Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 11, 135–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm441>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:17:12

УДК 517.97

А. А. Толстоногов

**Релаксация в невыпуклых задачах
оптимального управления, описываемых
эволюционными уравнениями первого порядка**

Рассматривается задача минимизации интегрального функционала с невыпуклой по управлению подынтегральной функцией на решениях управляемой системы, описываемой нелинейным эволюционным уравнением первого порядка со смешанными невыпуклыми ограничениями на управление. Наряду с исходной задачей рассматривается релаксационная задача. При соответствующих предположениях доказано, что релаксационная задача имеет оптимальное решение и для каждого оптимального решения существует минимизирующая последовательность исходной задачи, сходящаяся к оптимальному решению. Более того, в соответствующих топологиях сходимость является равномерной одновременно для траектории, управления и функционала. Справедливо и обратное утверждение. Подробно рассматривается пример нелинейной параболической управляемой системы.

Библиография: 20 названий.

Постановка задачи

Пусть $T = [0, 1]$, H – сепарабельное гильбертово пространство, V – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, которое плотно, непрерывно и компактно вложено в H . Отождествляя H с его топологически сопряженным, мы имеем $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$, где V^* – топологически сопряженное к V . При этом все вложения являются непрерывными, плотными и компактными. Такая тройка пространств обычно называется *эволюционной* или *тройкой Гельфанда*.

Пусть Y – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, моделирующее пространство управлений, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Для числовой функции $g: T \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим задачу

$$\int_T g(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf \quad (P)$$

на решениях управляемой системы, описываемой нелинейным эволюционным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t, x(t)) &= f(t, x(t))u(t), \\ x(0) &= x_0 \in H, \end{aligned} \quad (0.1)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00216).

с ограничениями на управление

$$u(t) \in U(t, x(t)) \text{ почти всюду,} \quad (0.2)$$

где $A: T \times V \rightarrow V^*$ – нелинейный оператор, $f: T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$ – нелинейное отображение, $U: T \times H \rightarrow Y$ – многозначное отображение с, вообще говоря, невыпуклыми, но замкнутыми значениями.

Пусть $g_u: T \times H \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – функция, определенная по правилу

$$g_u(t, x, u) = \begin{cases} g(t, x, u), & u \in U(t, x), \\ +\infty, & u \notin U(t, x), \end{cases}$$

и $g^{**}(t, x, u)$ – биполярная функции $u \rightarrow g_u(t, x, u)$ [1; гл. 1, § 4, п. 2]. Наряду с задачей (P) рассмотрим релаксационную задачу:

$$\int_T g^{**}(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min \quad (\text{RP})$$

на решениях управляемой системы (0.1) с овыпукленными ограничениями на управление

$$u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t)) \text{ почти всюду.} \quad (0.3)$$

Целью работы является установление взаимосвязей между решениями задач (P) и (RP). При определенных предположениях доказывается, что задача (RP) имеет решение и для любого решения задачи (RP) существует минимизирующая последовательность задачи (P), сходящаяся в соответствующих топологиях к решению задачи (RP). При этом сходимость будет иметь место одновременно по траектории, управлению и функционалу. Обычно это свойство называют *релаксацией* [1].

Подробно рассмотрен пример нелинейной управляемой параболической системы. Работа примыкает к исследованиям [1]–[4] и др. и дополняет их. Однако в отличие от этих работ мы не предполагаем ни выпуклость функционала по управлению, ни выпуклозначность ограничений на управление.

Для управляемой системы, рассматриваемой в работе, основной результат (теорема 5.1) является аналогом теоремы 4.1 [1; гл. 9, § 4, п. 2], теоремы 3 [3] для дифференциального включения в конечномерном пространстве и теоремы 5 (теоремы Боголюбова) [2; гл. 9, § 2, п. 4].

Работа состоит из постановки задачи и шести параграфов. В первом параграфе вводятся основные обозначения и определения. Во втором параграфе содержатся вспомогательные результаты, ряд из которых имеет и самостоятельное значение. В третьем параграфе вводится расширенная управляемая система и доказывается существование решения этой системы. В четвертом параграфе изучаются взаимосвязи между решениями расширенной управляемой системы с невыпуклыми и овыпукленными ограничениями на управление. Основной результат работы составляет содержание пятого параграфа. В шестом параграфе рассматривается пример управляемой параболической системы и дается интерпретация абстрактных результатов применительно к этой системе.

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть X – сепарабельное банахово пространство. Всюду в дальнейшем мы используем следующие обозначения: $c(X)$ – семейство всех непустых, замкнутых подмножеств из X ; $cb(X)$ – семейство всех непустых, замкнутых, ограниченных подмножеств из X . Для множества $A \subset X$ через $co A$ обозначается выпуклая оболочка, а через $\overline{co} A$ – замкнутая выпуклая оболочка A .

На множестве $cb(X)$ определим метрику Хаусдорфа

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}, \quad A, B \in cb(X).$$

Пусть $T = [0, 1]$ – отрезок числовой прямой с мерой Лебега μ и с σ -алгеброй Σ μ -измеримых подмножеств из T .

Многозначное отображение $F: T \rightarrow c(X)$ называется *измеримым*, если $F^{-1}(E) = \{t \in T : F(t) \cap E \neq \emptyset\} \in \Sigma$ для любого замкнутого множества $E \subset X$.

Если $F: T \times X \rightarrow c(X)$, то измеримость F означает, что $F^{-1}(E) \in \Sigma \otimes B_X$, где $\Sigma \otimes B_X$ – σ -алгебра подмножеств из $T \times X$, порожденная множествами вида $A \times B$, $A \in \Sigma$, $B \in B_X$ и B_X – σ -алгебра борелевских множеств из X . Эти определения сохраняют свой смысл и для однозначных отображений.

Если $F: T \rightarrow c(X)$, то через S_F^p ($1 \leq p < \infty$) мы обозначаем множество всех элементов пространства $L^p(T, X)$, являющихся селекторами отображения $t \rightarrow F(t)$. Множество $K \subset L^p(T, X)$ называется *равномерно p -интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_E \|f(t)\|^p d\mu < \varepsilon$$

для любого $E \in \Sigma$ с $\mu(E) < \delta$ и любого $f \in K$.

Пусть (V, H, V^*) – эволюционная тройка пространств.

Через $\|\cdot\|$, $|\cdot|_H$, $\|\cdot\|_*$ мы обозначаем соответственно норму пространств V , H , V^* . Под $\langle x, x' \rangle$, $x \in V$, $x' \in V^*$, мы понимаем каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между V и V^* , а $(\cdot, \cdot)_H$ означает скалярное произведение в H . Мы считаем, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_H$ согласованы, т.е. сужение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $V \times H$ совпадает с $(\cdot, \cdot)_H$.

Для $p, 2 \leq p < \infty$, мы введем следующие пространства:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= L^p(T, V), & \mathcal{H} &= L^p(T, H), & \mathcal{H}^* &= L^q(T, H), \\ \mathcal{V}^* &= L^q(T, V^*), & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= 1, \end{aligned}$$

и пространство $W_{p,q} = \{\nu \in \mathcal{V} : \dot{\nu} \in \mathcal{V}^*\}$, где производная понимается в смысле векторных распределений.

Пространство $W_{p,q}$ с нормой $\|\nu\| = (\|\nu\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\dot{\nu}\|_{\mathcal{V}^*}^2)^{1/2}$ является сепарабельным, рефлексивным, банаховым пространством и $W_{p,q} \hookrightarrow \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$. Хорошо известно, что пространство $W_{p,q}$ вкладывается в $C(T, H)$ непрерывно. Поэтому любой элемент из $W_{p,q}$ имеет единственное представление в $C(T, H)$. Более того, вложение $W_{p,q} \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно [5].

Для любого банахова пространства X символ w - X означает, что пространство X наделено слабой $\sigma(X, X^*)$ топологией [6]. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств из X . Во всех остальных случаях мы считаем, что пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией $\mathcal{V}$.

Решением управляемой системы (0.1), (0.2) мы называем пару $(x(\cdot), u(\cdot))$, состоящую из траектории $x(\cdot) \in W_{p,q} \hookrightarrow C(T, H)$ и управления $u(\cdot) \in L^q(T, Y)$, удовлетворяющих почти всюду уравнению (0.1) и включению (0.2). Аналогично определяется решение управляемой системы (0.1), (0.3). Так как пространство $W_{p,q}$ вкладывается в $C(T, H)$ непрерывно, то начальное условие $x_0 \in H$ имеет смысл.

Через $\mathcal{R}_U(x_0) \subset W_{p,q} \times L^q(T, Y) \hookrightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ мы обозначаем множество всех решений управляемой системы (0.1), (0.2). Под $\mathcal{R}_{\overline{co}U}(x_0)$ мы понимаем множество всех решений управляемой системы (0.1), (0.3).

§2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем сокращение п.в. означает почти всюду.

Введем следующие предположения.

