Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский, Пространства дробных отношений, дискретные операторы и их приложения. II, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 11, 67–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:31:36

УДК 517.5

И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский

Пространства дробных отношений, дискретные операторы и их приложения. II

В работе строится теория дискретных операторов в пространствах дробных отношений. Получена теорема об устойчивости дискретных операторов при гладких возмущениях. На основе этого с помощью специальных квадратурных формул типа прямоугольников доказана сходимость приближенных решений гиперсингулярных интегральных уравнений к точным и дано математическое обоснование метода дискретных замкнутых вихревых рамок. Полученная схема рассуждений применяется также к исследованию разностных уравнений при решении однородной задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения с переменными коэффициентами второго порядка.

Библиография: 7 названий.

Введение

В настоящее время широкое применение получил метод дискретных замкнутых вихревых рамок численного решения пространственных задач аэродинамики и аналогичный метод численного решения пространственных задач дифракции волн [1]. Этот метод является методом численного решения соответствующих гиперсингулярных интегральных уравнений с помощью специальных квадратурных сумм типа прямоугольников для гиперсингулярных интегралов. Для доказательства сходимости численных решений, полученных методом дискретных замкнутых вихревых рамок, к точным в работе [2] авторов была построена теория пространств дробных отношений.

В предлагаемой работе строится теория дискретных операторов в пространствах дробных отношений. Получена теорема об устойчивости дискретных операторов при гладких возмущениях. На основе этого доказана сходимость приближенных решений гиперсингулярных интегральных уравнений к точным и дано математическое обоснование метода дискретных замкнутых вихревых рамок. Полученная схема рассуждений применяется также к исследованию разностных уравнений при решении однородной задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения с переменными коэффициентами второго порядка.

§ 1. Аппроксимация операторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Семейство операторов T_h , отображающих пространства $M(r, h)$ в $M(q, h)$, называется *ограниченным*, если $\|T_h\| \leq C$, где C не зависит от h .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Будем говорить, что ограниченное семейство операторов T_h , отображающих $M(r, h)$, $r > 0$, в $M(q, h)$, $q < 0$, слабо аппроксимирует ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$, если $T_h \prod_h^* a(x) \rightarrow Ta(x)$ по норме $H_q(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0 \forall a(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ (определение $\prod_h^*$ см. в [2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Предположим, что ограниченное семейство операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, слабо аппроксимирует ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$. Тогда для любой $u(x) \in H_r(\mathbb{R}_n)$ имеет место соотношение*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|Tu(x) - T_h \prod_h u(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} = 0, \quad (1.1)$$

где $\prod_h$ — интегральный проектор (см. [2; определение 5.1]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 5.1 из [2] $\prod_h u(x) \in M(r, h)$, следовательно, $T_h \prod_h u(x) \in M(q, h)$, а из теоремы 2.1 (см. [2]) следует, что $T_h \prod_h u(x) \in H_q(\mathbb{R}_n)$. Поэтому левая часть (1.1) имеет смысл. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, тогда, используя предложение 5.9 (см. [2]), а также неравенство

$$\begin{aligned} \|T_h \prod_h \varphi(x) - T\varphi(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} &\leq \|T_h \prod_h^* \varphi(x) - T\varphi(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\ &\quad + \|T_h [\prod_h \varphi(x) - \prod_h^* \varphi(x)]\|_{H_q(\mathbb{R}_n)}, \end{aligned}$$

получаем

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|T_h \prod_h \varphi(x) - T\varphi(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} = 0. \quad (1.2)$$

Пусть $u(x) \in H_r(\mathbb{R}_n)$ — некоторая функция. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда, так как пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ всюду плотно в $H_r(\mathbb{R}_n)$, найдется функция $\varphi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ такая, что $\|u(x) - \varphi_\varepsilon(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon$. Из соотношения (1.2) вытекает, что существует $\delta(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x)) > 0$ такое, что для всех h , $|h| < \delta(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x))$, справедлива оценка $\|T_h \prod_h \varphi_\varepsilon(x) - T\varphi_\varepsilon(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon$. Используя теорему 5.1 (см. [2]) об ограниченности интегрального проектора, получаем

$$\begin{aligned} &\|T_h \prod_h u(x) - Tu(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\ &= \|T_h \prod_h (u(x) - \varphi_\varepsilon(x)) + T_h \prod_h \varphi_\varepsilon(x) - T\varphi_\varepsilon(x) + T(\varphi_\varepsilon(x) - u(x))\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\ &\leq \|T_h\| \cdot \|\prod_h (u(x) - \varphi_\varepsilon(x))\|_{M(r, h)} + \|T_h \prod_h \varphi_\varepsilon(x) - T\varphi_\varepsilon(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\ &\quad + \|T\| \cdot \|\varphi_\varepsilon(x) - u(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \leq C_1\varepsilon + \varepsilon + C_2\varepsilon, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 не зависят от h . Из последнего неравенства следует предложение 1.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Предположим, что ограниченное семейство операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, слабо аппроксимирует ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$. Тогда для любой $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$, где Ω – нормальная область, допускающая разбиение (см. [2]), имеет место соотношение*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| T_h \prod_{1h} u(x) - Tu(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} = 0, \quad (1.3)$$

где оператор $\prod_{1h}$ является сужением интегрального проектора $\prod_h$ на область Ω_{1h} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ – некоторая функция. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$; тогда, так как пространство $C_0^\infty(\Omega)$ всюду плотно в $\mathring{H}_r(\Omega)$, найдется функция $\varphi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что будет выполняться неравенство $\|u(x) - \varphi_\varepsilon(x)\|_{\mathring{H}_r(\Omega)} < \varepsilon$. Ввиду того что $\text{supp } \varphi_\varepsilon(x) \subset \Omega$, найдется $\delta > 0$ такое, что $\Omega_{1h} \supset \text{supp } \varphi_\varepsilon(x)$ при $|h| < \delta$ и, следовательно, $\prod_h \varphi_\varepsilon(x) = \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x)$ для $|h| < \delta$. Из предложения 1.1 следует, что существует $\delta_1(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x))$ такое, что $\|T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) - T\varphi_\varepsilon(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon$ при $|h| < \delta_1(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x))$. Отсюда, взяв $\delta_2 = \min(\delta, \delta_1(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x)))$, получим, что при $|h| < \delta_2$ выполняется неравенство $\|T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) - T\varphi_\varepsilon(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon$. Так как область Ω допускает разбиение, то оператор $\prod_{1h}$ является равномерно ограниченным по $h = (h_1, \dots, h_n)$ из $\mathring{H}_r(\Omega)$ в $\mathring{M}(r, h, \Omega_{1h})$. Используя этот факт, получаем при $|h| < \delta_2$:

$$\begin{aligned} & \left\| T_h \prod_{1h} u(x) - Tu(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\ &= \left\| T_h \prod_{1h} (u(x) - \varphi_\varepsilon(x)) + T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) - T\varphi_\varepsilon(x) + T(\varphi_\varepsilon(x) - u(x)) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\ &\leq \|T_h\| \cdot \left\| \prod_{1h} \right\| \cdot \|u(x) - \varphi_\varepsilon(x)\|_{\mathring{H}_r(\Omega)} + \left\| T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) - T\varphi_\varepsilon(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\ &\quad + \|T\| \cdot \|\varphi_\varepsilon(x) - u(x)\|_{\mathring{H}_r(\Omega)} < C_1\varepsilon + \varepsilon + C_2\varepsilon, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 не зависят от h . Из последнего неравенства следует предложение 1.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$, $r > 0$, $q < 0$, будем называть *оператором конечного порядка*, если $T\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R}_n)$ $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Будем говорить, что ограниченное семейство линейных операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, *сильно аппроксимирует* ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$ конечного порядка, если $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ выполняется соотношение

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| T_h \prod_h \varphi_\varepsilon(x) - T\varphi_\varepsilon(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} = 0. \quad (1.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Будем говорить, что ограниченное семейство операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, аппроксимирует в области Ω ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$ конечного порядка, если $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ выполняется соотношение

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| P_h T_h \prod_{1h} \varphi(x) - P_h T \varphi(x) \right\|_{L_2(\Omega_{1h})} = 0, \quad (1.5)$$

где P_h — оператор сужения на область Ω_{1h} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Предположим, что ограниченное семейство операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, аппроксимирует в ограниченной области Ω ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$ конечного порядка. Тогда для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ существует продолжение l_h функции $P_h T_h \prod_{1h} \varphi(x)$ с области Ω_{1h} на все $\mathbb{R}_n$, которое удовлетворяет условиям:

- 1) $l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi(x)$ является ступенчатой функцией с ячейками постоянства $D(k, h)$ и $a(x, h) = l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi(x) = 0$ при

$$x \in D(k, h) \subset \Omega_{2h} \setminus \overline{\Omega_{1h}};$$

- 2) $\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi(x) - T \varphi(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} = 0.$

$$(1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем последовательность $\{\varepsilon_j > 0\}_{j=1}^\infty$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$, и произвольную функцию $\varphi_0(x) \in C_0^\infty(\Omega)$. Так как $T \varphi(x) \in L_2(\mathbb{R}_n) \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, а множество функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R}_n)$, то найдется последовательность $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^\infty$, $\varphi_j(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, такая, что будет выполняться неравенство $\|T \varphi_0(x) - \varphi_j(x)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon_j$. По последовательности $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ найдем такую последовательность $\{\delta_j > 0\}_{j=1}^\infty$, $\delta_j \rightarrow 0$, что для всех h , $|h| < \delta_j$, и для каждой фиксированной $\varphi_j(x)$ будет выполняться неравенство

$$\left\| \prod_h^* \varphi_j(x) - \varphi_j(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon_j. \quad (1.7)$$

Возьмем какое-нибудь h , удовлетворяющее условию $\delta_{j+1} \leq |h| < \delta_j$, тогда продолжение $l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_0(x)$ определим следующим образом:

1. $l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_0(x) = P_h T_h \prod_{1h} \varphi_0(x)$, если $x \in D(k, h) \subset \Omega_{1h}$;
2. $l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_0(x) = \prod_h^* \varphi_j(x)$, если $x \in D(k, h) \subset \mathbb{R}_n \setminus \overline{\Omega_{2h}}$;
3. $l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_0(x) = 0$, если $x \in D(k, h) \subset \Omega_{2h} \setminus \overline{\Omega_{1h}}$.

Из конструкции l_h ясно, что выполняется свойство 1), указанное в предложении 1.3. Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} & \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_0(x) - T \varphi_0(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 \\ &= \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_0(x) - T \varphi_0(x) \right\|_{L_2(\Omega_{1h})}^2 \\ & \quad + \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_0(x) - T \varphi_0(x) \right\|_{L_2(\Omega_{2h} \setminus \overline{\Omega_{1h}})}^2 \\ & \quad + \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_0(x) - T \varphi_0(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_n \setminus \overline{\Omega_{2h}})}^2 \\ &= I_1(h) + I_2(h) + I_3(h). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Так как $\Omega_{1h} \supset \overline{\text{supp } \varphi_0(x)}$ при $|h| \rightarrow 0$, $\varphi_0(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, то из условия аппроксимации получим, что

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} I_1(h) = 0. \quad (1.9)$$

Так как $\mu(\Omega_{2h} \setminus \overline{\Omega}_{1h}) \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$ (где $\mu(\Omega_{2h} \setminus \overline{\Omega}_{1h})$ – мера множества $\Omega_{2h} \setminus \overline{\Omega}_{1h}$), то

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} I_2(h) = 0. \quad (1.10)$$

Пусть $\delta_{j+1} \leq |h| < \delta_j$, тогда из (1.7) получим:

$$\begin{aligned} I_3^{1/2}(h) &\leq \|l_h P_h T_h \varphi_0(x) - \varphi_j(x)\|_{L_2(\mathbb{R}_n \setminus \overline{\Omega}_{2h})} + \|\varphi_j(x) - T \varphi_0(x)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \\ &\leq \left\| \prod_h^* \varphi_j(x) - \varphi_j(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} + \varepsilon_j < 2\varepsilon_j. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ввиду того что $j \rightarrow \infty$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, из (1.11) следует

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} I_3(h) = 0. \quad (1.12)$$

Из (1.9), (1.10), (1.12) следует (1.6). Из последнего замечания вытекает предложение 1.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. *Оператор сужения* P_{1h} ступенчатой функции $a(x, h)$ на ограниченную область Ω определим следующим образом: $P_{1h}a(x, h) = a(x, h)$ при $x \in D(k, h) \subset \Omega_{1h}$; $P_{1h}a(x, h) = 0$ при $x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_{1h}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Предположим, что ограниченное семейство операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, аппроксимирует в ограниченной, нормальной, допускающей разбиение области Ω ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$ конечного порядка. Тогда для любой $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ имеет место равенство:*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| P_{1h} T_h \prod_{1h} u(x) - P T u(x) \right\|_{H_q(\Omega)} = 0, \quad (1.13)$$

где $P T u(x)$ – сужение $T u(x)$ на область Ω , т.е. $P T u(x)$ есть сужение линейного функционала $T u(x)$ над $H_{-q}(\mathbb{R}_n)$ на подпространство $\mathring{H}_{-q}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ – некоторая функция. Возьмем $\varepsilon > 0$, тогда найдется функция $\varphi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\|u(x) - \varphi_\varepsilon(x)\|_{\mathring{H}_r(\Omega)} < \varepsilon. \quad (1.14)$$

Из предложения 1.3 следует, что существуют такие $\delta(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x)) > 0$ и функция $l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x)$, что при $|h| < \delta(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x))$ будет выполняться оценка

$$\left\| T \varphi_\varepsilon(x) - l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon. \quad (1.15)$$

Далее при $|h| < \delta(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x))$ получим:

$$\begin{aligned}
& \left\| P_{1h} T_h \prod_{1h} u(x) - P T u(x) \right\|_{H_q(\Omega)} \\
& \leq \left\| P_{1h} T_h \prod_{1h} u(x) - P_{1h} T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) \right\|_{H_q(\Omega)} \\
& \quad + \left\| P_{1h} T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) - P T \varphi_\varepsilon(x) \right\|_{H_q(\Omega)} + \| P T \varphi_\varepsilon(x) - P T u(x) \|_{H_q(\Omega)} \\
& = I_1(h) + I_2(h) + I_3(h).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Из определения нормы в $H_q(\Omega)$ следует, что

$$I_3(h) < \|T\| \cdot \varepsilon. \tag{1.17}$$

Так как область Ω допускает разбиение (см. [2; определение 6.6]), то $\prod_{1h}$ — равномерно ограниченное семейство операторов из $\mathring{H}_r(\Omega)$ в $\mathring{M}(r, h, \Omega_{1h})$. Предложение 6.5 [2] позволяет заключить, что операторы P_{1h} представляют собой равномерно ограниченное семейство операторов из $M(q, h, \Omega_{1h})$ в $H_q(\Omega)$. Из условий предложения 1.4 и определения нормы в $M(q, h, \Omega_{1h})$ (см. [2; определение 6.4]) следует, что семейство операторов T_h равномерно ограничено из $\mathring{M}(r, h, \Omega_{1h})$ в $M(q, h, \Omega_{1h})$. Из сделанных выше замечаний получим:

$$\begin{aligned}
I_1(h) & \leq \|P_{1h}\| \cdot \left\| T_h \prod_{1h} (u(x) - \varphi_\varepsilon(x)) \right\|_{M(q, h, \Omega_{1h})} \\
& \leq \|P_{1h}\| \cdot \|T_h\| \cdot \left\| \prod_{1h} \right\| \cdot \|u(x) - \varphi_\varepsilon(x)\|_{\mathring{H}_r(\Omega)} < k \cdot \varepsilon,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

где k не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Перейдем к рассмотрению $I_2(h)$. Возьмем $l_h P_{1h} T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x)$ в качестве продолжения функции $P_{1h} T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x)$ как элемента $H_q(\mathbb{R}_n)$, что можно сделать ввиду свойств продолжения l_h , доказанных в предложении 1.3; в качестве продолжения $P T \varphi_\varepsilon(x)$ возьмем $T \varphi_\varepsilon(x)$. Тогда на основании определения нормы в $H_q(\Omega)$ и (1.15) имеем:

$$\begin{aligned}
I_2 & \leq \left\| T \varphi_\varepsilon(x) - l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\
& \leq C \left\| T \varphi_\varepsilon(x) - l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \leq C \cdot \varepsilon,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

где C не зависит от h .

Из (1.16)–(1.19) ввиду произвольности ε следует предложение 1.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Предположим, что ограниченное семейство операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, аппроксимирует в ограниченной, нормальной, допускающей разбиение области Ω ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$. Тогда для любой функции $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ существует продолжение $l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) \in M(q, h)$ функции $P_h T_h \prod_{1h} u(x) \in M(q, h, \Omega_{1h})$ такое, что*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) - T u(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} = 0. \tag{1.20}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ – некоторая функция. Возьмем последовательность $\{\varepsilon_j > 0\}_{j=1}^\infty$, $\varepsilon_j \searrow 0$; тогда, так как оператор T ограниченный и пространство функций $C_0^\infty(\Omega)$ всюду плотно в $\mathring{H}_r(\Omega)$, найдется последовательность $\{\varphi_j(x) > 0\}_{j=1}^\infty$, $\varphi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, для которой будет выполняться $\|Tu(x) - T\varphi_j(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon_j$. Из предложения 1.3 следует, что существуют последовательность $\{\delta_j(\varepsilon_j, \varphi_j(x)) > 0\}_{j=1}^\infty$, $\delta_j \searrow 0$, и продолжения $l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_j(x)$ такие, что для всех h , $|h| < \delta_j(\varepsilon_j, \varphi_j(x))$, и для каждой фиксированной функции $\varphi_j(x)$ будет выполняться неравенство

$$\|l_h P_h T_h \varphi_j(x) - T\varphi_j(x)\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon_j, \quad (1.21)$$

а также $\Omega_{1h} \supset \text{supp } \varphi_j(x)$.

Возьмем какое-нибудь h , удовлетворяющее неравенству $\delta_{j+1}(\varepsilon_{j+1}, \varphi_{j+1}(x)) \leq |h| < \delta_j(\varepsilon_j, \varphi_j(x))$; тогда продолжение $l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x)$ определим соотношением

$$l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) = T_h \prod_{1h} u(x) - T_h \prod_{1h} \varphi_j(x) + l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_j(x). \quad (1.22)$$

Из конструкции продолжения $l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_j(x)$, указанной в предложении 1.3, следует, что $P_h l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) = P_h T_h \prod_{1h} u(x)$ и, значит, продолжение, задаваемое (1.22), корректно.

Пусть $|h| < \delta_{n_0}(\varepsilon_{n_0}, \varphi_{n_0}(x))$, тогда, используя теорему 2.1 (см. [2]), получаем при $\delta_{m+1}(\varepsilon_{m+1}, \varphi_{m+1}(x)) \leq |h| < \delta_m(\varepsilon_m, \varphi_m(x)) < \delta_{n_0}(\varepsilon_{n_0}, \varphi_{n_0}(x))$:

$$\begin{aligned} & \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) - Tu(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\ &= \left\| T_h \prod_{1h} u(x) - T_h \prod_{1h} \varphi_m(x) \right. \\ & \quad \left. + l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_m(x) - T\varphi_m(x) + T\varphi_m(x) - Tu(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\ &\leq C \left\| T_h \prod_{1h} (u(x) - \varphi_m(x)) \right\|_{M(q, h)} + \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h} \varphi_m(x) - T\varphi_m(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\ & \quad + \|T(u(x) - \varphi_m(x))\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} < C_1 \varepsilon_m + 2\varepsilon_m = k\varepsilon_m, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где константа k не зависит от h . Из неравенства (1.23) следует предложение 1.5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Будем говорить, что ограниченное семейство операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, $\prod_h^*$ -аппроксимирует в ограниченной области Ω ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$ конечного порядка, если для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ выполняется равенство

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| P_h T_h \prod_h^* \varphi(x) - P_h T \varphi(x) \right\|_{L_2(\Omega_{1h})} = 0, \quad (1.24)$$

где оператор $\prod_h^*$ задается в [2; определение 5.2].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть семейство $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, $\prod_h^*$ -аппроксимирует оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$ в области Ω . Тогда если для некоторого $r_0 > 0$ семейство операторов T_h равномерно ограничено по h из $M(r_0, h)$ в $M(0, h)$, то из [2; предложение 5.9] следует, что семейство T_h аппроксимирует T в области Ω (см. определение 1.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Предположим, что ограниченное семейство операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, Π_h^* -аппроксимирует в ограниченной области Ω ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$ конечного порядка. Тогда для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ существует продолжение l_h функции $P_h T_h \Pi_{1h}^* \varphi(x)$, которое удовлетворяет условиям:*

1. $l_h P_h T_h \Pi_{1h}^* \varphi(x)$ является ступенчатой функцией с ячейками постоянства $D(k, h)$ и $a(x, h) = l_h P_h T_h \Pi_{1h}^* \varphi(x) = 0$ при $x \in D(k, h) \subset \Omega_{2h} \setminus \overline{\Omega}_{1h}$;
2. $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|l_h P_h T_h \Pi_{1h}^* \varphi(x) - T\varphi(x)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} = 0$,

где Π_{1h}^* – сужение оператора Π_h^* на область Ω_{1h} .

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. *Предположим, что ограниченное семейство операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, Π_h^* -аппроксимирует в ограниченной, нормальной, допускающей разбиение области Ω ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$. Тогда для любой $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ имеет место соотношение*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|P_{1h} T_h \Pi_{1h} u(x) - P T u(x)\|_{H_q(\Omega)} = 0. \quad (1.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ – некоторая функция. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда найдется функция $\varphi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\|u(x) - \varphi_\varepsilon(x)\|_{\mathring{H}_r(\Omega)} < \varepsilon. \quad (1.26)$$

Из предложения 1.6 следует, что существуют функция $l_h P_h T_h \Pi_{1h}^* \varphi_\varepsilon(x)$ и $\delta(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x)) > 0$ такие, что $\forall h, |h| < \delta(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x))$, будет выполняться неравенство

$$\|T\varphi_\varepsilon(x) - l_h P_h T_h \Pi_{1h}^* \varphi_\varepsilon(x)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon.$$

Из предложения 5.9 (см. [2]) следует: существует $\delta_1(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x))$ такое, что $\Omega_{1h} \supset \text{supp } \varphi_\varepsilon(x)$ для всех $h, |h| < \delta_1(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x))$, а также

$$\|\Pi_{1h}^* \varphi_\varepsilon(x) - \Pi_{1h} \varphi_\varepsilon(x)\|_{M(r, h)} < \varepsilon. \quad (1.27)$$

Далее для всех $h, |h| < \delta_2 = \min\{\delta_1(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x)), \delta(\varepsilon, \varphi_\varepsilon(x))\}$, получим:

$$\begin{aligned} & \|P_{1h} T_h \Pi_{1h} u(x) - P T u(x)\|_{H_q(\Omega)} \\ & \leq \|P_{1h} T_h \Pi_{1h} u(x) - P_{1h} T_h \Pi_{1h} \varphi_\varepsilon(x)\|_{H_q(\Omega)} \\ & \quad + \|P_{1h} T_h \Pi_{1h} \varphi_\varepsilon(x) - P_{1h} T_h \Pi_{1h}^* \varphi_\varepsilon(x)\|_{H_q(\Omega)} \\ & \quad + \|P_{1h} T_h \Pi_{1h}^* \varphi_\varepsilon(x) - P T \varphi_\varepsilon(x)\|_{H_q(\Omega)} + \|P T \varphi_\varepsilon(x) - P T u(x)\|_{H_q(\Omega)} \\ & = \sum_{k=1}^4 I_k(h). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Аналогично, как и при доказательстве предложения 1.4, выводятся неравенства

$$I_i(h) < k \cdot \varepsilon, \quad i = 1, 3, 4, \quad (1.29)$$

где k не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Для оценки $I_2(h)$ воспользуемся предложением 6.5 (см. [2]) и (1.27):

$$\begin{aligned} I_2(h) &= C \left\| P_h T_h \left(\prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) - \prod_{1h}^* \varphi_\varepsilon(x) \right) \right\|_{M(q, h, \Omega_{1h})} \\ &\leq C_1 \left\| \prod_{1h} \varphi_\varepsilon(x) - \prod_{1h}^* \varphi_\varepsilon(x) \right\|_{M(r, h)} = C_1 \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Из неравенств (1.29) и (1.30) следует предложение 1.7.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. *Предположим, что ограниченное семейство операторов $T_h: M(r, h) \rightarrow M(q, h)$, $r > 0$, $q < 0$, $\prod_{1h}^*$ -аппроксимирует в ограниченной, нормальной, допускающей разбиение области Ω ограниченный оператор $T: H_r(\mathbb{R}_n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$ конечного порядка. Тогда для любой функции $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ существует продолжение $l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) \in M(q, h)$ функции $P_h T_h \prod_{1h} u(x) \in M(q, h, \Omega_{1h})$ такое, что*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) - T u(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} = 0. \quad (1.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ — некоторая функция. Возьмем последовательность $\{\varepsilon_j > 0\}_{j=1}^\infty$, $\varepsilon_j \searrow 0$. Тогда существует такая последовательность $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^\infty$, $\varphi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, для которой выполняется условие:

$$\|u(x) - \varphi_j(x)\|_{\mathring{H}_r(\Omega)} < \frac{\varepsilon_j}{\|T\|}. \quad (1.32)$$

Из предложения 1.6 следует: найдутся последовательность $\{\delta_j(\varepsilon_j, \varphi_j(x)) > 0\}_{j=1}^\infty$, $\delta_j(\varepsilon_j, \varphi_j(x)) \searrow 0$, и продолжения $l_h P_h T_h \prod_{1h}^* \varphi_j(x)$ такие, что $\Omega_{1h} \supset \text{supp } \varphi_j(x)$ для всех h , $|h| < \delta_j(\varepsilon_j, \varphi_j(x))$, и для каждой фиксированной функции $\varphi_j(x)$, а также

$$\left\| l_h P_h T_h \prod_{1h}^* \varphi_j(x) - T \varphi_j(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} < \varepsilon_j. \quad (1.33)$$

Возьмем какое-нибудь h , удовлетворяющее неравенству $\delta_{j+1}(\varepsilon_{j+1}, \varphi_{j+1}(x)) \leq |h| < \delta_j(\varepsilon_j, \varphi_j(x))$, тогда продолжение $l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x)$ определим соотношением:

$$l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) = T_h \prod_{1h} u(x) - T_h \prod_{1h} \varphi_j(x) + l_h P_h T_h \prod_{1h}^* \varphi_j(x). \quad (1.34)$$

Из конструкции $l_h P_h T_h \prod_{1h}^*$, которая совпадает с указанной в предложении 1.3, следует, что $P_h l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) = P_h T_h \prod_{1h} u(x)$ и, следовательно, продолжение, задаваемое (1.34), корректно. Пусть $|h| < \delta_{n_0}(\varepsilon_{n_0}, \varphi_{n_0}(x))$, тогда, используя теорему 2.1 (см. [2]), при $\delta_{m+1}(\varepsilon_{m+1}, \varphi_{m+1}(x)) \leq |h| < \delta_m(\varepsilon_m, \varphi_m(x)) < \delta_{n_0}(\varepsilon_{n_0}, \varphi_{n_0}(x))$ получаем:

$$\begin{aligned}
& \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) - T u(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\
&= \left\| T_h \prod_{1h} u(x) - T_h \prod_{1h} \varphi_m(x) + l_h P_h T_h \prod_{1h}^* \varphi_m(x) \right. \\
&\quad \left. - T \varphi_m(x) + T \varphi_m(x) - T u(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} \\
&\leq C \cdot \left\| T_h \prod_{1h} (u(x) - \varphi_m(x)) \right\|_{M(q,h)} \\
&\quad + \left\| l_h P_h T_h \prod_{1h}^* \varphi_m(x) - T \varphi_m(x) \right\|_{H_q(\mathbb{R}_n)} + \|T\| \cdot \|\varphi_m(x) - u(x)\|_{\dot{H}_r(\mathbb{R}_n)} \\
&< k \varepsilon_{n_0}, \tag{1.35}
\end{aligned}$$

где k не зависит от h . Из (1.35) следует предложение 1.8.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Будем говорить, что ограниченное семейство операторов T_h , отображающих $\dot{M}(r, h, \Omega_{1h})$ в $M(q, h)$, $r > 0, q < 0$, $\prod_h^*$ -аппроксимирует в ограниченной области Ω ограниченный оператор $T: \dot{H}_r(\Omega) \rightarrow H_q(\mathbb{R}_n)$ конечного порядка, если для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется соотношение:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| P_h T_h \prod_{1h} u(x) - P_h T \varphi(x) \right\|_{L_2(\Omega_{1h})} = 0. \tag{1.36}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если в нормальной, допускающей разбиение области Ω ограниченное семейство операторов T_h из $\dot{M}(r, h, \Omega_{1h})$ в $M(q, h)$, $r > 0, q < 0$, $\prod_h^*$ -аппроксимирует ограниченный оператор T конечного порядка, отображающий $\dot{H}_r(\Omega)$ в $H_q(\mathbb{R}_n)$, то, как видно из доказательств предложений 1.3–1.8, эти предложения остаются в силе для вышеуказанного семейства T_h и оператора T .

