Шаг 1. Воспользуемся следующим известным фактом (см. [13]). Пусть имеется коммутативная диаграмма отображений градуированных векторных пространств

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow u & \nearrow v & \downarrow u \\ E' & \xrightarrow{h'} & E' \end{array}$$

в которой образы обоих горизонтальных отображений конечномерны и отличны от нуля лишь для конечного числа размерностей. В этом случае числа Лефшеца отображений h, h' совпадают.

Пусть $j : L \subset N$ – вложение описанного выше компактного подмножества L .

Через θ'_q обозначим композицию

$$\begin{aligned} H^q(L, BL; R) \rightarrow_{f*} H^q(M, \partial M; R) =_D H_{n-q}(M; \mathcal{H}_n(M)) \\ \rightarrow_{g*} H_{n-q}(N; \mathcal{H}_n(N)) =_{D'} H^q(N, \partial N; R) \rightarrow H^q(L, BL; R). \end{aligned}$$

Образ отображения f^* конечномерен. Действительно, отображение

$$H^q(L, BL; R) \rightarrow H^q(M, \partial M; R)$$

разлагается в композицию:

$$\begin{aligned} H^q(L, BL; R) &\rightarrow H^q(\text{int } L, \text{int } L \cap \partial N; R) \rightarrow H^q([f(M)], [f(M)] \cap \partial N; R) \\ &\rightarrow H^q(M, \partial M; R), \end{aligned}$$

образ же второго из отображений конечномерен в силу таких же рассуждений, что и для θ_q перед определением 2.

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^q(N, \partial N; R) & \xrightarrow{\theta_q} & H^q(N, \partial N; R) \\ \downarrow j^* & \nearrow D' g_* D f^* & \downarrow j^* \\ H^q(L, BL; R) & \xrightarrow{\theta'_q} & H^q(L, BL; R) \end{array}$$

Применяя сформулированное в начале шага общее утверждение, получаем, что число Лефшеца для отображений θ'_q равно исследуемому числу $\Lambda_{f,g}$.

Шаг 2. Пусть U есть окрестность ∂M , гомеоморфная $\partial M \times [0, 1]$. Пусть K – компактное подмножество M такое, что $U \cap K$ имеет вид $BK \times [0, 1]$ для некоторого компактного подмножества $BK \subset \partial M$ и при этом $g^{-1}(L_1) \subset \text{int } K$.

Пара $\{\partial M, M \setminus K\}$ в M вырезаема для любых локально постоянных коэффициентов. В самом деле, согласно [7; гл. 4, § 6, теорема 4] нам достаточно доказать, что

$$(\partial M, \partial M \cap (M \setminus K)) \subset (\partial M \cup (M \setminus K), M \setminus K)$$

индуцирует изоморфизм сингулярных гомологий для любой локально постоянной системы коэффициентов. В силу свойства вырезания достаточно доказать это для пар

$$(\partial M, \partial M \cap (M \setminus K)) \subset ((\partial M \cup (M \setminus K)) \cap U, (M \setminus K) \cap U).$$

В других обозначениях первая пара есть $(\partial M, \partial M \setminus BK)$, а вторая есть $(\partial M \cup (U \setminus (U \cap K)), (U \setminus (U \cap K)))$. Теперь, воспользовавшись строением множества $U \cap K$, получаем, что обе пары гомотопически эквивалентны, поэтому их включение индуцирует изоморфизм сингулярных гомологий для любой локально постоянной системы коэффициентов.

В этом случае имеется умножение

$$\frown: H^q(M, \partial M; R) \otimes H_n^c(M, (M \setminus K) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M)) \rightarrow H_{n-q}^c(M, (M \setminus K); \mathcal{H}_n(M)).$$

Пусть $\frown \mu_K$ – гомоморфизм $H^q(M, \partial M; R) \rightarrow H_{n-q}^c(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M))$, переводящий элемент $a \in H^q(M, \partial M; R)$ в $a \frown \mu_K \in H_{n-q}^c(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M))$.

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & H^q(L, BL; R) & \\
 & \downarrow f^* & \\
 & H^q(M, \partial M; R) & \\
 \swarrow \sim \mu & & \searrow \sim \mu_K \\
 H_{n-q}(M; \mathcal{H}_n(M)) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-q}^c(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M)) \\
 \downarrow g_* & & \downarrow g_* \\
 H_{n-q}(N; \mathcal{H}_n(N)) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \\
 \downarrow D' & \searrow \sim \nu_{L_1} & \\
 H^q(N, \partial N; R) & \xrightarrow{\sim \nu_{L_1}} & H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \\
 \searrow (-1)^{nq} j^* & & \swarrow \tau_L / \\
 & H^q(L, BL; R) &
 \end{array}$$

При этом под ν_{L_1} понимается следующий класс. Пусть ν – ориентирующий класс многообразия N , лежащий в $H_n(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N))$, L_1 – компактное подмножество N . Определен образ ν в $H_n^c(N, \partial N \cup (N \setminus L_1); \mathcal{H}_n(N))$; его мы обозначим ν_{L_1} . Согласно предложению 5 определено произведение

$$\frown: H^q(N, \partial N; R) \otimes H_n^c(N, \partial N \cup (N \setminus L_1); \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)),$$

это дает нам отображение

$$\frown \nu_{L_1}: H^q(N, \partial N; R) \rightarrow H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)).$$

Имеется (см. предложение 7) операция

$$\begin{aligned}
 /: H^n((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \otimes H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \\
 \rightarrow H^q(L, BL; R).
 \end{aligned}$$

Напомним, что класс τ_L (определение 3) лежит в группе

$$H^n((L, BL) \times (N, N \setminus L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

Поэтому имеется отображение

$$\tau_L /: H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow H^q(L, BL; R).$$

Докажем коммутативность этой диаграммы. Нуждается в доказательстве лишь коммутативность нижнего треугольника.

ЛЕММА 3. *Композиция*

$$H^q(N, \partial N; R) \rightarrow \frown \nu_{L_1} H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow \tau_L / H^q(L, BL; R)$$

с точностью до знака $(-1)^{nq}$ есть отображение j^* , индуцированное вложением $j: L \subset N$.

Близкое утверждение доказано в [14]. С незначительными модификациями приведенное там доказательство годится и для нашего случая, воспроизведем его. Сначала докажем вспомогательное утверждение (см. [14; лемма 2]), после чего вернемся к доказательству леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть

$$\alpha \in H^q(N, \partial N; R), \quad \gamma \in H^*(L \times N, (BL \times (N \setminus BL)) \cup ((L \times N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

Пусть p_1, p_2 – проекции $L \times N$ на первый и второй сомножитель соответственно. Пусть $j : L \subset N$. Тогда верно равенство $\gamma \sim p_2^* \alpha = \gamma \sim p_1^* j^* \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего проверим, что оба произведения определены.

Элемент $p_2^* \alpha$ лежит в группе $H^q(L \times N, L \times \partial N; R)$, элемент $p_1^* j^* \alpha$ лежит в группе $H^q(L \times N, BL \times N; R)$, элемент γ лежит в $H^*(L \times N, (BL \times (N \setminus BL)) \cup ((L \times N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$.

Умножение когомологий

$$H^p(X, A_1; \mathcal{A}) \otimes H^q(X, A_2; \mathcal{B}) \rightarrow H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

было определено в случае, когда пара $\{A_1, A_2\}$ в X вырезаема с коэффициентами в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Для произведений $\gamma \sim p_2^* \alpha$, $\gamma \sim p_1^* j^* \alpha$ пары $\{A_1, A_2\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} & \{(BL \times (N \setminus BL)) \cup ((L \times N) \setminus \Delta), L \times \partial N\}, \\ & \{(BL \times (N \setminus BL)) \cup ((L \times N) \setminus \Delta), BL \times N\}. \end{aligned}$$

Объемлющее пространство есть $L \times N$. Эти пары можно переписать так: $\{((L \times N) \setminus \Delta), L \times \partial N\}$, $\{((L \times N) \setminus \Delta), BL \times N\}$. Однако эти пары не являются вырезаемыми, поэтому чтобы определить произведения, воспользуемся следующей конструкцией.