ГИПОТЕЗЫ $H(A)$. $A: T \times V \rightarrow V^*$ является оператором таким, что

- (1) отображение $t \rightarrow A(t, x)$ измеримо;
- (2) отображение $x \rightarrow A(t, x)$ монотонно и хеминепрерывно, т.е.

$$\langle x - y, A(t, x) - A(t, y) \rangle \geq 0$$

для любых $x, y \in V$ (монотонность) и для любых $x, y, z \in V$ отображение $\lambda \rightarrow \langle z, A(t, x + \lambda y) \rangle$ является непрерывным на отрезке $[0, 1]$ (хеминепрерывность);

- (3) $\langle x, A(t, x) \rangle \geq c_1 \|x\|^p, c_1 > 0$;
- (4) $\|A(t, x)\|_* \leq c_2(1 + \|x\|^{p-1}), c_2 > 0$.

Пусть $\mathcal{L}(Y, H)$ – пространство непрерывных линейных операторов из Y в H .

ГИПОТЕЗЫ $H(f)$. $f: T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$ – это отображение такое, что

- (1) отображение $t \rightarrow f(t, x)u$ измеримо для любых $(x, u) \in H \times Y$;
- (2) отображение $x \rightarrow f^*(t, x)h$ непрерывно для любых $h \in H$ п.в.;
- (3) для любых $x, y \in C(T, H)$ и $u(t) \in \overline{co}U(t, x(t))$ существует функция $k_1(u) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$|(f(t, x(t)) - f(t, y(t)))u(t)|_H \leq k_1(u(t))|x(t) - y(t)|_H \text{ п.в.};$$

- (4) $\|f(t, x)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq m, m > 0$, п.в. для любых $x \in H$.

ГИПОТЕЗЫ $H(U)$. $U: T \times H \rightarrow cb(Y)$ – это многозначное отображение такое, что

- (1) отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо;
- (2) $h(U(t, x), U(t, x)) \leq k_2(t)|x - y|_H$ п.в., $k_2 \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$;
- (3) $\|U(t, x)\|_Y = \sup\{\|u\|_Y; u \in U(t, x)\} \leq a_1(t) + b_1|x|_H^{2/q}$ п.в., $a_1 \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$, $b_1 > 0$.

ГИПОТЕЗЫ $H(g)$. $g: T \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — это отображение такое, что

- (1) отображение $t \rightarrow g(t, x, u)$ измеримо;
- (2) $|g(t, x, u) - g(t, y, v)| \leq k_3(t)|x - y|_H + k_4\|u - v\|_Y$ п.в., $k_3 \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $k_4 > 0$;
- (3) $|g(t, x, u)| \leq a_2(t) + b_2(t)|x|_H + b_3\|u\|_Y$ п.в., $b_2, a_2 \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$, $b_3 > 0$.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что гипотезы $H(A)$, $H(f)$, $H(U)$, $H(g)$ имеют место.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Вместо гипотезы $H(f)$ (3) более естественным кажется следующее предположение:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq k_1(t)|x - y|_H, \quad k_1 \in L^p(T, \mathbb{R}^+).$$

Однако для конкретных примеров это неравенство не имеет места.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t, x(t)) &= \varphi(t), \\ x(0) = x_0 &\in H, \quad \varphi \in \mathcal{H}^*. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Хорошо известно [5], что для каждого $\varphi \in \mathcal{H}^*$ уравнение (2.1) имеет единственное решение $x = P^H \varphi$, $x \in W_{p,q} \hookrightarrow C(T, H)$, где P^H — оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $\varphi \in \mathcal{H}^*$ единственное решение x уравнения (2.1).

Пусть

$$S_\lambda = \{\varphi \in \mathcal{H}^* : |\varphi(t)|_H \leq \lambda(t) \text{ п.в.}\}, \quad \lambda \in L^q(T, \mathbb{R}^+).$$

Следующее утверждение играет важную роль в наших исследованиях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Отображение $P^H: S_\lambda \rightarrow W_{p,q}$ является непрерывным из w - S_λ в w - $W_{p,q}$ и в $C(T, X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как S_λ является выпуклым метризуемым компактом в w - $\mathcal{H}^*$, то нам достаточно доказать секвенциальную непрерывность отображения $\varphi \rightarrow P^H \varphi$. Пусть $\varphi_n, \varphi \in S_\lambda$ таковы, что

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ в } w\text{-}\mathcal{H}^* \quad (2.2)$$

и $x_n = P^H \varphi_n$, $x = P^H \varphi$. Из классических априорных оценок для параболических уравнений [7] следует, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена в $W_{p,q}$ и, следовательно, является относительно компактным, метризуемым подмножеством пространства w - $W_{p,q}$. Переходя к подпоследовательности, если необходимо, мы можем предположить, что

$$x_n \rightarrow y \text{ в } w\text{-}W_{p,q} \quad (2.3)$$

для некоторого $y \in W_{p,q}$. Так как вложение $W_{p,q} \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно, то

$$x_n \rightarrow y \text{ в } \mathcal{H}. \quad (2.4)$$

Учитывая непрерывность вложения $W_{p,q} \hookrightarrow C(T, H)$, мы получаем, что $y(0) = x_0$ и последовательность относительно компактна в w - $C(T, H)$.

Следовательно, для некоторого $M > 0$

$$|x_n(t)| \leq M, \quad n \geq 1, \quad t \in T. \quad (2.5)$$

Покажем, что $x = y$. Используя монотонность оператора A и формулу интегрирования по частям [5] для элементов пространства $W_{p,q}$, из уравнения (2.1) мы получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |x_n(t) - x(t)|_H^2 &\leq \int_0^t (x_n(s) - x(s), \varphi_n(s) - \varphi(s))_H ds \\ &\leq \int_0^t (x_n(s) - y(s), \varphi_n(s) - \varphi(s))_H ds \\ &\quad + \int_0^t (y(s) - x(s), \varphi_n(s) - \varphi(s))_H ds. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из последнего неравенства в (2.6) и из (2.2), (2.4) вытекает, что

$$x_n(t) \rightarrow x(t) \quad \text{в } H, \quad t \in T. \quad (2.7)$$

Так как $|\varphi_n(s) - \varphi(s)|_H \leq 2\lambda(s)$, то из (2.5), теоремы Лебега об ограниченной сходимости, (2.7) и первого из неравенств (2.6) следует, что $x_n \rightarrow x$ в $C(T, H)$. Поскольку каждый элемент из $W_{p,q}$ имеет единственное представление в $C(T, H)$, то $x = y$.

Учитывая, что уравнение (2.1) имеет единственное решение, мы заключаем, что и вся последовательность x_n сходится к x в $w\text{-}W_{p,q}$ и в $C(T, H)$. Утверждение доказано.

Из гипотезы $H(f)$ следует, что для каждого $h \in H$ функция $(h, f(t, x)u)_H = (f^*(t, x)h, u)_H$ измерима по t и непрерывна по (x, u) . Следовательно, для любых $x \in C(T, H)$, $u \in L^q(T, Y)$ функция $t \rightarrow f(t, x(t))u(t)$ скалярно измерима. Так как пространство H сепарабельно, то функция $t \rightarrow f(t, x(t))u(t)$ измерима. Аналогично, для любых $x \in C(T, H)$, $h \in \mathcal{H}$ функция $t \rightarrow f^*(t, x(t))h(t)$ измерима.

Воспользовавшись гипотезой $H(f)$ (3), мы можем рассмотреть оператор $F: C(T, H) \rightarrow \mathcal{L}(L^q(T, Y), \mathcal{H}^*)$, определенный по правилу

$$(F(x)u)(t) = f(t, x(t))u(t), \quad (2.8)$$

где $\mathcal{L}(L^q(T, Y), \mathcal{H}^*)$ – пространство непрерывных линейных операторов из $L^q(T, Y)$ в $\mathcal{H}^*$.

ЛЕММА 2.1. *Оператор $(x, u) \rightarrow F(x)u$ является секвенциально непрерывным из $C(T, H) \times (w\text{-}L^q(T, Y))$ в $w\text{-}\mathcal{H}^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_n \rightarrow x$ в $C(T, H)$ и $u_n \rightarrow u$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$. Возьмем фиксированный элемент $h \in \mathcal{H}$. Тогда из гипотез $H(f)$ (2), (4) следует, что $f^*(t, x_n(t))h(t) \rightarrow f^*(t, x(t))h(t)$ в Y^* п.в. и $\|f^*(t, x_n(t))h(t)\|_{Y^*} \leq m|h(t)|_H$ п.в.