§ 2. Сходимость приближенных решений и существование решений операторных уравнений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Ограниченное семейство операторов T_h из $\dot{M}(r, h, \Omega_{1h})$ в $M(-r, h)$, $r > 0$, называется *устойчивым*, если существуют числа $\delta_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что для любой $a(x, h) \in \dot{M}(r, h, \Omega_{1h})$ и для всех $h, |h| < \delta_0$, выполняется оценка

$$\|P_h T_h a(x, h)\|_{M(-r, h, \Omega_{1h})} \geq C \|a(x, h)\|_{\dot{M}(r, h, \Omega_{1h})}, \tag{2.1}$$

где P_h – оператор сужения на Ω_{1h} , C не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Семейство функций $a(x, h) \in \overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$, $r \geq 0$, называется *сходящимся* в $\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$ к функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$, если имеет место равенство

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| \prod_{1h} u(x) - a(x, h) \right\|_{\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})} = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Семейство функций $a(x, h) \in \overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$, $r \geq 0$, называется *слабо сходящимся* в $\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$ к функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$, если имеет место соотношение

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| \prod_{1h} u(x) - a(x, h) \right\|_{\overset{\circ}{M}(r_0, h, \Omega_{1h})} = 0$$

для любого $r_0 < r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть устойчивое семейство операторов T_h , отображающее $M(r, h)$ на $M(-r, h)$, слабо аппроксимирует ограниченный оператор T из $H_r(\mathbb{R}_n)$ в $H_{-r}(\mathbb{R}_n)$, $r > 0$, и пусть, кроме того, для любой функции $f(x) \in H_{-r}(\mathbb{R}_n)$ уравнение $Tu = f$ имеет решение. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. решение уравнения $Tu = f$ единственно;
2. функции $a(x, h) \in M(r, h)$, являющиеся решениями уравнений $T_h a(x, h) = f(x, h)$, $f(x, h) \in M(-r, h)$, $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|f(x) - f(x, h)\|_{H_{-r}(\mathbb{R}_n)} = 0$, сходятся к решению уравнения $Tu = f$ в $M(r, h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции $u_1(x), u_2(x) \in H_r(\mathbb{R}_n)$ являются решениями уравнения $Tu = f$. Тогда из предложения 1.1 следует, что $T_h \prod_h u_1(x) \rightarrow f(x)$, $T_h \prod_h u_2(x) \rightarrow f(x)$ по норме $H_{-r}(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$. Отсюда по теореме 2.1 $T_h \prod_h (u_1(x) - u_2(x)) \rightarrow 0$ по норме $M(-r, h)$ при $|h| \rightarrow 0$. Из устойчивости семейства T_h вытекает, что $\prod_h (u_1(x) - u_2(x)) \rightarrow 0$ по норме $M(r, h)$ при $|h| \rightarrow 0$. Используя предложение 5.11 (см. [2]), получаем $u_1(x) = u_2(x)$. Единственность решения $Tu = f$ доказана.

Так как операторы T_h отображают $M(r, h)$ на $M(-r, h)$, то решение уравнения $T_h a(x, h) = f(x, h)$ существует. Семейство T_h устойчиво, поэтому существует $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$ уравнение имеет единственное решение. Из теоремы 2.1 (см. [2]) и предложения 1.1 имеем: $T_h(a(x, h) - \prod_h u(x)) \rightarrow 0$ по норме $M(-r, h)$ при $|h| \rightarrow 0$. Отсюда и из устойчивости семейства T_h следует, что

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| \prod_h u(x) - a(x, h) \right\|_{M(r, h)} = 0.$$

Предложение 2.1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть в нормальной, допускающей разбиение области Ω устойчивое семейство операторов $T_h: \overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h}) \rightarrow M(-r, h)$, $r > 0$, $\prod_h^*$ -аппроксимирует ограниченный оператор T конечного порядка, отображающий $\overset{\circ}{H}_r(\Omega)$ в $H_{-r}(\Omega)$. Если для любой функции $f(x) \in H_{-r}(\Omega)$ уравнение $PTu = f$ имеет решение (P – оператор сужения на область Ω), то:

1. решение уравнения $PTu = f$ единственно;

2. решения $a(x, h) \in \overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$ уравнений $P_h T_h a(x, h) = P_h f(x, h)$, $f(x, h) \in M(-r, h)$, $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|lf(x) - f(x, h)\|_{H_{-r}(\mathbb{R}_n)} = 0$, сходятся к решению $u(x)$ уравнения $PTu = f(x)$ в $\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$, где P_h – оператор сужения на Ω_{1h} , $lf(x)$ – некоторое продолжение $f(x) \in H_{-r}(\Omega)$ на $\mathbb{R}_n$, $lf(x) \in H_{-r}(\mathbb{R}_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции $u_1(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$ и $u_2(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$ являются решениями уравнения $PTu = f$, $f(x) \in H_{-r}(\Omega)$. Тогда по замечанию 1.2 существуют такие продолжения $l_{1h}P_h T_h \prod_{1h} u_1(x)$ и $l_{2h}P_h T_h \prod_{1h} u_2(x)$ функций $l_h P_h T_h \prod_{1h} u_1(x)$ и $l_h P_h T_h \prod_{1h} u_2(x)$, что $l_{1h}P_h T_h \prod_{1h} u_1(x) \rightarrow Tu_1(x)$ и $l_{2h}P_h T_h \prod_{1h} u_2(x) \rightarrow Tu_2(x)$ по норме $H_{-r}(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$. Из предложения 6.12 (см. [2]) следует: $P_h T_h \prod_{1h} (u_1(x) - u_2(x)) \rightarrow 0$ по норме $M(-r, h, \Omega_{1h})$ при $|h| \rightarrow 0$. Отсюда и из устойчивости семейства T_h имеем: $\prod_{1h} (u_1(x) - u_2(x)) \rightarrow 0$ по норме $\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$ при $|h| \rightarrow 0$. Используя предложение 6.9 (см. [2]), получаем $u_1(x) = u_2(x)$. Единственность решения уравнения $PTu = f(x)$ доказана.

Пространства $\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$ и $M(-r, h, \Omega_{1h})$ конечномерны и имеют одинаковую размерность. Семейство операторов T_h устойчиво, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$ существует единственное решение уравнения $P_h T_h a(x, h) = P_h f(x, h)$.

По замечанию 1.2 существует такое продолжение $l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x)$ функции $P_h T_h \prod_{1h} u(x)$, что $l_h P_h T_h \prod_{1h} u(x) \rightarrow Tu(x)$ по норме $H_{-r}(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$.

Из предложения 6.12 (см. [2]) следует, что $P_h T_h (\prod_{1h} u(x) - a(x, h)) \rightarrow 0$ по норме $M(-r, h, \Omega_{1h})$ при $|h| \rightarrow 0$. Отсюда и из устойчивости семейства T_h вытекает $\|\prod_{1h} u(x) - a(x, h)\|_{\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})} \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$. Предложение 2.2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть в нормальной, допускающей разбиение области Ω устойчивое семейство операторов $T_h: \overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h}) \rightarrow M(-r, h)$, $r > 0$, $\prod_h^*$ -аппроксимирует ограниченный оператор $T: \overset{\circ}{H}_r(\Omega) \rightarrow H_r(\Omega)$ конечного порядка и при некотором $r_0 < r$ семейство операторов T_h ограничено из $\overset{\circ}{M}(r_0, h, \Omega_{1h})$ в $M(q, h)$. Тогда существует и единственно решение уравнения $PTu = f$ для любой $f \in H_{-r}(\Omega)$ (здесь $u(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$, P – оператор сужения на Ω).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность решения следует из предложения 2.2. Равенство $PTu = f$ понимается как равенство двух линейных функционалов над пространством $\overset{\circ}{H}_r(\Omega)$, т.е. для любой функции $\nu(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$ должно выполняться

$$(\nu, PTu) = (\nu, f),$$

где (ν, PTu) и (ν, f) – обозначения линейных функционалов, определяемых функциями $PTu(x)$ и $f(x)$. Нужно отметить, что эти функционалы не зависят от продолжения PT и f (см. [3]) как линейных функционалов на $H_r(\mathbb{R}_n)$. В качестве продолжения PTu возьмем Tu , а в качестве продолжения f возьмем то, которое обладает минимальной нормой в $H_{-r}(\mathbb{R}_n)$, оно существует, поскольку $H_{-r}(\mathbb{R}_n)$ является

гильбертовым пространством, обозначать это продолжение будем через lf . Итак, под решением $u(x)$ уравнения $PTu = f$ понимается функция $u(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$ такая, что для любой функции $\nu(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$ выполняется равенство

$$(\nu, Tu) = (\nu, lf). \quad (2.2)$$

Согласно предложению 6.8 (см. [2]) существует семейство функций $f(x, h) \in M(-r, h)$ такое, что $f(x, h) \rightarrow lf(x)$ по норме $H_{-r}(\mathbb{R}_n)$, $P_{1h}f(x, h) \rightarrow f(x)$ по норме $H_{-r}(\Omega)$ при $|h| \rightarrow 0$, где P_{1h} – оператор сужения на Ω (см. определение 1.6). Рассмотрим семейство уравнений

$$P_h T_h a(x, h) = P_h f(x, h), \quad (2.3)$$

где P_h – оператор сужения на область Ω_{1h} .

Так как семейство операторов T_h устойчиво, то существует такое число $\delta > 0$, что при всех h , $|h| < \delta$, решения $a(x, h)$ уравнений (2.3) существуют и единственны. Кроме того, выполняется неравенство $\|a(x, h)\|_{\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})} < C \|f(x)\|_{H_{-r}(\Omega)}$. Отсюда согласно предложению 6.2 из [2] существуют последовательность $\{h^n\}_{n=1}^\infty$, $|h^n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, число r_0 , $0 < r_0 < \frac{1}{2}$, $r_0 < r$, и функция $a(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$ такие, что $a(x, h^n) \rightarrow a(x)$ по норме $\overset{\circ}{H}_{r_0}(\Omega)$ при $|h^n| \rightarrow 0$. Докажем, что функция $a(x)$ удовлетворяет соотношению (2.2). Согласно замечанию 1.2 (см. предложение 1.7) для $PTa(x)$, сужения линейного функционала $Ta(x)$ на $\overset{\circ}{H}_r(\Omega)$, имеет место представление

$$PTa(x) = P_{1h^n} T_{h^n} \prod_{1h^n} a(x) + \varepsilon(x, h^n), \quad (2.4)$$

где $\varepsilon(x, h^n) \rightarrow 0$ по норме $H_{-r}(\Omega)$ при $|h^n| \rightarrow 0$. Отсюда вытекает

$$(\nu, Ta(x)) = \lim_{|h^n| \rightarrow 0} \left(\nu(x), P_{1h^n} T_{h^n} \prod_{1h^n} a(x) \right). \quad (2.5)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} (\nu, Ta(x)) &= \lim_{|h^n| \rightarrow 0} (\nu, P_{1h^n} T_{h^n} a(x, h^n)) \\ &\quad + \lim_{|h^n| \rightarrow 0} \left(\nu(x), P_{1h^n} T_{h^n} \left(\prod_{1h^n} a(x) - a(x, h^n) \right) \right) \\ &= \lim_{|h^n| \rightarrow 0} (\nu, P_{1h^n} f(x, h^n)) \\ &\quad + \lim_{|h^n| \rightarrow 0} \left(\prod_{1h^n} \nu(x), P_{h^n} T_{h^n} \left(\prod_{1h^n} a(x) - a(x, h^n) \right) \right) \\ &= (\nu, lf(x)) + \lim_{|h^n| \rightarrow 0} I(h^n). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из предложения 6.14 (см. [2]) следует $\|\prod_{1h^n} a(x) - a(x, h^n)\|_{\dot{M}(r_1, h^n, \Omega_{1h^n})} \rightarrow 0$ для любого $r_1 < r$. По условию предложения 2.3 существует такое $r_0 < r$, что семейство операторов T_{h^n} будет ограниченным из $\dot{M}(r_0, h^n, \Omega_{1h^n})$ в $M(q, h^n)$. Отсюда при $|h^n| \rightarrow 0$ имеем:

$$\begin{aligned} & \left\| P_{h^n} T_{h^n} \left(\prod_{1h^n} a(x) - a(x, h^n) \right) \right\|_{M(q, h^n, \Omega_{1h^n})} \\ & \leq \left\| T_{h^n} \left(\prod_{1h^n} a(x) - a(x, h^n) \right) \right\|_{M(q, h^n)} \\ & \leq \|T_{h^n}\|_{r_0, q} \cdot \left\| \prod_{1h^n} a(x) - a(x, h^n) \right\|_{\dot{M}(r_0, h^n, \Omega_{1h^n})} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\|T_{h^n}\|_{r_0, q}$ — норма оператора $T_{h^n} : \dot{M}(r_0, h^n, \Omega_{1h^n}) \rightarrow M(q, h^n)$. При $q \geq -r$ для $I(h^n)$ (см. (2.6)) выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} |I(h^n)| & \leq \left\| \prod_{1h^n} \nu(x) \right\|_{\dot{M}(r, h^n, \Omega_{1h^n})} \\ & \quad \times \left\| P_{h^n} T_{h^n} \left(\prod_{1h^n} a(x) - a(x, h^n) \right) \right\|_{M(-r, h^n, \Omega_{1h^n})} \\ & \leq C \|\nu(x)\|_{\dot{H}_r(\Omega)} \cdot \left\| P_{h^n} T_{h^n} \left(\prod_{1h^n} a(x) - a(x, h^n) \right) \right\|_{M(q, h^n, \Omega_{1h^n})}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что $I(h^n) \rightarrow 0$ при $|h^n| \rightarrow 0$.

Если $q < -r$, то из предложения 6.13 (см. [2]) вытекает $\lim_{|h^n| \rightarrow 0} I(h^n) = 0$.

Из последних замечаний и соотношения (2.6) получаем, что функция $a(x)$ является решением уравнения $PTu = f(x)$. Предложение 2.3 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Ограниченное семейство операторов $T_h : \dot{M}(r, h, \Omega_{1h}) \rightarrow M(-r, h)$, $r > 0$, будем называть *слабо сходящимся*, если для любой функции $\nu(x) \in \dot{H}_r(\Omega)$ существуют продолжения $l_h(P_h T_h)^* \prod_{1h} \nu(x) \in M(-r, h)$ функций $(P_h T_h)^* \prod_{1h} \nu(x) \in M(-r, h, \Omega_{1h})$ и функция $u(x) \in H_{-r}(\mathbb{R}_n)$ такие, что $l_h(P_h T_h)^* \prod_{1h} \nu(x) \rightarrow u(x)$ по норме $H_{-r}(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$, где $(P_h T_h)^*$ — семейство сопряженных к $P_h T_h$ операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть в нормальной, допускающей разбиение области Ω слабо сходящееся устойчивое семейство операторов $T_h : \dot{M}(r, h, \Omega_{1h}) \rightarrow M(-r, h)$, $r > 0$, $\prod_h^*$ -аппроксимирует ограниченный оператор $T : \dot{H}_r(\Omega) \rightarrow H_{-r}(\Omega)$ конечного порядка. Тогда существует единственное решение $u(x) \in \dot{H}_r(\Omega)$ уравнения $PTu = f$ для любой $f \in H_{-r}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая как и в предложении 2.3, получаем соотношение (2.6):

$$(\nu, Ta(x)) = (\nu, lf) + \lim_{|h| \rightarrow 0} I(h), \quad (2.9)$$

где для простоты вместо $a(x, h^n)$ оставлено обозначение $a(x, h)$, а вместо h^n — обозначение h .

Так как по условию предложения 2.4 существует продолжение

$$l_h(P_h T_h)^* \prod_{1h} \nu(x) \in M(-r, h)$$

функции

$$(P_h T_h)^* \prod_{1h} \nu(x) \in M(-r, h, \Omega_{1h}),$$

а функция $(\prod_{1h} a(x) - a(x, h)) \in \overset{\circ}{M}(-r, h, \Omega_{1h})$, то имеет место соотношение

$$I(h) = \overline{(\prod_{1h} a(x) - a(x, h), l_h(P_h T_h)^* \prod_{1h} \nu(x))}, \quad (2.10)$$

где черта — символ комплексного сопряжения.

Из предложения 7.4 (см. [2]) следует: существует функция $w^+(x)$ такая, что выполняется неравенство

$$\left\| l_h(P_h T_h)^* \prod_{1h} \nu(x) \right\|_{M(-r, h, w^+)} \leq C, \quad (2.11)$$

где C не зависит от h .

Используя предложение 7.1 (см. [2]), получаем:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| \prod_{1h} a(x) - a(x, h) \right\|_{M(r, h, 1/w^+)} = 0. \quad (2.12)$$

Из предложения 7.5 (см. [2]), а также из (2.10)–(2.12) имеем $\lim_{|h| \rightarrow 0} I(h) = 0$. Отсюда и из (2.8) следует предложение 2.4.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть для семейства операторов T_h и оператора T выполняются условия предложения 2.3 или 2.4. Рассмотрим семейство уравнений

$$P_h T_h a(x, h) = f(x, h), \quad (2.13)$$

где $f(x, h) \in M(-r, h, \Omega_{1h})$, $\|f(x, h)\|_{M(-r, h, \Omega_{1h})} \leq C$, C не зависит от h . Причем функции $\tilde{f}(x, h) \rightarrow f(x) \in H_{-r}(\Omega)$ по норме $H_{-r}(\Omega)$ при $|h| \rightarrow 0$, где $\tilde{f}(x, h)$ определяются следующим образом: $\tilde{f}(x, h) = f(x, h)$ при $x \in D(k, h) \subset \Omega_{1h}$, $\tilde{f}(x, h) = 0$ при $x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_{1h}$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$ решения уравнений (2.13) существуют и единственны и функции $a(x, h) \in \overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$ слабо сходятся к решению $a(x)$ уравнения $PTa(x) = f(x)$, т.е. для любого $r_0 < r$ выполняется соотношение

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left\| \prod_{1h} a(x) - a(x, h) \right\|_{\overset{\circ}{M}(r_0, h, \Omega_{1h})} = 0.$$

Доказательство следствия 2.1 непосредственно следует из доказательств предложений 2.3 и 2.4, а также из предложения 2.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть для семейства операторов T_h и оператора T выполняются условия предложения 2.3 или 2.4. Кроме того, пусть в нормальной, допускающей разбиение области Ω ограниченное семейство операторов F_h из $\overset{\circ}{M}(s, h, \Omega_{1h})$, $0 < r_0 < s \leq r$, в $M(-r + \varepsilon, h)$, $\varepsilon > 0$, Π_h^* -аппроксимирует ограниченный оператор F конечного порядка, отображающий $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ в $H_{-r+\varepsilon}(\mathbb{R}_n)$, а сужение РА оператора $A = T + F$ на $\overset{\circ}{H}_r(\Omega)$ имеет ядро, состоящее из одного нулевого элемента. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$ семейство операторов $P_h A_h = P_h T_h + P_h F_h$ устойчиво отображает $\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$ в $M(-r, h, \Omega_{1h})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $a(x, h^n) \in \overset{\circ}{M}(r, h^n, \Omega_{1h^n})$, $\|a(x, h^n)\|_{\overset{\circ}{M}(r, h^n, \Omega_{1h^n})} = 1$, $|h^n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{|h^n| \rightarrow 0} \|P_{h^n} A_{h^n} a(x, h^n)\|_{M(-r, h^n, \Omega_{1h^n})} = 0. \quad (2.14)$$

Обозначим $b(x, h^n) = P_{1h^n} F_{h^n} a(x, h^n)$, где P_{1h^n} — оператор сужения на область Ω (см. определение 1.6). Из свойств операторов F_h и предложения 6.5 (см. [2]) следуют неравенства $\|b(x, h^n)\|_{M(-r+\varepsilon, h^n, \Omega_{1h^n})} \leq C$, $\|b(x, h^n)\|_{H_{-r+\varepsilon}(\Omega)} \leq C_1$, где константы C и C_1 не зависят от h . Так как $H_{-r+\varepsilon}(\Omega)$ компактно вложено в $H_m(\Omega)$ (см. [3]), $-r < m < -r + \varepsilon$, то из последовательности $b(x, h^n)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $H_m(\Omega)$ к функции $b(x) \in H_m(\Omega)$. Для этой подпоследовательности оставим обозначение $b(x, h^n)$. Докажем, что $b(x) \neq 0$. Действительно, если $b(x)$ — нулевой элемент $H_m(\Omega)$, то из предложения 6.15 (см. [2]) следует, что $P_{1h^n} F_{h^n} a(x, h^n) \rightarrow 0$ по норме $M(-r, h^n, \Omega_{1h^n})$ при $|h^n| \rightarrow 0$.

Последний факт противоречит устойчивости семейства операторов T_h и равенству (2.14). Итак, $b(x) \neq 0$.

Из (2.14) следует равенство

$$P_{h^n} T_{h^n} a(x, h^n) = -P_{h^n} F_{h^n} a(x, h^n) + \varepsilon(x, h^n), \quad (2.15)$$

где $\varepsilon(x, h^n) \rightarrow 0$ по норме $M(-r, h^n, \Omega_{1h^n})$ при $|h^n| \rightarrow 0$.

Будем рассматривать (2.15) как уравнение относительно функции $a(x, h^n)$, находящейся в левой части, а правую часть будем считать известной. Из предложения 6.5 (см. [2]) следует, что $P_{1h^n} \varepsilon(x, h^n) \rightarrow 0$ и $b(x, h^n) \rightarrow b(x)$ по норме $H_{-r}(\Omega)$.

Тогда по следствию 2.1 функции $a(x, h)$ слабо сходятся к функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$, являющейся решением уравнения $PTu(x) = -b(x)$, $u(x) \neq 0$. Докажем, что $PAu(x) = 0$. Для этого достаточно убедиться в том, что $PFu(x) = b(x)$ или, что то же самое, $(\nu, Fu(x)) = (\nu, b(x))$ для любой $\nu(x) \in \overset{\circ}{H}_r(\Omega)$.

Согласно замечанию 1.2 (см. предложение 1.7) $PFu(x)$, сужение линейного функционала $Fu(x)$ на $\overset{\circ}{H}_r(\Omega)$, имеет представление

$$PFu(x) = P_{1h^n} F_{h^n} \prod_{1h^n} u(x) + \varepsilon_1(x, h^n), \quad (2.16)$$

где $\varepsilon_1(x, h^n) \rightarrow 0$ по норме $H_{-r}(\Omega)$ при $|h^n| \rightarrow 0$.