Пусть имеется включение $A_2 \subset A'_2$ такое, что пара (X, A_2) гомотопически эквивалентна (X, A'_2) , а пара $(X, A_1 \cup A_2)$ гомотопически эквивалентна $(X, A_1 \cup A'_2)$. Пусть при этом пара $\{A_1, A'_2\}$ вырезаема. Тогда имеются изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^q(X, A_2; \mathcal{B}) &\simeq H^q(X, A'_2; \mathcal{B}), \\ H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) &\simeq H^{p+q}(X, A_1 \cup A'_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}). \end{aligned}$$

В силу вырезаемости $\{A_1, A'_2\}$ имеется умножение

$$H^p(X, A_1; \mathcal{A}) \otimes H^q(X, A'_2; \mathcal{B}) \rightarrow H^{p+q}(X, A_1 \cup A'_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

Это дает нам умножение

$$H^p(X, A_1; \mathcal{A}) \otimes H^q(X, A_2; \mathcal{B}) \rightarrow H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

Применим эту конструкцию. Рассмотрим первую пару

$$\{(BL \times (N \setminus BL)) \cup ((L \times N) \setminus \Delta), L \times \partial N\} = \{((L \times N) \setminus \Delta), L \times \partial N\}.$$

Пусть U_t – замкнутая окрестность края N , гомеоморфная прямому произведению $\partial N \times [0, t]$, такая, что $L \cap U_t = BL \times [0, t]$.

Заметим, что пара $\{((L \times N) \setminus \Delta), L \times U_{1/2}\}$ вырезается в $L \times N$ по [7; гл. 4, § 6, теорема 3]. При этом пары $((L \times N), L \times \partial N)$ и $((L \times N), L \times U_{1/2})$ гомотопически эквивалентны.

Проверим теперь, что пары

$$(L \times N, ((L \times N) \setminus \Delta) \cup (L \times \partial N)), \quad (L \times N, ((L \times N) \setminus \Delta) \cup (L \times U_{1/2}))$$

гомотопически эквивалентны.

Чтобы убедиться в этом, определим гомотопию F_l тождественного отображения многообразия N в себя, тождественную вне U_1 и на ∂N и такую, что на U_1 за время $l \in [0, 1]$ окрестность $U_{1/2}$ сжимается на ∂N , а $U_1 \setminus U_{1/2}$ растягивается на U_1 .

Гомотопия $F_l \times F_l$ тождественного отображения $L \times N$ в себя определяет гомотопию тождественного отображения в себя пары $(L \times N, ((L \times N) \setminus \Delta) \cup (L \times U_{1/2}))$, при которой подпара $(L \times N, ((L \times N) \setminus \Delta) \cup (L \times \partial N))$ также отображается в себя, а образ $F_1 \times F_1$ содержится в этой подпаре и ограничение $F_1 \times F_1$ на $(L \times N, ((L \times N) \setminus \Delta) \cup (L \times \partial N))$ гомотопно тождественному отображению этой пары. Тем самым, рассматриваемые пары гомотопически эквивалентны.

Поэтому произведение $\gamma \sim p_2^* \alpha$ определено и лежит в группе

$$H^*(L \times N, (BL \times N) \cup ((L \times N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

Рассмотрим теперь пару $\{((L \times N) \setminus \Delta), BL \times N\}$, отвечающую второму произведению. По [7; гл. 4, § 6, теорема 3] вырезаемой в $L \times N$ является пара $\{((L \times N) \setminus \Delta), (L \cap U_{1/2}) \times N\}$. Пара $(L \times N, BL \times N)$ гомотопически эквивалентна $(L \times N, (L \cap U_{1/2}) \times N)$, а пара $(L \times N, ((L \times N) \setminus \Delta) \cup (BL \times N))$ гомотопически эквивалентна $(L \times N, ((L \times N) \setminus \Delta) \cup ((L \cap U_{1/2}) \times N))$. Действительно, гомотопия $F_l \times F_l$ задает семейство отображений в себя пары $(L \times N, ((L \times N) \setminus \Delta) \cup ((L \cap U_{1/2}) \times N))$. При этом $F_0 \times F_0$ тождественно, а образом $F_1 \times F_1$ является пара $(L \times N, ((L \times N) \setminus \Delta) \cup (BL \times N))$. Как и выше, делаем вывод, что данные пары гомотопически эквивалентны.

Поэтому произведение $\gamma \sim p_1^* j^* \alpha$ также определено и лежит в группе

$$H^*(L \times N, (BL \times N) \cup ((L \times N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$$

– той же группе, что и $\gamma \sim p_2^* \alpha$.

Введем дополнительные обозначения. Пусть $\Delta(L)$ – диагональ в $L \times N$. Пусть p – проекция $\Delta(L)$ на L , k – вложение $\Delta(L)$ в $L \times N$. Имеется окрестность W множества $\Delta(L)$ в $L \times N$ такая, что $\Delta(L)$ – деформационный ретракт W (см. [14; лемма 1]). Следовательно, существует ретракция $r: W \rightarrow \Delta(L)$ такая, что kr гомотопно вложению $l: W \subset L \times N$. Верны равенства $p_2 k = j p$, $p_1 k = p$.

Выпишем цепочку равенств

$$l^*(\gamma \sim p_1^* j^* \alpha) = l^* \gamma \sim r^* k^* p_1^* j^* \alpha = l^* \gamma \sim r^* p^* j^* \alpha = l^* \gamma \sim r^* k^* p_2^* \alpha = l^*(\gamma \sim p_2^* \alpha)$$

элементов группы

$$\begin{aligned} H^*(W, ((BL \times N) \cup ((L \times N) \setminus \Delta)) \cap W; R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ \simeq H^*(W, (W \cap (BL \times N)) \cup (W \setminus \Delta(L)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тем, что l^* в силу свойства вырезания задает изоморфизм

$$\begin{aligned} H^*(L \times N, (BL \times N) \cup ((L \times N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ \simeq H^*(W, (W \cap (BL \times N)) \cup (W \setminus \Delta(L)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)). \end{aligned}$$

Поэтому получаем нужное нам равенство $\gamma \sim p_1^* j^* \alpha = \gamma \sim p_2^* \alpha$.

Вернемся к доказательству леммы 3.