Поэтому из теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что

$$f^*(t, x_n(t))h(t) \rightarrow f^*(t, x(t))h(t) \quad \text{в } L^p(T, Y^*). \quad (2.9)$$

Так как для каждого $h \in \mathcal{H}$

$$\int_T (h(t), f(t, x_n(t))u_n(t))_H dt = \int_T (f^*(t, x_n(t))h(t), u_n(t))_H dt, \quad (2.10)$$

то из (2.9), (2.10) следует, что $F(x_n)u_n \rightarrow F(x)u$ в $w\text{-}\mathcal{H}^*$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Существуют $M_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для любого решения (x, u) системы (0.1), (0.3) и, следовательно, системы (0.1), (0.2) справедливы оценки*

$$|x(t)|_H \leq M_1, \quad t \in T, \quad \|x\|_{\mathcal{V}} \leq M_2, \quad \|\dot{x}\|_{\mathcal{V}^*} \leq M_3, \quad \|x\|_{W_{p,q}} \leq M_4 \quad (2.11)$$

и x является единственным решением уравнения (2.1) с $\varphi(t) = f(t, x(t))u(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО оценок проводится по достаточно известным схемам (см., например, [4], [8] и др.), и мы его опускаем. Что же касается второго утверждения леммы, то оно следует из единственности решения уравнения (2.1).

Пусть Z – сепарабельное рефлексивное банахово пространство. В пространстве $L^q(T, Z)$, $1/p + 1/q = 1$, $2 \leq p < \infty$, наряду со стандартной нормой мы рассмотрим другую норму:

$$\|u\|_{\omega} = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\| \int_t^{t'} u(s) ds \right\|_Z. \quad (2.12)$$

Пространство $L^q(T, Z)$ с нормой (2.12) мы будем обозначать через $L_{\omega}^q(T, Z)$.

В дальнейшем нам понадобится простой факт, касающийся этой нормы.

ЛЕММА 2.3. *Если последовательность $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset L^q(T, Z)$ ограничена и сходится к u в $L_{\omega}^q(T, Z)$, то u_n сходится к u в $w\text{-}L^q(T, Z)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Доказательство леммы 2.3, приведенное в [9], без предположения ограниченности последовательности $\{u_n\}$ в $L^q(T, Z)$ некорректно.

§3. Расширенная управляемая система. Существование решений

Рассмотрим пространство $\tilde{Y} = \mathbb{R} \times Y$. Элементы пространства $\tilde{Y}$ мы будем обозначать через $\tilde{u} = (u^{\mathbb{R}}, u)$, $u^{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$, $u \in Y$. Пространство $\tilde{Y}$ мы наделим нормой $\|\tilde{u}\|_{\tilde{Y}} = \max\{|u^{\mathbb{R}}|, \|u\|_Y\}$. Тогда $\tilde{Y}$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством. Пространство $L^q(T, \mathbb{R}) \times L^q(T, Y)$ наделим одной из эквивалентных норм прямого произведения. Так как пространства $L^q(T, \mathbb{R}) \times L^q(T, Y)$ и $L^q(T, \tilde{Y})$ топологически изоморфны, то в дальнейшем мы их будем отождествлять.

В соответствии с (2.12) норма в пространстве $L_{\omega}^q(T, \tilde{Y})$ будет иметь вид

$$\|\tilde{u}\|_{\omega} = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\{ \max \left(\left| \int_t^{t'} u^{\mathbb{R}}(s) ds \right|, \left\| \int_t^{t'} u(s) ds \right\|_Y \right) \right\}, \quad (3.1)$$

где $\tilde{u} = (u^{\mathbb{R}}, u)$, $u^{\mathbb{R}} \in L^q(T, \mathbb{R})$, $u \in L^q(T, Y)$.

Элементы пространства $\tilde{H} = \mathbb{R} \times H$ мы будем обозначать через $\tilde{x} = (x^{\mathbb{R}}, x)$, $x^{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$, $x \in H$. На пространстве $\tilde{H}$ рассмотрим скалярное произведение

$$(\cdot, \cdot)_{\tilde{H}} = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}} + (\cdot, \cdot)_H. \quad (3.2)$$

Пространство $\tilde{H}$ со скалярным произведением (3.2) является сепарабельным гильбертовым пространством, и норма элемента $\tilde{x} \in \tilde{H}$ будет равна

$$\|\tilde{x}\|_{\tilde{H}} = (|x^{\mathbb{R}}|^2 + |x|_H^2)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Пространство $C(T, \mathbb{R}) \times C(T, H)$, наделенное одной из норм прямого произведения, мы будем отождествлять с пространством $C(T, \tilde{H})$.

Пусть $\tilde{U}: T \times H \rightarrow \tilde{Y}$ — многозначное отображение, определенное по правилу:

$$\tilde{U}(t, x) = \{(u^{\mathbb{R}}, u) \in \tilde{Y} : u^{\mathbb{R}} = g(t, x, u), u \in U(t, x)\}.$$

Рассмотрим расширенную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}^{\mathbb{R}}(t) = u^{\mathbb{R}}(t) \text{ п.в.}, & x^{\mathbb{R}}(0) = 0, \\ \dot{x}(t) + A(t, x(t)) = f(t, x(t))u(t) \text{ п.в.}, & x(0) = x_0 \in H, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\tilde{u}(t) = (u^{\mathbb{R}}(t), u(t)) \in \tilde{U}(t, x(t)) \text{ п.в.}, \quad (3.5)$$

здесь $\dot{x}^{\mathbb{R}}(t)$ означает обычную производную от числовой функции $x^{\mathbb{R}}(\cdot) \in C(T, \mathbb{R})$.

Под решением системы (3.4), (3.5) мы понимаем пару $(\tilde{x}, \tilde{u})$, $\tilde{x} = (x^{\mathbb{R}}, x) \in C(T, \mathbb{R}) \times W_{p,q} \hookrightarrow C(T, \tilde{H})$, $\tilde{u} = (u^{\mathbb{R}}, u) \in L^q(T, \tilde{Y})$, такую, что почти всюду выполняются равенства (3.4) и включение (3.5). Множество всех решений системы (3.4), (3.5) мы обозначим через $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\tilde{x}_0)$, $\tilde{x}_0 = (0, x_0)$. Наряду с ограничением (3.5) рассмотрим ограничение

$$\tilde{u}(t) = (u^{\mathbb{R}}(t), u(t)) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, x(t)) \text{ п.в.} \quad (3.6)$$

Под $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ мы будем понимать множество всех решений системы (3.4), (3.6). Изучим свойства многозначного отображения $\tilde{U}(t, x)$.

ЛЕММА 3.1. *Отображение $\tilde{U}: T \times H \rightarrow \tilde{Y}$ является многозначным с замкнутыми ограниченными значениями и таким, что:*

- 1) *отображение $t \rightarrow \tilde{U}(t, x)$ измеримо;*
- 2) *$h(\tilde{U}(t, x), \tilde{U}(t, y)) \leq k(t)|x - y|_H$ п.в., $k \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$,*
где h — метрика Хаусдорфа на пространстве $cb(\tilde{Y})$;
- 3) *для любого $\tilde{u} = (u^{\mathbb{R}}, u) \in \tilde{U}(t, x)$ имеют место неравенства*

$$|u^{\mathbb{R}}| \leq a_2(t) + b_2(t)|x|_H + b_3(a_1(t) + b_1|x|_H^{2/q}), \quad (3.8)$$

$$\|u\|_Y \leq a_1(t) + b_1|x|_H^{2/q}. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замкнутость множества $\tilde{U}(t, x)$ следует из замкнутости графика функции $u \rightarrow g(t, x, u)$ на множестве $U(t, x)$, а ограниченность множества $\tilde{U}(t, x)$ вытекает из гипотез $H(U)$ (3), $H(g)$ (3).

Докажем измеримость отображения $t \rightarrow \tilde{U}(t, x)$. Пусть $x \in H$ фиксировано. Тогда из [10; лемма 1.3] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что сужение отображения $t \rightarrow U(t, x)$ на T_ε имеет замкнутый график в $T \times Y$ и сужение функции $(t, u) \rightarrow g(t, x, u)$ на $T_\varepsilon \times Y$ непрерывно. Отсюда следует, что сужение отображения $t \rightarrow \tilde{U}(t, x)$ на T_ε имеет замкнутый график в $T \times \tilde{Y}$. Воспользовавшись теоремой 3.5 из [11], мы получаем, что сужение отображения $t \rightarrow \tilde{U}(t, x)$ на T_ε измеримо. Следовательно, и само отображение $t \rightarrow \tilde{U}(t, x)$ измеримо.

Докажем липшицевость отображения $x \rightarrow \tilde{U}(t, x)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $x, y \in H$, $x \neq y$. Тогда для любого $u \in U(t, x)$ найдется $v \in U(t, y)$ такое, что

$$\|u - v\|_Y \leq (k_2(t) + \varepsilon)|x - y|_H \quad (3.10)$$

и

$$|g(t, x, u) - g(t, y, v)| \leq k_3(t)|x - y|_H + k_4(k_2(t) + \varepsilon)|x - y|_H. \quad (3.11)$$

Из (3.10), (3.11) следует, что $(u^{\mathbb{R}}, u) \in \tilde{U}(t, x)$, где $u^{\mathbb{R}} = g(t, x, u)$, и имеет место неравенство

$$d((u^{\mathbb{R}}, u), \tilde{U}(t, y)) \leq k(t)|x - y|_H, \quad (3.12)$$

где $d(\cdot, \cdot)$ – расстояние от точки до множества в пространстве $\tilde{Y}$, $k(t) = \max\{k_2(t), k_3(t) + k_4 k_2(t)\}$.