Используя (2.16), получаем соотношение

$$\begin{aligned}
 (\nu, Fu(x)) &= \lim_{|h^n| \rightarrow 0} \left(\nu(x), P_{1h^n} F_{h^n} \prod_{1h^n} u(x) \right) \\
 &= \lim_{|h^n| \rightarrow 0} \left(\nu(x), P_{1h^n} F_{h^n} a(x, h^n) \right) \\
 &\quad + \lim_{|h^n| \rightarrow 0} \left(\nu(x), P_{1h^n} F_{h^n} \left(\prod_{1h^n} u(x) - a(x, h^n) \right) \right) \\
 &= (\nu(x), b(x)) + \lim_{|h^n| \rightarrow 0} \left(\prod_{1h^n} \nu(x), P_{1h^n} F_{h^n} \left(\prod_{1h^n} u(x) - a(x, h^n) \right) \right) \\
 &= (\nu(x), b(x)) + \lim_{|h^n| \rightarrow 0} I(h^n). \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Так как семейство операторов F_h ограничено из $\mathring{M}(s, h, \Omega_{1h})$ в $M(-r + \varepsilon, h)$, $\varepsilon > 0$, для любого s , удовлетворяющего неравенству $0 < r_0 \leq s < r$, то имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
 |I(h^n)| &\leq \left\| \prod_{1h^n} \nu(x) \right\|_{\mathring{M}(r, h^n, \Omega_{1h^n})} \\
 &\quad \times \left\| P_{h^n} F_{h^n} \left(\prod_{1h^n} u(x) - a(x, h^n) \right) \right\|_{M(-r, h^n, \Omega_{1h^n})} \\
 &\leq \left\| \prod_{1h^n} \nu(x) \right\|_{\mathring{M}(r, h^n, \Omega_{1h^n})} \\
 &\quad \times \left\| F_{h^n} \left(\prod_{1h^n} u(x) - a(x, h^n) \right) \right\|_{M(-r, h^n)} \\
 &\leq C \left\| \prod_{1h^n} \nu(x) \right\|_{\mathring{M}(r, h^n, \Omega_{1h^n})} \\
 &\quad \times \left\| F_{h^n} \left(\prod_{1h^n} u(x) - a(x, h^n) \right) \right\|_{M(-r+\varepsilon, h^n)} \\
 &\leq C_1 \|F_{h^n}\|_{s_0, -r+\varepsilon} \\
 &\quad \times \left\| \prod_{1h^n} u(x) - a(x, h^n) \right\|_{\mathring{M}(s_0, h^n, \Omega_{1h^n})} \|\nu(x)\|_{\mathring{H}(\Omega)}, \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

$r_0 \leq s_0 < r$, $\|F_{h^n}\|_{s_0, -r+\varepsilon}$ — обозначение нормы оператора F_h из $\mathring{M}(s_0, h^n, \Omega_{1h^n})$ в $M(-r + \varepsilon, h^n)$. Функции $a(x, h^n)$ слабо сходятся к $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ (см. определение 2.3), поэтому из (2.18) вытекает $\lim_{|h^n| \rightarrow 0} I(h^n) = 0$. Отсюда и из соотношения (2.17) следует равенство $PAu(x) = 0$, $u(x) \neq 0$, что противоречит условиям предложения 2.5. Итак, предложение 2.5 доказано.

§ 3. Ограниченные семейства операторов в пространствах дробных отношений $M(r, h)$

3.1. Одномерный дискретный сингулярный оператор. Рассмотрим разбиение числовой оси на интервалы $D(k, h) = (h(k - \frac{1}{2}), h(k + \frac{1}{2}))$ с шагом $h > 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть семейство операторов T_h , определенных на функциях $u(x, h) \in M(r, h)$, задается соотношением:

$$\pi T_h u(x, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N \gamma(m) u(k-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma(m) u(k-m), \tag{3.1}$$

где оператор π введен в [2; определение 1.2], $u(k) = \pi u(x, h)$, числа $\gamma(m)$ определяются равенством

$$\gamma(m) = \int_{(m-1/2)h}^{(m+1/2)h} \frac{dx}{x} = \int_{(m-1/2)h}^{(m+1/2)h} \frac{dy}{y}. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что $\gamma(0) = 0$, $\gamma(-m) = -\gamma(m)$. Используя (1.9) из [2], получаем:

$$\pi T u(x, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_1(\varphi) \widehat{u}_c(\varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad (3.3)$$

где $\widehat{u}_c(\varphi)$ – дискретное преобразование Фурье (см. [2; определение 1.4]) сеточной функции $u(k) = \pi a(x, h)$, функция $S_1(\varphi)$ задается соотношением

$$S_1(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_1(N, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \gamma(k) e^{ik\varphi}. \quad (3.4)$$

Из (3.4) и нечетности $\gamma(k)$ вытекает равенство

$$S_1(\varphi) = 2i \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \sin k\varphi.$$

Отметим, что из определения $\gamma(k)$ следуют неравенства

$$|\gamma(k)| < \frac{C}{k}; \quad |\gamma(k) - \gamma(k+1)| < \frac{C}{k^2}. \quad (3.5)$$

Кроме того, для ядра $D_n(x) = \sum_{\nu=1}^n \sin \nu x = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$ выполняются оценки

$$|D_n(x)| \leq n, \quad |D_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (3.6)$$

Докажем, что функция $S_1(\varphi)$ ограничена на $[-\pi, \pi]$.

Возьмем некоторое $\delta > 0$ (пусть $\delta = \frac{1}{100}$). Рассмотрим произвольное φ , $|\varphi| \geq \delta$. Тогда, используя преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned} |S_1(N, \varphi)| &= \left| 2 \sum_{k=1}^N \gamma(k) \sin k\varphi \right| \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{N-1} |\gamma(k) - \gamma(k+1)| \left| \sum_{l=1}^k \sin l\varphi \right| + |\gamma(N)| \left| \sum_{l=1}^N \sin l\varphi \right| \\ &\leq C \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} + \frac{C}{N \sin \frac{\delta}{2}} \leq \frac{C_1}{\sin \frac{\delta}{2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пусть φ удовлетворяет неравенству $|\varphi| < \delta$; $S_1(\varphi) = 0$ при $\varphi = 0$, поэтому можно считать, что $\varphi \neq 0$. Множества $K(N) = \{\varphi : 1/(2N) < |\varphi| \leq 1/N\}$ покрывают

множество $K = \{\varphi : 0 < |\varphi| \leq 1\}$. Поэтому для любого фиксированного $\varphi \in K$ найдется такое N , что $\varphi \in K(N)$. Пусть $\varphi \in K(N)$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} S_1(p, \varphi) &= 2i \sum_{k=1}^p \gamma(k) \sin k\varphi = 2i \sum_{k=1}^{N-1} \gamma(k) \sin k\varphi + 2i \sum_{k=N}^p \gamma(k) \sin k\varphi \\ &= S_1(N-1, \varphi) + S_2(N, p, \varphi). \end{aligned}$$

Для слагаемого $S_1(N-1, \varphi)$ получим оценку

$$|S_1(N-1, \varphi)| \leq 2 \sum_{k=1}^{N-1} |\gamma(k)| \cdot k|\varphi| \leq 2CN\varphi \leq 2C. \quad (3.8)$$

Используя преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned} |S_2(N, p, \varphi)| &= \left| 2 \sum_{k=N}^p \gamma(k) \sin k\varphi + \gamma(N) \sum_{k=1}^{N-1} \sin k\varphi - \gamma(N) \sum_{k=1}^{N-1} \sin k\varphi \right| \\ &\leq 2 \sum_{k=N}^{p-1} |\gamma(k) - \gamma(k+1)| \left| \sum_{l=1}^k \sin l\varphi \right| \\ &\quad + 2|\gamma(p)| \left| \sum_{k=1}^p \sin k\varphi \right| + 2|\gamma(N)| \left| \sum_{k=1}^{N-1} \sin k\varphi \right| \\ &\leq C_1 \sum_{k=N}^{p-1} \frac{1}{k^2 \sin \frac{|\varphi|}{2}} + \frac{C_1}{p \sin \frac{|\varphi|}{2}} + \frac{C_1}{N \sin \frac{|\varphi|}{2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Так как $|\varphi|/2 \in K(N)$, то из (3.9) вытекает неравенство

$$|S_2(N, p, \varphi)| \leq C_2. \quad (3.10)$$

Из неравенства (3.9) следует, что ряд $2i \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \sin k\varphi$ сходится при любом $\varphi \neq 0$, а так как он заведомо сходится при $\varphi = 0$, то этот ряд сходится для любого $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Из оценок (3.7), (3.8) и (3.10) следует ограниченность $S_1(\varphi)$ на $[-\pi, \pi]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Семейство операторов T_h , определенных по формуле (3.1), будем называть *семейством дискретных одномерных сингулярных операторов*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Семейство одномерных дискретных сингулярных операторов T_h равномерно ограничено отображает пространства $M(r, h)$ в $M(r, h)$, где r – любое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $S_1(\varphi)$ (символ операторов T_h) не зависит от h и ограничена на $[-\pi, \pi]$. При каждом фиксированном h функция $u(x, h) \in M(r, h)$ принадлежит также $L_2(\mathbb{R}_1)$. Поэтому $S_1(\varphi)\hat{u}_c(\varphi) \in L_2[-\pi, \pi]$. Тогда из формулы (3.3) имеем $T_h u(x, h) \in L_2(\mathbb{R}_1)$. Отсюда следует, что существует функция $\hat{a}_c(\varphi)$ – дискретное преобразование Фурье сеточной функции $a(k) = \pi T_h u(x, h)$ (см. [2; определение 1.4]), для которой выполняется $\hat{a}_c(\varphi) = S_1(\varphi) \cdot \hat{u}_c(\varphi)$. Из последнего замечания и определения нормы в $M(r, h)$ следует предложение 3.1.

3.2. Многомерный дискретный сингулярный оператор. Рассмотрим сингулярный интеграл в $\mathbb{R}_n$:

$$\int \frac{f(\vec{\theta})\nu(x) dx}{r^n},$$

где $r = r_{MM_0}$ — расстояние между точками $M(x_1, \dots, x_n)$ и $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $f(\vec{\theta})$ — характеристика сингулярного интеграла, являющегося функцией вектора $\vec{\theta} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $f(\vec{\theta})$ удовлетворяет условию Липшица, а также

$$\int_{S_n} f(\vec{\theta}) dS_n = 0, \quad (3.11)$$

где S_n — единичная сфера в $\mathbb{R}_n$.

Рассмотрим каноническое разбиение пространства $\mathbb{R}_n$ с векторным шагом $h = (h, \dots, h)$ (т.е. шаг дробления h на каждой оси одинаков) на ячейки $D(k, h)$ (см. [2; определение 1.1]). Пусть семейство операторов T_h , определенных на функциях $u(x, h) \in M(r, h)$, задается соотношением

$$\begin{aligned} \pi T_h u(x, h) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m_1=-N}^N \cdots \sum_{m_n=-N}^N \gamma(m_1, \dots, m_n) u(k_1 - m_1, \dots, k_n - m_n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} \gamma(m) u(k - m), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где оператор π вводится в [2; определение 1.2], $u(k) = \pi T_h u(x, h)$, числа $\gamma(m)$ определяются равенством

$$\gamma(m) = \int_{(m_1-1/2)h}^{(m_1+1/2)h} \cdots \int_{(m_n-1/2)h}^{(m_n+1/2)h} \frac{f(\vec{\theta})}{r^n} dx, \quad (3.13)$$

где $r = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$.

Сделаем в (3.13) замену $x_j = hy_j$, $j = 1, \dots, n$. Так как при данном преобразовании вектор $\vec{\theta} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ не меняется, то из (3.13) получим:

$$\gamma(m) = \int_{D(m,1)} \frac{f(\vec{\theta})}{r^n} dx. \quad (3.14)$$

Из (3.14) следует, что $\gamma(m)$ не зависит от h , сеточная функция $\gamma(m) \in l_2$. Отсюда вытекает, что символ операторов T_h функция $S_n(\varphi_1, \dots, \varphi_j) \in L_2(U)$, $U = \prod_{j=1}^n [-\pi \leq \varphi_j \leq \pi]$. Символ $S_n(\varphi)$ задается соотношением (см. [2; определение 1.6])

$$S_n(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n(N)} a(k) e^{i(k, \varphi)}. \quad (3.15)$$

Отсюда аналогично (3.3) получим

$$\pi T_h u(x, h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_U S_n(\varphi) \widehat{u}_c(\varphi) e^{-i(k, \varphi)} d\varphi, \quad (3.16)$$

где $(k, \varphi) = \sum_{l=1}^n \varphi_l k_l$.

Аналогично (3.14) запишем

$$\Gamma(N) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_n(N)} \gamma(k) = \int_{D(0,1)} \frac{f(\vec{\theta}) dx}{r^n} = \gamma(0). \quad (3.17)$$

Введем величины

$$\Gamma_l(m) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \sum_{k_i=-\infty}^{\infty} |\gamma(k_1, \dots, k_{l-1}, k_l = m, k_{l+1}, \dots, k_n)|. \quad (3.18)$$

Оценим $\Gamma_1(0)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(0) &\leq |\gamma(0)| + \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} |\gamma(0, k_2, \dots, k_n)| \\ &\leq C + \int_{-1/2}^{1/2} dx_1 \int_{\Omega_{n-1}(1/2)} \frac{|f(\vec{\theta})|}{r^n} dx_2 \dots dx_n \\ &\leq C + C_1 \int_{-1/2}^{1/2} dx_1 \int_{S_{n-1}} \left\{ \int_{1/2}^{\infty} \frac{dr_1}{r_1^2} \right\} dS_{n-1} \leq C_2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $|k| \neq 0$, $\Omega_{n-1}(1/2)$ – внешность шара $(n-1)$ -мерного пространства радиуса $R = \frac{1}{2}$, S_{n-1} – поверхность единичной сферы этого пространства, $r_1^2 = \sum_{i=2}^n x_i^2$.

Для получения оценок величин $\Gamma_1(m)$, $m > 0$, введем сферические координаты так же, как и при выводе соотношения (3.7) в [2]. Далее получим:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(m) &\leq C \int_{S_{n-1}} dS_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{n-2} \Theta_1 d\Theta_1 \int_{\frac{m-1/2}{\cos \Theta_1}}^{\frac{m-1/2}{\cos \Theta_1}} \frac{dr}{r} \\ &\leq C_1 \ln \left(1 + \frac{2}{2m-1} \right) \leq \frac{C_2}{|m|+1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Аналогично получается оценка $\Gamma_l(m)$ для любых l и m :

$$\Gamma_l(m) < \frac{C}{|m|+1}. \quad (3.21)$$

Перейдем теперь к оценкам величин

$$\Delta \Gamma_l(m) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \sum_{k_i=-\infty}^{\infty} |\gamma(k_1, \dots, k_l = m, \dots, k_n) - \gamma(k_1, \dots, k_l = m+1, \dots, k_n)|. \quad (3.22)$$

Используя условие Липшица на функцию $f(\vec{\theta})$, а также выполняя элементарные преобразования, получаем при $m \neq 0$, $m+1 \neq 0$ оценку

$$|\gamma(m, k_2, \dots, k_n) - \gamma(m+1, k_2, \dots, k_n)| < C \int_{D(m, k_2, \dots, k_n, 1)} \frac{dx}{r^{n+1}}. \quad (3.23)$$

Отсюда, введя, как и ранее, сферические координаты, получим при $m > 0$

$$\Delta\Gamma_1(m) \leq C_1 \int_{S_{n-1}} dS_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{n-2} \Theta_1 d\Theta_1 \int_{\frac{m-1/2}{\cos \Theta_1}}^{\frac{m+1/2}{\cos \Theta_1}} \frac{dr}{r^2} \leq \frac{C_2}{m^2 + 1}. \quad (3.24)$$

Аналогичным образом выводим оценку для любых $l = 1, \dots, n$ и любых $m \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta\Gamma_l(m) \leq \frac{C_2}{m^2 + 1}. \quad (3.25)$$

Перейдем к оценкам величин

$$\begin{aligned} \Delta(l)\Gamma(k_j = N) &= \sum_{k_j=N+1}^{+\infty} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} |\gamma(k_1, \dots, k_l, \dots, k_n) \\ &\quad - \gamma(k_1, \dots, k_l + 1, \dots, k_n)|, \\ \Delta(l)\Gamma(k_j = -N) &= \sum_{j=-\infty}^{-N-1} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^n \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} |\gamma(k_1, \dots, k_l, \dots, k_n) \\ &\quad - \gamma(k_1, \dots, k_l + 1, \dots, k_n)|, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $l \neq j$, $N > 0$, N — целое.

Используя оценку (3.23), получаем:

$$\Delta(l)\Gamma(k_1 = N) \leq C \int_{S_{n-1}} dS_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{n-2} \Theta_1 \left(\int_{\frac{N+1}{\cos \Theta_1}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right) d\Theta_1 \leq \frac{C}{N + 1/2}.$$

Аналогично выводятся оценки для всех $l = 1, \dots, n$ и всех $k_j = N$, $k_j = -N$, $l \neq j$:

$$\Delta(l)\Gamma(k_j = N) \leq \frac{C}{N + 1}; \quad \Delta(l)\Gamma(k_j = -N) \leq \frac{C}{N + 1}. \quad (3.27)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если характеристика сингулярного интеграла удовлетворяет условию Липшица, то функция

$$S_n(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n(N)} \gamma(k) e^{i(k, \varphi)}$$

является ограниченной функцией при $\varphi \in \prod_{j=1}^n [-\pi \leq \varphi_j \leq \pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|\varphi| \geq \delta > 0$, возьмем точку $M(\varphi_1, \dots, \varphi_j)$, удовлетворяющую этому условию. Тогда хотя бы одна координата φ_j удовлетворяет условию $|\varphi_j| \geq \delta/\sqrt{n}$. Ввиду симметричности оценок (3.21), (3.25) и (3.27) можно считать, что $|\varphi_1| \geq \delta/\sqrt{n}$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
 S_n(N, \varphi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_n(N)} \gamma(k) e^{i(k, \varphi)} \\
 &= \sum_{k_1=-N}^{-1} \sum_{p=2}^n \sum_{k_p=-N}^N \gamma(k) e^{i(k, \varphi)} + \sum_{k_1=0}^N \sum_{p=2}^n \sum_{k_p=-N}^N \gamma(k) e^{i(k, \varphi)} \\
 &= S_n^1(N, \varphi) + S_n^2(N, \varphi),
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

где $(k, \varphi) = \sum_{j=1}^n k_j \varphi_j$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Выполнив преобразование Абеля по переменной k_1 при каждом фиксированном $k' = (k_2, \dots, k_n)$, запишем

$$\begin{aligned}
 S_n^2(N, \varphi) &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{p=2}^n \sum_{k_p=-N}^N [\gamma(k_1, k') - \gamma(k_1 + 1, k')] e^{i(k', \varphi')} \sum_{l=0}^{k_1} e^{il\varphi_1} \\
 &\quad + \sum_{p=2}^n \sum_{k_p=-N}^N \gamma(N, k') e^{i(k', \varphi')} \sum_{l=0}^N e^{il\varphi_1} = \Delta_1 + \Delta_2.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Используя оценки (3.21) и (3.25), получаем

$$\begin{aligned}
 |\Delta_1| &\leq \sum_{m=0}^{N-1} \Delta \Gamma_1(m) \frac{2}{\sin \frac{|\varphi_1|}{2}} \leq \frac{C_1}{\sin \frac{\delta}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{m^2 + 1} \leq \frac{C_1}{\sin \frac{\delta}{2}}, \\
 |\Delta_2| &\leq \Gamma_1(N) \frac{2}{\sin \frac{\delta}{2}} \leq \frac{C}{N \sin \frac{\delta}{2}}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

С функцией $S_n^1(n, \varphi)$ поступим аналогично, сделав для удобства замену индекса суммирования $k_1 = -l$, $1 \leq l \leq N$:

$$\begin{aligned}
 S_n^1(N, \varphi) &= \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{p=2}^n \sum_{k_p=-N}^N [\gamma(-l, k') - \gamma(-l - 1, k')] e^{i(k', \varphi')} \sum_{l_1=1}^l e^{-i\varphi_1 l_1} \\
 &\quad + \sum_{p=2}^n \sum_{k_p=-N}^N \gamma(-N, k') \sum_{l_1=1}^N e^{-i\varphi_1 l_1} = \Delta'_1 + \Delta'_2.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Равенство (3.31) аналогично соотношению (3.29), поэтому имеет место неравенство

$$|S_n^1(N, \varphi)| \leq \frac{C}{\sin \frac{\delta}{2}}. \tag{3.32}$$

Из (3.28)–(3.32) следует оценка при $|\varphi| > \delta$, $\varphi \in U = \prod_{j=1}^n [-\pi \leq \varphi_j \leq \pi]$:

$$S_n(N, \varphi) \leq \frac{C_3}{\sin \frac{\delta}{2}}. \tag{3.33}$$

Пусть φ удовлетворяет неравенству $|\varphi| < \delta < 1$. При $\varphi = 0$ имеем $S_n(N, 0) = \Gamma(N) = \gamma(0)$, отсюда $S_n(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_n(N, 0) = \gamma(0)$. Поэтому можно считать, что $|\varphi| \neq 0$. Множества $K(N) = \{\varphi : 1/(2N) < |\varphi| \leq 1/N\}$ покрывают множество $K = \{\varphi : 0 < |\varphi| \leq 1\}$. Следовательно, для любого фиксированного $\varphi \in K$ найдется такое N , что $\varphi \in K(N)$. Тогда хотя бы для одной координаты φ_j выполняется неравенство

$$\frac{1}{2N\sqrt{n}} < |\varphi_j| < \frac{1}{N}.$$

Без ограничения общности, как и выше, можно считать, что этому неравенству удовлетворяет координата φ_1 .

Представим функцию $S_n(q, \varphi)$, $q > N$, в виде

$$S_n(q, \varphi) = S_n(N, \varphi) + \tilde{S}_n(q, \varphi), \quad (3.34)$$

где в $\tilde{S}_n(q, \varphi)$ входят все члены, не попавшие в $S_n(N, \varphi)$.

Рассмотрим $S_n(N, \varphi)$, учитывая (3.17):

$$\begin{aligned} |S_n(N, \varphi)| &\leq \left| \sum'_{k \in \mathbb{Z}_n(N)} \gamma(k)(e^{i(k, \varphi)} - 1) \right| + |\gamma(0)| \leq \sum'_{k \in \mathbb{Z}_n(N)} |\gamma(k)| \cdot |k| \cdot |\varphi| + C \\ &\leq C \left(|\varphi| \int_{S_n} dS_n \int_{1/2}^{\sqrt{n}(N+1/2)} dr + 1 \right) \leq C(C_1 N \cdot |\varphi| + 1) \leq C_2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $\sum'$ указывает, что нет члена при $|k| = 0$, S_n — единичная сфера в $\mathbb{R}_n$.

Разобьем интервал изменения индекса k_j , $-q \leq k_j \leq q$, на интервалы I_1, I_2, I_3 : $I_1 = \{k_j : -q \leq k_j \leq -N-1\}$, $I_2 = \{k_j : -N \leq k_j \leq N\}$, $I_3 = \{k_j : N+1 \leq k_j \leq q\}$. Пусть символ α_j принимает три значения 1, 2, 3, тогда $\sum_{k_j \in I_{\alpha_j}}$ означает, что суммирование происходит по всем индексам $k_j \in I_{\alpha_j}$.

Введем обозначение:

$$S_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\varphi) = \sum_{k_1 \in I_{\alpha_1}} \cdots \sum_{k_n \in I_{\alpha_n}} \gamma(k_1, \dots, k_n) e^{i(k, \varphi)};$$

например, $S_{2, \dots, 2}(\varphi) = S_n(N, \varphi)$.

В этих обозначениях функция $\tilde{S}_n(q, \varphi)$ из (3.34) запишется в виде

$$\tilde{S}_n(q, \varphi) = \sum'_{\alpha} S_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\varphi), \quad (3.36)$$

где $\sum'_{\alpha}$ означает суммирование по всевозможным наборам $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, причем набор $(2, \dots, 2)$ пропускается.

Соотношение (3.36) справедливо, так как для любого $k = (k_1, \dots, k_n)$ каждый индекс k_j попадает в один из интервалов I_1, I_2, I_3 .

Поэтому член $\gamma(k_1, \dots, k_n) e^{i(k, \varphi)}$ обязательно появится хотя бы в одной функции $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\varphi)$, и ни один такой член не может присутствовать в двух разных функциях, так как интервалы I_1, I_2, I_3 не пересекаются.

Оценим функцию $S_{3,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(\varphi)$, выполнив преобразование Абеля по переменной k_1 при каждом фиксированном наборе $k' = (k_2, \dots, k_n)$:

$$\begin{aligned} |S_{3,\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\varphi)| &\leq \left| \sum_{k_1=N+1}^q \sum_{k' \in (\alpha_2, \dots, \alpha_n)} [\gamma(k_1, k') - \gamma(k_1 + 1, k')] \right. \\ &\quad \left. \times e^{i(k', \varphi')} \sum_{l=N+1}^{k_1} e^{il\varphi_1} \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k' \in (\alpha_2, \dots, \alpha_n)} \gamma(q, k') e^{i(k', \varphi')} \sum_{l=N+1}^q e^{il\varphi_1} \right| \\ &\leq \frac{C_1}{\sin \frac{|\varphi_1|}{2}} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{q+1} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

При выводе (3.37) были использованы оценки (3.21) и (3.25).

Для функции $S_{1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(\varphi)$ аналогичным образом получаем оценку (3.37). Используя преобразование Абеля, выписываем соотношение для произвольной функции $S_{2,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(\varphi)$, входящей в $\tilde{S}_n(q, \varphi)$:

$$\begin{aligned} S_{2,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(\varphi) &= \sum_{k_1=-N}^{N-1} \sum_{k' \in (\alpha_2, \dots, \alpha_n)} [\gamma(k_1, k') - \gamma(k_1 + 1, k')] \cdot e^{i(k', \varphi')} \sum_{l=-N}^{k_1} e^{il\varphi_1} \\ &\quad + \sum_{k' \in (\alpha_2, \dots, \alpha_n)} \gamma(N, k') e^{i(k', \varphi')} \sum_{l=-N}^N e^{il\varphi_1}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Так как в этом случае среди символов α_j , $2 \leq j \leq n$, обязательно встретится такой, что либо $\alpha_j = 1$, либо $\alpha_j = 3$, то из (3.27) получим

$$\sum_{k_1=-N}^{N-1} \sum_{k' \in (\alpha_2, \dots, \alpha_n)} |\gamma(k_1, k') - \gamma(k_1 + 1, k')| \leq \frac{C}{N+1}. \quad (3.39)$$

Из (3.21), (3.38) и (3.39) следует неравенство

$$|S_{2,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(\varphi)| \leq \frac{C}{\sin \frac{|\varphi_1|}{2}} \cdot \frac{1}{N+1}. \quad (3.40)$$

Из неравенств (3.37) и (3.40) получим оценку

$$|\tilde{S}_n(q, \varphi)| \leq \frac{C_2}{|\varphi|} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{q} \right). \quad (3.41)$$

Из (3.41) вытекает, что существует $\lim_{q \rightarrow \infty} S_n(q, \varphi)$ для любого $\varphi \in U = \prod_{j=1}^n [-\pi \leq \varphi_j \leq \pi]$. Так как неравенство (3.41) выполняется равномерно при $|\varphi| > \delta > 0$, то функция $S_n(\varphi) = \lim_{q \rightarrow \infty} S_n(q, \varphi)$ будет непрерывна при $|\varphi| \neq 0$. Кроме того, в случае $1/(2N) < |\varphi| \leq 1/N$ из (3.41) получим оценку

$$|\tilde{S}_n(q, \varphi)| \leq C_0. \quad (3.42)$$

Из (3.35) и (3.42) вытекает, что $|S_n(q, \varphi)| \leq B_0$ при $0 \leq |\varphi| < 1$. Из последнего неравенства и (3.33) следует предложение 3.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Семейство операторов T_h , определенных по формуле (3.12), называется *семейством дискретных сингулярных операторов*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Семейство дискретных сингулярных операторов T_h равномерно ограничено отображает пространства $M(r, h)$ в $M(r, h)$, r – любое, $h = (h_1, h_1, \dots, h_1)$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.1.