Пусть $\tau' \in H^n(N \times N, (N \times N) \setminus \Delta; R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$ – класс, отвечающий τ_{int} при изоморфизме

$$\begin{aligned} H^n(N \times N, (N \times N) \setminus \Delta; R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ \simeq H^n(\text{int } N \times \text{int } N, (\text{int } N \times \text{int } N) \setminus \Delta; R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \end{aligned}$$

(см. § 3). Возьмем $\alpha \in H^q(N, \partial N; R)$. Пусть τ_1 – образ класса τ' в группе

$$H^n(L \times N, (BL \times (N \setminus BL)) \cup ((L \setminus BL) \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Произведения $\tau_1 \sim p_2^* \alpha$, $\tau_1 \sim p_1^* j^* \alpha$ лежат в группе

$$H^*(L \times N, (BL \times N) \cup (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$$

и верно равенство $\tau_1 \sim p_2^* \alpha = \tau_1 \sim p_1^* j^* \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теперь лемму 4. Пусть γ – образ класса τ' в группе когомологий

$$H^n(L \times N, (BL \times (N \setminus BL)) \cup ((L \times N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

Согласно лемме 4 имеем $\gamma \sim p_2^* \alpha = \gamma \sim p_1^* j^* \alpha$, при этом данное произведение лежит в группе $H^*(L \times N, (BL \times N) \cup ((L \times N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$. В соответствии с его определением класс γ ограничивается в τ_1 . При этом произведение $\gamma \sim p_2^* \alpha$ перейдет в произведение

$$\tau_1 \sim p_2^* \alpha \in H^*(L \times N, (BL \times (N \setminus BL)) \cup (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

Так как $(BL \times (N \setminus BL)) \cup (L \times \partial N) = (BL \times N) \cup (L \times \partial N)$, то данная группа есть

$$H^*(L \times N, (BL \times N) \cup (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

Аналогично, класс $\gamma \sim p_1^* j^* \alpha$ ограничивается в класс

$$\tau_1 \sim p_1^* j^* \alpha \in H^*(L \times N, (BL \times N) \cup ((L \setminus BL) \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

Как и выше, данная группа есть

$$H^*(L \times N, (BL \times N) \cup (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

При этом в силу леммы 4 $\tau_1 \sim p_2^* \alpha = \tau_1 \sim p_1^* j^* \alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Произведения $\tau_L \sim p_2^* \alpha$, где

$$\tau_L \in H^n(L \times N, (L \times (N \setminus L_1)) \cup (BL \times N); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$$

(см. определение 9), и $\tau_1 \sim p_2^* \alpha$ лежат в группе

$$H^*(L \times N, (BL \times N) \cup (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1))); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N),$$

причем $\tau_L \sim p_2^* \alpha = \tau_1 \sim p_2^* \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что класс τ_1 является образом введенного выше класса τ' в группе

$$H^n(L \times N, (BL \times (N \setminus BL)) \cup ((L \setminus BL) \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1))); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N),$$

а τ_L в соответствии с его определением получается из τ ограничением в группу

$$H^n(L \times \text{int } N, (BL \times \text{int } N) \cup (L \times (\text{int } N \setminus L_1))); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)$$

и изоморфизмом (вследствие гомотопической эквивалентности)

$$\begin{aligned} H^n(L \times \text{int } N, (BL \times \text{int } N) \cup (L \times (\text{int } N \setminus L_1))); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N) \\ \simeq H^n(L \times N, (BL \times N) \cup (L \times (N \setminus L_1))); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N). \end{aligned}$$

Поскольку τ – также ограничение τ' из содержащей $(N \times \text{int } N, (\partial N \times \text{int } N) \cup ((N \times \text{int } N) \setminus \Delta))$ пары $(N \times N, ((N \times N) \setminus \Delta))$ (ср. с определением 7), то заключаем, что оба класса, $\tau_L \sim p_2^* \alpha$ и $\tau_1 \sim p_2^* \alpha$, представляются одинаковыми коциклами. Поэтому чтобы проверить равенство этих классов, достаточно показать, что они лежат в нужной группе. Элемент $\tau_1 \sim p_2^* \alpha$ лежит в группе

$$H^{n+q}(L \times N, (BL \times N) \cup (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1))); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N).$$

Напомним, что класс $p_2^* \alpha$ лежит в группе $H^q(L \times N, L \times \partial N; R)$ (см. начало доказательства леммы 4), а τ_L лежит в $H^n(L \times N, (BL \times N) \cup (L \times (N \setminus L_1))); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)$. Их произведение лежит в группе

$$H^{n+q}(L \times N, (BL \times N) \cup (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1))); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N).$$

Тем самым, $\tau_L \sim p_2^* \alpha = \tau_1 \sim p_2^* \alpha$.

Ниже нам понадобится

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пара подпространств $\{(L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)), BL \times N\}$ в $L \times N$ вырезается относительно любых локально постоянных коэффициентов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 4 из [7; гл. 4, § 6]. Нужно проверить, что включение пар

$$\begin{aligned} (L \times (\partial N \cup (N \setminus L_1)), BL \times (\partial N \cup (N \setminus L_1))) \\ \subset ((BL \times N) \cup (L \times (\partial N \cup (N \setminus L_1))), (BL \times N)) \end{aligned}$$

индуцирует изоморфизм их сингулярных гомологий.

Пусть U – замкнутая окрестность края N , гомеоморфная прямому произведению $\partial N \times [0, 1]$, такая, что $L \cap U = BL \times [0, 1]$. Тогда вследствие гомотопической эквивалентности достаточно проверить изоморфизм для следующего включения:

$$\begin{aligned} & (L \times (\partial N \cup (N \setminus L_1)), (L \cap U) \times (\partial N \cup (N \setminus L_1))) \\ & \subset ((BL \times N) \cup (L \times (\partial N \cup (N \setminus L_1))), (BL \times N) \\ & \quad \cup ((L \cap U) \times (\partial N \cup (N \setminus L_1)))). \end{aligned}$$

В данном же случае он следует из свойства вырезания для сингулярных гомологий. Меньшая пара получается из большей вырезанием из пространства и подпространства множества $BL \times (L_1 \setminus \partial N)$. Замыкание его, $BL \times L_1$, содержится во внутренности подпространства большей пары – множества $(BL \times N) \cup ((L \cap U) \times (\partial N \cup (N \setminus L_1)))$, внутренность берется в объемлющем пространстве пары – в множестве $(BL \times N) \cup (L \times (\partial N \cup (N \setminus L_1)))$. Действительно, для близких к $(x, y) \in BL \times L_1$ точек (x', y') в объемлющем пространстве $x' \in BL$, а y' находится в окрестности L_1 в N , $(x', y') \in BL \times N$.

Для фигурирующей в лемме 3 композиции отображений выпишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \tau_L / (\alpha \frown \nu_{L_1}) &= (\tau_L \smile p_2^* \alpha) / \nu_{L_1} = (\tau_1 \smile p_2^* \alpha) / \nu_{L_1} = (\tau_1 \smile p_1^* j^* \alpha) / \nu_{L_1} \\ &= (-1)^{nq} (p_1^* j^* \alpha \smile \tau_1) / \nu_{L_1}. \end{aligned}$$

Как показано выше, произведения $\tau_L \smile p_2^* \alpha$, $\tau_1 \smile p_2^* \alpha$, $\tau_1 \smile p_1^* j^* \alpha$ лежат в группе

$$\begin{aligned} & H^{n+q}(L \times N, (BL \times N) \cup (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ &= H^{n+q}((L, BL) \times (N, (N \setminus L_1) \cup \partial N); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)). \end{aligned}$$

Так как пара $\{(L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)), BL \times N\}$ в $L \times N$ вырезаема относительно любых локально постоянных коэффициентов (предложение 12), то согласно предложению 7 определено произведение

$$\begin{aligned} & /: H^{n+q}((L, BL) \times (N, (N \setminus L_1) \cup \partial N); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ & \quad \otimes H_n^c(N, (N \setminus L_1) \cup \partial N; \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow H^q(L, BL; R). \end{aligned}$$

Поэтому все произведения $(\tau_L \smile p_2^* \alpha) / \nu_{L_1}$, $(\tau_1 \smile p_2^* \alpha) / \nu_{L_1}$, $(\tau_1 \smile p_1^* j^* \alpha) / \nu_{L_1}$ существуют и дают элементы из $H^q(L, BL; R)$.

Первое равенство в цепочке – следствие свойства 5 /-произведения в [7; гл. 6, § 1] (напомним, что $p_2^* \alpha \in H^q(L \times (N, \partial N); R)$), второе – следствие предложения 11, третье – предложения 10, а последнее – следствие антикоммутативности $\smile$.