Аналогично мы получим, что для $(v^{\mathbb{R}}, v) \in \tilde{U}(t, y)$, $v^{\mathbb{R}} = g(t, y, v)$, $v \in U(t, y)$, имеет место неравенство

$$d((v^{\mathbb{R}}, v), \tilde{U}(t, x)) \leq k(t)|x - y|_H. \quad (3.13)$$

Из (3.12), (3.13) мы получаем неравенство (3.7). Неравенства (3.8), (3.9) с очевидностью следуют из гипотез $H(U)$ (3), $H(g)$ (3). Лемма доказана.

Из определения множества $\tilde{U}(t, x)$ следует, что проекция множества $\tilde{U}(t, x)$ на Y равна $U(t, x)$. Так как множество $\overline{\text{co}} \tilde{U}(t, x)$ является компактом в $w\text{-}\tilde{Y}$, то проекция множества $\overline{\text{co}} \tilde{U}(t, x)$ также совпадает с множеством $\overline{\text{co}} U(t, x)$. Следовательно, если пара $(\tilde{x}, \tilde{u})$, $\tilde{x} = (x^{\mathbb{R}}, x)$, $\tilde{u} = (u^{\mathbb{R}}, u)$, является решением системы (3.4), (3.6), то пара (x, u) является решением системы (0.1), (0.3).

Поэтому для решения $(\tilde{x}, \tilde{u})$ системы (3.4), (3.6) будут справедливы оценки (2.11), (3.8), (3.9) и

$$|u^{\mathbb{R}}(t)| \leq d(t) + b_2(t)M_1 + d_1 M_1^{2/q}, \quad (3.14)$$

$$\|u(t)\|_Y \leq a_1(t) + b_1 M_1^{2/q}, \quad (3.15)$$

где $d(t) = a_2(t) + b_3 a_1(t)$, $d_1 = b_1 b_3$.

Пусть $B = \{h \in H : |h|_H \leq M_1\}$ (см. (2.11)) и $\text{pr}: H \rightarrow B$ – оператор проектирования, который каждой точке $h \in H$ ставит в соответствие единственную точку $\text{pr } h \in B$ такую, что $|\text{pr } h - h|_H = \min\{|y - h|_H : y \in B\}$.

Хорошо известно, что

$$|\text{pr } u - \text{pr } v|_H \leq |u - v|_H, \quad u, v \in H. \quad (3.16)$$

Рассмотрим многозначное отображение $\tilde{U}_*: T \times H \rightarrow \tilde{Y}$, определенное по правилу $\tilde{U}_*(t, x) = U(t, \text{pr } x)$. Из (3.16) вытекает, что отображение $\tilde{U}_*(t, x)$ наследует все свойства отображения $\tilde{U}(t, x)$, указанные в лемме 3.1. В частности, для любого $\tilde{u} = (u^{\mathbb{R}}, u) \in \tilde{U}_*(t, x)$ будут справедливы неравенства (3.8), (3.9). Если мы рассмотрим задачи (3.4), (3.5) и (3.4), (3.6), заменив $\tilde{U}(t, x)$ на $\tilde{U}_*(t, x)$, то из (3.8), (3.9) следует, что оценки (2.11), (3.14), (3.15) останутся теми же самыми. Поэтому $(\tilde{x}, \tilde{u})$ будет решением задачи (3.4), (3.6) тогда и только тогда, когда $(\tilde{x}, \tilde{u})$ будет решением задачи (3.4), (3.6) с $\tilde{U}(t, x)$, замененным на $\tilde{U}_*(t, x)$. Поэтому всюду в дальнейшем, не нарушая общности и не оговаривая специально, мы будем считать, что для любого $\tilde{u} = (u^{\mathbb{R}}, u) \in \tilde{U}(t, x)$ и для любого $x \in H$ выполняются не только неравенства (3.8), (3.9), но и неравенства (3.14), (3.15).

ТЕОРЕМА 3.1. Множество $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\tilde{x}_0) \neq \emptyset$. Более того, множество $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ является компактным подмножеством пространств $C(T, \mathbb{R}) \times (w\text{-}W_{p,q}) \times (w\text{-}L^q(T, \tilde{Y}))$ и $C(T, \tilde{H}) \times (w\text{-}L^q(T, \tilde{Y}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множества

$$S^H = \{\varphi \in \mathcal{H}^* : |\varphi(t)|_H \leq \lambda(t) \text{ п.в.}\}, \quad \lambda(t) = m(a_1(t) + b_1 M_1^{2/q}), \quad (3.17)$$

$$S^{\mathbb{R}} = \{u^{\mathbb{R}} \in L^q(T, \mathbb{R}) : |u^{\mathbb{R}}(t)|_H \leq \mu(t) \text{ п.в.}\}, \quad \mu(t) = d(t) + b_2(t) M_1 + d_1 M_1^{2/q} \quad (3.18)$$

(см. (3.14), (3.15)).

Пусть $P^H: S^H \rightarrow W_{p,q} \hookrightarrow C(T, H)$ — отображение, определенное по правилу $x = P^H \varphi$, где x — единственное решение уравнения (2.1) с $\varphi \in S^H$. Аналогично, пусть $P^{\mathbb{R}}: S^{\mathbb{R}} \rightarrow C(T, \mathbb{R})$ — отображение, определенное по правилу $x^{\mathbb{R}} = P^{\mathbb{R}} u^{\mathbb{R}}$, где $x^{\mathbb{R}}$ — единственное решение уравнения

$$\dot{x}^{\mathbb{R}}(t) = u^{\mathbb{R}}(t), \quad x^{\mathbb{R}}(0) = 0, \quad (3.19)$$

с $u^{\mathbb{R}} \in S^{\mathbb{R}}$. Хорошо известно, что оператор $P^{\mathbb{R}}$ является непрерывным из $w\text{-}S^{\mathbb{R}}$ в $C(T, \mathbb{R})$. Рассмотрим оператор $P: S^{\mathbb{R}} \times S^H \rightarrow C(T, \mathbb{R}) \times W_{p,q} \hookrightarrow C(T, \tilde{H})$, определенный по правилу $P\tilde{\varphi} = (P^{\mathbb{R}} u^{\mathbb{R}}, P^H \varphi)$, $\tilde{\varphi} = (u^{\mathbb{R}}, \varphi) \in S^{\mathbb{R}} \times S^H$. Из утверждения 2.1 вытекает, что оператор P является непрерывным из $(w\text{-}S^{\mathbb{R}}) \times (w\text{-}S^H)$ в $C(T, \mathbb{R}) \times (w\text{-}W_{p,q})$ и в $C(T, \tilde{H})$.

Пусть

$$\mathcal{R}(\tilde{x}_0) = \{P\tilde{\varphi} : \tilde{\varphi} \in S^{\mathbb{R}} \times S^H\}.$$

Так как $S^{\mathbb{R}} \times S^H$ является выпуклым компактным подмножеством пространства $w\text{-}L^q(T, \tilde{H})$, то $\mathcal{R}(\tilde{x}_0)$ является компактным подмножеством пространств $C(T, \mathbb{R}) \times (w\text{-}W_{p,q})$ и $C(T, \tilde{H})$.

Мы будем считать, что отображение $\tilde{U}: T \times H \rightarrow \tilde{Y}$ определено на $T \times \tilde{H}$, полагая $\tilde{U}(t, \tilde{x}) = U(t, x)$, $\tilde{x} = (x^{\mathbb{R}}, x)$. Отображение $\tilde{U}(t, \tilde{x})$ будет обладать всеми свойствами, указанными в лемме 3.1.

Рассмотрим множество

$$S_{\tilde{U}}^q(\tilde{x}) = \{\tilde{\varphi} \in L^q(T, \tilde{Y}) : \tilde{\varphi}(t) \in \tilde{U}(t, \tilde{x}(t)) \text{ п.в.}\}, \quad \tilde{x} \in \mathcal{R}(\tilde{x}_0) \hookrightarrow C(T, \tilde{H}).$$

Из леммы 3.1 и [12; утверждение 4.2] следует, что многозначное отображение $S_{\tilde{U}}^q: \mathcal{R}(\tilde{x}_0) \hookrightarrow C(T, \tilde{H}) \rightarrow cb(L^q(T, \tilde{Y}))$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа на пространстве $cb(L^q(T, \tilde{Y}))$. Воспользовавшись, например, теоремой 0.1 [12] (см. также [13]), мы получим, что существует непрерывная функция $\tilde{v}: \mathcal{R}(\tilde{x}_0) \hookrightarrow C(T, \tilde{H}) \rightarrow L^q(T, \tilde{Y})$ такая, что

$$\tilde{v}(\tilde{x}) \in S_{\tilde{U}}^q(\tilde{x}). \quad (3.20)$$

Пусть $v^{\mathbb{R}}(\tilde{x}) \in L^q(T, \mathbb{R})$, $v^Y(\tilde{x}) \in L^q(T, H)$ — компоненты точки $\tilde{v}(\tilde{x}) \in L^q(T, \tilde{Y})$.