3.3. Вихревые дискретные операторы. Пусть семейство операторов $T_{h,\lambda}$, определенных на функциях $u(x, h) \in M(r, h)$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, задается соотношением

$$\begin{aligned} \pi T_{h,\lambda} u(x, h) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m_1=-N}^N \cdots \sum_{m_n=-N}^N \gamma(m_1, \dots, m_n, \lambda) u(k_1 - m_1, \dots, k_n - m_n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} \gamma(m, \lambda) u(k - m), \end{aligned} \quad (3.43)$$

где $u(k) = \pi u(x, h)$; числа $\gamma(m, \lambda)$ определяются соотношением

$$\gamma(m, \lambda) = \int_{D(m, h)} \frac{dx}{r^{n+\lambda}}, \quad (3.44)$$

$0 < \lambda < 2$, при $|m| = 0$ интеграл понимается по Адамару (см. [2; формула (3.9)]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Семейство операторов $T_{h,\lambda}$, определенных по формулам (3.43) и (3.44), будем называть *семейством вихревых дискретных операторов*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Семейство вихревых дискретных операторов $T_{h,\lambda}$ равномерно ограничено отображает пространства $M(r, h)$ в $M(r - \lambda, h)$, r – любое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \gamma(k, \lambda)$ абсолютно сходится при каждом фиксированном $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, то из [2; формула (1.9)] следует, что сеточную функцию $\pi T_{h,\lambda} u(x, h)$ можно представить в виде

$$\pi T_{h,\lambda} u(x, h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_U J(\lambda, \varphi, h) \hat{u}_c(\varphi) e^{-i(k, \varphi)} d\varphi, \quad (3.45)$$

где $\hat{u}_c(\varphi)$ – дискретное преобразование Фурье сеточной функции $u(k) = \pi u(x, h)$ (см. [2; определение 1.4]); функция $J(\lambda, \varphi, h)$ определяется соотношением

$$J(\lambda, \varphi, h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \gamma(k, \lambda) e^{i(k, \varphi)}. \quad (3.46)$$

Обозначим через $\widehat{u}_c(\varphi)$ дискретное преобразование Фурье сеточной функции $\pi T_{h,\lambda} u(x, h)$; из предыдущего следует, что $\widehat{u}_c(\varphi) = J(\lambda, \varphi, h) \cdot \widehat{u}_c(\varphi)$. Тогда, используя соотношения (2.2), (2.3) и (3.15) из [2], получаем:

$$\begin{aligned} & \|\pi T_{h,\lambda} u(x, h)\|_{M(r-\lambda, h)}^2 \\ &= \Omega_h \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varphi_i}{h_i} \right)^2} + 1 \right)^{2r-2\lambda} |\widehat{u}_c(\varphi_1, \dots, \varphi_j)|^2 d\varphi_1 \cdots d\varphi_j \\ &\leq C(\lambda) \Omega_h \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varphi_i}{h_i} \right)^2} + 1 \right)^{2r} \\ &\quad \times \frac{h_1^{2\lambda}}{(\sqrt{\varphi_1^2 + \sum_{i=2}^n (\varphi_i h_1 / h_i)^2} + h_1)^{2\lambda}} \frac{|\varphi|^{2\lambda}}{h_1^{2\lambda}} |\widehat{u}_c(\varphi)|^2 d\varphi_1 \cdots d\varphi_j \\ &\leq C_1(\lambda) \|u(x, h)\|_{M(r, h)}^2, \end{aligned}$$

где $\Omega_h = \prod_{j=1}^n h_j$. Из последнего неравенства следует утверждение 3.4.

3.4. Разностные операторы. а) Рассмотрим правый разностный оператор $T_{h_{np}}^m$ порядка m . Согласно [2; пример 1.4] его можно представить в виде

$$\pi T_{h_{np}}^m u(x, h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^n \left(\frac{e^{-i\varphi_j} - 1}{h_j} \right)^{m_j} \widehat{u}_c(\varphi) e^{-i(k, \varphi)} d\varphi_1 \cdots d\varphi_j, \quad (3.47)$$

где $m_1 + \cdots + m_n = m$, $\widehat{u}_c(\varphi)$ — дискретное преобразование Фурье сеточной функции $u(k) = \pi u(x, h)$; оператор π задается в [2; определение 1.2], $u(x, h) \in M(r, h)$. Символ $\widehat{A}_h(\varphi)$ оператора $T_{h_{np}}^m$ определяется соотношением

$$\widehat{A}_h(\varphi) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{e^{-i\varphi_k} - 1}{h_k} \right)^{m_k}.$$

Докажем, что семейство операторов $T_{h_{np}}^m$ равномерно ограничено отображает пространства $M(r, h)$ в $M(r-m, h)$. Действительно, используя (2.2) и (2.3) из [2], получаем

$$\begin{aligned} \|\pi T_{h_{np}}^m u(x, h)\|_{M(r-m, h)}^2 &= \Omega_h \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varphi_i}{h_i} \right)^2} + 1 \right)^{2r-2m} \\ &\quad \times \left| \prod_{k=1}^n \left(\frac{e^{-i\varphi_k} - 1}{h_k} \right)^{m_k} \widehat{u}_c(\varphi) \right|^2 d\varphi_1 \cdots d\varphi_j \\ &\leq C \Omega_h \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varphi_i}{h_i} \right)^2} + 1 \right)^{2r} \\ &\quad \times \frac{h_1^{2m}}{(\sqrt{\varphi_1^2 + \sum_{i=2}^n (\varphi_i / h_i)^2} + 1)^{2m}} \frac{|\varphi|^{2m}}{h_1^{2m}} |\widehat{u}_c|^2 d\varphi \\ &\leq C_1 \|u(x, h)\|_{M(r, h)}^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Из последнего неравенства следует сформулированное выше утверждение.

Аналогичное утверждение справедливо и для разностного смешанного оператора порядка m .

б) Итерированный разностный оператор Лапласа Δ_{hp}^m . Символ итерированного лапласиана (см. [2; пример 1.5]) имеет вид

$$\hat{A}_c(\varphi) = (-1)^m 4^m \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k^2} \sin^2 \frac{\varphi_k}{2} \right]^m. \quad (3.49)$$

Исходя из (3.49) аналогично (3.48) доказывается утверждение: *семейство операторов Δ_{hp}^m равномерно ограничено отображает пространства $M(r, h)$ в $M(r - 2m, h)$.*

в) Гиперсингулярные дискретные операторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. *Гиперсингулярными дискретными операторами $T_h(m, \lambda)$ будем называть операторы, заданные соотношениями*

$$T_h(m, \lambda) = T_{h, \lambda}(\Delta_{hp}^m u(x, h)), \quad (3.50)$$

где $u(x, h) \in M(r, h)$, $T_{h, \lambda}$ – вихревой дискретный оператор.

Из предложения 3.4 и п. 3.4.б) следует утверждение: *семейство гиперсингулярных дискретных операторов $T_h(m, \lambda)$ равномерно ограничено отображает пространства $M(r, h)$ в $M(r - 2m - \lambda, h)$.*

§ 4. Квадратурные формулы

4.1. Квадратурные формулы для интегралов вида

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{R}_n} \frac{\varphi(x) dx}{r^{n+\lambda}}, \quad 0 < \lambda < 2, \quad (4.1)$$

где $r = |x^0 - x|$, интеграл в (4.1) понимается по Адамару.

Рассмотрим каноническое разбиение пространства $\mathbb{R}_n$ с векторным шагом $h = (h_1, \dots, h_n)$ на ячейки $D(k, h)$ (см. [2; определение 1.1]). В каждой ячейке $D(k, h)$ выберем по точке $M_{0k}(h_1 k_1, \dots, h_n k_n)$. Пусть $r_{0k} = |M M_{0k}|$, где точка M имеет координаты $x = (x_1, \dots, x_n)$. В дальнейшем будем предполагать $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$. Для приближенного вычисления интеграла (4.1) в точке M_{0m} используем квадратурную формулу:

$$S(M_{0m}) = \sum_k \varphi(M_{0k}) \int_{D(k, h)} \frac{dx}{r_{0m}^{n+\lambda}}, \quad (4.2)$$

где суммирование происходит по всевозможным $D(k, h)$.

Оценим величину квадратурной погрешности $\Delta u(M_{0m}) = u(M_{0m}) - S(M_{0m})$. В сумме (4.2), на самом деле, только конечное число слагаемых, так как $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$. Обозначим через $\varepsilon(\varphi)$ множество номеров $k = (k_1, \dots, k_n)$ ячеек $D(k, h)$, имеющих непустое пересечение с носителем $\varphi(x)$; тогда

$$\Delta u(M_{0m}) = \sum_{k \in \varepsilon(\varphi)} \int_{D(k, h)} \frac{\varphi(x) - \varphi(M_{0k})}{r_{0m}^{n+\lambda}} dx. \quad (4.3)$$

Первый случай. Пусть $M_{0m} \in \text{supp } \varphi(x)$. Рассмотрим выражение

$$L = \sum_{i=1}^n \varphi'_{x_i}(M_{0m})(x_i - x_i^{0k}) = \sum_{i=1}^n \varphi'_{x_i}(x_i - x_i^{0m}) + \sum_{i=1}^n \varphi'_{x_i}(x_i^{0m} - x_i^{0k}) = L_1 + L_2,$$

где x_i^{0m} и x_i^{0k} , $i = 1, \dots, n$, — координаты точек M_{0m} и M_{0k} соответственно. Возьмем шар $K_R(M_{0m})$ с центром в M_{0m} достаточно большого радиуса R так, чтобы ячейки $D(k, h)$, полностью вошедшие в K_R , покрывали носитель функции $\varphi(x)$. Множество номеров k таких ячеек обозначим через ε_1 . Докажем, что выполняется равенство

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k \in \varepsilon_1} \int_{D(k, h)} \frac{L(x) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \\ &= \sum_{k \in \varepsilon_1} \int_{D(k, h)} \frac{L_1(x) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} + \sum_{k \in \varepsilon_1} \int_{D(k, h)} \frac{L_2(x) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} = A_1 + A_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Действительно, если ввести новые переменные $y_j = x_j - x_j^{0m}$, $j = 1, \dots, n$, то $A_1 = 0$ как интеграл от нечетной функции по симметричной области (см. определение интеграла по Адамару [2; формула (3.9)]). Так как ячейки $D(k, h)$ расположены симметрично относительно новых осей координат и начала координат, то для любой ячейки $D(k, h)$ найдется такая ячейка $D(\tilde{k}, h)$, что для всех $j = 1, \dots, n$ будет выполняться $(x_j^{0m} - x_j^{0k}) = -(x_j^{0m} - x_j^{0\tilde{k}})$. Отсюда $A_2 = 0$.

Разложив $\varphi(x)$ по формуле Тейлора в M_{0k} , получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(M_{0k}) - L(x) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{0k})(\varphi'_{x_i}(M_{0k}) - \varphi'_{x_i}(M_{0m})) + O(x, M_{0k}) \\ &= B(x) + O(x, M_{0k}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $O(x, M_{0k})$ — остаточный член формулы Тейлора. Значит, $O(M_{0k}, M_{0k}) = 0$ и $|O(x, M_{0k})| \leq C|h|^2$ при $x \in D(k, h)$.

Ввиду (4.4) и (4.5) равенство (4.3) запишется в виде

$$\Delta u(M_{0m}) = \sum_{k \in \varepsilon_1} \int_{D(k, h)} \frac{B(x) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} + \sum_{k \in \varepsilon_1} \int_{D(k, h)} \frac{O(x, M_{0k}) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} = I_1 + I_2. \quad (4.6)$$

Произведем оценку каждого слагаемого в (4.6). Оценим сначала I_2 . Пусть $k = m$, тогда $|O(x, M_{0m})| \leq Cr_{0m}^2$, $O(M_{0m}, M_{0m}) = 0$. По формуле (3.9) из [2] получим:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{D(m, h)} \frac{O(x, M_{0m}) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \right| \\ &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{D(m, h) \setminus D(\varepsilon)} \frac{O(x, M_{0m})}{r_{0m}^{n+\lambda}} dx - \frac{S_n O(M_{0m}, M_{0m})}{\lambda \varepsilon^\lambda} \right] \right| \\ &\leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{|h|\sqrt{n}} \frac{r_{0m}^2}{r_{0m}^{n+\lambda}} r_{0m}^{n-1} dr_{0m} \leq C_1(\lambda) |h|^{2-\lambda}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $D(\varepsilon)$ – шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром M_{0m} , S_n – площадь единичной сферы.

Далее рассмотрим

$$\left| \sum_{\substack{k \in \varepsilon_1 \\ k \neq m}} \int_{D(k, h)} \frac{O(x, M_{0k}) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \right| \leq C|h|^2 \int_{|h|}^{\infty} \frac{r_{0m}^{n-1}}{r_{0m}^{n+\lambda}} dr_{0m} \leq C(\lambda)|h|^{2-\lambda}. \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (4.8) следует неравенство

$$|I_2(h)| \leq C_2(\lambda)|h|^{2-\lambda}, \quad (4.9)$$

где $C_3(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 2$ или $\lambda \rightarrow 0$.

Приступим к оценке I_1 . Пусть $k = m$, тогда $B(M_{0m}) = 0$, $|B(x)| \leq Cr_{0m}^2$ при $x \in D(k, h)$; отсюда, используя формулу (3.9) из [2], получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{D(m, h)} \frac{B(x) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \right| &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{D(m, h) \setminus D(\varepsilon)} \frac{B(x) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} - \frac{S_n B(M_{0m})}{\lambda \varepsilon^\lambda} \right] \right| \\ &\leq C(\lambda) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{|h|\sqrt{n}} r_{0m}^{1-\lambda} dr_{0m} \leq C_1(\lambda)|h|^{2-\lambda}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} I_3(h) &= \left| \sum_{\substack{k \in \varepsilon_1 \\ k \neq m}} \int_{D(k, h)} \frac{B(x) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \right| \\ &\leq C(\lambda)|h| \sum_{\substack{k \in \varepsilon_1 \\ k \neq m}} \int_{D(k, h)} \frac{dx}{r_{0m}^{n+\lambda-1}} \leq C_1(\lambda)|h| \int_{|h|}^{R_{0m}} r_{0m}^{-\lambda} dr_{0m} \\ &= \begin{cases} C_2(\lambda)|h| \left| \ln \frac{R_{0m}}{|h|} \right| & \text{при } \lambda = 1, \\ C_2(\lambda)|h| |R_{0m}^{1-\lambda} - |h|^{1-\lambda}| & \text{при } \lambda \neq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Учитывая, что $\max R_{0m} \leq D_0$ для фиксированной функции $\varphi(x)$, где D_0 – константа, зависящая от $\text{supp } \varphi(x)$, из (4.11) получаем

$$I_3(h) \leq \begin{cases} C_3(\lambda)|h| & \text{при } 0 < \lambda < 1, \\ C_3(\lambda)|h| |\ln |h|| & \text{при } \lambda = 1, \\ C_3(\lambda)|h|^{2-\lambda} & \text{при } 1 < \lambda < 2. \end{cases} \quad (4.12)$$

Из (4.9), (4.10) и (4.11) следует, что для $|\Delta u(M_{0m})|$ имеет место оценка (4.12).

Второй случай. Фиксируем некоторое $\delta > 0$, тогда очевидно, что для всех точек M_{0m} , находящихся на расстоянии $\rho_{0m} \leq \delta$ от $\text{supp } \varphi(x)$, имеет место оценка (4.12).

Третий случай. Рассмотрим теперь точки M_{0m} , находящиеся на расстоянии $\rho_{0m} > \delta$ от $\text{supp } \varphi(x)$.

В этом случае оценка квадратурной погрешности $\Delta u(M_{0m})$ будет следующей:

$$|\Delta u(M_{0m})| \leq \sum_{k \in \varepsilon(\varphi)} \int_{D(k, h)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(M_{0k})|}{r_{0m}^{n+\lambda}} dx \leq C(\lambda) \frac{|h|}{\rho_{0m}^{n+\lambda}}. \quad (4.13)$$

Обозначим через $u(x, h)$ ступенчатую функцию, которую определим следующим образом: $u(x, h) = |\Delta u(M_{0m})|$ при $x \in D(m, h)$. Оценим величину $\Delta = \int_{\mathbb{R}_n} |u(x, h)|^2 dx$.

Рассмотрим

$$\Delta = \int_{J(h)} |u(x, h)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}_n \setminus J(h)} |u(x, h)|^2 dx = \Delta_1 + \Delta_2, \quad (4.14)$$

где $J(h)$ — область, состоящая из ячеек $D(m, h)$, центры которых (точки M_{0m}) обладают свойством: либо $M_{0m} \in \text{supp } \varphi(x)$, либо расстояние от M_{0m} до $\text{supp } \varphi(x)$ не превосходит δ . Из определения области $J(h)$ и (4.12) следует, что

$$\Delta_1 \leq C(\lambda) O(|h|), \quad (4.15)$$

где $O(|h|) \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$.

При оценке слагаемого Δ_2 можно без ограничения общности считать, что начало координат $O \in \text{supp } \varphi(x)$. Пусть r — текущий радиус-вектор точки $M \in D(m, h) \subset \mathbb{R}_n \setminus J(h)$, тогда ввиду условия $\rho_{0m} \geq \delta$ будет выполняться $1/\rho_{0m} \leq C/r$, где C — константа, не зависящая от $D(m, h)$. Отсюда получим:

$$\Delta_2 \leq Ch^2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+2\lambda+1}} \leq C_1 |h|^2. \quad (4.16)$$

Из (4.14)–(4.16) следует неравенство

$$\Delta \leq C_1(\lambda) O_1(|h|), \quad (4.17)$$

где $O_1(h) \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, то функции $S(x, h)$, $\pi S(x, h) = S(M_{0m})$, сходятся в метрике $L_2(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$ к $u(x_0) = \int_{\mathbb{R}_n} \frac{\varphi(x) dx}{r^{n+\lambda}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно заметить, что так как $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, то $u(x) \in H_r(\mathbb{R}_n) \forall r$. Отсюда следует, что $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$, $u(x) \in L_2(\mathbb{R}_n)$. Рассмотрим семейство функций $A(x, h)$ такое, что $\pi A(x, h) = u(M_{0m})$ (оператор π задается в [2; определение 1.2]). Докажем равенство

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|u(x) - A(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} = 0. \quad (4.18)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $K(R)$ – шар достаточно большого радиуса h , чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{\mathbb{R}_n \setminus K(R)} |u(x)|^2 dx < \varepsilon. \quad (4.19)$$

Рассмотрим множество $M_h = \bigcup_m D(m, h)$, где ячейки $D(m, h)$ имеют непустое пересечение с шаром $K(R)$. Тогда, так как $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$, найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|h| < \delta(\varepsilon)$ будет выполняться $\mu(M_h) < 2\mu(K(R))$ и $|A(x, h) - u(x)|^2 < \varepsilon/(2\mu(K(R)))$ при $x \in D(m, h) \subset M_h$, $\mu(M_h)$ и $\mu(K(R))$ – объемы M_h и $K(R)$. При $|h| < \delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\int_{M_h} |u(x) - A(x, h)|^2 dx < \varepsilon. \quad (4.20)$$

Без ограничения общности можно считать, что центр шара $K(R)$ находится в начале координат, а радиус R выбран достаточно большим, так что граница $K(R)$ находится на положительном расстоянии δ_0 от $\text{supp } \varphi(x)$. Из этого замечания следует неравенство для точек $M_{0m} \in \mathbb{R}_n \setminus K(R)$:

$$|A(M_{0m}, h)| = |u(M_{0m})| \leq \int_{\mathbb{R}_n} \frac{|\varphi(x)| dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \leq \frac{C}{R_{0m}^{n+\lambda}}, \quad (4.21)$$

где R_{0m} – расстояние от начала координат до M_{0m} .

Из (4.21) следует оценка

$$\int_{\mathbb{R}_n \setminus K(R)} |A(x, h)|^2 dx \leq C_1 \int_R^\infty \frac{dr}{r^{n+2\lambda+1}} = O(R), \quad (4.22)$$

где $O(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Так как выбор параметров h и R происходит независимо, то из оценок (4.19), (4.20) и (4.22) следует (4.18).

Ввиду того что имеет место неравенство

$$\|u(x) - S(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \leq \|u(x) - A(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} + \|A(x, h) - S(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)},$$

из (4.17) и (4.18) следует предложение 4.1.

4.2. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Рассмотрим сингулярный интеграл

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{R}_n} \frac{f(\vec{\theta})\varphi(x) dx}{r^n}, \quad (4.23)$$

где $r = |x^0 - x|$, $f(\vec{\theta})$ – характеристика сингулярного интеграла, являющаяся функцией вектора $\vec{\theta} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $f(\vec{\theta})$ удовлетворяет условию Липшица и, кроме того,

$$\int_{S_n} f(\vec{\theta}) dS_n = 0,$$

где S_n – единичная сфера в $\mathbb{R}_n$.

Рассмотрим разбиение пространства $\mathbb{R}_n$ на ячейки $D(k, h)$ такое же, как и в п. 4.1. В дальнейшем будем считать, что $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$. Для приближенного вычисления интеграла (4.23) в точках $M_{0m}(m_1 h_1, \dots, m_n h_n)$ применим квадратурную формулу

$$S(M_{0m}) = \sum_k \varphi(M_{0k}) \int_{D(k, h)} \frac{f(\vec{\theta}) dx}{r_{0m}^n}, \quad (4.24)$$

где $r_{0m} = |x^{0m} - x|$, x^{0m} – координаты точки M_{0m} . Оценим величину квадратурной погрешности $\Delta u(M_{0m}) = u(M_{0m}) - S(M_{0m})$. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \Delta u(M_{0m}) &= \sum_{\substack{k \in \varepsilon(\varphi) \\ k \neq m}} \int_{D(k, h)} \frac{[\varphi(x) - \varphi(M_{0k})] f(\vec{\theta}) dx}{r_{0m}^n} \\ &+ \int_{D(m, h)} \frac{[\varphi(x) - \varphi(M_{0m})] f(\vec{\theta}) dx}{r_{0m}^n} = I_1(h) + I_2(h), \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $\varepsilon(\varphi)$ – множество номеров k ячеек $D(k, h)$, имеющих непустое пересечение с $\text{supp } \varphi(x)$.

Рассмотрим случай, когда $M_{0m} \in \text{supp } \varphi(x)$ либо расстояние от M_{0m} до $\text{supp } \varphi(x)$ не превосходит фиксированного числа δ . Будем считать, что $h = (h_1, \dots, h_n)$, т.е. шаг разбиения на каждой из осей выбран один и тот же; кроме того, $|h| = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2} = h_1 \sqrt{n} < \delta_0 = \text{const}$. Возьмем шар $K_R(M_{0m})$ с центром в M_{0m} достаточно большого радиуса R такой, чтобы ячейки $D(k, h)$, полностью вошедшие в $K_R(M_{0m})$, покрывали $\text{supp } \varphi(x)$. Причем R выбирается одним и тем же для всех M_{0m} , такое число R существует, так как $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$. Далее имеем:

$$\begin{aligned} |I_1(h)| &\leq \sum_{\substack{k \in \varepsilon(\varphi) \\ k \neq m}} \int_{D(k, h)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(M_{0k})| |f(\vec{\theta})|}{r_{0m}^n} dx \\ &\leq C_1 |h| \int_{|h|}^R \frac{dr}{r} \leq C_1 |h| |\ln |h||. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Оценим слагаемое $I_2(h)$, используя определение сингулярного интеграла:

$$\begin{aligned} |I_2(h)| &\leq \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D(m, h) \setminus D(\varepsilon)} \frac{f(\vec{\theta}) [\varphi(x) - \varphi(M_{0m})]}{r^n} dx \right| \\ &\leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{|h| \sqrt{n}} dr \leq C_1 |h|, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $D(\varepsilon)$ – шар радиуса ε с центром в M_{0m} .

Из оценок (4.26) и (4.27) следует неравенство

$$|\Delta u(M_{0m})| \leq C |h| |\ln |h||. \quad (4.28)$$

Рассмотрим теперь случай, когда точки M_{0m} находятся на расстоянии $\rho_{0m} > \delta$ от $\text{supp } \varphi(x)$. Для этих точек получим оценку

$$|\Delta u(M_{0m})| \leq \sum_{k \in \varepsilon(\varphi)} \int_{D(k, h)} \frac{|f(\vec{\theta})| |\varphi(x) - \varphi(M_{0k})| dx}{r_{0m}^n} \leq \frac{C|h|}{\rho_{0m}^n}. \quad (4.29)$$

Обозначим через $u(x, h)$ ступенчатую функцию, которую определим следующим образом: $u(x, h) = |\Delta u(M_{0m})|$ при $x \in D(m, h)$. Аналогично (4.17) получается соотношение

$$\Delta = \int_{\mathbb{R}_n} |u(x, h)|^2 dx = O(|h|),$$

где $O(|h|) \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Если $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, то функции $S(x, h)$, $\pi S(x, h) = S(M_{0m})$, сходятся в метрике $L_2(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$ к $u(x_0) = \int_{\mathbb{R}_n} \frac{f(\vec{\theta})\varphi(x) dx}{r^n}$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.1.

4.3. Квадратурные формулы для суперсингулярных интегралов вида

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{R}_n} \frac{\varphi(x) dx}{r^{n+2p+\lambda}}, \quad (4.30)$$

где $0 < \lambda < 2$, $p > 0$, $p \in \mathbb{N}$.

Для преобразования Фурье обобщенных функций $f_1(x) = r^{-n-2p-\lambda}$ и $f_2(x) = r^{-n-\lambda}$ имеет место (см. [4])

$$\begin{aligned} F(r^{-n-2p-\lambda}) &= \frac{\Gamma(-p - \frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{n+2p+\lambda}{2})} 2^{-2p-\lambda} \pi^{n/2} |\sigma|^{2p+\lambda}; \\ F(r^{-n-\lambda}) &= \frac{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{n+\lambda}{2})} 2^{-\lambda} \pi^{n/2} |\sigma|^\lambda, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где $\Gamma(t)$ – гамма-функция.