При этом все использованные здесь $\smile$ -умножения определены. Чтобы удостовериться в этом, нужно проверить вырезаемость соответствующих пар. Для всех участвующих пар $\{X_1, X_2\}$, однако, $X_2 \subset X_1$, поэтому они вырезаемы.

Элемент τ_1 лежит в группе

$$H^n(L \times N, (BL \times (N \setminus BL)) \cup ((L \setminus BL) \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

Пусть τ_2 – образ класса τ_1 в группе

$$\begin{aligned} & H^n(L \times N, ((L \setminus BL) \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \widehat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ &= H^n(L \times N, (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \widehat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \\ &= H^n(L \times (N, \partial N \cup (N \setminus L_1)); R \widehat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)). \end{aligned}$$

Первое равенство здесь – следствие сравнения кохомологических последовательностей соответствующих пар и гомотопической эквивалентности $L \setminus BL$ и L , влекущей гомотопическую эквивалентность $(L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1))$ и $((L \setminus BL) \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1))$.

Заметим, что так как τ_2 лежит в группе

$$H^n(L \times (N, \partial N \cup (N \setminus L_1)); R \widehat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)),$$

а ν_{L_1} – в группе

$$H_c^n(N, \partial N \cup (N \setminus L_1); \mathcal{H}_n(N)),$$

то определен элемент τ_2/ν_{L_1} группы $H^0(L; R)$ (см. предложение 7).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Имеется равенство $\tau_2/\nu_{L_1} = 1 \in H^0(L; R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Класс τ_2 можно определить и в случае, когда $L = x$ – одна точка (при этом $BL = \emptyset$). Соответствующий класс τ_2^x – элемент группы $H^n(x \times N, x \times (\partial N \cup (N \setminus L_1)); R \widehat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$. Пусть $x \in L \setminus BL$. Если $\tau_2/\nu_{L_1} = a \in H^0(L; R)$, то вследствие естественности /-произведения $\tau_2^x/\nu_{L_1} = a \in H^0(x; R)$. Поэтому достаточно доказать равенство $\tau_2/\nu_{L_1} = 1$ для случая, когда L состоит из одной точки x . При этом точку можно выбрать произвольно. Выберем точку, лежащую в $L_1 \cap \text{int } N$. Аналогичными рассуждениями можно изменять L_1 . Достаточно проверить равенство $\tau_2^x/\nu_{L_1} = 1 \in H^0(x; R)$ для случая, когда L_1 есть замыкание окрестности точки x , гомеоморфное n -мерному шару.

Имеется отображение

$$H^n(N, (N \setminus L_1) \cup \partial N; \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow \langle \cdot, \nu_{L_1} \rangle H^0(N; R)$$

($\langle \cdot, \nu_{L_1} \rangle$ – индекс Кронекера). Для указанного выше L_1 имеется окрестность, также гомеоморфная шару, в которую L_1 вложено как концентрический шар меньшего радиуса. Используя свойства вырезания и гомотопической инвариантности, видим, что

$$\begin{aligned} H^n(N, (N \setminus L_1) \cup \partial N; \mathcal{H}_n(N)) &\simeq H^n(L_1, SL_1; \mathcal{H}_n(N)|_{L_1}), \\ H_c^n(N, (N \setminus L_1) \cup \partial N; \mathcal{H}_n(N)) &\simeq H_c^n(L_1, SL_1; \mathcal{H}_n(N)|_{L_1}), \end{aligned}$$

где SL_1 – граничная сфера. Пусть ν'_{L_1} – образ класса ν_{L_1} во второй группе. Имеет место также изоморфизм $H_0^c(N; R) \simeq H_0^c(L_1; R)$. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^n(N, (N \setminus L_1) \cup \partial N; \mathcal{H}_n(N)) & \xrightarrow{\langle \cdot, \nu_{L_1} \rangle} & H_0^c(N; R) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ H^n(L_1, SL_1; \mathcal{H}_n(N)|_{L_1}) & \xrightarrow{\langle \cdot, \nu'_{L_1} \rangle} & H_0^c(L_1; R) \end{array}$$

Так как L_1 гомеоморфно в обоих случаях шару, то $\mathcal{H}_n(N)|_{L_1} \simeq R$. Кроме того, отображение $\langle \cdot, \nu'_{L_1} \rangle : H^n(L_1, SL_1; R) \simeq H_0(L_1; R)$ есть изоморфизм Пуанкаре (см. [7; гл. 6, § 3, теорема 12]).

Отсюда получим, что и $\langle \cdot, \nu_{L_1} \rangle$ есть изоморфизм. Поэтому в группе

$$H^n(N, (N \setminus L_1) \cup \partial N; \mathcal{H}_n(N)) \simeq H^n(L_1, SL_1; R)$$

имеется фундаментальный класс когомологий Φ , соответствующий при данном изоморфизме единице в $H_0^c(N; R)$. При этом $\langle \Phi, \nu_{L_1} \rangle = 1$.

Следовательно, группа $H^n(x \times (N, (N \setminus L_1) \cup \partial N); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$ изоморфна $H_0^c(x \times N; R)$, и в ней имеется фундаментальный класс когомологий $1 \times \Phi$.

В данной ситуации класс $\tau_2^x \in H^n(x \times (N, (N \setminus L_1) \cup \partial N); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$ совпадает с произведением $1 \times \Phi$. Действительно, класс $\tau \in H^n(N \times N, (\partial N \times N) \cup ((N \times N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$ при ограничении в группу

$$H^n(\text{int } N \times \text{int } N, ((\text{int } N \times \text{int } N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$$

переходит в τ_{int} (ср. с определением 7). Тогда, применяя упражнение A3 из [7; гл. 6], получаем, что при ограничении τ в группу $H^n(x \times N, (x \times N) \setminus (x \times x); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$ (напомним, что $x \in \text{int } N$) элемент τ переходит в целочисленную образующую группы $H^n(x \times N, (x \times N) \setminus (x \times x); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$. С помощью свойств вырезания и гомотопической эквивалентности получаем, что имеющееся отображение

$$H^n(x \times N, (x \times N) \setminus (x \times x); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow H^n(x \times N, (x \times N) \setminus (x \times L_1); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$$

есть изоморфизм. При этом образ класса τ в первой группе переходит в класс τ_2^x во второй группе. Так что τ_2^x есть целочисленный элемент, являющийся образующим в изоморфной R соответствующей группе когомологий, поэтому $\tau_2^x = \pm 1 \times \Phi$. Выбором ориентации на L_1 , можно добиться того, что $\tau_2^x = 1 \times \Phi$.

Поэтому в силу свойства 2 /-произведения из [7; гл. 6, § 1] выполняется $\tau_2^x / \nu_{L_1} = (1 \times \Phi) / \nu_{L_1} = 1 \langle \Phi, \nu_{L_1} \rangle = 1$.

Элемент $p_1^* j^* \alpha$ лежит в группе $H^q(L \times N, BL \times N; R)$ (см. лемму 4), класс τ_2 – в группе $H^n(L \times N, (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$. Так как пара подпространств $\{(L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)), BL \times N\}$ в $L \times N$ вырезаема (предложение 12), то в соответствии с предложением 6 определено произведение $p_1^* j^* \alpha \smile \tau_2$, лежащее в группе

$$H^{n+q}(L \times N, (L \times \partial N) \cup (L \times (N \setminus L_1)) \cup (BL \times N); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)).$$

Выше (перед предложением 11) фигурировало произведение $p_1^* j^* \alpha \smile \tau_1$, лежащее в той же группе. Так как τ_2 есть результат ограничения τ_1 , то мы можем представить оба класса одной и той же коцепью пространства $L \times N$. Значит, классы $p_1^* j^* \alpha \smile \tau_1$ и $p_1^* j^* \alpha \smile \tau_2$ также представляются одной коцепью, а так как они представляют элементы одной и той же группы когомологий, то $p_1^* j^* \alpha \smile \tau_1 = p_1^* j^* \alpha \smile \tau_2$.