Рассмотрим оператор $\tilde{F}: C(T, \tilde{H}) \rightarrow \mathcal{L}(L^q(T, Y), \mathcal{H}^*)$, определенный по правилу:

$$\tilde{F}(\tilde{x}) = F(x), \quad \tilde{x} = (x^{\mathbb{R}}, x), \quad x^{\mathbb{R}} \in C(T, \mathbb{R}), \quad x \in C(T, H),$$

где $F(x)$ – оператор (2.8). Тогда из леммы 2.1 следует, что оператор $(\tilde{x}, u) \rightarrow \tilde{F}(\tilde{x})u$ является секвенциально непрерывным из $C(T, \tilde{H}) \times (w-L^q(T, Y))$ в $w-\mathcal{H}^*$. Пусть $\mathcal{A}: S^{\mathbb{R}} \times S^H \rightarrow L^q(T, \tilde{H})$ – оператор, определенный по правилу:

$$\mathcal{A}(\tilde{\varphi}) = (v^{\mathbb{R}}(P\tilde{\varphi}), \tilde{F}(P\tilde{\varphi})v^Y(P\tilde{\varphi})).$$

Тогда $\mathcal{A}$ является непрерывным оператором из $(w-S^{\mathbb{R}}) \times (w-S^H)$ в $w-L^q(T, \tilde{H})$.

Поскольку для любого $\tilde{u} = (u^{\mathbb{R}}, u) \in \tilde{U}(t, x)$ и любого $x \in H$ выполняются неравенства (3.14), (3.15), то из (3.20) и Н(ф) (4) следует, что $\mathcal{A}(\tilde{\varphi}) \in S^{\mathbb{R}} \times S^H$, $\tilde{\varphi} \in S^{\mathbb{R}} \times S^H$. Тогда из теоремы Шаудера о неподвижной точке следует, что существует элемент $\tilde{\varphi}_* = (u_*^{\mathbb{R}}, \varphi_*) \in S^{\mathbb{R}} \times S^H$ такой, что

$$(u_*^{\mathbb{R}}, \varphi_*) = (v^{\mathbb{R}}(P\tilde{\varphi}_*), \tilde{F}(P\tilde{\varphi}_*)v^Y(P\tilde{\varphi}_*)).$$

Положим

$$\tilde{x}_* = P\tilde{\varphi}_* = (P^{\mathbb{R}}u_*^{\mathbb{R}}, P^H\varphi_*).$$

Тогда из (3.20) вытекает, что

$$\tilde{u}_*(t) = (v^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_*)(t), v^Y(\tilde{x}_*)(t)) \in \tilde{U}(t, \tilde{x}_*(t)).$$

Более того, $x_*(t)$ есть решение уравнения (2.1) с $\varphi_*(t) = f(t, x_*(t))v^Y(x_*)(t)$, а $x_*^{\mathbb{R}}(t)$ – решение уравнения (3.19) с $u^{\mathbb{R}}(t) = v^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_*)(t)$. Следовательно, пара $(\tilde{x}_*, \tilde{u}_*)$ является решением управляемой системы (3.4), (3.5), а значит, и системы (3.4), (3.6).

Покажем, что $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}\tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ является компактным подмножеством пространств $C(T, \mathbb{R}) \times (w-W_{p,q}) \times (w-L^q(T, \tilde{Y}))$ и $C(T, \tilde{H}) \times (w-L^q(T, \tilde{Y}))$.

Рассмотрим множество

$$S_{\gamma}^Y = \{v \in L^q(T, Y) : \|v(t)\|_Y \leq \gamma(t)\}, \quad \gamma(t) = a_1(t) + b_1M_1^{2/q}. \quad (3.21)$$

Если $(\tilde{x}, \tilde{u})$ – решение системы (3.4), (3.6), то для $\tilde{u} = (u^{\mathbb{R}}, u)$ имеют место оценки (3.14), (3.15). Поэтому $\tilde{x} \in \mathcal{R}(\tilde{x}_0)$. Следовательно, $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}\tilde{U}}(\tilde{x}_0) \subset \mathcal{R}(\tilde{x}_0) \times S^{\mathbb{R}} \times S_{\gamma}^H$. Поэтому $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}\tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ является относительно компактным подмножеством пространств $C(T, \mathbb{R}) \times (w-W_{p,q}) \times (w-L^q(T, \tilde{Y}))$.

Пусть последовательность $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}\tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ сходится к $(\tilde{x}, \tilde{u})$ в пространстве $C(T, \mathbb{R}) \times (w-W_{p,q}) \times (w-L^q(T, \tilde{Y})) \hookrightarrow C(T, \tilde{H}) \times (w-L^q(T, \tilde{Y}))$, где $\tilde{x}_n = (x_n^{\mathbb{R}}, x_n)$, $\tilde{x} = (x^{\mathbb{R}}, x)$, $\tilde{u}_n = (u_n^{\mathbb{R}}, u_n)$, $\tilde{u} = (u^{\mathbb{R}}, u)$. Из леммы 2.1 следует, что $\varphi_n(t) = f(t, x_n(t))u_n(t)$ сходится к $\varphi(t) = f(t, x(t))u(t)$ в $w-\mathcal{H}^*$. Аналогично, последовательность $u_n^{\mathbb{R}}$ сходится к $u^{\mathbb{R}}$ в $w-L^q(T, \mathbb{R})$. Поэтому $x^{\mathbb{R}} = P^{\mathbb{R}}u^{\mathbb{R}}$. Так как x_n является решением уравнения (2.1) с $\varphi = \varphi_n$, то $x = P^H\varphi$ согласно утверждению 2.1.

Теперь, чтобы завершить доказательство, нам достаточно показать, что

$$\tilde{u}(t) = (u^{\mathbb{R}}(t), u(t)) \in \overline{\text{co}}\tilde{U}(t, \tilde{x}(t)). \quad (3.22)$$

Так как $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ в $w\text{-}L^q(T, \tilde{Y})$, то из теоремы Мазура следует, что

$$\tilde{u}(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \right). \quad (3.23)$$

С другой стороны, используя непрерывность отображения $\tilde{x} \rightarrow \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, \tilde{x}(t))$, мы получим хорошо известное включение

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, \tilde{x}_k(t)) \right) \subset \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, \tilde{x}(t)). \quad (3.24)$$

Теперь включение (3.22) вытекает из (3.23), (3.24). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Множество $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ является замкнутым подмножеством пространств $C(T, \mathbb{R}) \times (w\text{-}W_{p,q}) \times L^q_{\omega}(T, \tilde{Y})$ и $C(T, \tilde{H}) \times L^q_{\omega}(T, \tilde{Y})$.*

Следствие вытекает из теоремы 3.1 и леммы 2.3.

ТЕОРЕМА 3.2. *Множество $\mathcal{R}_U(x_0) \neq \emptyset$. Более того, множество $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ является компактным подмножеством пространств $(w\text{-}W_{p,q}) \times (w\text{-}L^q(T, Y))$ и $C(T, H) \times (w\text{-}L^q(T, Y))$.*

Теорема 3.2 доказывается по аналогии с теоремой 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Теоремы 3.1, 3.2 верны и при более слабых предположениях относительно f , U , g , которые мы не приводим, так как нашей целью является другая задача.

§4. Свойства решений расширенной управляемой системы

В этом параграфе нас будет интересовать связь между множествами $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\tilde{x}_0)$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любого $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ существует последовательность $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\tilde{x}_0)$, сходящаяся к $(\tilde{x}, \tilde{u})$ в пространствах $C(T, \tilde{H}) \times (w\text{-}W_{p,q}) \times L^q_{\omega}(T, \tilde{Y})$ и $C(T, \tilde{H}) \times L^q_{\omega}(T, \tilde{Y})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $(\tilde{x}_*, \tilde{u}_*) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ фиксирована, $\tilde{x}_* = (x_*^{\mathbb{R}}, x_*)$, $\tilde{u}_* = (u_*^{\mathbb{R}}, u_*)$. Тогда

$$x_*^{\mathbb{R}} = P^{\mathbb{R}} u_*^{\mathbb{R}}, \quad x_* = P^H \varphi_*, \quad \varphi_*(t) = f(t, x_*(t)) u_*(t), \quad \tilde{u}_* \in S^q_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\tilde{x}_*). \quad (4.1)$$

Как и при доказательстве теоремы 3.1, мы будем считать, что отображение $\tilde{U}: T \times H \rightarrow \tilde{Y}$ определено на пространстве $T \times \tilde{H}$, полагая $\tilde{U}(t, \tilde{x}) = \tilde{U}(t, x)$. Тогда из (3.7) следует, что

$$h(\overline{\text{co}} \tilde{U}(t, \tilde{x}), \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, \tilde{y})) \leq k(t) \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\tilde{H}}. \quad (4.2)$$