Исходя из последних соотношений, символ (4.30) будем понимать следующим образом:

$$u(x_0) = C(\lambda, p) \int_{\mathbb{R}_n} \frac{\Delta^p \varphi(x) dx}{r^{n+\lambda}}, \quad (4.32)$$

где константа $C(\lambda, p)$ определяется из (4.31), Δ – оператор Лапласа, интеграл (4.32) понимается по Адамару.

Далее будем использовать такие же обозначения, как и в пп. 4.1 и 4.2.

В дальнейшем будем считать, что $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$. Для приближенного вычисления интеграла (4.32) в точках M_{0m} используем квадратурную формулу

$$S(M_{0m}) = C(\lambda, p) \sum_{k \in \varepsilon(\varphi)} \int_{D(k, h)} \frac{\Delta_h^p \varphi(M_{0k}) dx}{r_{0m}^{n+\lambda}}, \quad (4.33)$$

где Δ_h^p – итерированный разностный оператор Лапласа порядка p , $\varepsilon(\varphi)$ – множество номеров k ячеек $D(k, h)$, имеющих непустое пересечение с $\text{supp } \Delta_h^p \varphi(M_{0k})$.

Оценим величину квадратурной погрешности $\Delta u(M_{0m}) = u(M_{0m}) - S(M_{0m})$. Преобразуем $\Delta u(M_{0m})$:

$$\begin{aligned} \Delta u(M_{0m}) &= C(\lambda, p) \sum_{k \in \varepsilon(\varphi)} \int_{D(k, h)} \frac{\Delta^p \varphi(x) - \Delta^p \varphi(M_{0k})}{r_{0m}^{n+\lambda}} dx \\ &\quad + C(\lambda, p) \sum_{k \in \varepsilon(\varphi)} \int_{D(k, h)} \frac{\Delta^p \varphi(M_{0k}) - \Delta_h^p \varphi(M_{0k})}{r_{0m}^{n+\lambda}} dx \\ &= \Delta_1 u(M_{0m}) + \Delta_2(M_{0m}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Для погрешности $\Delta_1 u(M_{0m})$ справедливы все результаты п. 4.1. Перейдем к оценке величины $\Delta_2 u(M_{0m})$, для этого выполним преобразования:

$$\begin{aligned} |\Delta_2 u(M_{0m})| &\leq |C(\lambda, p)| |\Delta^p \varphi(M_{0m}) - \Delta_h^p \varphi(M_{0m})| \cdot \left| \int_{D(m, h)} \frac{dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \right| \\ &\quad + \sum_{\substack{k \in \varepsilon(\varphi) \\ k \neq m}} |C(\lambda, p)| |\Delta^p \varphi(M_{0k}) - \Delta_h^p \varphi(M_{0k})| \cdot \int_{D(k, h)} \frac{dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \\ &= B_1(h) + B_2(h). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Так как $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, то из [2; предложение 5.8] следует равномерная оценка $|\Delta^p \varphi(M_{0k}) - \Delta_h^p \varphi(M_{0k})| \leq k \Omega_h^{2/n}$, где k не зависит от h , $\Omega_h = \prod_{j=1}^n h_j$.

Из [2; условие (2.3)] получим неравенство

$$|\Delta^p \varphi(M_{0k}) - \Delta_h^p \varphi(M_{0k})| \leq k_1 |h|^2. \quad (4.36)$$

Пусть $|h| < \delta_0$; рассмотрим случай, когда для точек M_{0m} выполняется условие: либо $M_{0m} \in \text{supp } \Delta_h^p \varphi(M_{0k})$, либо расстояние от M_{0m} до $\text{supp } \Delta_h^p \varphi(M_{0k})$ не превосходит некоторого числа $\delta > 0$.

Из определения интегралов по Адамару [2; формула (3.9)] следуют оценки

$$\sum_{k \neq m} \int_{D(k, h)} \frac{dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \leq \frac{C}{|h|^\lambda}; \quad \left| \int_{D(m, h)} \frac{dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \right| \leq \frac{C}{|h|^\lambda}. \quad (4.37)$$

Из оценок (4.35)–(4.37) вытекает неравенство

$$|\Delta_2 u(M_{0m})| \leq C_1 |h|^{2-\lambda}. \quad (4.38)$$

Рассмотрим случай, когда точки M_{0m} находятся на расстоянии $\rho_{0m} \geq \delta$ от $\text{supp } \Delta_h^p \varphi(M_{0k})$. Для этих точек имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |\Delta_2 u(M_{0m})| &\leq |C(\lambda, p)| \sum_{k \in \varepsilon(\varphi)} \int_{D(k, h)} \frac{|\Delta^p \varphi(M_{0k}) - \Delta_h^p \varphi(M_{0k})|}{r_{0m}^{n+\lambda}} dx \\ &\leq \frac{C_1(\lambda, p) |h|^2}{\rho_{0m}^{n+\lambda}}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Так как для $\Delta_1 u(M_{0m})$ справедливы все результаты п. 4.1, то из (4.39) для функции $u(x, h)$, $\pi u(x, h) = \Delta u(M_{0m})$, выполняется соотношение

$$\int_{\mathbb{R}_n} |u(x, h)|^2 dx = O(|h|),$$

где $O(|h|) \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Если $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, то функции $S(x, h)$, $\pi S(x, h) = S(M_{0m})$, сходятся в метрике $L_2(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$ к

$$u(x_0) = C(\lambda, p) \int_{\mathbb{R}_n} \frac{\Delta^p \varphi(x) dx}{r^{n+\lambda}}.$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.1.

§ 5. Устойчивость дискретных операторов в пространствах дробных отношений

В дальнейшем будем предполагать, что Ω – открытая ограниченная область с липшицевой границей, нормальная, допускающая разбиение (см. [2; определения 6.1–6.4, 6.6, 6.9]).

5.1. Дискретные вихревые операторы. Дискретные вихревые операторы задаются соотношениями (3.43) и (3.44). Здесь удобно представить их в следующем, эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \pi T_{h,\lambda} u(x, h) &= \sum_k u(k) \gamma(k, m), \\ \gamma(k, m) &= \int_{D(k, h)} \frac{dx}{r_{0m}^{n+\lambda}}, \quad 0 < \lambda < 2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $r_{0m} = |M M_{0m}|$ (см. п. 4.1), оператор π задается в [2; определение 1.2], $u(x, h) \in \overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$ (см. [2; определение 6.2]), суммирование в (5.1) происходит по всем номерам k ячеек $D(k, h)$ таких, что $D(k, h) \subset \Omega_{1h}$.

Из предложения 3.4 следует, что семейство операторов $T_{h,\lambda}$ ограничено отображает пространства $M(r, h)$ в $M(r - \lambda, h)$. Из определения пространств $\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$ и $M(r, h, \Omega_{1h})$ вытекает, что семейство операторов $P_h T_{h,\lambda}$ ограничено отображает $\overset{\circ}{M}(\lambda/2, h, \Omega_{1h})$ в $M(-\lambda/2, h, \Omega_{1h})$, где P_h – оператор сужения на Ω_{1h} .

Исследуем на устойчивость семейство операторов $P_h T_{h,\lambda}$ при отображении пространств $\overset{\circ}{M}(\lambda/2, h, \Omega_{1h})$ в $M(-\lambda/2, h, \Omega_{1h})$.

Легко проверить равенство $\gamma(k, m) = \gamma(m, k)$, которое выполняется для любых k и m . Рассмотрим линейный функционал $I = (2\pi)^{-n} l(\nu)$ над $M(-\lambda/2, h, \Omega_{1h})$, определяемый элементом $u(x, h) \in \overset{\circ}{M}(\lambda/2, h, \Omega_{1h})$. Тогда на основании [2; (6.5)] получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(2\pi)^n} l(P_h T_h u(x, h)) = \sum_{m \in \Lambda} \Omega_h \overline{u(m)} \sum_{k \in \Lambda} u(k) \gamma(k, m) \\ &= \Omega_h \sum_{m \in \Lambda} \overline{u(m)} \left[\sum_{\substack{k \in \Lambda \\ k \neq m}} u(k) \gamma(k, m) + \gamma(m, m) \cdot u(m) \right], \end{aligned} \quad (5.2)$$

где Λ – множество номеров k таких, что $D(k, h) \subset \Omega_{1h}$; $\pi u(x, h) = u(k)$; $\Omega_h = \prod_{j=1}^n h_j$. Из определения интеграла по Адамару [2; формула (3.9)] следует: $\gamma(k, m) > 0 \ \forall k, m$ при $k \neq m$; $\sum_k \gamma(k, m) = 0$, $\gamma(m) = \sum_{k \in \Lambda} \gamma(k, m) < 0$.

Используя сделанные замечания, преобразуем (5.2):

$$\begin{aligned} I &= \Omega_h \sum_{m \in \Lambda} \overline{u(m)} \left[\sum_{\substack{k \in \Lambda \\ k \neq m}} u(k) \gamma(k, m) - \sum_{\substack{k \in \Lambda \\ k \neq m}} \gamma(k, m) u(m) + \gamma(m) u(m) \right] \\ &= \Omega_h \sum_{m \in \Lambda} \overline{u(m)} \sum_{k \in \Lambda} [u(k) - u(m)] + \Omega_h \sum_{m \in \Lambda} \gamma(m) |u(m)|^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Заменяя переменные суммирования k на m , m на k , а также учитывая, что $\gamma(k, m) = \gamma(m, k)$, из соотношения (5.3) получим:

$$I = \Omega_h \sum_{k \in \Lambda} \overline{u(k)} \sum_{m \in \Lambda} \gamma(k, m) [u(m) - u(k)] + \Omega_h \sum_{m \in \Lambda} \gamma(m) |u(m)|^2. \quad (5.4)$$

Из (5.3) и (5.4) следует, что

$$I = -\frac{\Omega_h}{2} \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in \Lambda} \gamma(k, m) |u(k) - u(m)|^2 + \Omega_h \sum_{m \in \Lambda} \gamma(m) |u(m)|^2. \quad (5.5)$$

Докажем, что $|\gamma(m)| > C > 0$. Действительно, по условию область Ω является ограниченной, поэтому существует такое число $R_0 > 0$, что для любой точки $M_{0m} \in \Omega$ шар $K(R_0, M_{0m})$ с центром в M_{0m} и радиусом R_0 содержит Ω . Отсюда имеем:

$$|\gamma(m)| = \left| \sum_{k \in \Lambda} \gamma(k, m) \right| \geq \left| \int_{K(R_0, M_{0m})} \frac{dx}{r_{0m}^{n+\lambda}} \right| \geq C. \quad (5.6)$$

Из (5.5) и (5.6) вытекает неравенство

$$|I| \geq C \Omega_h \sum_{m \in \Lambda} |u(m)|^2. \quad (5.7)$$

С другой стороны, учитывая, что $u(k) = 0$, $u(m) = 0$ при $k, m \notin \Lambda$, получаем:

$$I = \Omega_h \sum_m \overline{u(m)} \sum_k u(k) \gamma(k, m) = \Omega_h \sum_m \overline{u(m)} \sum_k \gamma(k, m) [u(k) - u(m)]. \quad (5.8)$$

Переименуем переменные суммирования в (5.8), тогда

$$I = -\Omega_h \sum_k \overline{u(k)} \sum_m \gamma(k, m) [u(k) - u(m)]. \quad (5.9)$$

Из (5.8) и (5.9) следует соотношение

$$I = -\frac{\Omega_h}{2} \sum_k \sum_m \gamma(k, m) |u(k) - u(m)|^2. \quad (5.10)$$

Далее учтем, что для $\gamma(k, m)$ при $k \neq m$ выполняются неравенства

$$C_1 \frac{\Omega_h}{(|k - m||h|)^{n+\lambda}} \leq \gamma(k, m) \leq C_2 \frac{\Omega_h}{(|k - m||h|)^{n+\lambda}}. \quad (5.11)$$

Из (5.10) и (5.11) получим оценку

$$|I| \geq C_3 \Omega_h \sum_{k \neq m} \frac{\Omega_h}{(|k - m||h|)^{n+\lambda}} |u(k) - u(m)|^2. \quad (5.12)$$

Из (5.7) и (5.12), а также из [2; предложение 4.1] следует оценка

$$|I| \geq C_4 \|u(x, h)\|_{\dot{M}(\lambda/2, h, \Omega_{1h})}^2, \quad (5.13)$$

где C_4 не зависит от h .

Используя (5.13), получаем

$$\begin{aligned} C_4 \|u(x, h)\|_{\dot{M}(\lambda/2, h, \Omega_{1h})}^2 &\leq |I| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|u(x, h)\|_{\dot{M}(\lambda/2, h, \Omega_{1h})} \\ &\times \|P_h T_{h, \lambda} u(x, h)\|_{M(-\lambda/2, h, \Omega_{1h})}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из неравенства (5.14) и определения 2.1 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Ограниченное семейство вихревых дискретных операторов $P_h T_{h, \lambda}$ устойчиво отображает $\dot{M}(\lambda/2, h, \Omega_{1h})$ в $M(-\lambda/2, h, \Omega_{1h})$.*

5.2. Итерированный разностный оператор Лапласа порядка m . Предварительно докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Для любой $u(x, h) \in \dot{M}(\lambda, h, \Omega_{1h})$, $r \geq 0$, выполняется неравенство*

$$\Omega_h \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{t_j}{h_j} \right)^2 \right)^r |\hat{u}_c(t)|^2 dt \geq C \|u(x, h)\|_{\dot{M}(r, h, \Omega_{1h})}^2, \quad (5.15)$$

$\hat{u}_c(t)$ – дискретное преобразование Фурье сеточной функции $\pi u(x, h) = u(k)$, $C > 0$ не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду формулы (2.2) из [2] достаточно доказать неравенство

$$\Omega_h \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{t_j}{h_j} \right)^2 \right)^r |\hat{u}_c(t)|^2 dt \geq C_1 \Omega_h \int_U |\hat{u}_c(t)|^2 dt, \quad (5.16)$$

где C_1 не зависит от h .

Далее имеем

$$\begin{aligned} |\hat{u}_c(t)| &= \left| \sum_k u(k) e^{i(k, t)} \right| \leq \frac{1}{\Omega_h} \cdot \sqrt{\sum_k |u(k)|^2 \Omega_h} \cdot \sqrt{\sum_k 1^2 \Omega_h} \\ &\leq \frac{\sqrt{V(\Omega)}}{\Omega_h} \|u(x, h)\|_{L_2(\Omega_{1h})}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где суммирование происходит по всем k таким, что $D(k, h) \subset \Omega_{1h}$, $V(\Omega)$ – объем области Ω , $\Omega_h = \prod_{j=1}^n h_j$.

Так как Ω – ограниченная область, то найдется $\delta > 0$ такое, что значения параметра $h = (h_1, \dots, h_n)$, для которых имеет смысл пространство $\overset{\circ}{M}(r, h, \Omega_{1h})$, удовлетворяют условию $|h| < \delta$. Поэтому существует такое число $A(\Omega) > 2$, что множество $U_A \subset U = \prod_{j=1}^n [-\pi \leq t_j \leq \pi]$, где

$$U(A) = \prod_{j=1}^n I_j(A), \quad I_j(A) = \left\{ t_j : |t_j| \leq \frac{h_j}{A \sqrt[n]{V(\Omega)}} \right\}.$$

Из (5.17) получим

$$\Omega_h \int_{U(A)} |\widehat{u}_c(t)|^2 dt \leq \Omega_h \frac{V(\Omega)}{\Omega_h^2} \|u(x, h)\|_{L_2(\Omega_{1h})}^2 \cdot \frac{\Omega_h}{V(\Omega)(A)^n}. \quad (5.18)$$

Из конструкции множества $U(A)$ и неравенства (5.18) имеем

$$\Omega_h \int_U \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{t_j}{h_j} \right)^2 \right)^r |\widehat{u}_c(t)|^2 dt \geq C_1 \Omega_h \int_{U \setminus U(A)} |\widehat{u}_c(t)|^2 dt \geq C_2 \Omega_h \int_U |\widehat{u}_c(t)|^2 dt,$$

где $C_2 > 0$ не зависит от h . Из последнего неравенства следует предложение 5.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Семейство операторов $P_h T_h = P_h \Delta_{hp}^m$, где Δ_{hp}^m – итерированный разностный оператор Лапласа порядка m , устойчиво отображает пространства $\overset{\circ}{M}(m, h, \Omega_{1h})$ в пространства $M(-m, h, \Omega_{1h})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из п. 3.4.б) следует, что семейство операторов $P_h T_h$ ограничено отображает пространства $\overset{\circ}{M}(m, h, \Omega_{1h})$ в $M(-m, h, \Omega_{1h})$.

Рассмотрим линейный функционал $I = (2\pi)^{-n} l(V)$ над $M(-m, h, \Omega_{1h})$, определяемый элементом $u(x, h) \in \overset{\circ}{M}(m, h, \Omega_{1h})$. Тогда на основании [2; формула (6.5)] получим:

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^n} l(P_h T_h u(x, h)) \right| = \left| \frac{\Omega_h}{(2\pi)^n} \int_U \widehat{A}_c(t) |\widehat{u}_c(t)|^2 dt \right| \\ &= \left| \frac{\Omega_h}{(2\pi)^n} \int_U (-1)^m 4^m \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k^2} \sin^2 \frac{t_k}{2} \right]^m |\widehat{u}_c(t)|^2 dt \right| \\ &\geq C_1 \Omega_h \int_U \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{t_k}{h_k} \right)^2} \right)^{2m} |\widehat{u}_c(t)|^2 dt \geq C_2 \|u(x, h)\|_{\overset{\circ}{M}(m, h, \Omega_{1h})}^2, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где

$$\widehat{A}_c(t) = (-1)^m 4^m \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k^2} \sin^2 \frac{t_k}{2} \right]^m$$

– символ оператора Δ_{hp}^m ; C_1 и C_2 не зависят от h ; при получении неравенства (5.19) было использовано предложение 5.2. Из неравенства (5.19) следует устойчивость семейства операторов $P_h T_h$. Предложение 5.3 доказано.

5.3. Гиперсингулярные операторы. Гиперсингулярные дискретные операторы $T_h(m, \lambda)$ определяются равенством (3.50).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Семейство операторов $P_h T_h(m, \lambda)$ устойчиво отображает пространства $\mathring{M}(m + \lambda/2, h, \Omega_{1h})$ в $M(-m - \lambda/2, h, \Omega_{1h})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из п. 3.4 следует, что семейство $P_h T_h(m, \lambda)$ ограничено отображает пространства $\mathring{M}(m + \lambda/2, h, \Omega_{1h})$ в $M(-m - \lambda/2, h, \Omega_{1h})$. Рассмотрим линейный функционал $I = (2\pi)^{-n} l(V)$ над $M(-m - \lambda/2, h, \Omega_{1h})$, определяемый элементом $u(x, h) \in \mathring{M}(m + \lambda/2, h, \Omega_{1h})$. Тогда на основании (6.5) из [2] получим

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^n} l(P_h T_h(m, \lambda) u(x, h)) \right| = \left| \frac{\Omega_h}{(2\pi)^n} \int_U \hat{A}_c(t) |\hat{u}_c(t)|^2 dt \right| \\ &= \left| \frac{\Omega_h}{(2\pi)^n} \int_U (-1)^m 4^m \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k^2} \sin^2 \frac{t_k}{2} \right]^m \cdot J(t, \lambda) \cdot |\hat{u}_c(t)|^2 dt \right| \\ &\geq C_1 \Omega_h \int_U \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{t_k}{h_k} \right)^2} \right)^{2m} \cdot \frac{|t|^\lambda}{h_1^\lambda} |\hat{u}_c(t)|^2 dt \\ &\geq C_2 \Omega_h \int_U \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{t_k}{h_k} \right)^2 \right)^{m+\lambda/2} |\hat{u}_c(t)|^2 dt \\ &\geq C_3 \|u(x, h)\|_{\mathring{M}(m+\lambda/2, h, \Omega_{1h})}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где

$$\hat{A}_c(t) = (-1)^m 4^m \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k^2} \sin^2 \frac{t_k}{2} \right]^2 \cdot J(t, \lambda)$$

– символ гиперсингулярного дискретного оператора, $J(t, \lambda)$ – символ вихревого дискретного оператора; для $J(t, \lambda)$ имеет место неравенство $|J(t, \lambda)| \geq C_1 |t|^\lambda / h_1^\lambda$ (см. [2; (3.15)]).

Из неравенства (5.20) следует устойчивость семейства $T_h(m, \lambda)$. Предложение 5.4 доказано.

5.4. Разностный эллиптический оператор 2-го порядка с переменными коэффициентами. Рассмотрим оператор

$$L(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad (5.21)$$

удовлетворяющий условию равномерной эллиптичности в ограниченной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}_n$:

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (5.22)$$

где $\nu, \mu > 0$ – некоторые константы, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$.

Определим дискретный оператор $L_h u(x, h)$ по формуле

$$L_h u(x, h) = \sum_{i=1}^n T_{\text{лев}}(x_i) \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, h) T_{\text{пр}}(x_j) u(x, h), \quad (5.23)$$

где $u(x, h) \in \mathring{M}(r, h, \Omega_{1h})$, $T_{\text{пр}}(x_i)$, $T_{\text{лев}}(x_i)$ – правое и левое разностные отношения по переменной x_i (см. [2; пример 1.2]); $a_{ij}(x, h) = a_{ij}(k_1 h_1, \dots, k_n h_n)$ при $x \in D(k_1, \dots, k_n, h_1, \dots, h_n) \subset \Omega_{1h}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Семейство операторов $P_h L_h$ устойчиво отображает пространства $\mathring{M}(1, h, \Omega_{1h})$ в $M(-1, h, \Omega_{1h})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega}_{1h})$ и п. 3.4.а) следует, что семейство операторов $P_h L_h$ ограничено отображает пространства $\mathring{M}(1, h, \Omega_{1h})$ в $M(-1, h, \Omega_{1h})$. Введем обозначение: $\nu_i(x, h) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, h) T_{\text{пр}}(x_j) u(x, h)$, $\widehat{\nu}_i(\varphi)$ – дискретное преобразование Фурье сеточной функции $\nu_i(k) = \pi \nu_i(x, h)$ (см. [2; определение 1.2]).

Рассмотрим линейный функционал $I = (2\pi)^{-n} l(V(x))$ над $M(-1, h, \Omega_{1h})$, определяемый элементом $u(x, h) \in \mathring{M}(1, h, \Omega_{1h})$. Тогда на основании [2; формула (6.5)] получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(2\pi)^n} l(P_h L_h u(x, h)) \\ &= \frac{\Omega_h}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^n \int_U \widehat{\nu}_k(\varphi) \frac{1 - e^{i\varphi_k}}{h_k} \overline{\widehat{u}_c(\varphi)} d\varphi \\ &= -\frac{\Omega_h}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^n \int_U \widehat{\nu}_k(\varphi) \frac{-1 + e^{-i\varphi_k}}{h_k} \cdot \overline{\widehat{u}_c(\varphi)} d\varphi \\ &= - \int_{\mathbb{R}_n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj}(x, h) (T_{\text{пр}}(x_k) u(x, h))^2 dx. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Из (5.23) и (5.24) получим неравенство

$$|I| \geq \nu \int_{\mathbb{R}_n} \sum_{k=1}^n [T_{\text{пр}}(x_k) u(x, h)]^2 dx \geq C_0 \Omega_h \int_U \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{t_k}{h_k} \right)^2} \right)^2 |\widehat{u}_c(t)| dt. \quad (5.25)$$

Из (5.25) и предложения 5.2 вытекает оценка

$$\|P_h L_h u(x, h)\|_{M(-1, h, \Omega_{1h})} \geq C_1 \|u(x, h)\|_{\mathring{M}(1, h, \Omega_{1h})},$$

где C_1 не зависит от h .

Из последнего неравенства следует предложение 5.5.

§ 6. Исследование некоторых уравнений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Семейство ступенчатых функций $u(x, h)$ будем называть *липшицевым*, если выполняются условия:

1. $|u(x, h)| \leq C_1$, где C_1 не зависит от h ;
2. для любых $x_1 \in D(k, h)$ и $x_2 \in D(m, h)$

$$|u(x_1, h) - u(x_2, h)| \leq C_2 |m - k| \cdot |h|,$$

где C_2 не зависит от h .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Если $u(x, h) \in M(r, h)$, $|r| < 1$, а $u_0(x, h)$ — липшицево семейство функций, то имеет место неравенство

$$\|\nu(x, h)\|_{M(r, h)} \leq C(r) \|u(x, h)\|_{M(r, h)}, \quad (6.1)$$

где C не зависит от h , $\nu(x, h) = u(x, h) \cdot u_0(x, h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $r \geq 0$ (при $r = 0$ утверждение очевидно). Согласно [2; предложение 4.1] норма пространства $M_1(r, h)$ эквивалентна норме $M(r, h)$ при $0 \leq r < 1$:

$$\begin{aligned} \|\nu(x, h)\|_{M_1(r, h)}^2 &= \Omega_h \sum_{|l| \neq 0} \frac{1}{|l|^{n+2r} \cdot \Omega_h^{1+2r/n}} \cdot \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} |\nu(k+l) - \nu(k)|^2 \\ &\quad + \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} |\nu(k)|^2 \\ &= I_1(r, h) + I_2(r, h), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\Omega_h = \prod_{j=1}^n h_j$, $\nu(k) = \pi\nu(x, h)$.

Так как семейство функций $u_0(x, h)$ липшицево, то справедлива оценка

$$I_2(r, h) \leq C_1 \|u(x, h)\|_{M(r, h)}^2, \quad (6.3)$$

где C_1 не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Имеет место элементарное неравенство

$$|\nu(k+l) - \nu(k)|^2 \leq A \{ |u_0(k+l)|^2 \cdot |u(k+l) - u(k)|^2 + |u(k)|^2 \cdot |u_0(k+l) - u_0(k)|^2 \}. \quad (6.4)$$

Используя (6.4), получаем неравенство

$$\begin{aligned} I_1(r, h) &\leq A \Omega_h \sum_{|l| \neq 0} \frac{1}{|l|^{n+2r} \cdot \Omega_h^{1+2r/n}} \cdot \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} |u_0(k+l)|^2 |u(k+l) - u(k)|^2 \\ &\quad + A \Omega_h \sum_{|l| \neq 0} \frac{1}{|l|^{n+2r} \cdot \Omega_h^{1+2r/n}} \cdot \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} |u(k)|^2 \cdot |u_0(k+l) - u_0(k)|^2 \\ &= B_1(r, h) + B_2(r, h). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из липшицевости семейства $u_0(x, h)$ следует:

$$B_1(r, h) \leq C_2(r) \|u(x, h)\|_{M(r, h)}^2, \quad (6.6)$$

где $C_2(r)$ не зависит от h .