Возвращаясь к доказательству леммы 3, продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \tau_L / (\alpha \smile \nu_{L_1}) &= (-1)^{nq} (p_1^* j^* \alpha \smile \tau_1) / \nu_{L_1} = (-1)^{nq} (p_1^* j^* \alpha \smile \tau_2) / \nu_{L_1} \\ &= (-1)^{nq} j^* \alpha \smile (\tau_2 / \nu_{L_1}) = (-1)^{nq} j^* \alpha. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством 4 /-произведения из [7; гл. 6, § 1] и только что доказанным в предложении 3 равенством $\tau_2/\nu_{L_1} = 1 \in H^0(L; R)$. Таким образом, $\tau_L/(\alpha \cap \nu_{L_1}) = (-1)^{nq} j^* \alpha$.

Этим завершается доказательство леммы 3.

Тем самым, коммутативность диаграммы установлена. Как следствие получаем равенство $(-1)^{nq} \theta'_q = (\tau_L/g_*)(\cap \mu_K) f^*$ (ср. конец шага 1 доказательства теоремы 4).

Шаг 3. Мы доказали, что отображение $(-1)^{nq} \theta'_q$ совпадает с композицией

$$\begin{aligned} H^q(L, BL; R) &\rightarrow_{f^*} H^q(M, \partial M; R) \rightarrow_{\cap \mu_K} H_{n-q}^c(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M)) \\ &\rightarrow_{g_*} H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow_{\tau_L/} H^q(L, BL; R). \end{aligned}$$

Выберем в этих группах специальным образом базисы и запишем отображения в этих базисах.

Образ отображения f^* , как отмечалось ранее, конечномерен. Тем более конечномерен образ $(\cap \mu_K) f^*$. Выберем базис $\{\rho_\alpha^q\}$ в $H^q(L, BL; R)$ так, что лишь конечное число образов из этого базиса в $H_{n-q}^c(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M))$ при отображении $(\cap \mu_K) f^*$ отличны от нуля.

Проверим следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Образ $H_{n-q}^c(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M))$ в $H_{n-q}^c(M, M \setminus g^{-1}(L_1); \mathcal{H}_n(M))$ конечно порожден.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся, во-первых, тем, что группы сингулярных гомологий в рассматриваемой ситуации совпадают с группами гомологий Бореля–Мура (см. [4; гл. 5, п. 12.6]). Во-вторых, используем двойственность Пуанкаре–Лефшеца (см. [4; гл. 5, теорема 9.3]), в соответствии с которой указанные группы изоморфны $H^q(K; \mathcal{O} \otimes \mathcal{H}_n(M))$ и $H^q(g^{-1}(L_1); \mathcal{O} \otimes \mathcal{H}_n(M))$. Заметим, что пучок локальных гомологий $\mathcal{O}$ для многообразий с краем совпадает с пучком $\mathcal{H}_n(M)_{\text{int } M}$. Поэтому

$$H_c^q(K; \mathcal{O} \otimes \mathcal{H}_n(M)) = H_c^q(K; R_{\text{int } M}) = H_c^q(K, K \cap \partial N; R).$$

Аналогично получаем, что

$$H_{n-q}^c(M, M \setminus g^{-1}(L_1); \mathcal{H}_n(N)) \simeq H^q(g^{-1}(L_1), \partial N \cap g^{-1}(L_1); R).$$

Таким образом, достаточно доказать конечномерность образа $H^q(K, BK; R) \rightarrow H^q(g^{-1}(L_1), \partial N \cap g^{-1}(L_1); R)$. Это в свою очередь следует из конечномерности образа

$$H^q(\text{int } K, \text{int } K \cap \partial N; R) \rightarrow H^q(g^{-1}(L_1), \partial N \cap g^{-1}(L_1); R),$$

которая получается так же, как для f^* выше.

Итак, образ $H_{n-q}^c(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M))$ в $H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$ при действии g_* конечно порожден. Поэтому имеет место разложение в прямую сумму $H_{n-q}^c(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M)) = A_q^1 + A_q^2$. Здесь A_q^1 конечномерно и содержит образ $H^q(L, BL; R)$ при отображении $(\cap \mu_K) f^*$, а A_q^2 содержится в ядре g_* . Пусть

$\{\tilde{\psi}_{n-q}^s\}$ – базис $H_{n-q}^c(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M))$, являющийся объединением базисов A_q^1 и A_q^2 , причем базис A_q^1 составляют векторы с номерами $s = 1, \dots, T$.

Применяя функтор Hom_R , получаем разложение $H^{n-q}(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M))$ в прямую сумму подпространств A_1^q и A_2^q таких, что A_1^q двойственно к A_q^1 , а A_2^q двойственно к A_q^2 . Тогда A_1^q конечномерно и содержит образ

$$g^*: H^{n-q}(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow H^{n-q}(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M)).$$

Пусть $\{\psi_s^{n-q}\}$ – базис $H^{n-q}(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M))$, совместимый с этим разложением, и его элементы с номерами $s = 1, \dots, T$ образуют базис A_1^q , дуальный векторам $\tilde{\psi}_{n-q}^s$ с номерами $1, \dots, T$.

Аналогично мы можем разложить $H_{n-q}^c(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$ в прямую сумму подпространств B_q^1 и B_q^2 , где B_q^1 конечномерно и содержит образ g_* . Пусть $\{\tilde{\eta}_{n-q}^t\}$ – базис $H_{n-q}(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$, являющийся объединением базисов B_q^1 и B_q^2 , причем в B_q^1 содержатся векторы с номерами $t = 1, \dots, T'$. Имеет место двойственное разложение $H^{n-q}(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$ в прямую сумму подпространств B_1^q и B_2^q . При этом B_1^q конечномерно, B_2^q содержит ядро g^* .

Пусть $\{\eta_t^{n-q}\}$ – базис $H^{n-q}(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$, совместимый с этим разложением, и его элементы с номерами $t = 1, \dots, T'$ образуют базис B_1^q , дуальный векторам $\tilde{\eta}_{n-q}^t$ с номерами $1, \dots, T'$.

Пусть $\{\varphi_i^q\}$ – произвольный базис $H^q(M, \partial M; R)$. Так как элемент ψ_s^{n-q} лежит в группе $H^{n-q}(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M))$, то элемент $\psi_s^{n-q} \smile \varphi_i^q$ лежит в группе $H^n(M, (M \setminus K) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M))$ и, следовательно, определен элемент R , равный $\langle \psi_s^{n-q} \smile \varphi_i^q, \mu_K \rangle$. Обозначим его $y_{s,i}^q$.

Введем также обозначения

$$\begin{aligned} f^*(\rho_\alpha^q) &= \sum_i a_{\alpha,i}^q \varphi_i^q, & g^*(\eta_\beta^{n-q}) &= \sum_s b_{\beta,s}^{n-q} \psi_s^{n-q}, \\ g_*(\tilde{\psi}_{n-q}^r) &= \sum_t d_{r,t}^{n-q} \tilde{\eta}_{n-q}^t, & \varphi_i^q \smile \mu_K &= \sum_r e_{i,r}^q \tilde{\psi}_{n-q}^r. \end{aligned}$$

Заметим, что $d_{r,t}^{n-q} = 0$ при $t > T'$ или $r > T$, а $b_{r,t}^{n-q} = 0$ при $r > T'$ или $t > T$. Для ненулевых коэффициентов верно соотношение $d_{r,t}^{n-q} = b_{t,r}^{n-q}$. Поэтому можно считать, что $d_{r,t}^{n-q} = b_{t,r}^{n-q}$ для всех r, t .