Возьмем $n \geq 1$. Для каждого $\tilde{x} \in \mathcal{R}(\tilde{x}_0) \hookrightarrow C(T, \tilde{H})$ согласно (4.2) существует $\tilde{u} \in S_{\overline{\sigma}\tilde{U}}^q(\tilde{x}_*)$ такое, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_*(t) - \tilde{u}(t)\|_{\tilde{Y}} &< \frac{1}{2n} + d(\tilde{u}_*(t), \overline{\sigma}\tilde{U}(t, \tilde{x}(t))) \\ &< \frac{1}{2n} + k(t)\|\tilde{x}_*(t) - \tilde{x}(t)\|_{\tilde{H}}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись утверждением 2.3 и теоремой 3.1 из [14], найдем непрерывную функцию $\tilde{v}_n: \mathcal{R}(\tilde{x}_0) \hookrightarrow C(T, \tilde{H}) \rightarrow L^1(T, \tilde{Y})$ такую, что для каждого $\tilde{x} \in \mathcal{R}(\tilde{x}_0)$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_n(\tilde{x})(t) &\in \overline{\sigma}\tilde{U}(t, \tilde{x}(y)), \\ \|\tilde{u}_*(t) - \tilde{v}_n(\tilde{x})(t)\|_{\tilde{Y}} &\leq \frac{1}{n} + k(t)\|\tilde{x}_*(t) - \tilde{x}(t)\|_{\tilde{H}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Так как (см. (3.18), (3.21))

$$v_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}) \in S^{\mathbb{R}}, \quad v_n^Y(\tilde{x}) \in S_Y^Y, \quad \tilde{x} \in \mathcal{R}(\tilde{x}_0),$$

то множество $\{\tilde{v}_n(\tilde{x}) : n \geq 1, \tilde{x} \in \mathcal{R}(\tilde{x}_0)\}$ равномерно q -интегрируемо. Следовательно, согласно утверждению 2.4 из [12] функция $\tilde{v}_n(\tilde{x})$ является непрерывной из $\mathcal{R}(\tilde{x}_0) \hookrightarrow C(T, \tilde{H})$ в $L^q(T, \tilde{Y})$.

Воспользовавшись следствием 6.2 из [15] (см. также [13]), выберем непрерывную функцию $\tilde{q}_n: \mathcal{R}(\tilde{x}_0) \hookrightarrow C(T, H) \rightarrow L^q(T, \tilde{Y})$ такую, что

$$\tilde{q}_n(\tilde{x}) \in S_{\tilde{U}}^q(\tilde{x}), \quad (4.4)$$

$$\|\tilde{q}_n(\tilde{x}) - \tilde{v}_n(\tilde{x})\|_{\omega} < \frac{1}{n}, \quad (4.5)$$

где $\|\cdot\|_{\omega}$ — норма (3.1).

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_n: S^{\mathbb{R}} \times S^H \rightarrow L^q(T, \tilde{H})$, определенный по правилу:

$$\mathcal{A}_n(\tilde{\varphi}) = (q_n^{\mathbb{R}}(P\tilde{\varphi}), \tilde{F}(P\tilde{\varphi})q_n^Y(P\tilde{\varphi})),$$

который, как было показано при доказательстве теоремы 3.1, является непрерывным из $(w-S^{\mathbb{R}}) \times (w-S^{\mathbb{R}})$ в $(w-S^{\mathbb{R}}) \times (w-S^H)$. Пусть $\tilde{\varphi}_n$ — неподвижная точка оператора $\mathcal{A}_n$, $n \geq 1$. Тогда согласно (4.4)

$$(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\tilde{x}_0), \quad (4.6)$$

где $\tilde{x}_n = P\tilde{\varphi}_n$, $\tilde{u}_n = (q_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n), q_n^Y(\tilde{x}_n))$, $\tilde{\varphi}_n(t) = (q_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n)(t), f(t, x_n(t))q_n^Y(\tilde{x}_n)(t))$.

Воспользовавшись уравнением (2.1), монотонностью оператора A и формулой интегрирования по частям для элементов из $W_{p,q}$, получим

$$\frac{1}{2} |x_n(t) - x_*(t)|_H^2 \leq \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), \varphi_n(s) - \varphi_*(s))_H ds, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), \varphi_n(s) - \varphi_*(s))_H ds \\
& \leq \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), f(s, x_n(s))(q_n^Y(\tilde{x}_n)(s) - v_n^Y(\tilde{x}_n)(s)))_H ds \\
& \quad + \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), f(s, x_n(s))(v_n^Y(\tilde{x}_n)(s) - u_*(s)))_H ds \\
& \quad + \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), (f(s, x_n(s)) - f(s, x_*(s)))u_*(s))_H ds. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} |x_n^{\mathbb{R}}(t) - x_*^{\mathbb{R}}(t)|^2 & \leq \int_0^t (x_n^{\mathbb{R}}(s) - x_*^{\mathbb{R}}(s), q_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n)(s) - u_*^{\mathbb{R}}(s)) ds \\
& \leq \int_0^t (x_n^{\mathbb{R}}(s) - x_*^{\mathbb{R}}(s), q_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n)(s) - v_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n)(s)) ds \\
& \quad + \int_0^t (x_n^{\mathbb{R}}(s) - x_*^{\mathbb{R}}(s), v_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n)(s) - u_*^{\mathbb{R}}(s)) ds. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Так как множество $\mathcal{R}(x_0) \times S_\gamma^Y$ является компактом в $C(T, \tilde{H}) \times (w-L^q(T, Y))$, то согласно лемме 2.1 функция $F(x)u$ (2.8) является равномерно непрерывной на $\mathcal{R}(x_0) \times (w-S_\gamma^Y)$. В соответствии с леммой 2.3 и условием (4.5) последовательность $q_n^Y(\tilde{x}_n) - v_n^Y(\tilde{x}_n)$ сходится в пространстве $w-L^q(T, Y)$ к нулевому элементу, а последовательность $q_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n) - v_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n)$ сходится в пространстве $w-L^q(T, \mathbb{R})$ тоже к нулевому элементу. Так как множество $\{\tilde{x}_n - \tilde{x}_*\}$ относительно компактно в пространстве $C(T, \tilde{H})$ и, следовательно, в пространстве $L^p(T, \tilde{H})$, то

$$\int_0^t (x_n(s) - x_*(s), f(s, x_n(s))(q_n^Y(\tilde{x}_n)(s) - v_n^Y(\tilde{x}_n)(s))) ds \rightarrow 0, \quad (4.10)$$

$$\int_0^t (x_n^{\mathbb{R}}(s) - x_*^{\mathbb{R}}(s), q_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n)(s) - v_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n)(s)) ds \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Воспользовавшись определением нормы в пространстве $\tilde{Y}$, равенством (3.3), оценкой (4.3) и гипотезой $H(f)$ (4), получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), f(s, x_n(s))(v_n^Y(\tilde{x}_n)(s) - u_*(s)))_H ds \\
& \leq m \frac{1}{n} \int_0^t |x_n(s) - x_*(s)|_H ds + \int_0^t m \cdot k(s) \|\tilde{x}_*(s) - \tilde{x}_n(s)\|_{\tilde{H}}^2 ds, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (x_n^{\mathbb{R}}(s) - x_*^{\mathbb{R}}(s), v_n^{\mathbb{R}}(\tilde{x}_n)(s) - u_*^{\mathbb{R}}(s)) ds \\
& \leq \frac{1}{n} \int_0^t |x_n^{\mathbb{R}}(s) - x_*^{\mathbb{R}}(s)| ds + \int_0^t k(s) \|\tilde{x}_*(s) - \tilde{x}_n(s)\|_{\tilde{H}}^2 ds. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Так как $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n) \in \mathcal{R}_{\overline{\mathcal{C}\mathcal{O}}} \tilde{U}(\tilde{x}_0)$ и согласно теореме 3.1 множество $\mathcal{R}_{\overline{\mathcal{C}\mathcal{O}}} \tilde{U}(\tilde{x}_0)$ является компактом в пространствах $C(T, \mathbb{R}) \times (w-W_{p,q}) \times (w-L^q(T, \tilde{Y}))$ и $C(T, \tilde{H}) \times$

$(w-L^q(T, \tilde{Y}))$, то, переходя к подпоследовательности, если необходимо, мы можем предположить, что $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n) \rightarrow (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ в $C(T, \mathbb{R}) \times (w-W_{p,q}) \times (w-L^q(T, \tilde{Y}))$ и в $C(T, \tilde{H}) \times (w-L^q(T, \tilde{Y}))$.