Пусть $h_0 = \min h_j$; если $h_0 \geq 1$, то вследствие того что в $I_1(r, h)$ ряд абсолютно сходится, неравенство (6.1) будет справедливо.

Пусть теперь $0 < h_0 < 1$, тогда из неравенства (2.3) следует: существует число $\delta > 0$, не зависящее от h , такое, что $|h| < \delta$. Возьмем число $L = 10\delta$. Обозначим через $\Lambda_1(h)$ множество всех мультииндексов l , для которых выполняется $|l| \neq 0$, $(\sum_{i=1}^n (l_i h_i)^2)^{1/2} < L$, через $\Lambda_2(h)$ – множество всех остальных мультииндексов l , $|l| \neq 0$. Запишем $B_2(r, h)$ в виде

$$\begin{aligned} B_2(r, h) &= \sum_{i=1}^2 A \Omega_h \sum_{l \in \Lambda_i(h)} \frac{1}{|l|^{n+2r} \cdot \Omega_h^{1+2r/n}} \cdot \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} |u(k)|^2 \cdot |u_0(k+l) - u_0(k)|^2 \\ &= C_1(r, h) + C_2(r, h). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Используя липшицевость семейства $u_0(x, h)$, из (6.7) получаем

$$\begin{aligned} C_2(r, h) &\leq A_1(r) \Omega_h \sum_{l \in \Lambda_2(h)} \frac{\|u(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2}{(|l| |h|)^{n+2r}} \\ &\leq A_2(r) \int_{9\delta}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^{1+2r}} \cdot \|u(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 \\ &\leq A_3(r) \|u(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} C_1(r, h) &\leq A_4(r) \Omega_h \sum_{l \in \Lambda_1(h)} \frac{\|u(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 \cdot |l|^2 \cdot |h|^2}{(|l| |h|)^{n+2r}} \\ &\leq A_5(r) \int_0^{11\delta} \frac{d\rho}{\rho^{-1+2r}} \cdot \|u(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2 \\ &\leq A_6(r) \|u(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)}^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из (6.3), (6.5)–(6.9) следует неравенство (6.1) при $r > 0$.

Докажем неравенство (6.1) при $-1 < r < 0$.

Рассмотрим множество линейных функционалов I_λ над $M(r, h)$, определяемых функциями $\lambda(x, h) \in M(-r, h)$, $0 < -r < 1$, $\|\lambda(x, h)\|_{M(-r, h)} = 1$. Для доказательства (6.1) достаточно установить неравенство

$$|I_\lambda(\nu(x, h))| \leq C(r) \|u(x, h)\|_{M(r, h)}, \quad (6.10)$$

где $C(r)$ не зависит от h и $\lambda(x, h)$. Имеем:

$$I_\lambda(\nu(x, h)) = \int_{\mathbb{R}_n} u_0(x, h) u(x, h) \cdot \overline{\lambda(x, h)} dx. \quad (6.11)$$

Так как $0 < -r < 1$, то к семейству $b(x, h) = u_0(x, h) \overline{\lambda(x, h)}$ применимо неравенство (6.1). Из последнего замечания и (6.11) следует (6.10).

Предложение 6.1. доказано.

6.1. Задача Дирихле для общего эллиптического уравнения 2-го порядка. В дальнейшем будем предполагать, что Ω — открытая, ограниченная область с липшицевой границей, нормальная, допускающая разбиение (см. [2; определения 6.1–6.4, 6.6, 6.9]). Кроме того, будем считать, что область Ω такова, что любая функция $a(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ допускает продолжение $\tilde{a}(x) \in C^1(\mathbb{R}_n)$.

Рассмотрим равномерно эллиптическое уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x), \quad (6.12)$$

где $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $u(x) \in \mathring{H}_1(\Omega)$, $f(x) \in H_{-1}(\Omega)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ и имеет место неравенство (5.22). Для нахождения приближенного решения $u(x, h)$ уравнения (6.12) рассмотрим разностное уравнение

$$L_h u(x, h) = f(x, h), \quad (6.13)$$

где L_h — семейство операторов, определенных соотношением (5.23), $u(x, h) \in \mathring{M}(1, h, \Omega_{1h})$, $f(x, h) \in M(-1, h, \Omega_{1h})$, причем существует продолжение $\tilde{f}(x, h) \in M(-1, h)$ функции $f(x, h)$, которое сходится по норме $H_{-1}(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$ к $lf(x) \in H_{-1}(\mathbb{R}_n)$, где l — некоторое продолжение $f(x)$.

Из предложения 5.5 следует, что ограниченное семейство операторов $P_h L_h$ устойчиво отображает $\mathring{M}(1, h, \Omega_{1h})$ в $M(-1, h, \Omega_{1h})$, P_h — оператор сужения на Ω_{1h} . Из предложения 6.1 и условий на Ω следует, что семейство операторов L_h ограниченно отображает $\mathring{M}(1, h, \Omega_{1h})$, $0 < r \leq 1$, в $M(r - 2, h)$. Отсюда следует, что для того чтобы воспользоваться предложением 2.3, достаточно установить условие $\prod_h^*$ -аппроксимации (см. определение 1.7). Нужно заметить, что оператор

$$L(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

ограничен из $\mathring{H}_1(\Omega)$ в $H_{-1}(\Omega)$.

Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, тогда $L(\varphi) \in C(\bar{\Omega})$, т.е. оператор $L(u)$ — конечно порядка (см. определение 1.3). Так как $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, то существует $\delta > 0$ такое, что $\text{supp } L_h \prod_h^* \varphi(x) \subset \Omega_{1h}$ при $|h| < \delta$ (см. [2; определение 5.2]). Введем обозначение: $\psi_j(k_1 h_1, \dots, k_n h_n) = \pi T_{\text{пр}}(x_j) \prod_h^* \varphi(x)$ (см. [2; определение 1.2]). Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \pi T_{\text{лев}}(x_i) [a_{ij}(x, h) \psi_j(x, h)] \\ &= \frac{a_{ij}(k_1 h_1, \dots, k_i h_i, \dots, k_n h_n) - a_{ij}(k_1 h_1, \dots, (k_i - 1) h_i, \dots, k_n h_n)}{h_i} \\ & \quad \times \psi_j(k_1 h_1, \dots, k_n h_n) + a_{ij}(k_1 h_1, \dots, (k_i - 1) h_i, \dots, k_n h_n) \\ & \quad \times \frac{\psi_j(k_1 h_1, \dots, k_i h_i, \dots, k_n h_n) - \psi_j(k_1 h_1, \dots, (k_i - 1) h_i, \dots, k_n h_n)}{h_i}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Используя (6.14), при помощи условий $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ получаем соотношение

$$\left| L\varphi(k_1 h_1, \dots, k_n h_n) - \pi L_h \prod_h^* \varphi(x) \right| = O(|h|), \quad (6.15)$$

где $O(|h|) \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$ равномерно для всех k таких, что $D(k, h) \in \Omega_{1h}$. Так как $L(\varphi) \in C(\bar{\Omega})$, то из (6.15) следует, что операторы $L_h \prod_h^*$ -аппроксимируют оператор L в области Ω .

Все условия предложения 2.3 выполняются. Отсюда следует, что решение уравнения (6.12) существует и единственно для любой $f(x) \in H_{-1}(\Omega)$. Решения $u(x, h)$ уравнения (6.13) сильно сходятся в $\dot{H}_r(\Omega)$ для любого r , $0 < r < \frac{1}{2}$, к истинному решению $u(x) \in \dot{H}_1(\Omega)$ и, кроме того, $\|u(x, h) - \prod_{1h} u(x)\|_{\dot{M}(1, h, \Omega_{1h})} \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, где $\prod_{1h}$ – сужение интегрального проектора $\prod_h$ на область Ω_{1h} .

Рассмотрим оператор

$$M(u) = L(u) + F(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda(x)u(x),$$

где $b_i(x), \lambda(x) \in C(\bar{\Omega})$; $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$; для оператора $L(u)$ выполнено (5.12).

Рассмотрим уравнение

$$M(u) = f, \quad (6.16)$$

где $u(x) \in \dot{H}_1(\Omega)$, $f(x) \in H_{-1}(\Omega)$; пусть ядро оператора M состоит из одного нулевого элемента.

Для нахождения приближенного решения $u(x, h)$ уравнения (6.16) рассмотрим разностное уравнение

$$M_h u(x, h) = f(x, h), \quad (6.17)$$

где $M_h = L_h + F_h$, $F_h = \sum_{i=1}^n b_i(x, h) T_{\text{пр}}(x_i) u(x, h) + \lambda(x, h) u(x, h)$, $\pi b_i(x, h) = b_i(k_1 h_1, \dots, k_n h_n)$, $\pi \lambda(x, h) = \lambda(k_1 h_1, \dots, k_n h_n)$, $u(x, h) \in \dot{M}(1, h, \Omega_{1h})$, $f(x, h) \in M(-1, h, \Omega_{1h})$, причем существуют продолжения $\tilde{f}(x, h) \in M(-1, h)$ функций $f(x, h)$, которые сходятся к $lf(x) \in H_{-1}(\mathbb{R}_n)$ по норме $H_{-1}(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$, где lf – некоторое продолжение $f(x)$.

Аналогично, как и выше, проверяется, что выполняются все условия предложения 2.5. Отсюда следует, что решение $u(x) \in \dot{H}_1(\Omega)$ уравнения (6.16) существует и единственно $\forall f(x) \in H_{-1}(\Omega)$. Кроме того, найдется такое число $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$ существуют решения $u(x, h)$ уравнения (6.17), которые сильно сходятся в $\dot{H}_r(\Omega)$ при любом r , $0 < r < \frac{1}{2}$, к истинному решению $u(x) \in \dot{H}_1(\Omega)$, причем $\|u(x, h) - \prod_{1h} u(x)\|_{\dot{M}(1, h, \Omega_{1h})} \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$.

6.2. Характеристическое гиперсингулярное уравнение

$$\int_{\Omega} \frac{u(x) dx}{r^{n+2p+\lambda}} = f(x_0), \quad (6.18)$$

где $0 < \lambda < 2$, $p = 0, 1, 2, \dots$, $u(x) \in \dot{H}_{p+\lambda/2}(\Omega)$, $f(x_0) \in H_{-p-\lambda/2}(\Omega)$.

Определение символа в левой части (6.18) задано в (4.32).

Оператор $Tu = \int_{\Omega} \frac{u(x) dx}{r^{n+2p+\lambda}}$ ограничен из $\mathring{H}_{p+\lambda/2}(\Omega)$ в $H_{-p-\lambda/2}(\Omega)$ (см. [3]).

Для нахождения приближенного решения $u(x, h)$ уравнения (6.18) рассмотрим уравнение

$$C(\lambda, p)T_h(\lambda, p)u(x, h) = f(x, h), \quad (6.19)$$

где операторы $T_h(\lambda, p)$ определены соотношениями (5.1) и (3.50), $C(\lambda, 0) = 1$, $u(x, h) \in \mathring{M}(p + \lambda/2, h, \Omega_{1h})$, $f(x, h) \in M(-p - \lambda/2, h, \Omega_{1h})$, причем существуют продолжения $\tilde{f}(x, h) \in M(-p - \lambda/2, h)$ функций $f(x, h)$, которые сходятся к $lf(x) \in H_{-p-\lambda/2}(\mathbb{R}_n)$ по норме $H_{-p-\lambda/2}(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$, где lf – некоторое продолжение $f(x)$.

Из предложений 3.4, 4.1, 4.3, пп. 3.4, 5.2 и 5.3 следует, что для оператора T и семейства операторов $C(\lambda, p)T_h(\lambda, p)$ выполняются все условия предложения 2.3.

Отсюда получаем, что решение $u(x) \in \mathring{H}_{p+\lambda/2}(\Omega)$ уравнения (6.18) существует и единственно для любой $f(x) \in H_{-p-\lambda/2}(\Omega)$. Если $p = 0$, $0 < \lambda < 1$, то решения $u(x, h)$ уравнения (6.19) сходятся к $u(x) \in \mathring{H}_{\lambda/2}(\Omega)$ по норме $\mathring{H}_r(\Omega)$, $0 < r < \lambda/2$, при $|h| \rightarrow 0$; если $p = 0$, $1 \leq \lambda < 2$, то $u(x, h)$ сходятся к $u(x) \in \mathring{H}_{\lambda/2}(\Omega)$ по норме $\mathring{H}_r(\Omega)$ для любого r , $0 < r < \frac{1}{2}$; если $p = 1, 2, \dots$, $0 < \lambda < 2$, то $u(x, h)$ сходятся к $u(x) \in \mathring{H}_{p+\lambda/2}(\Omega)$ по норме $\mathring{H}_r(\Omega)$ для любого r , $0 < r < \frac{1}{2}$, при $|h| \rightarrow 0$. Во всех случаях при $|h| \rightarrow 0$

$$\left\| u(x, h) - \prod_{1h} u(x) \right\|_{\mathring{M}(p+\lambda/2, h, \Omega_{1h})} \rightarrow 0.$$

6.3. Итерированный оператор Лапласа порядка m (задача Дирихле). Рассмотрим уравнение

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad (6.20)$$

где Δ^m – итерированный оператор Лапласа порядка m , $u(x) \in \mathring{H}_m(\Omega)$, $f(x) \in H_{-m}(\Omega)$.

Приближенное решение $u(x, h)$ уравнения (6.20) ищем из уравнения

$$\Delta_{hp}^m u(x, h) = f(x, h), \quad (6.21)$$

где Δ_{hp}^m – разностный оператор Лапласа порядка m , $u(x, h) \in \mathring{M}(m, h, \Omega_{1h})$, $f(x, h) \in M(-m, h, \Omega_{1h})$; причем существуют продолжения $\tilde{f}(x, h) \in M(-m, h)$ функций $f(x, h)$, которые сходятся к $lf(x) \in H_{-m}(\mathbb{R}_n)$ по норме $H_{-m}(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$, где lf – некоторое продолжение $f(x)$.

Из [2; предложения 5.3 и 5.8] и п. 3.4.б) вытекает, что все условия предложения 2.3 выполнены. Отсюда следует, что решение $u(x) \in \mathring{H}_m(\Omega)$ уравнения (6.20) существует и единственно для любой $f(x) \in H_{-m}(\Omega)$. Приближенные решения $u(x, h)$ уравнения (6.21) сходятся к $u(x) \in \mathring{H}_m(\Omega)$ по норме $\mathring{H}_r(\Omega)$ для любого r , $0 < r < \frac{1}{2}$, при $|h| \rightarrow 0$, причем $\left\| u(x, h) - \prod_{1h} u(x) \right\|_{\mathring{M}(m, h, \Omega_{1h})} \rightarrow 0$.

6.4. Уравнение из задач дифракции. Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda^2 u &= 0, \quad x \in \mathbb{R}_3 \setminus \Omega, \\ \frac{du}{dn} \Big|_{\Omega} &= f, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где Δ – оператор Лапласа, Ω – ограниченный кусок некоторой плоскости α , n – нормаль к Ω ; f – заданная функция на Ω . Область Ω нормальна и допускает разбиение (см. [2; определения 6.6, 6.9]).

Пусть выполняются условия излучения Зоммерфельда:

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + i\lambda u(x) = o(|x|^{-1}) \quad (6.23)$$

при $|x| \rightarrow \infty$.

Кроме того, будем предполагать, что

$$\operatorname{Re} \lambda > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda \leq 0. \quad (6.24)$$

Фундаментальное решение уравнения $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ с условиями (6.23) в $\mathbb{R}_3$ имеет вид

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i\lambda r} - 1}{r}. \quad (6.25)$$

Решение задачи (6.22) с условиями (6.23) будем искать через потенциал двойного слоя $u(x, y)$, распределенный на Ω . Тогда относительно функции $u(x, y)$ имеет место уравнение

$$T(u) + F(u) = g(M_0), \quad (6.26)$$

где $T(u) = \int_{\Omega} \frac{u(x, y) dx dy}{r_{MM_0}^3}$; $F(u) = \int_{\Omega} \frac{J(r_{MM_0}) dx dy}{r_{MM_0}^3}$; $g(M_0) = -4\pi f(x_0, y_0)$, $r_{MM_0} = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}$; $J(r_{MM_0}) = e^{-i\lambda r_{MM_0}} + i\lambda e^{-i\lambda r_{MM_0}} r_{MM_0} - 1$, $u(x, y) \in \dot{H}_{1/2}(\Omega)$, $g(x_0, y_0) \in H_{-1/2}(\Omega)$.

Пусть число λ таково, что ядро оператора $M(u) = T(u) + F(u)$ состоит из одного нулевого элемента.

Так как Ω – ограниченная область, то существуют ограниченная область $\Omega_1 \supset \Omega$ и функция $\alpha(O M_0) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_2)$ (O – начало координат), $\alpha(x_0, y_0) = 1$ при $M_0(x_0, y_0) \in \Omega_1$, такие, что уравнение

$$\int_{\Omega} \frac{u(x, y)}{r_{MM_0}^3} dx dy + \int_{\Omega} \frac{J_1(r_{MM_0}) u(x, y)}{r_{MM_0}^3} dx dy = g(M_0) \quad (6.27)$$

будет эквивалентно уравнению (6.26), где $J_1(r_{MM_0}) = J(r_{MM_0}) \cdot \alpha(r_{MM_0})$, $\alpha(r_{MM_0}) = 1$ при $M, M_0 \in \Omega$.

Имеет место неравенство

$$|J_2(r_{MM_0})| = \left| \frac{J_1(r_{MM_0})}{r_{MM_0}^3} \right| < \frac{C}{r_{MM_0}},$$

отсюда $J_2(r_{MM_0}) \in L(\mathbb{R}_2)$ при каждом фиксированном M_0 . Уравнение (6.27) запишем в операторной форме

$$T(u) + F_1(u) = g(M_0). \quad (6.28)$$

Для нахождения приближенного решения $u(x, h)$ уравнения (6.28) разобьем плоскость $\mathbb{R}_2$ с векторным шагом $h = (h_1, h_2)$ на ячейки $D(k, h)$ (см. [2; определение 1.1]), причем для разбиения выполняется условие (2.3) из [2]. Сеточную функцию $u(k) = \pi u(x, h)$ (см. [2; определение 1.2]) будем находить из уравнения

$$\sum_k u(k) \gamma_1(k, m) + \sum_k u(k) \gamma_2(k, m) = g(M_{0m}), \quad M_{0m} \in \Omega_{1h}, \quad (6.29)$$

где суммирование происходит по всем номерам $k = (k_1, k_2)$ таким, что $D(k, h) \in \Omega_{1h}$; $M_{0m} = M_{0m}(m_1 h_1, m_2 h_2)$; $\pi g(x, h) = g(M_{0m})$, причем существуют продолжения $\tilde{g}(x, h) \in M(-1/2, h)$ функций $g(x, h)$, которые сходятся к $lg(x) \in H_{-1/2}(\mathbb{R}_n)$ при $|h| \rightarrow 0$, $lg(x)$ – некоторое продолжение $g(x)$. Коэффициенты уравнений (6.29) определяются из соотношений

$$\gamma_1(k, m) = \int_{D(k, h)} \frac{dx dy}{r_{MM_{0m}}^3}; \quad \gamma_2(k, m) = \int_{D(k, h)} J_2(r_{MM_{0m}}) dx dy. \quad (6.30)$$

Оператор $T_{h1} = \sum_k u(k) \gamma_1(k, m)$ является вихревым. Относительно T_{h1} справедливы все условия (как было доказано ранее) предложения 2.3. Дискретный оператор $F_{1h} u(k) = \sum_k u(k) \gamma_2(k, m)$ представляет собой оператор дискретной свертки. Для символа $\widehat{F}_{1h}(\varphi)$ этого оператора (см. [2; формула (1.9)]) имеет место неравенство

$$|\widehat{F}_{1h}(\varphi)| = \left| \sum_k \gamma_2(k, 0) e^{i(k, \varphi)} \right| \leq \int_{\mathbb{R}_2} |J_2(r_{MM_{0m}})| dx dy \leq C. \quad (6.31)$$

Из (6.31) следует: семейство операторов F_{1h} ограничено отображает пространства $M(r, h)$ в $M(r, h)$ для любого r . Так как имеет место неравенство

$$\sum_k |\gamma_2(k, m)| \leq C_1,$$

где C_1 не зависит от m и h , то для оператора F_1 и семейства F_{1h} будет выполняться условие $\prod_h^*$ -аппроксимации в области Ω . Итак, для операторов T , F_1 и семейств операторов T_{h1} и F_{h1} выполняются все условия предложения 2.5 из [2]. Отсюда следует, что решение $u(x, y) \in \mathring{H}_{1/2}(\Omega)$ уравнений (6.26), (6.28) существует и единственно. Найдется $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$ система уравнений (6.29) разрешима. Решения $u(x, h)$ системы (6.29) сходятся к $u(x) \in H_{1/2}(\Omega)$ по норме $\mathring{H}_r(\Omega)$ для любого r , $0 < r < \frac{1}{2}$, при $|h| \rightarrow 0$. Кроме того, имеет место $\|u(x, h) - \prod_{1h} u(x)\|_{\mathring{M}(1/2, h, \Omega_{1h})} \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$.

§ 7. Бесциркулярное обтекание поверхности

В аэродинамике при бесциркуляционном обтекании поверхности σ получается уравнение относительно плотности диполей $\nu(M)$, распределенной по поверхности σ :

$$\int_{\sigma} \frac{\nu(M)}{|MM_0|^3} \left[\frac{|MM_0|^2(\mathbf{n}_{M_0}, \mathbf{n}_M) - 3(\mathbf{MM}_0, \mathbf{n}_M)(\mathbf{MM}_0, \mathbf{n}_{M_0})}{|MM_0|^2} \right] d\sigma_M = g(M_0), \quad (7.1)$$

где $M, M_0 \in \sigma$; $\mathbf{n}_{M_0}, \mathbf{n}_M$ — орты нормалей к поверхности σ в точках M и M_0 соответственно; $g(M_0)$ — известная функция.

Будем предполагать, что существуют поверхности σ_1 и σ_2 такие, что $\sigma \subset \sigma_1 \subset \sigma_2$. Найдется такая декартова система координат $OXYZ$, в которой поверхность σ_2 задается уравнением $z = f(x, y)$. Пусть Ω, Φ и Λ — проекции σ, σ_1 и σ_2 на плоскость XOY , тогда $f(x, y) \in C^4(\bar{\Lambda})$, причем $\Gamma\Phi$ и $\Gamma\Lambda$, границы областей Φ и Λ , находятся на положительном расстоянии от Ω и Φ соответственно. Область Λ такова, что она допускает продолжение $lf \in C^4(\mathbb{R}_2)$ любой функции $f(x, y) \in C^4(\bar{\Lambda})$. Границу $\Gamma\Lambda = L$ области σ_2 будем считать выпуклой [5], т.е. для нее выполняются условия: выбран обход на L так, что если смотреть с конца любого вектора $\mathbf{n}_M$, то он (обход) виден против часовой стрелки; тройка векторов $\mathbf{n}_{M_0}, \mathbf{MM}_0, \boldsymbol{\tau}_M$ является правой для любых $M_0 \in \sigma_2, M \in L$, где $\boldsymbol{\tau}_M$ — касательный вектор к L , направление которого совпадает с направлением обхода L .

Итак, имеет место

$$(\mathbf{n}_{M_0}, \mathbf{MM}_0, \boldsymbol{\tau}_M) > 0. \quad (7.2)$$

На поверхности σ_2 выбрано непрерывное семейство нормалей. Из условия (7.2) для любой $M_0 \in \sigma_2$ ($M \in \sigma_2$) вытекает неравенство

$$\int_{\sigma_2} G(M, M_0) d\sigma_M < 0 \quad \left(\int_{\sigma_2} G(M, M_0) d\sigma_{M_0} < 0 \right), \quad (7.3)$$

где $G(M, M_0) = G(M_0, M)$ — ядро интеграла в (7.1).

Пусть для любых $M, M_0 \in \sigma_2$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} 0 < C_1 < G_2(M, M_0) \\ &= \frac{|M_0 M|^2(\mathbf{n}_{M_0}, \mathbf{n}_M) - 3(\mathbf{MM}_0, \mathbf{n}_M)(\mathbf{MM}_0, \mathbf{n}_{M_0})}{|M_0 M|^2} < C_2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Из сделанных предположений вытекает, что существует продолжение $lf \in C^4(\mathbb{R}_2)$ функции $z = f(x, y) \in C^4(\bar{\Lambda})$. Без ограничения общности можно считать, что lf — финитная функция; оставим для lf прежнее обозначение $f(x, y)$.

Разобьем плоскость XOY с векторным шагом $h = (h, h)$ (шаг разбиения $h > 0$ на каждой оси одинаков) на элементарные ячейки $D(k, h)$ (см. [2; определение 1.1]). Обозначим через $a(k, m)$ величину

$$a(k, m) = \iint_{D(m, h)} \frac{dx dy}{[(x - hm_1)^2 + (y - hm_2)^2 + (f(x, y) - f(hm_1, hm_2))^2]^{3/2}}. \quad (7.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. При сделанных выше предположениях имеет место неравенство

$$\Delta a(k, m) = |a(k, m) - a(m, k)| \leq Ch\gamma^*(k, m), \quad (7.6)$$

где C не зависит от h, k и m ,

$$\gamma^*(k, m) = \iint_{D(m, h)} \frac{dx dy}{[(x - hm_1)^2 + (y - hm_2)^2]^{3/2}}, \quad k \neq m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию $k \neq m$, то в интеграле (7.5) особенности нет. Сделаем в (7.5) замену: $x - hm_1 = hk_1 - z_0$, $y - hm_2 = hk_2 - t_0$, тогда получим

$$a(k, m) = \iint_{D(m, h)} \left[(x - k_1 h)^2 + (y - k_2 h)^2 + (f(h(k_1 + m_1) - x, h(k_2 + m_2) - y) - f(hm_1, hm_2))^2 \right]^{-3/2} dx dy.$$

Используя тот факт, что функция $g(z) = (1 + z)^{-3/2}$ имеет ограниченную производную при $z \geq 0$, $z = \left(\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{r(x_0, y_0)} \right)^2$, $r(x_0, y_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, имеем

$$\Delta a(k, m) = \left| \iint_{D(m, h)} \frac{1}{r_{k_1 k_2}^3} g'(z_1) \Delta z dx dy \right|, \quad (7.7)$$

где $r_{k_1 k_2} = \sqrt{(x - hk_1)^2 + (y - hk_2)^2}$, $(x, y) \in D(m, h)$; $z_1 > 0$ — некоторое число.