Имеем также $e_{i,r}^q = y_{r,i}^q$ при $r \leq T$. Действительно, запишем равенства

$$\begin{aligned} y_{r,i}^q &= \langle \psi_r^{n-q} \smile \varphi_i^q, \mu_K \rangle = \langle \psi_r^{n-q}, \varphi_i^q \smile \mu_K \rangle = \left\langle \psi_r^{n-q}, \sum_s e_{i,s}^q \tilde{\psi}_{n-q}^s \right\rangle \\ &= \sum_s e_{i,s}^q \langle \psi_r^{n-q}, \tilde{\psi}_{n-q}^s \rangle \end{aligned}$$

(мы воспользовались п. 18 из [7; гл. 5, § 6]). Если $r \leq T$, то $\langle \psi_r^{n-q}, \tilde{\psi}_{n-q}^s \rangle = 0$ для $s > T$, так как элементы $\tilde{\psi}_{n-q}^s$ образуют базис A_2^q . При $s \leq T$ базисы ψ_r^{n-q} , $\tilde{\psi}_{n-q}^s$ двойственны, поэтому $\langle \psi_r^{n-q}, \tilde{\psi}_{n-q}^s \rangle = \delta_r^s$. Так что в рассматриваемой ситуации $\sum_s e_{i,s}^q \langle \psi_r^{n-q}, \tilde{\psi}_{n-q}^s \rangle = e_{i,r}^q$, что нам и нужно.

Обратим внимание на то, что коэффициенты типов b, c, d (где c определены перед шагом 1 доказательства теоремы 4) отличны от нуля лишь для конечного

набора всех индексов. Если мы фиксируем α , то лишь для конечного набора остальных индексов ненулевыми могут быть коэффициенты типов $a_{\alpha,i}^q, c_{\alpha,\beta}^q$.

Вычислим $\theta'_q(\rho_\alpha^q)$. В работе Давидяна [1] в рассматриваемых им условиях установлена формула

$$\theta'_q(\rho_\alpha^q) = (-1)^{nq} \sum_{i,r\gamma,\beta} c_{\gamma,\beta}^q a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q d_{r,\beta}^{n-q} \rho_\gamma^q.$$

Она имеет место и в нашем случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Верно равенство*

$$\theta'_q(\rho_\alpha^q) = (-1)^{nq} \sum_{i,r\gamma,\beta} c_{\gamma,\beta}^q a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q d_{r,\beta}^{n-q} \rho_\gamma^q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем равенства

$$\begin{aligned} (-1)^{nq} \theta'_q(\rho_\alpha^q) &= (\tau_L / g_*) (\cap \mu_K) f^*(\rho_\alpha^q) = \tau_L / g_*(f^*(\rho_\alpha^q) \cap \mu_K) \\ &= \tau_L / g_* \left(\sum_i a_{\alpha,i}^q \varphi_i^q \cap \mu_K \right) = \tau_L / \left(\sum_{i,r} a_{\alpha,i}^q e_{i,r}^q g_*(\tilde{\psi}_{n-q}^r) \right) \\ &= \tau_L / \left(\sum_{i,r,t} a_{\alpha,i}^q e_{i,r}^q d_{r,t}^{n-q} \tilde{\eta}_{n-q}^t \right) = \tau_L / \left(\sum_{i,r,t} a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q d_{r,t}^{n-q} \tilde{\eta}_{n-q}^t \right) \\ &= \sum_{\gamma,\beta,i,r,t} c_{\gamma,\beta}^q a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q d_{r,t}^{n-q} (\rho_\gamma^q \times \eta_\beta^{n-q}) / \tilde{\eta}_{n-q}^t \\ &= \sum_{\gamma,\beta,i,r,t} c_{\gamma,\beta}^q a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q d_{r,t}^{n-q} \langle \tilde{\eta}_{n-q}^t, \eta_\beta^{n-q} \rangle \rho_\gamma^q = \sum_{i,r\gamma,\beta} c_{\gamma,\beta}^q a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q d_{r,\beta}^{n-q} \rho_\gamma^q. \end{aligned}$$

Мы заменили $e_{i,r}^q$ на $y_{r,i}^q$, так как в соответствующих слагаемых происходит умножение на коэффициент $d_{r,t}^{n-q}$, равный нулю при $r > T$. Использовано выражение для τ_L , полученное перед шагом 1 доказательства теоремы 4.

Эта сумма ненулевая для того конечного набора α , для которого

$$(\cap \mu_K) f^*(\rho_\alpha^q) \neq 0.$$

Просуммировав по всем α коэффициенты при ρ_α^q , получаем

$$\text{СЛЕДСТВИЕ 1. Верно равенство } \Lambda_{f,g} = \sum_{q,\alpha,\beta,i,r} (-1)^{(n+1)q} c_{\alpha,\beta}^q a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q d_{r,\beta}^{n-q}.$$

При этом каждый индекс принимает только конечное число значений.

Заключительный шаг. Найдем аналогичное представление для числа $I_{f,g}$. Как отмечалось при его определении, вместо множества совпадений C мы можем использовать любой компакт, содержащий C . Проверим, что выбранный нами компакт K содержит C . Действительно, $C \subset g^{-1}(f(M))$. Но $K \supset g^{-1}(L_1)$, а $L_1 \supset f(M)$, так что $C \subset K$. Поэтому $I_{f,g} = \langle \tau, (f \times g)_* d_*(\mu_K) \rangle$, где элемент $(f \times g)_* d_*(\mu_K)$ есть образ μ_K при последовательности отображений

$$\begin{aligned} &H_n^c(M, (M \setminus K) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M)) \\ &\rightarrow_{d_*} H_n^c(M \times M, (\partial M \times M) \cup ((M \times M) \setminus d(K)); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(M)) \\ &\rightarrow_{(f \times g)_*} H_n^c(N \times \text{int } N, (\partial N \times \text{int } N) \cup ((N \times \text{int } N) \setminus \Delta); R \hat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)). \end{aligned}$$

Здесь d_* есть отображение гомологий, индуцированное диагональным вложением $d : M \subset M \times M$.

Заметим следующее. Отображение пар

$$(f \times g)d : (M, (M \setminus K) \cup \partial M) \rightarrow (N \times \text{int } N, (\partial N \times \text{int } N) \cup ((N \times \text{int } N) \setminus \Delta))$$

можно представить как следующую композицию:

$$\begin{aligned} (M, (M \setminus K) \cup \partial M) &\rightarrow_{d^1} ((M, \partial M) \times (M, M \setminus K)) \\ &\rightarrow_{f \times g} ((L, BL) \times (\text{int } N, \text{int } N \setminus L_1)) \\ &\rightarrow_l (N \times \text{int } N, (\partial N \times \text{int } N) \cup ((N \times \text{int } N) \setminus \Delta)). \end{aligned}$$

При этом d^1 индуцировано диагональным вложением $d : M \subset M \times M$.