Переходя к пределу в (4.7)–(4.9) и учитывая (4.10)–(4.13), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |x_0(t) - x_*(t)|_H^2 &\leq \int_0^t mk(s) \|\tilde{x}_*(s) - \tilde{x}_0(s)\|_{\tilde{H}}^2 ds \\ &+ \int_0^t |x_0(s) - x_*(s)|_H \cdot |(f(s, x_0(s)) - f(s, x_*(s)))u_*(s)|_H ds, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{2} |x_0^{\mathbb{R}}(t) - x_*^{\mathbb{R}}(t)|^2 \leq \int_0^t k(s) \|\tilde{x}_*(s) - \tilde{x}_0(s)\|_{\tilde{H}}^2 ds. \quad (4.15)$$

Из (4.14), (4.15) и гипотезы Н(f) (3), имея в виду (3.3), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\tilde{x}_0(t) - \tilde{x}_*(t)\|_{\tilde{H}}^2 &\leq (m+1) \int_0^t k(s) \|\tilde{x}_*(s) - \tilde{x}_0(s)\|_{\tilde{H}}^2 ds \\ &+ \int_0^t k_1(u_*)(s) \|\tilde{x}_*(s) - \tilde{x}_0(s)\|_{\tilde{H}}^2 ds. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что $\tilde{x}_* = \tilde{x}_0$.

Следовательно, последовательность $\tilde{x}_n$ сходится к $\tilde{x}_*$ в $C(T, \mathbb{R}) \times (w-W_{p,q})$ и в $C(T, \tilde{H})$.

Воспользовавшись (4.3), (4.5), получим, что $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_*$ в $L_\omega^q(T, \tilde{Y})$ и в соответствии с леммой 2.3 $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_* = \tilde{u}_0$ в $w-L^q(T, \tilde{Y})$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Множество $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ плотно в множестве $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\tilde{x}_0)$ в топологии одного из пространств $C(T, \mathbb{R}) \times (w-W_{p,q}) \times (w-L^q(T, \tilde{Y}))$, $C(T, \tilde{H}) \times (w-L^q(T, \tilde{Y}))$, $C(T, \mathbb{R}) \times (w-W_{p,q}) \times L_\omega^q(T, \tilde{Y})$, $C(T, \tilde{H}) \times L_\omega^q(T, \tilde{Y})$.

Следствие вытекает из теорем 3.1, 4.1, следствия 3.1 и леммы 2.3.

§ 5. Основной результат

В этом параграфе мы докажем основной результат работы.

Пусть $\text{dom } g^{**}(t, x)$ – эффективное множество и $\text{epi } g^{**}(t, x)$ – надграфик функции $u \rightarrow g^{**}(t, x, u)$, т.е.

$$\begin{aligned} \text{dom } g^{**}(t, x) &= \{u \in Y : g^{**}(t, x, u) < +\infty\}, \\ \text{epi } g^{**}(t, x) &= \{(u, a) \in Y \times \mathbb{R} : g^{**}(t, x, u) \leq a\}. \end{aligned}$$

Следующая лемма дает нам свойства функции $g^{**}(t, x, u)$.

ЛЕММА 5.1. Справедливы следующие утверждения:

$$1) \text{ dom } g^{**}(t, x) = \overline{\text{co}} U(t, x); \quad (5.1)$$

$$2) \text{ для любого } u \in \text{dom } g^{**}(t, x)$$

$$g^{**}(t, x, u) = \min\{a \in \mathbb{R} : (a, u) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, x)\}; \quad (5.2)$$

$$3) \text{ функция } (x, u) \rightarrow g^{**}(t, x, u) \text{ является полунепрерывной снизу при почти всех } t \in T;$$

$$4) \text{ функция } (t, x, u) \rightarrow g^{**}(t, x, u) \text{ является } \Sigma \otimes B_{H \times Y}\text{-измеримой.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [1; гл. 1, § 4, п. 2, предложение 4.1] и [1; гл. 1, § 3, п. 2, предложение 3.2] следует, что

$$\text{epi } g^{**}(t, x) = \overline{\text{co}} \text{epi } g_u(t, x, u). \quad (5.3)$$

Теперь (5.1), (5.2) с очевидностью следуют из (5.3), гипотезы $H(g)$ (3) и определения множества $\tilde{U}(t, x)$.

Докажем утверждения 3), 4). Из следствия 2.1 [10] и утверждения 2) леммы 3.1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что сужение отображения $\overline{\text{co}} \tilde{U}(t, x)$ на $T_\varepsilon \times H$ имеет замкнутый график в $T \times H \times (\mathbb{R} \times Y)$.

Покажем, что функция $(t, x, u) \rightarrow g^{**}(t, x, u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon \times H \times Y$. Пусть $(t_n, x_n, u_n) \rightarrow (t, x, u)$, $(t_n, x_n, u_n) \in T_\varepsilon \times H \times Y$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{**}(t_n, x_n, u_n) = +\infty$, то функция $g(t, x, u)$ полунепрерывна снизу в точке (t, x, u) по определению. Пусть $a = \lim_{n \rightarrow \infty} g^{**}(t_n, x_n, u_n) \neq +\infty$, тогда $a \neq -\infty$ согласно гипотезе $H(g)$ (3). Поэтому, не нарушая общности, мы можем считать, что $g^{**}(t_n, x_n, u_n) < \infty$, $n \geq 1$. Тогда ввиду (5.1), (5.2)

$$(g^{**}(t_n, x_n, u_n), u_n) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(t_n, x_n). \quad (5.4)$$

Так как сужение отображения $\overline{\text{co}} \tilde{U}(t, x)$ на $T_\varepsilon \times H$ имеет замкнутый график в $T \times H \times (\mathbb{R} \times Y)$, то из (5.4) вытекает, что $(a, u) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, x)$.

Воспользовавшись (5.2), получим

$$g^{**}(t, x, u) \leq a = \lim_{n \rightarrow \infty} g^{**}(t_n, x_n, u_n).$$

Следовательно, сужение функции $(t, x, u) \rightarrow g^{**}(t, x, u)$ на $T_\varepsilon \times H \times Y$ полунепрерывно снизу. Отсюда непосредственно вытекают утверждения 3) и 4). Лемма доказана.

Пусть

$$I^{**}(x, u) = \int_T g^{**}(t, x(s), u(s)) ds, \quad I(x, u) = \int_T g(t, x(s), u(s)) ds.$$

Из утверждения 4) леммы 5.1 и гипотезы $H(g)$ (3) следует, что функционал I^{**} определен на $C(T, H) \times L^q(T, Y)$ и принимает значения в $(-\infty, +\infty]$.

ТЕОРЕМА 5.1. Задача (RP) имеет решение и

$$\min_{(x, u) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)} I^{**}(x, u) = \inf_{(x, u) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)} I(x, u). \quad (5.5)$$

Для любого решения (x_*, u_*) задачи (RP) существует минимизирующая последовательность $(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ задачи (P) такая, что

$$\text{а) } x_n \rightarrow x_* \text{ в } w\text{-}W_{p,q} \text{ и в } C(T, H); \quad (5.6)$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1} \left| \int_{t_1}^{t_2} (g^{**}(s, x_*(s), u_*(s)) - g(s, x_n(s), u_n(s))) ds \right| = 0; \quad (5.7)$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1} \left\| \int_{t_1}^{t_2} (u_*(s) - u_n(s)) ds \right\|_Y = 0. \quad (5.8)$$

Обратно, если (x_n, u_n) – минимизирующая последовательность задачи (Р), то существует подпоследовательность (x_{n_k}, u_{n_k}) последовательности (x_n, u_n) и решение (x_*, u_*) задачи (RP) такие, что для последовательности (x_{n_k}, u_{n_k}) имеют место равенства (5.6), (5.7) и $u_{n_k} \rightarrow u_*$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$.