Оценим величину Δz :

$$|\Delta z| \leq C \left| \frac{f(x, y) - f(k_1 h, k_2 h)}{r_{k_1 k_2}} - \frac{f(hm_1, hm_2) - f(h(k_1 + m_1) - x, h(k_2 + m_2) - y)}{r_{k_1 k_2}} \right|. \quad (7.8)$$

Здесь было использовано неравенство

$$\left| \frac{f(x, y) - f(k_1 h, k_2 h)}{r_{k_1 k_2}} + \frac{f(hm_1, hm_2) - f(h(k_1 + m_1) - x, h(k_2 + m_2) - y)}{r_{k_1 k_2}} \right| < C,$$

где $(x, y) \in D(m, h)$, $(k_1, k_2) \neq (m_1, m_2)$.

Разлагая функции, находящиеся в правой части (7.8), по формуле Тейлора в точке (hm_1, hm_2) , получаем

$$|\Delta z| \leq C \left| \frac{f'_x(hm_1, hm_2) - f'_x(hk_1, hk_2)}{r_{k_1 k_2}} (x - hm_1) + \frac{f'_y(hm_1, hm_2) - f'_y(hk_1, hk_2)}{r_{k_1 k_2}} (y - hm_2) + \frac{O(h)}{r_{k_1 k_2}} \right| \leq C_1 h, \quad (7.9)$$

где $O(h)$ – остаточный член формулы Тейлора, $|O(h)| < C_2 h^2$ при $(x, y) \in D(m, h)$.

Из (4.7) и (7.9) следует предложение 7.1.

Рассмотрим величины

$$\begin{aligned}\beta_1(k, m) &= \iint_{D(m, h)} J(M'_{0m}, M') q(x, y) dx dy, \\ \beta_2(m) &= \frac{1}{h^2} \iint_{D(m, h)} q(x, y) dx dy, \\ \gamma(k, m) &= \beta_2(m) \cdot \beta_1(k, m),\end{aligned}\tag{7.10}$$

где $q(x, y) = \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2}$, $M'_{0m} = M'_{0m}(hm_1, hm_2)$, $M' = M'(x, y)$, $J(M'_0, M') = G(M_0, M)$, $M'_0 = M'_0(x_0, y_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *При $k \neq m$ имеет место неравенство*

$$|\Delta\gamma(k, m)| = |\gamma(k, m) - \gamma(m, k)| \leq Ch\gamma^*(k, m),\tag{7.11}$$

где C не зависит от h , k и m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}G_1(M, M_0) &= \frac{1}{|MM_0|^3} = J_1(M', M'_0), \\ G_2(M, M_0) &= \frac{G(M, M_0)}{G_1(M, M_0)} = J_2(M', M'_0).\end{aligned}\tag{7.12}$$

Так как $f(x, y) \in C_0^4(\mathbb{R}_2)$, то функция $J_2(M', M'_0)$ как функция переменных x, y, x_0, y_0 имеет равномерно ограниченные первые производные по этим переменным при $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, что проверяется непосредственно с использованием формулы Тейлора.

При $k \neq m$ в интегралах, присутствующих в формулах (7.10), особенностей нет, все функции непрерывны и положительны. Отсюда, применяя теорему о среднем, получаем

$$\begin{aligned}\gamma(k, m) &= q(M'_1) J_2(M'_{0m}, M'_2) \cdot q(M'_3) a(k, m); \\ \gamma(m, k) &= q(M'_4) J_2(M'_{0k}, M'_5) \cdot q(M'_6) a(m, k) \\ &= q(M'_4) J_2(M'_5, M'_{0k}) \cdot q(M'_6) [a(k, m) + \Delta a(k, m)],\end{aligned}\tag{7.13}$$

где $M'_1, M'_5, M'_6 \in D(m, h)$, $M'_2, M'_3, M'_4 \in D(k, h)$.

Из сделанного выше замечания относительно функции $J_2(M', M'_0) = J_2(M'_0, M')$ и условия (7.4), а также из (7.13) и предложения 7.1 следует неравенство (7.11), что и требовалось доказать.

При $f(x, y) \in C_0^4(\mathbb{R}_2)$ для функции $Q(M, M_0)$ имеют место оценки

$$\begin{aligned}|Q(M, M_0)| &= \left| \frac{1}{|M_0 M|^3} \frac{|M_0 M|^2 [(\mathbf{n}_{M_0}, \mathbf{n}_M) - 1] - 3(\mathbf{M}_0 \mathbf{M}, \mathbf{n}_{M_0})(\mathbf{M}_0 \mathbf{M}, \mathbf{n}_M)}{|M_0 M|^2} \right| \\ &\leq \frac{C}{|M_0 M|},\end{aligned}\tag{7.14}$$

$|M_0 M| \leq \delta$, C_1 не зависит от M_0 и M ; далее будем обозначать $Q^*(M', M'_0) = Q(M, M_0)$.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathbb{R}_2} J(M', M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \\ &= \iint_{\mathbb{R}_2} J_1(M', M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 + \iint_{\mathbb{R}_2} Q^*(M', M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \\ &= I_1(M') + I_2(M'). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Из (7.14) и (7.15) следует неравенство

$$|I_2(M')| \leq C_3, \quad (7.16)$$

где C_3 не зависит от M' .

Рассмотрим представление

$$\begin{aligned} I_1(M') &= \iint_{S(R, M')} J_1(M', M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \\ &\quad + \iint_{\mathbb{R}_2 \setminus S(R, M')} J_1(M', M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \\ &= I_{11}(M') + I_{12}(M'), \end{aligned} \quad (7.17)$$

где $S(R, M')$ – круг радиуса R с центром в точке M' .

Для интеграла $I_{12}(M')$ имеет место оценка

$$|I_{12}(M')| \leq \frac{C_3}{R}. \quad (7.18)$$

В работе [6] для интеграла по Адамару $I_{11}(M')$ доказано представление

$$\begin{aligned} I_{11}(M') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{S(R, M') \setminus S(\varepsilon, M')} \frac{k_1(x, y, \varphi)}{r^2} dr d\varphi - \frac{M_1(x, y)}{\varepsilon} \right] \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S(R, M') \setminus S(\varepsilon, M')} \frac{k_2(x, y, \varphi)}{r^2} dr d\varphi \\ &\quad + \iint_{S(R, M')} k_3(x, y, r, \varphi) dr d\varphi \\ &= I_{21}(M') + I_{31}(M') + I_{41}(M'), \end{aligned} \quad (7.19)$$

где

$$\begin{aligned} |k_i(x, y, r, \varphi)| &< C, \quad i = 1, 2, 3; \quad M_1(x, y) = q(x, y) \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{L^{3/2}(x, y, \psi)}; \\ L(x, y, \psi) &= 1 + \cos^2 \psi A^2(x, y); \quad A^2(x, y) = (f'_x)^2(x, y) + (f'_y)^2(x, y); \\ \int_0^{2\pi} k_2(x, y, \varphi) d\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $I_{31}(M') = 0$; в той же работе [6] доказано, что $I_{21}(M') = -M_1(x, y)/R$.

Из сделанных выше замечаний следует оценка

$$|I_{11}(M')| \leq C \left(R + \frac{1}{R} \right). \quad (7.20)$$

Из неравенств (7.16), (7.18), (7.20) и из произвольности выбора R вытекает

$$|I(M')| \leq C_0, \quad (7.21)$$

где C_0 не зависит от M' .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Из неравенства (7.21) следует утверждение: для любой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}_2$ существует ограниченная область $D_1 \supset D$ такая, что для точек $M' \in D$ будет выполняться неравенство

$$\left| \iint_{D_1} J(M', M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right| \leq K, \quad (7.22)$$

где константа K не зависит от M' , D и D_1 .

Введем семейство дискретных операторов T_h соотношением

$$\pi T_h u(x, h) = \sum_k u(k) \beta_1(k, m), \quad (7.23)$$

где $\beta_1(k, m)$ определяются равенствами (7.10), оператор π см. в [2; определение 1.2], $u(k) = \pi u(x, h)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Если $f(x, y) \in C_0^4(\mathbb{R}_2)$, то семейство операторов T_h ограничено отображает пространства $M(r, h)$ в пространства $M(r-1, h)$, $0 < r < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду замечания 5.1 из [2] утверждение достаточно доказать для функций $u(x, h) \in M_h^\infty$, $u(x, h) \in M(r, h)$, $0 < r < 1$. Рассмотрим линейный функционал $I = (2\pi)^{-2} l(\nu(x, h))$ над $M(1-r, h)$, определенный элементом $T_h u(x, h)$. Для доказательства предложения 7.3 достаточно установить неравенство

$$|I(\nu(x, h))| \leq C \|\nu(x, h)\|_{M(1-r, h)} \cdot \|u(x, h)\|_{M(r, h)} \quad \forall \nu(x, h) \in M(1-r, h). \quad (7.24)$$

В свою очередь, ввиду замечания 5.1 из [2] неравенство (7.24) достаточно доказать для функций $\nu(x, h) \in M_h^\infty$, $\nu(x, h) \in M(1-r, h)$. Итак, пусть $u(x, h)$, $\nu(x, h) \in M_0^\infty(h)$. Тогда согласно замечанию 7.1 существует ограниченная область D_1 , $D_1 \supset \text{supp } u(x, h)$, $D_1 \supset \text{supp } \nu(x, h)$, такая, что для любого разбиения на ячейки $D(m, h)$, $D(m, h) \subset \text{supp } u(x, h)$ либо $D(m, h) \subset \text{supp } \nu(x, h)$, будет выполняться неравенство

$$\left| \sum_{k \in \Lambda(h)} \beta_1(k, m) \right| \leq C_0, \quad (7.25)$$

где $\Lambda(h)$ – множество номеров k таких, что ячейки $D(k, h) \subset D_1$; C_0 – константа, не зависящая от m и D_1 .

Далее имеем из [2; формула (6.5)]:

$$\begin{aligned}
I(\nu(x, h)) &= h^2 \sum_{m \in \Lambda(h)} \nu(m) \sum_{k \in \Lambda(h)} \overline{u(k)} \beta_1(k, m) \\
&= h^2 \sum_{m \in \Lambda(h)} \beta_2(m) \nu_1(m) \sum_{k \in \Lambda(h)} \overline{u(k)} \beta_1(k, m) \\
&= h^2 \sum_{m \in \Lambda(h)} \beta_2(m) \nu_1(m) \left[\sum_{\substack{k \in \Lambda(h) \\ k \neq m}} \overline{u(k)} \beta_1(k, m) + \beta_1(m, m) \overline{u(m)} \right] \\
&= h^2 \sum_{m \in \Lambda(h)} \beta_2(m) \nu_1(m) \left[\sum_{k \in \Lambda(h)} \beta_1(k, m) \cdot (\overline{u(k)} - \overline{u(m)}) \right] \\
&\quad + h^2 \sum_{m \in \Lambda(h)} \beta_2(m) \beta(m) \nu_1(m) \overline{u(m)} \\
&= I_1(\nu(x, h)) + I_2(\nu(x, h)),
\end{aligned} \tag{7.26}$$

где $\nu_1(m) = \nu(m)/\beta_2(m)$, $\nu(m) = \pi\nu(x, h)$, $\beta(m) = \sum_{k \in \Lambda(h)} \beta_1(k, m)$.

Легко проверить, что семейство ступенчатых функций $\psi(x, h)$ таких, что $\pi\psi(x, h) = 1/\beta_2(m)$, является липшицевым (см. определение 6.1). Из предложения 6.1 следует, что $\nu_1(x, h) \in M(1-r, h)$, $\pi\nu_1(x, h) = \nu_1(m)$.

Из (7.25) и сделанных замечаний следует неравенство

$$\begin{aligned}
|I_2(\nu(x, h))| &\leq C_0 \|\nu(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \cdot \|u(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_n)} \\
&\leq C_1 \|M(x, h)\|_{M(1-r, h)} \cdot \|u(x, h)\|_{M(r, h)}.
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Поменяем местами индексы k и m в $I_1(\nu(x, h))$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= h^2 \sum_{k \in \Lambda(h)} \beta_2(k) \nu_1(k) \left[\sum_{m \in \Lambda(h)} \beta_1(m, k) [\overline{u(m)} - \overline{u(k)}] \right] \\
&= h^2 \sum_{k \in \Lambda(h)} \sum_{m \in \Lambda(h)} \beta_2(m) \beta_1(k, m) \nu_1(k) [\overline{u(m)} - \overline{u(k)}] \\
&\quad + h^2 \sum_{k \in \Lambda(h)} \sum_{m \in \Lambda(h)} [\beta_2(k) \beta_1(k, m) - \beta_2(m) \beta_1(k, m)] \cdot \nu_1(k) [\overline{u(m)} - \overline{u(k)}].
\end{aligned}$$

Сравнивая последнее соотношение с (7.26), получаем

$$\begin{aligned}
I_1(\nu(x, h)) &= \frac{h^2}{2} \sum_{k \in \Lambda(h)} \sum_{m \in \Lambda(h)} \beta_2(m) \beta_1(k, m) [\nu_1(k) - \nu_1(m)] [\overline{u(m)} - \overline{u(k)}] \\
&\quad + \frac{h^2}{2} \sum_{k \in \Lambda(h)} \sum_{m \in \Lambda(h)} \Delta\gamma(k, m) \nu_1(k) [\overline{u(m)} - \overline{u(k)}] \\
&= A_1(\nu(x, h)) + A_2(\nu(x, h)).
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Рассмотрим величины $\alpha_r(k, m) = (|k - m|^{2+2r} \cdot |h|^{2r})^{-1}$, $k \neq m$, $0 < r < 1$. Имеет место соотношение $\alpha_{1/2}(k, m) = (\alpha_r(k, m) \cdot \alpha_{1-r}(k, m))^{1/2}$. Из [2; предложение 4.1] следует неравенство

$$h^2 \sum_{\substack{m \in \Lambda(h) \\ k \neq m}} \sum_{k \in \Lambda(h)} \alpha_r(k, m) |u(m) - u(k)|^2 \leq C \|u(x, h)\|_{M_1(r, h)}^2 \leq C_1 \|u(x, h)\|_{M(r, h)}^2. \quad (7.29)$$

Из определения величин $\beta_2(m)$, $\beta_1(k, m)$ (см. (7.10)) и предложения 7.2 при $k \neq m$ следуют оценки

$$|\beta_2(m)\beta_1(k, m)| \leq C_1 \alpha_{1/2}(k, m), \quad |\Delta\gamma(k, m)| \leq C_1 h \sqrt{\alpha_r(k, m) \alpha_{1-r}(k, m)}, \quad (7.30)$$

где C_1 не зависит от h, k и m .

Из (7.28)–(7.30) вытекают неравенства

$$\begin{aligned} |A_1(\nu(x, h))| &\leq C_2 \sqrt{h^2 \sum_{\substack{m \in \Lambda(h) \\ k \neq m}} \sum_{k \in \Lambda(h)} \alpha_{1-r}(k, m) |\nu_1(k) - \nu_1(m)|^2} \\ &\quad \times \sqrt{h^2 \sum_{\substack{m \in \Lambda(h) \\ k \neq m}} \sum_{k \in \Lambda(h)} \alpha_r(k, m) |u(m) - u(k)|^2} \\ &\leq C_3 \|\nu(x, h)\|_{M(1-r, h)} \cdot \|u(x, h)\|_{M(r, h)}; \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} |A_2(\nu(x, h))| &\leq C_2 \sqrt{h^2 \sum_{\substack{m \in \Lambda(h) \\ k \neq m}} \sum_{k \in \Lambda(h)} h^2 \alpha_{1-r}(k, m) |\nu_1(k)|^2} \\ &\quad \times \sqrt{h^2 \sum_{\substack{m \in \Lambda(h) \\ k \neq m}} \sum_{k \in \Lambda(h)} \alpha_r(k, m) |u(m) - u(k)|^2} \\ &\leq C_3 \cdot \|u(x, h)\|_{M(r, h)} \\ &\quad \times \sqrt{h^2 \sum_{k \in \Lambda(h)} h^{2r} |\nu(k)|^2 \sum_{\substack{m \in \Lambda(h) \\ k \neq m}} h^{2-2r} \alpha_{1-r}(k, m)}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Из (7.32), учитывая неравенство $\sum_{k \neq m} h^{2-2r} \alpha_{1-r}(k, m) \leq C_0$, где C_0 не зависит от h и k , получаем оценку

$$|A_2(\nu(x, h))| \leq C_4 \|u(x, h)\|_{M(r, h)} \cdot h^r \|\nu(x, h)\|_{L_2(\mathbb{R}_2)}. \quad (7.33)$$

Из (7.27), (7.31) и (7.33) получим неравенство (7.24). Отсюда вытекает предложение 7.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. *Ограниченное семейство операторов T_h устойчиво отображает пространства $\dot{M}(1/2, h, \Omega_{1h})$ в $M(-1/2, h, \Omega_{1h})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $A(h)$ и $A_1(h)$ множества значений индексов $k = (k_1, k_2)$ таких, что соответственно выполняется $D(k, h) \subset \Omega$, $D(k, h) \subset \Phi$. Ввиду предположений, сделанных относительно σ , будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} \beta_1(m, m) < 0 \quad \forall m \in A_1(h), \quad \sum_{k \in A(h)} \beta_1(k, m) < 0, \\ \sum_{k \in A_1(h)} \beta_1(k, m) = \beta(m) < 0 \quad \forall m \in A(h), \quad 0 < C_1 \leq |\beta(m)| \leq C_2, \end{aligned} \quad (7.34)$$

где C_1 и C_2 не зависят от h и m для всякого $m \in A(h)$.

Рассмотрим линейный функционал $I = (2\pi)^{-2} l(\nu(x, h))$ над пространством $\overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})$, определенный элементом $T_h u(x, h)$, $u(x, h) \in \overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})$. Найдем его значения на семействе функций $\nu(x, h) = q(x, h)u(x, h)$, где $\pi q(x, h) = \beta_2(k)$. Семейство функций $q(x, h)$ липшицево, поэтому $\nu(x, h) \in \overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})$ по предложению 6.1.

Аналогично (7.26) и (7.28) получим соотношение

$$\begin{aligned} I(\nu(x, h)) &= h^2 \sum_{m \in A(h)} \beta_2(m) u(m) \sum_{k \in A(h)} \overline{u(k)} \beta_1(k, m) \\ &= h^2 \sum_{m \in A_1(h)} \beta_2(m) u(m) \sum_{k \in A_1(h)} \overline{u(k)} \beta_1(k, m) \\ &= -\frac{h^2}{2} \sum_{k \in A_1(h)} \sum_{m \in A_1(h)} \beta_2(m) \beta_1(k, m) |u(m) - u(k)|^2 \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \sum_{k \in A_1(h)} \sum_{m \in A_1(h)} \Delta \gamma(k, m) u(k) (\overline{u(m)} - \overline{u(k)}) \\ &\quad - h^2 \sum_{m \in A(h)} \beta_2(m) |\beta(m)| |u(m)|^2. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Из (7.4) и (7.35) получим

$$\begin{aligned} |I(\nu(x, h))| &\geq C_1 \left[\frac{h^2}{2} \sum_{k \in A_1(h)} \sum_{m \in A_1(h)} \gamma^*(k, m) |u(m) - u(k)|^2 \right. \\ &\quad \left. + h^2 \sum_{m \in A(h)} \beta_2(m) |\beta(m)| |u(m)|^2 \right] \\ &\quad - \left| \frac{h^2}{2} \sum_{k \in A_1(h)} \sum_{m \in A_1(h)} \Delta \gamma(k, m) u(k) [\overline{u(m)} - \overline{u(k)}] \right| \\ &= I_1(\nu(x, h)) - I_2(\nu(x, h)). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Рассмотрим семейство вихревых операторов $T_{h,1/2}$, определяемых соотношением

$$\pi T_{h,1/2} u(x, h) = \sum_{k \in A(h)} u(k) \gamma^*(k, m),$$

где $u(x, h) \in \overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})$.

Пусть $l_1 = (2\pi)^{-2}l(\nu(x, h))$ — линейный функционал над $\overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})$, определяемый элементом $T_{h, 1/2}u(x, h)$, $\nu(x, h) \in \overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})$. Рассмотрим его значения на семействе функций $u(x, h)$. Тогда аналогично (7.35) получим:

$$l_1(u(x, h)) = -\frac{h^2}{2} \sum_{k \in A_1(h)} \sum_{m \in A_1(h)} \gamma^*(k, m) |u(m) - u(k)|^2 - h^2 \sum_{m \in A(h)} |\beta^*(m)| |u(m)|^2, \quad (7.37)$$

где $\Delta\gamma^*(k, m) = 0 \quad \forall k, m$; $\beta^*(m) = \sum_{k \in A_1(h)} \gamma^*(k, m) < 0$; при $m \in A(h)$ выполняется неравенство $0 < C_1 < |\beta^*(m)| < C_2$, константы C_1 и C_2 не зависят от h и m .

Из предложения 5.1 следует неравенство

$$|l_1(u(x, h))| \geq k \cdot \|u(x, h)\|_{\overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})}, \quad (7.38)$$

где k не зависит от h .

Из (7.34), (7.36) и (7.38) вытекает оценка

$$|I_1(\nu(x, h))| \geq k_1 \cdot \|u(x, h)\|_{\overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})}^2, \quad (7.39)$$

где k_1 не зависит от h .

Из (7.33) получим

$$|I_2(\nu(x, h))| \leq k_2 h^{1/2} \cdot \|u(x, h)\|_{\overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})}^2, \quad (7.40)$$

где k_2 не зависит от h .

Из (7.40) следует: существует такое $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$ будет выполняться неравенство $|I(\nu(x, h))| \geq k_3 \cdot \|u(x, h)\|_{\overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})}^2$, где k_3 не зависит от h . Из последнего неравенства вытекает устойчивость семейства операторов T_h . Предложение 7.4 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Если $f(x, y) \in C_0^4(\mathbb{R}_2)$, то оператор

$$T(u) = \iint_{\mathbb{R}_2} J(M', M'_0) q(x_0, y_0) u(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

ограничен из $H_{1/2}(\mathbb{R}_2)$ в $H_{-1/2}(\mathbb{R}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейный функционал $I = (2\pi)^{-2}l(\nu(x, h))$ над пространством $H_{1/2}(\mathbb{R}_2)$, определенный элементом $T(u)$. Тогда для доказательства предложения 7.5 достаточно для всех $u(x, y), \nu(x, y) \in H_{1/2}(\mathbb{R}_2)$ установить неравенство

$$|I(\nu)| \leq C \|u(x, y)\|_{H_{1/2}(\mathbb{R}_2)} \cdot \|\nu(x, y)\|_{H_{1/2}(\mathbb{R}_2)}. \quad (7.41)$$

Так как пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}_2)$ всюду плотно в $H_{1/2}(\mathbb{R}_2)$, то неравенство (7.41) достаточно доказать для функций $u(x, y), \nu(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_2)$. Кроме того, так как оператор $Q, Q\nu = q(x, y)\nu(x, y)$, взаимно однозначно и ограниченно отображает $H_{1/2}(\mathbb{R}_2)$ на $H_{1/2}(\mathbb{R}_2)$, то неравенство (7.41) достаточно доказать для $I(Q\nu)$, где $q(x, y) = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}$.

Из замечания 7.1 следует: существует область $\Omega_1 \supset \Omega$ такая, что будет выполняться неравенство

$$\left| \iint_{\Omega_1} J(M', M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right| < k \quad (7.42)$$

для любой точки $M' \in \Omega$, k не зависит от M' и областей Ω_1, Ω ($\Omega \supset \text{supp } u(x, y), \Omega \supset \text{supp } \nu(x, y)$).

Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} I(Q\nu) &= \iint_{\Omega} q(x, y) \nu(x, y) \left[\iint_{\Omega} J(M', M'_0) \overline{u(x_0, y_0)} q(x, y) dx_0 dy_0 \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega_1} q(x, y) \nu(x, y) \left[\iint_{\Omega_1} J(M', M'_0) \overline{u(x_0, y_0)} q(x, y) dx_0 dy_0 \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega_1} q(x, y) \nu(x, y) \left[\iint_{\Omega_1} J(M', M'_0) \overline{u(x_0, y_0)} q(x, y) dx_0 dy_0 \right. \\ &\quad \left. - \overline{u(x, y)} \iint_{\Omega_1} J(M', M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 + \overline{u(x, y)} \cdot \beta(x, y) \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega_1} q(x, y) \nu(x, y) \\ &\quad \times \left[\iint_{\Omega_1} J(M', M'_0) [\overline{u(x_0, y_0)} - \overline{u(x, y)}] q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right] dx dy \\ &\quad + \iint_{\Omega} q(x, y) \beta(x, y) \nu(x, y) \overline{u(x, y)} dx dy, \end{aligned} \quad (7.43)$$

где

$$\beta(x, y) = \iint_{\Omega_1} J(M', M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

и $|\beta(x, y)| < k$ при $(x, y) \in \Omega$ (см. (7.42)).