Действия на точках данной композиции отображений и отображения $(f \times g)d$ совпадают, поэтому достаточно убедиться в корректности определений этих отображений. Пусть $x \in \partial M \cup (M \setminus K)$. Тогда

$$d(x) \in (\partial M \times \partial M) \cup ((M \setminus K) \times (M \setminus K)) \subset (\partial M \times M) \cup (M \times (M \setminus K)),$$

поэтому диагональное отображение d задает отображение пар

$$(M, (M \setminus K) \cup \partial M) \rightarrow_{d^1} ((M, \partial M) \times (M, M \setminus K)).$$

Так как $f(M) \subset L$, $f(\partial M) \subset \partial N$, $K \supset g^{-1}(L_1)$, то $f \times g$ задает отображение пар

$$((M, \partial M) \times (M, M \setminus K)) \rightarrow_{f \times g} ((L, BL) \times (\text{int } N, \text{int } N \setminus L_1)).$$

Последнее отображение индуцировано вложением $j : L \subset N$ (с учетом включения $L \subset L_1$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Верно равенство

$$I_{f,g} = \sum_{q,\alpha,\beta,i,r} (-1)^{(n+1)q} c_{\alpha,\beta}^q a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q d_{r,\beta}^{n-q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству Давидяна для постоянных коэффициентов и используя ранее введенные обозначения, имеем

$$I_{f,g} = \langle \tau, (f \times g)_* d_* \mu_K \rangle = \langle \tau, l_*(f \times g)_* d_*^1 \mu_K \rangle.$$

Учитывая, что $l^*(\tau) = \tau_L$, получим

$$\langle \tau, l_*(f \times g)_* d_*^1 \mu_K \rangle = \langle d^{1*}(f \times g)^* l^*(\tau), \mu_K \rangle = \langle d^*(f \times g)^* \tau_L, \mu_K \rangle.$$

Ранее (лемма 2) мы установили, что

$$\tau_L = \sum_{\alpha,\beta,q} c_{\alpha,\beta}^q \rho_\alpha^q \times \eta_\beta^{n-q},$$

где $\{\rho_\alpha^q\}$ – базис векторного пространства $H^q(L, BL; R)$ и $\{\eta_\beta^{n-q}\}$ – базис векторного пространства $H^{n-q}(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) = H^{n-q}(\text{int } N, \text{int } N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$. Тогда имеем

$$\langle d^{1*}(f \times g)^* \tau_L, \mu_K \rangle = \sum_{q,\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}^q \langle f^*(\rho_\alpha^q) \smile g^*(\eta_\beta^{n-q}), \mu_K \rangle.$$

Вспомнив, что

$$f^*(\rho_\alpha^q) = \sum_i a_{\alpha,i}^q \varphi_i^q, \quad g^*(\eta_\beta^{n-q}) = \sum_r b_{\beta,r}^{n-q} \psi_r^{n-q},$$

а $\langle \psi_r^{n-q} \smile \varphi_i^q, \mu_K \rangle = y_{r,i}^q$, получаем, что имеет место равенство

$$I_{f,g} = \sum_{q,\alpha,\beta,i,r} (-1)^{(n-q)q} c_{\alpha,\beta}^q a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q b_{\beta,r}^{n-q}.$$

Вспомним, что $d_{r,t}^{n-q} = b_{t,r}^{n-q}$. Также заметим, что для любого целого числа q число $q - q^2$ четно, поэтому $(-1)^{(n-q)q} = (-1)^{nq-q^2} = (-1)^{nq+q} = (-1)^{(n+1)q}$. При этом каждый индекс в данной сумме пробегает только конечное число значений таких, что произведение $c_{\alpha,\beta}^q a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q b_{\beta,r}^{n-q}$ ненулевое. Поэтому порядок суммирования не имеет значения. Окончательно получаем

$$I_{f,g} = \sum_{q,\alpha,\beta,i,r} (-1)^{(n+1)q} c_{\alpha,\beta}^q a_{\alpha,i}^q y_{r,i}^q d_{r,\beta}^{n-q}.$$

Соединяя этот результат со следствием 1, получаем равенство $I_{f,g} = \Lambda_{f,g}$. Таким образом, теорема 4 доказана.

§ 5. Замечания

Имеются и другие варианты определения числа Лефшеца совпадений, однако все они дают с точностью до знака один и тот же результат. Укажем эти варианты и проверим данный факт.

Пусть, например, $g(\partial M) \subset \partial N$, и пусть $\theta_q = \theta_q^1$ – гомоморфизмы, фигурирующие в определении 1. Пусть $p = n - q$.

Имеются следующие гомоморфизмы, которые также могут быть использованы для определения числа Лефшеца:

- 1) θ_p^2 – отображение $H_p(M, \partial M, \mathcal{H}_n(M))$ в себя, равное $D_M f^* D_N g_*$;
- 2) θ_q^3 – композиция

$$\begin{aligned} H_q^c(M; R) &\rightarrow_{f_*} H_q^c(N; R) =_{D_N} H_c^p(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N)) \\ &\rightarrow_{g_*^c} H_c^p(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M)) =_{D_M} H_q^c(M; R), \end{aligned}$$

т.е. θ_q^3 – отображение $H_q^c(M; R)$ в себя, равное $D_M g_*^c D_N f_*^c$;

- 3) θ_p^4 – отображение $H_c^p(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N))$ в себя, равное $D_N f_*^c D_M g_*^c$

Здесь в случаях 2), 3) использовано следующие соотношение двойственности Пуанкаре:

$$H_q^c(M; R) = H_q^c(\text{int } M; R) =_D H_c^p(\text{int } M; \mathcal{H}_n(M)) = H_c^p(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M))$$

(первое равенство – следствие гомотопической эквивалентности M и $\text{int } M$). Аналогичные равенства имеются для N .

Следы всех этих отображений существуют, так как в каждом случае образ отображения, индуцированного посредством f , конечномерен (в случае 1) это уже доказано, в случаях 2), 3) приходим к этому в соответствии с [15; теорема 2.2, п. 3]).

ЛЕММА 5. Следы всех четырех отображений равны.

Отсюда немедленно получается

СЛЕДСТВИЕ 2. Определенное с помощью θ_q^3 число Лефшеца совпадений равно числу $\Lambda'_{f,g}$, определенному с помощью отображений θ_q^1 , а числа Лефшеца, определенные с помощью θ_p^2, θ_p^4 , равны $(-1)^n \Lambda'_{f,g}$. Так что все эти четыре подхода приводят к одному и тому же числу Лефшеца с точностью до знака.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $\text{Sp } \theta_q^1 = \text{Sp } \theta_p^2$. Выберем специальным образом базис $\{e'_i\}$ в $H^q(N; R)$. Пространство $H^q(N; R)$ представляется в виде прямой суммы $\ker f^* \oplus V$, где V конечномерно и изоморфно отображается на свой образ в $H^q(M; R)$. Пусть $\{e'_i\}$ – базис $H^q(N; R)$ такой, что векторы $\{e'_i, i = 1, \dots, K\}$ образуют базис подпространства V , а оставшиеся векторы образуют базис $\ker f^*$.

Так как образ f^* конечномерен, то конечномерен и образ $f^* D_N g_* D_M$. Поэтому пространство $H^q(M; R)$ представляется в виде прямой суммы

$$\ker(f^* D_N g_* D_M) \oplus V',$$

где V' конечномерно. Выберем базис $\{e''_i\}$ в $H^q(M; R)$ так, чтобы векторы $\{e''_i, i = 1, \dots, L\}$ образовывали базис подпространства V' , а оставшиеся образовывали базис $\ker(f^* D_N g_* D_M)$. В пространствах $H_p(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M))$ и $H_p(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N))$ фиксируем базисы $\{D_M e''_i\}$ и $\{D_N e'_i\}$ (как и выше, символами D_N, D_M обозначаем как отображения из гомологий в когомологии, так и обратные). Пусть в выбранных базисах f^* действует на базисных векторах как $f^*(e'_i) = \sum_j a_i^j e''_j$, а g_* – как $g_*(D_M e''_i) = \sum_j b_i^j D_N e'_j$ (в обоих случаях суммы конечны по j). Коэффициенты a_i^j отличны от нуля для конечного числа индексов i, j .