Меняя местами в (7.43) x и x_0 , y и y_0 , а также пользуясь симметричностью $J(M', M'_0)$, получаем

$$\begin{aligned} I(Q\nu) = & \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_1} J(M', M'_0) q(x, y) q(x_0, y_0) \nu(x_0, y_0) \right. \\ & \times \left. \left[\overline{u(x, y)} - \overline{u(x_0, y_0)} \right] dx dy \right] dx_0 dy_0 \\ & + \iint_{\Omega} q(x, y) \beta(x, y) \nu(x, y) \cdot \overline{u(x, y)} dx dy. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Из (7.43) и (7.44) следует соотношение

$$\begin{aligned} I(Q\nu) = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_1} J(M', M'_0) q(x, y) q(x_0, y_0) \\ & \times [\nu(x, y) - \nu(x_0, y_0)] [\overline{u(x, y)} - \overline{u(x_0, y_0)}] dx_0 dy_0 dx dy \\ & + \iint_{\Omega} q(x, y) \beta(x, y) \nu(x, y) \overline{u(x, y)} dx dy = I_1(Q\nu) + I_2(Q\nu). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Из (7.42) вытекает неравенство

$$|I_2(Q\nu)| \leq C \|u(x, y)\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\nu(x, y)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (7.46)$$

Так как интегралы в $I_1(Q\nu)$ абсолютно сходятся, то, применяя (7.4) и неравенство Коши–Буняковского, получаем неравенство

$$\begin{aligned} |I_1(Q\nu)| & \leq C_1 \sqrt{\iint_{\Omega_1} \iint_{\Omega_1} \frac{|\nu(x, y) - \nu(x_0, y_0)|^2 dx dy dx_0 dy_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}}} \\ & \times \sqrt{\iint_{\Omega_1} \iint_{\Omega_1} \frac{|u(x, y) - u(x_0, y_0)|^2 dx dy dx_0 dy_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}}} \\ & \leq C_2 \|\nu(x, y)\|_{\dot{H}_{1/2}(\Omega)} \cdot \|u(x, y)\|_{\dot{H}_{1/2}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Из неравенств (7.46) и (7.47) следует (7.41). Итак, предложение 7.5 доказано.

Исследуем свойства функции

$$\nu(x, y) = \iint_{\Omega} J(M', M'_0) u(x_0, y_0) dx_0 dy_0,$$

где $u(x_0, y_0) \in C_0^3(\Omega)$.

Функцию $\nu(x, y)$ представим в виде $\nu(x, y) = \nu_1(x, y) + \nu_2(x, y)$, где

$$\begin{aligned} \nu_1(x, y) &= \iint_{\Omega} J_1(M', M'_0) u(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \\ \nu_2(x, y) &= \iint_{\Omega} Q^*(M', M'_0) u(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \end{aligned}$$

а функция $Q^*(M', M'_0)$ определена формулой (7.14).

Так как $f(x, y) \in C_0^4(\mathbb{R}_2)$, то функция

$$\alpha(x, y, r, \varphi) = \frac{f(x, y) - f(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi)}{r}$$

имеет производные $\frac{\partial \alpha}{\partial r} = C^1(\mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2)$, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} = C(\mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2)$. Поэтому если ввести переменные $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $x - x_0 = -r \cos \varphi$, $y - y_0 = -r \sin \varphi$, то функция $F(x, y, r, \varphi) = 1/[1 + \alpha^2]^{3/2}$ имеет непрерывные по всем переменным x, y, r, φ производные $\frac{\partial F}{\partial r}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$. Отсюда следует, что функцию $J_1(M', M'_0)$ можно представить в виде

$$J_1(M', M'_0) = \frac{1}{r^3} A_0(x, y, \varphi) + \frac{1}{r^2} A_1(x, y, \varphi) + \frac{A_2(x, y, r, \varphi)}{r}, \quad (7.48)$$

где $A_0(x, y, \varphi) = F(x, y, \varphi, 0)$, $A_1(x, y, \varphi) = \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r=0}$, $A_2(x, y, r, \varphi) = \frac{O(x, y, r, \varphi)}{r^2}$, $O(x, y, r, \varphi)$ – остаточный член формулы Тейлора, $A_2(x, y, r, \varphi)$ непрерывна по переменным x, y, r, φ .

В работе [6] показано, что имеет место

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} A_1(x, y, \varphi) d\varphi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} A_0(x, y, \varphi) \cos \varphi d\varphi &= 0, \quad \int_0^{2\pi} A_0(x, y, \varphi) \sin \varphi d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Функция $A_0(x, y, \varphi)$ имеет непрерывные производные по всем аргументам до 3-го порядка, функция $A_1(x, y, \varphi)$ имеет непрерывные производные по всем аргументам до второго порядка включительно.

Возьмем число $R > 0$ настолько большим, чтобы круг $S(R, M')$ радиуса R с центром в любой точке $M'(x, y)$ полностью содержал Ω . Тогда функцию $\nu_1(x, y)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \nu_1(x, y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{S(R, M') \setminus S(\varepsilon, M')} \frac{u(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi)}{r^2} \cdot A_0(x, y, \varphi) dr d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{u(x, y) B(x, y)}{\varepsilon} \right] \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{S(R, M') \setminus S(\varepsilon, M')} \frac{u(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi)}{r} A_1(x, y, \varphi) dr d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \iint_{S(R, M') \setminus S(\varepsilon, M')} u(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi) A_2(x, y, r, \varphi) dr d\varphi \right] \\ &= \lambda_1(x, y) + \lambda_2(x, y) + \lambda_3(x, y), \end{aligned} \quad (7.50)$$

где

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{L^{3/2}(x, y, \psi)}, \\ L(x, y, \psi) &= 1 + \cos^2 \psi A^2(x, y), \quad A^2(x, y) = f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y). \end{aligned}$$

Из теоремы о непрерывности интеграла по параметру и свойств $A_2(x, y, r, \varphi)$ и $u(x_0, y_0)$ следует, что $\lambda_3(x, y)$ непрерывна по аргументам x и y .

Используя (7.50), а также тот факт, что $u(x + R \cos \varphi, y + R \sin \varphi) = 0$, получаем, интегрируя по частям,

$$\lambda_2(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R A_1(x, y, \varphi) \left[\frac{\partial u(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi)}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi)}{\partial y} \sin \varphi \right] \ln r \, dr \, d\varphi.$$

Отсюда аналогично выводу относительно функции $\lambda_3(x, y)$ заключаем, что функция $\lambda_2(x, y)$ непрерывна по аргументам x и y .

Интегрируя по частям и используя соотношения (7.49) и (7.50), представляем функцию $\lambda_1(x, y)$ в виде

$$\lambda_1(x, y) = - \int_0^{2\pi} \int_0^R A_0(x, y, \varphi) \left[\frac{\partial^2 u(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi)}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + \sin 2\varphi \frac{\partial^2 u(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi)}{\partial x \partial y} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 u(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi)}{\partial y^2} \right] \ln r \, dr \, d\varphi.$$

Отсюда аналогично выводу относительно $\lambda_3(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ заключаем, что функция $\lambda_1(x, y) \in C(\mathbb{R}_2)$. Итак, $\nu_1(x, y) \in C(\mathbb{R}_2)$.

Функцию $\nu_2(x, y)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \nu_2(x, y) &= \iint_{\Omega} \frac{(\mathbf{n}_{M_0}, \mathbf{n}_M) - 1}{|M_0 M|^3} u(x_0, y_0) \, dx_0 \, dy_0 \\ &\quad + \iint_{\Omega} \frac{(-3)(\mathbf{M}_0 \mathbf{M}, \mathbf{n}_M)(\mathbf{M}_0 \mathbf{M}, \mathbf{n}_{M_0})}{|M_0 M|^3} u(x_0, y_0) \, dx_0 \, dy_0 \\ &= \beta_1(x, y) + \beta_2(x, y). \end{aligned} \quad (7.51)$$

Переходя к координатной форме записи и вводя координаты

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad x_0 - x = r \cos \varphi, \quad y_0 - y = r \sin \varphi,$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{M}_0 \mathbf{M}, \mathbf{n}_{M_0})}{r^2} &= \gamma_1(x, y, r, \varphi), \quad \frac{(\mathbf{M}_0 \mathbf{M}, \mathbf{n}_M)}{r^2} = \gamma_2(x, y, r, \varphi), \\ \frac{(\mathbf{n}_{M_0}, \mathbf{n}_M)}{r^2} &= \frac{1}{r^2} + \gamma_3(x, y, r, \varphi), \\ \frac{1}{|M_0 M|^3} &= \frac{1}{r^3} F_1(x, y, r, \varphi), \quad \frac{1}{|M_0 M|^5} = \frac{1}{r^5} F_2(x, y, r, \varphi), \end{aligned} \quad (7.52)$$

где функции $\gamma_i(x, y, r, \varphi)$, $i = 1, 2, 3$, $F_j(x, y, r, \varphi)$, $j = 1, 2$, непрерывны по аргументам x, y, r, φ .

Из (7.51) и (7.52) вытекает, что $\beta_1(x, y)$, $\beta_2(x, y) \in C(\mathbb{R}_2)$, следовательно, $\nu_2(x, y) \in C(\mathbb{R}_2)$.

Предыдущие рассуждения доказывают

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.6. Если $f(x, y) \in C_0^4(\mathbb{R}_2)$, $u(x, y) \in C_0^3(\Omega)$, то функция

$$\nu(x, y) = \iint_{\Omega} J(M', M'_0) u(x_0, y_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

непрерывна по аргументам x и y .

Докажем, что семейство дискретных операторов T_h , определенных соотношением (7.23), Π_h^* -аппроксимирует в области Ω ограниченный оператор $T: \overset{\circ}{H}_{1/2}(\Omega) \rightarrow H_{-1/2}(\Omega)$,

$$T(u) = \iint_{\Omega} J(M', M'_0) u(x_0, y_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0.$$

Пусть $u(x_0, y_0) \in C_0^3(\Omega)$; приближенное значение $S(M'_{0m})$ интеграла $T(u)$ будем вычислять по формуле

$$S(M'_{0m}) = \sum_{k \in \Lambda(h)} u(k_1 h, k_2 h) \cdot \beta_1(k, m),$$

где $\Lambda(h)$ — множество номеров $k = (k_1, k_2)$ таких, что $D(k, h) \subset \Omega_{1h}$, $M'_{0m} = M(m_1 h, m_2 h)$, $M'_{0m} \in D(m, h) \subset \Omega_{1h}$.

Из результатов работы [6] следует:

$$|S(M'_{0m}) - \nu(M'_{0m})| = O(h), \quad (7.53)$$

где $O(h) \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$ равномерно для всех $M'_{0m} \in \Omega_{1h}$, а

$$\nu(M'_{0m}) = \iint_{\Omega} J(M'_{0m}, M'_0) u(x_0, y_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0.$$

Из (7.53) и предложения 7.6 вытекает, что

$$\int_{\Omega_{1h}} |S(x, h) - \nu(x, y)|^2 dx dy = O_1(h),$$

где $O_1(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $h > 0$, $\pi S(x, h) = S(M'_{0m})$ (оператор π задается в [2; определение 1.2]).

Итак, семейство операторов T_h Π_h^* -аппроксимирует в области Ω оператор T (см. определение 1.7).

Рассмотрим уравнение

$$PT(u) = g(x, y), \quad (7.54)$$

где $u(x, y) \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\Omega)$, $g(x, y) \in H_{-1/2}(\Omega)$, P — оператор сужения на область Ω .

Для нахождения приближенного решения $u(x, y, h)$ уравнения (7.54) рассмотрим систему уравнений

$$P_h T_h u(x, y, h) = g(x, y, h), \quad (7.55)$$

где P_h — сужение оператора T_h на область Ω_{1h} , $u(x, y, h) \in \overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})$, $g(x, y, h) \in M(-1/2, h, \Omega_{1h})$, причем существуют продолжения $\tilde{g}(x, y, h) \in M(-1/2, h)$ функций $g(x, y, h)$ такие, что $\tilde{g}(x, y, h) \rightarrow lg(x, y)$ по норме $H_{-1/2}(\mathbb{R}_2)$ при $h \rightarrow 0$, где $lg(x, y)$ — некоторое продолжение функции $g(x, y)$, $lg(x, y) \in H_{-1/2}(\mathbb{R}_2)$.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть σ — поверхность, описанная в начале §7. Тогда решение $u(x, y) \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\Omega)$ уравнения (7.54) существует и единственно для любой $g(x, y) \in H_{-1/2}(\Omega)$. Кроме того, найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < h < \delta$ решения $u(x, y, h)$ системы (7.55) будут существовать, причем функции $u(x, y, h)$ сходятся к точному решению $u(x, y)$ в $\overset{\circ}{H}_r(\Omega)$ для любого r , $0 < r < \frac{1}{2}$, и имеет место соотношение

$$\left\| \prod_{1h} u(x, y) - u(x, y, h) \right\|_{\overset{\circ}{M}(1/2, h, \Omega_{1h})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Доказательство теоремы 7.1 следует из предложений 7.3–7.6, а также из предложения 2.3.

§8. Дифракция на поверхности

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda^2 u &= 0, \quad x \in \mathbb{R}_3 \setminus \sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sigma} &= g(M), \end{aligned} \quad (8.1)$$

где σ — поверхность, удовлетворяющая условиям §7.

Пусть относительно функции u выполняются условия излучения Зоммерфельда:

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + i\lambda u(x) = o(|x|^{-1}) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (8.2)$$

число λ удовлетворяет условиям $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$.

Если решать задачу (8.1) с условиями (8.2) через потенциал двойного слоя, то относительно функции $\nu(M_0)$, плотности потенциала двойного слоя, возникает уравнение

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{M_0}} G(M, M_0) \nu(M_0) d\sigma_{M_0} + \int_{\sigma_{M_0}} K_1(M, M_0) \nu(M_0) d\sigma_{M_0} \\ + \int_{\sigma_{M_0}} K_2(M, M_0) \nu(M_0) d\sigma_{M_0} = g(M_0), \end{aligned} \quad (8.3)$$

где функция $G(M, M_0)$ совпадает с ядром интеграла (7.1),

$$\begin{aligned} K_1(M_0, M) &= \frac{G_1(M_0, M)(\mathbf{M}_0 \mathbf{M}, \mathbf{n}_{M_0})(\mathbf{M}_0 \mathbf{M}, \mathbf{n}_M)}{|M_0 M|^5}, \\ K_2(M_0, M) &= -\frac{G(M_0, M)(\mathbf{n}_{M_0}, \mathbf{n}_M)}{|M_0 M|^3}, \\ G_1(M_0, M) &= e^{-i\lambda|M_0 M|} [-\lambda^2 |M_0 M|^2 + 3i\lambda |M_0 M| + 3] - 3, \\ G_2(M_0, M) &= e^{-i\lambda|M_0 M|} + i\lambda e^{-i\lambda|M_0 M|} - 1. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Переходя к декартовым координатам так же, как в § 7, и оставляя для ядер интегралов те же обозначения, получаем уравнение относительно функции $\nu(x, y)$, плотности потенциала двойного слоя:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} G(M', M'_0) \nu(x_0, y_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \\ & + \iint_{\Omega} K_1(M', M'_0) \nu(x_0, y_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \\ & + \iint_{\Omega} K_2(M', M'_0) \nu(x_0, y_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 = F(x, y), \end{aligned} \quad (8.5)$$

где $q(x, y) = \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}$, $M' = M'(x, y)$, $M'_0 = M'_0(x_0, y_0)$.

Аналогично предложению 7.6 доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Если для поверхности σ выполнены условия § 7, $\nu(x_0, y_0) \in C_0^3(\Omega)$, то функция $\psi(x, y) \in C(\mathbb{R}_2)$, где

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \iint_{\Omega} G(M', M'_0) \nu(x_0, y_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \\ &+ \iint_{\Omega} P(M', M'_0) \nu(x_0, y_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 = \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y), \\ P(M', M'_0) &= K_1(M', M'_0) + K_2(M', M'_0). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Разобьем плоскость XOY с векторным шагом $h = (h, h)$ на элементарные ячейки $D(k, h)$ (см. [2; определение 1.1]). Определим семейство дискретных операторов B_h соотношением

$$\begin{aligned} \pi B_h u(x, h) &= \sum_{k \in \Lambda(h)} u(k) \beta_1(k, m) + \sum_{k \in \Lambda(h)} u(k) \beta_2(k, m) \\ &= \pi T_h u(x, h) + \pi P_h u(x, h), \end{aligned} \quad (8.7)$$

где $\Lambda(h)$ — множество номеров $k = (k_1, k_2)$ таких, что $D(k, h) \in \Omega_{1h}$; оператор T_h — тот же самый, что и в § 7, величины $\beta_2(k, m)$ определяются равенством

$$\begin{aligned} \beta_2(k, m) &= \iint_{D(k, h)} P(M'_{0m}, M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \\ M'_{0m} &= M(m_1 h_1, m_2 h_2) \in D(m, h) \subset \Omega_{1h}, \\ P(M', M'_0) &= K_1(M', M'_0) + K_2(M', M'_0), \quad \pi u(x, h) = u(k), \end{aligned} \quad (8.8)$$

оператор π задается в [2; определение 1.2].

Для ядра $P(M', M'_0)$ имеет место оценка

$$|P(M', M'_0)| \leq \frac{C}{|M' M'_0|}. \quad (8.9)$$

Из (8.9) следует неравенство

$$\sum_{k \in \Lambda(h)} |\beta_2(k, m)| \leq C, \quad (8.10)$$

где C не зависит от h и m таких, что $D(m, h) \in \Omega_{1h}$.

Для приближенного вычисления значений функции $\psi(x, y)$ (см. (8.6)) применим квадратурную формулу

$$\begin{aligned} S(M'_{0m}) &= S_1(M'_{0m}) + S_2(M'_{0m}) \\ &= \sum_{k \in \Lambda(h)} \nu(k_1 h, k_2 h) \beta_1(k, m) + \sum_{k \in \Lambda(h)} \nu(k_1 h, k_2 h) \beta_2(k, m), \end{aligned} \quad (8.11)$$

где $\nu(x, y) \in C_0^3(\Omega)$.

Для $S_1(M'_{0m})$ в силу (7.53) имеет место $|S_1(M'_{0m}) - \psi_1(M'_{0m})| = O_1(h)$, $O_1(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ равномерно для всех m таких, что $D(m, h) \subset \Omega_{1h}$. Из (8.10) следует $|S_2(M'_{0m}) - \psi_2(M'_{0m})| = O_2(h)$, $O_2(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ равномерно для всех m таких, что $D(m, h) \subset \Omega_{1h}$. Отсюда и из предложения 8.1 получаем, что $\|S(x, y, h) - \psi(x, y)\|_{L_2(\Omega_{1h})} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Из предыдущих рассуждений вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Семейство операторов B_h Π_h^* -аппроксимирует в области Ω оператор B , где B определяется левой частью (8.5).

Рассмотрим функцию $\theta(x) \in C^\infty[0, \infty)$, $\theta(x) \geq 0$, $\theta(x) = 1$ при $0 \leq x \leq R$, где R таково, что внутренность круга $S(R, M')$ с центром в точке $M' \in \bar{\Omega}$ радиуса R содержит $\bar{\Omega}$; $\theta(x) = 0$ при $x > R_0$, где $R_0 > R$. Положим $P_1(M', M'_0) = P(M', M'_0) \cdot \theta(|M' M'_0|)$. Функция $P_1(M', M'_0) = P(M', M'_0)$ при $M', M'_0 \in \Omega$. Отсюда следует, что уравнение

$$\begin{aligned} B_1(\nu) &= \iint_{\Omega} G(M', M'_0) \nu(x_0, y_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \\ &+ \iint_{\Omega} P_1(M', M'_0) \nu(x_0, y_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 = F(x, y), \end{aligned} \quad (8.12)$$

где $(x, y) \in \Omega$, эквивалентно уравнению (8.5). Обозначим первый член в (8.12) через $T(\nu)$, второй – через $P_1(\nu)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Ввиду конструкции функции $P_1(M', M'_0)$ предложение 8.1 остается справедливым и для оператора $B_1(\nu)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Оператор $B_1(\nu)$ ограничен из $\mathring{H}_{1/2}(\Omega)$ в $H_{-1/2}(\mathbb{R}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 7.5 утверждение верно для оператора $T(\nu)$. Поэтому предложение 8.3 достаточно доказать для оператора $P_1(\nu)$. Обозначим $\psi_2(x, y) = P_1(\nu)$.

Далее, используя неравенство Иенсена [7], получаем

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}_2} |\psi_2(x, y)|^2 dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}_2} \left| \iint_{\Omega} P_1(M', M'_0) q(x_0, y_0) \nu(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right|^2 dx dy \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}_2} \left(\iint_{\Omega} |P_1(M', M'_0)| q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right. \\ &\quad \left. \times \iint_{\Omega} |P_1(M', M'_0) q(x_0, y_0)| |\nu(x_0, y_0)|^2 dx_0 dy_0 \right) dx dy. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Ввиду конструкции функции $\theta(|M'_0 M'|)$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} |P_1(M', M'_0) q(x_0, y_0)| dx_0 dy_0 \leq C_1, \\ & \iint_{\mathbb{R}_2} |P_1(M', M'_0)| dx dy \leq C_2, \end{aligned} \quad (8.14)$$

где C_1 не зависит от точки $M'(x, y)$, а C_2 — от $M'_0(x_0, y_0)$.

Из (8.13) и (8.14) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}_2} |\psi_2(x, y)|^2 dx dy \\ &\leq C_1 \iint_{\Omega} q(x_0, y_0) |\nu(x_0, y_0)|^2 \cdot \left[\iint_{\mathbb{R}_2} |P_1(M', M'_0)| dx dy \right] dx_0 dy_0 \\ &\leq C_3 \|\nu(x_0, y_0)\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что оператор $P_1(\nu)$ ограничен из $\mathring{H}_{1/2}(\Omega)$ в $H_{-1/2}(\mathbb{R}_2)$. Предложение 8.1 доказано.

Определим семейство дискретных операторов B_{1h} соотношением

$$\begin{aligned} \pi B_{1h} u(x, y, h) &= \pi T_h u(x, y, h) + \pi P_{1h} u(x, y, h) \\ &= \sum_{k \in \Lambda(h)} u(k) \beta_1(k, m) + \sum_{k \in \Lambda(h)} u(k) \beta'_2(k, m), \end{aligned} \quad (8.15)$$

где $u(k) = \pi u(x, y, h)$, величины $\beta'_2(k, m)$ определяются равенством

$$\beta'_2(k, m) = \iint_{D(k, h)} P_1(M'_{0m}, M'_0) q(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad M'_{0m}(m_1 h, m_2 h) \in D(m, h).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Нужно отметить, что $\beta'_2(k, m) = \beta_2(k, m)$ при $k \in \Lambda(h)$, $m \in \Lambda(h)$. Поэтому согласно предложению 8.2 семейство операторов B_{1h} Π_h^* -аппроксимирует оператор B_1 в области Ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. Семейство операторов P_{1h} равномерно ограничено из $\mathring{M}(r, h, \Omega_{1h})$ в $L_2(\Omega_{1h})$, r – любое, удовлетворяющее неравенству $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеют место оценки, аналогичные неравенствам (8.14):

$$\sum_{k \in \Lambda(h)} |\beta'_2(k, m)| \leq C_1, \quad \sum_m |\beta'_2(k, m)| \leq C_2, \quad (8.16)$$

где в первом неравенстве C_1 не зависит от $m = (m_1, m_2)$; во втором неравенстве суммирование производится по всем номерам $m = (m_1, m_2)$, $k \in \Lambda(h)$, $D(k, h) \subset \Omega_{1h}$, константа C_2 не зависит от номера $k \in \Lambda(h)$.

Обозначим $d(m) = \pi P_{1h} u(x, y, h)$, тогда, используя (8.16) и неравенство Иенсена, получаем

$$\begin{aligned} h^2 \sum_m |d(m)|^2 &= h^2 \sum_m \left| \sum_{k \in \Lambda(h)} u(k) \beta'_2(k, m) \right|^2 \\ &\leq h^2 \sum_m \left(\sum_{k \in \Lambda(h)} |\beta'_2(k, m)| \right) \left(\sum_{k \in \Lambda(h)} |\beta'_2(k, m)| \cdot |u(k)|^2 \right) \\ &\leq C_1 h^2 \sum_{k \in \Lambda(h)} |u(k)|^2 \left(\sum_{m \in \Lambda(h)} |\beta'_2(k, m)| \right) \leq C_3 \|u(x, y, h)\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует предложение 8.4.

Рассмотрим уравнение

$$PB_1(u) = F(x, y), \quad (8.17)$$

где P – сужение оператора B_1 на область Ω , $u(x, y) \in \mathring{H}_{1/2}(\Omega)$, $F(x, y) \in H_{-1/2}(\Omega)$, число λ (см. уравнение (8.1)) таково, что оператор $PB_1: \mathring{H}_{1/2}(\Omega) \rightarrow H_{-1/2}(\Omega)$ имеет ядро, состоящее из одного нулевого элемента.

Для приближенного решения уравнения (8.17) рассмотрим систему уравнений

$$P_h B_{1h} u(x, y, h) = F(x, y, h), \quad (8.18)$$

где P_h – сужение оператора B_{1h} на область Ω_{1h} , $u(x, y, h) \in \mathring{M}(1/2, h, \Omega_{1h})$, $F(x, y, h) \in M(-1/2, h, \Omega_{1h})$, причем существуют продолжения $\tilde{F}(x, y, h) \in M(-1/2, h)$ функций $F(x, y, h)$ такие, что $\tilde{F}(x, y, h) \rightarrow lF(x, y)$ по норме $H_{-1/2}(\mathbb{R}_2)$ при $h \rightarrow 0$, где $lF(x, y) \in H_{-1/2}(\mathbb{R}_2)$ – некоторое продолжение $F(x, y)$.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть поверхность σ удовлетворяет условиям §7, тогда решение уравнения (8.17) существует и единственно для любой функции $F(x, y) \in H_{-1/2}(\Omega)$. Кроме того, найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < h < \delta$ решения $u(x, y, h)$ системы (8.18) существуют, причем $u(x, y, h)$ сходятся к точному решению $u(x, y)$ в $\dot{H}_r(\Omega)$ для любого r , $0 \leq r < \frac{1}{2}$, и выполняется соотношение

$$\left\| \prod_{1h} u(x, y) - u(x, y, h) \right\|_{\dot{M}(1/2, h, \Omega_{1h})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0,$$

где $\prod_{1h}$ – сужение интегрального проектора $\prod_h$ на Ω_{1h} .

Доказательство следует из теоремы 7.1, замечаний 8.1, 8.2, предложений 8.3, 8.4, а также из предложений 2.3 и 2.5.

Список литературы

1. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО “Янус”, 1995.
2. Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Пространства дробных отношений, дискретные операторы и их приложения. I // Матем. сб. 1999. Т. 190. №9. С. 41–98.
3. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
4. Брычков Ю. Д., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977.
5. Дворак А. В. Невырожденность матрицы метода дискретных вихрей в задачах пространственного обтекания // Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского. 1986. Т. 1313. С. 441–453.
6. Lifanov I. K., Poltavskii L. N. Quadrature formulae for the Hadamard integral over a curvilinear surface // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998. V. 13. №1. P. 27–44.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.

Военный авиационный
технический университет
им. Н. Е. Жуковского

Поступила в редакцию
15.02.1999