При данном выборе базисов получаем

$$\begin{aligned} \text{Sp } \theta_q^1 &= \text{Sp}(D_N g_* D_M f^*) = \sum_{i=1, \dots, K} \left(\sum_k b_k^i a_i^k \right), \\ \text{Sp } \theta_p^2 &= \text{Sp}(D_M f^* D_N g_*) = \sum_{i=1, \dots, L} \left(\sum_k a_k^i b_i^k \right). \end{aligned}$$

Теперь заметим, что внешнее суммирование в обоих случаях мы можем производить не по $i = 1, \dots, K$ и $i = 1, \dots, L$, а по всем значениям i . Действительно, в первом случае $a_i^k = 0$ при $i > K$, ведь при $i > K$ имеем $f^*(e'_i) = 0$. Во втором случае имеем равенство $\sum_k a_k^i b_i^k = 0$ при $i > L$, потому что $f^* D_N g_*(D_M e''_i) = 0$ при $i > L$, а $\sum_k b_k^i a_k^j$ представляют собой коэффициенты разложения $f^* D_N g_*(D_M e''_i)$ по векторам базиса $\{D_M e''_j\}$.

Так как отличных от нуля коэффициентов a_k^i лишь конечное число, то и отличных от нуля произведений только конечное число. Поэтому имеют место равенства $\text{Sp } \theta_q^1 = \sum_i (\sum_k b_k^i a_i^k) = \text{Sp } \theta_p^2$. Так что $\text{Sp } \theta_q^1 = \text{Sp } \theta_p^2$.

Аналогично проверяется, что $\text{Sp } \theta_q^3 = \text{Sp } \theta_p^4$.

Проверим, что $\text{Sp } \theta_q^1 = \text{Sp } \theta_q^3$. Вследствие совпадения с сингулярной теорией имеет место формула универсальных коэффициентов, так что

$$\text{Hom}_R(H_q^c(\cdot; R), R) = H^q(\cdot; R).$$

В соответствии с [4; гл. 5, теорема 10.5] имеет место равенство

$$\text{Hom}_R(H_q^c(\cdot; \mathcal{H}_n(M)), R) = H_q(\cdot; \mathcal{H}_n(M))$$

(пользуемся тем, что для топологических многообразий $\mathcal{H}_n(M)^{-1} = \mathcal{H}_n(M)$).

По формулам универсальных коэффициентов, если к $H_q^c(M; R)$ и определяющему θ_q^3 отображению $D_M g_*^c D_N f_*^c$ применить функтор $\text{Hom}_R(\cdot, R)$, то мы получим $H^q(M; R)$ и отображение $f^* D_N g_* D_M$. След этого отображения совпадает со следом $\text{Sp } \theta_p^1$. Действительно, возьмем базис $\{e_i''\}$ в $H^q(M; R)$. Тогда

$$\begin{aligned} f^* D_N g_* D_M(e_i'') &= f^* D_N g_*(D_M e_i'') = f^* D_N \left(\sum_k b_i^k D_N e_j' \right) = f^* \sum_k b_i^k e_j' \\ &= \sum_k \sum_j b_i^k a_k^j e_j''. \end{aligned}$$

Поэтому $\text{Sp } f^* D_N g_* D_M = \sum_k \sum_i b_i^k a_k^i = \text{Sp } \theta_q^1$.

Тем самым, достаточно доказать следующее: для оператора $\theta: V \rightarrow V$ в векторном пространстве V (в нашем случае это пространство $H_q^c(M; R)$ и отображение θ_q^3) с конечномерным образом и сопряженного оператора θ^* образ $\text{Im } \theta^*$ конечномерен и верно равенство $\text{Sp } \theta^* = \text{Sp } \theta$. Отсюда будет следовать, что

$$\text{Sp } \theta_q^3 = \text{Sp } D_M g_*^c D_N f_*^c = \text{Sp}(D_M g_*^c D_N f_*^c)^* = \text{Sp } f^* D_N g_* D_M = \text{Sp } \theta_q^1.$$

Представим V в виде прямой суммы $V = V^1 \oplus V^2$, где V^1 конечномерно и инвариантно под действием θ , а V^2 содержится в ядре. Отсюда следует, что $\text{Sp } \theta = \text{Sp}(\theta|_{V^1})$.

Имеет место разложение, инвариантное по отношению к $\theta^* V^* = (V^1)^* \oplus (V^2)^*$ с конечномерным $(V^1)^*$ и с нулевым ограничением θ^* на $(V^2)^*$.

В сопряженных базисах сопряженные отображения задаются взаимно транспонированными матрицами, поэтому $\text{Sp } \theta = \text{Sp } \theta^*$.

Таким образом, следы всех четырех отображений равны.

В предположении, что $f(\partial M) \subset \partial N$, ситуация аналогичная: имеется четыре способа определить число Лефшеца совпадений, приводящих к одному и тому же результату с точностью до знака.

Список литературы

- [1] В. Р. Давидян, “О точках совпадения двух отображений”, *Матем. сб.*, **112(154):2(6)** (1980), 220–225; англ. пер.: V. R. Davidyan, “On points of coincidence of two mappings”, *Math. USSR-Sb.*, **40:2** (1981), 205–210.
- [2] В. Р. Давидян, “О точках совпадения двух отображений для многообразий с краями”, *УМН*, **38:1** (1983), 149–150; англ. пер.: V. R. Davidyan, “On coincidence points of two maps for manifolds with boundaries”, *Russian Math. Surveys*, **380:1** (1983), 176.
- [3] D. L. Gonçalves, J. Jezierski, “Lefschetz coincidence formula on non-orientable manifolds”, *Fund. Math.*, **153:1** (1997), 1–23.
- [4] Г. Э. Бредон, *Теория пучков*, Наука, М., 1988; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Sheaf theory*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1967.

- [5] J. Leray, “Théorie des points fixes: Indice total et nombre de Lefschetz”, *Bull. Soc. Math. France*, **87** (1959), 221–233.
- [6] L. Górniewicz, “On the Lefschetz fixed point theorem”, *Handbook of topological fixed point theory*, Springer-Verlag, Dordrecht–Berlin, 2005, 43–82.
- [7] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: Е. Н. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1966.
- [8] Е. Г. Скляренко, “О природе гомологических умножений и двойственности”, *УМН*, **49:1** (1994), 141–198; англ. пер.: Е. G. Sklyarenko, “On the nature of homological products and duality”, *Russian Math. Surveys*, **49:1** (1994), 151–215.
- [9] А. Дольд, *Лекции по алгебраической топологии*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **200**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [10] Н. Стинрод, С. Эйленберг, *Основания алгебраической топологии*, Физматгиз, М., 1958; пер. с англ.: S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1952.
- [11] Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961; пер. с фр.: R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
- [12] Е. Г. Скляренко, “К теории обобщенных многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35:4** (1971), 831–843; англ. пер.: Е. G. Skljarenko, “On the theory of generalized manifolds”, *Math. USSR-Izv.*, **5:4** (1971), 845–857.
- [13] А. Гранас, “Generalizing the Hopf–Lefschetz fixed point theorem for non-compact ANR-s”, *Symposium on infinite-dimensional topology* (Louisiana State Univ., Baton Rouge, LA, 1967), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1972, 119–130.
- [14] М. Nakaoka, “Note on the Lefschetz fixed point theorem”, *Osaka J. Math.*, 1969, № 6, 135–142.
- [15] Е. Г. Скляренко, “О гомологически локально связных пространствах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44:6** (1980), 1417–1433; англ. пер.: Е. G. Skljarenko, “On homologically locally connected spaces”, *Math. USSR-Izv.*, **17:3** (1981), 601–614.

Д. В. Артамонов (D. V. Artamonov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: dmitri.artamonov@mail.ru

Поступила в редакцию

30.11.2007 и 28.01.2009