Если значениями отображения $U(t, x)$ являются компактные множества из пространства Y , то для последовательности u_{n_k} имеет место и равенство (5.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждений 3), 4) леммы 5.1, гипотезы $H(g)$ (3) и теоремы 2.1 [16] следует, что функционал $I^{**}(x, u)$ полунепрерывен снизу на $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) \hookrightarrow C(T, H) \times (w\text{-}L^q(T, Y))$. В соответствии с теоремой 3.2 $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ является компактом в $C(T, H) \times (w\text{-}L^q(T, Y))$. Поэтому задача (RP) имеет решение (x_*, u_*) . Из утверждения 1) леммы 5.1 получим, что

$$I^{**}(x_*, u_*) \leq \inf_{(x, u) \in \mathcal{R}_U(x_0)} I(x, u). \quad (5.9)$$

Согласно утверждению 2) леммы 5.1 имеем

$$(g^{**}(t, x_*(t), u_*(t)), u_*(t)) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, x_*(t)).$$

Если положить $\tilde{x}_* = (x_*^{\mathbb{R}}, x_*)$, $\tilde{u}_* = (u_*^{\mathbb{R}}, u_*)$, где

$$u_*^{\mathbb{R}}(t) = g^{**}(t, x_*(t), u_*(t)), \quad x_*^{\mathbb{R}}(t) = \int_0^t u_*^{\mathbb{R}}(s) ds, \quad (5.10)$$

то пара $(\tilde{x}_*, \tilde{u}_*) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\tilde{x}_0)$. Тогда по теореме 4.1 существует последовательность $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\tilde{x}_0)$, сходящаяся к $(\tilde{x}_*, \tilde{u}_*)$ в пространствах $C(T, \mathbb{R}) \times (w\text{-}W_{p,q}) \times L^q_\omega(T, \tilde{Y})$ и $C(T, \tilde{H}) \times L^q_\omega(T, \tilde{Y})$. Так как для $\tilde{x}_n = (x_n^{\mathbb{R}}, x_n)$, $\tilde{u}_n = (u_n^{\mathbb{R}}, u_n)$ мы имеем

$$(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_U(x_0) \quad (5.11)$$

и

$$u_n^{\mathbb{R}}(t) = g(t, x_n(t), u_n(t)), \quad x_n^{\mathbb{R}}(t) = \int_0^t u_n^{\mathbb{R}}(s) ds, \quad (5.12)$$

то, принимая во внимание (3.1), (5.10)–(5.12), получаем, что утверждения а), б), в) теоремы 5.1 имеют место. В свою очередь, из (5.9) и утверждения б) теоремы 5.1 следует, что справедливо равенство (5.5) и (x_n, u_n) является минимизирующей последовательностью задачи (Р). Первая часть теоремы доказана.

Пусть $(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ – минимизирующая последовательность задачи (Р). Тогда если мы определим $u_n^{\mathbb{R}}$ и $x_n^{\mathbb{R}}$ по формулам (5.12), то $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\tilde{x}_0)$, где $\tilde{x}_n = (x_n^{\mathbb{R}}, x_n)$, $\tilde{u}_n = (u_n^{\mathbb{R}}, u_n)$.

Ввиду теоремы 3.1, получим, что, не нарушая общности, можно считать последовательность $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n)$ сходящейся в $C(T, \mathbb{R}) \times (w\text{-}W_{p,q}) \times (w\text{-}L^q(T, \tilde{Y}))$ и в $C(T, \tilde{H}) \times (w\text{-}L^q(T, \tilde{Y}))$ к некоторому элементу $(\tilde{x}_*, \tilde{u}_*) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\tilde{x}_0)$.

Из теоремы 3.2 получаем, что $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ и в соответствии с утверждением 2) леммы 5.1

$$g^{**}(t, u_*(t), x_*(t)) \leq u_*^{\mathbb{R}}(t), \quad t \in T. \quad (5.13)$$

Так как (x_n, u_n) – минимизирующая последовательность задачи (Р), то согласно (5.5)

$$\begin{aligned} \min_{(x,u) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(x_0)} I^{**}(x, u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T g(t, x_n(t), u_n(t)) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T u_n^{\mathbb{R}}(t) dt. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Поскольку последовательность $u_n^{\mathbb{R}}$ сходится к $u_*^{\mathbb{R}}$ в $w\text{-}L^q(T, \mathbb{R})$, то из (5.14) вытекает, что

$$\min_{(x,u) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(x_0)} I^{**}(x, u) = \int_T u_*^{\mathbb{R}}(t) dt. \quad (5.15)$$

Воспользовавшись (5.13), (5.14), получаем, что $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(x_0)$ является решением задачи (RP) и $g^{**}(t, x_*(t), u_*(t)) = u_*^{\mathbb{R}}(t)$ п.в.

Следовательно, $x_*^{\mathbb{R}}(t) = \int_0^t g^{**}(s, x_*(s), u_*(s)) ds$. Так как $x_n \rightarrow x_*$ в $w\text{-}W_{p,q}$ и в $C(T, H)$, $x_n^{\mathbb{R}} \rightarrow x_*^{\mathbb{R}}$ в $C(T, \mathbb{R})$ и $u_n \rightarrow u_*$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$, то вторая часть теоремы доказана.

Если значениями отображения $U(t, x)$ являются компактные множества из пространства Y , то многозначное отображение $\Phi: T \rightarrow Y$,

$$\Phi(t) = \overline{\text{co}} \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} U(t, x_n(t)) \right\},$$

является измеримым с выпуклыми компактными значениями и таким, что $\|\Phi(t)\|_Y \leq \delta(t)$ п.в., $\delta \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$ (см. Н(U) (3)). Пусть $S_{\Phi}^q = \{u \in L^q(T, Y) : u(t) \in \Phi(t) \text{ п.в.}\}$. Хорошо известно [17], что на множестве S_{Φ}^q топологии пространств $L_{\omega}^q(T, Y)$ и $w\text{-}L^q(T, Y)$ совпадают. Так как $u_n \in S_{\Phi}^q, n \geq 1$, то мы можем считать, что $u_n \rightarrow u_*$ в $L_{\omega}^q(T, Y)$, т.е. справедливо равенство (5.8). Теорема доказана.

Утверждения теоремы 5.1 гласят, что для любого оптимального решения задачи (RP) существует минимизирующая последовательность задачи (Р), сходящаяся к оптимальному решению одновременно по траектории, управлению и функционалу, причем эта сходимость равномерная в смысле равенств (5.6)–(5.8).

§6. Пример

В этом параграфе мы рассмотрим задачу оптимального управления, описываемую параболической управляемой системой.

Пусть $T = [0, 1]$ и Z – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\Gamma = \partial Z$. Рассмотрим следующую задачу Лагранжа:

$$I(x, u) = \int_T \int_Z \tilde{g}(t, z, x(t, z), u(t, z)) dz dt \rightarrow \inf \quad (\text{Р}') \quad (5.9)$$

на решениях системы

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N D_i(k_{ij}(t, \|Dx\|^{p-2})D_j x) = \tilde{f}(t, z, x(t, z))u(t, z), \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} x|_{T \times \Gamma} &= 0, x(0, z) = x_0(z), \\ u(t, z) &\in \tilde{U}(t, z, x(t, z)) \text{ п.в.} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь $D_i = \partial/\partial z_i$, $i = 1, \dots, N$, $Dx = (D_1x, \dots, D_Nx)$ — градиент x , $DxDy = \sum_{i,j}^N D_i x D_j y$, $\|Dx\|^2 = \sum_{i=1}^N |D_i x|^2$.

Пусть $\tilde{g}_u: T \times Z \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — функция, определенная по правилу

$$\tilde{g}_u(t, z, x, u) = \begin{cases} \tilde{g}(t, z, x, u), & u \in \tilde{U}(t, z, x), \\ +\infty, & u \notin \tilde{U}(t, z, x), \end{cases} \quad (6.3)$$

и $\tilde{g}^{**}(t, z, x, u)$ — биполярная функции $u \rightarrow \tilde{g}_u(t, z, x, u)$.

Наряду с задачей (P') рассмотрим релаксационную задачу

$$I^{**}(x, u) = \int_T \int_Z \tilde{g}^{**}(t, z, x(t, z), x(t, z)) dz dt \rightarrow \min \quad (\text{RP}')$$

на решениях системы (6.1) с ограничениями

$$u(t, z) \in \text{co } \tilde{U}(t, z, x(t, z)) \text{ п.в.} \quad (6.4)$$

Введем следующие предположения, которые всюду в дальнейшем считаем выполненными.

ГИПОТЕЗЫ $H(k)$. k является отображением из $T \times \mathbb{R}^+$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ таким, что

- (1) отображение $t \rightarrow k(t, \alpha)$ измеримо;
- (2) отображение $\alpha \rightarrow k(t, \alpha)$ непрерывно;
- (3) $\|k(t, \xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)} \leq \beta \xi$ для всех $(t, \xi) \in T \times \mathbb{R}^+$, $\beta > 0$;
- (4) $\langle k(t, \|\xi\|^{p-2})\xi - k(t, \|\eta\|^{p-2})\eta, \xi - \eta \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq 0$ для всех $(t, \xi, \eta) \in T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$;
- (5) $\langle k(t, \|\xi\|^{p-2})\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq \beta_1 \|\xi\|^p$ для всех $(t, \xi) \in T \times \mathbb{R}^N$, $\beta_1 > 0$;

ГИПОТЕЗЫ $H(\tilde{f})$. $\tilde{f}: T \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — такая функция, что

- (1) функция $(t, z) \rightarrow \tilde{f}(t, z, x)$ измерима;
- (2) $|\tilde{f}(t, z, x) - \tilde{f}(t, z, y)| \leq k_1(t)|x - y|$ п.в. в $T \times Z$, $k_1 \in L^p(T, \mathbb{R}^+)$;
- (3) $|\tilde{f}(t, z, x)| \leq m$ п.в. в $T \times Z$, $m > 0$.

ГИПОТЕЗЫ $H(\tilde{U})$. $\tilde{U}: T \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow cb(\mathbb{R})$ — многозначное отображение такое, что

- (1) отображение $(t, z) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x)$ измеримо;
- (2) $h(\tilde{U}(t, z, x), \tilde{U}(t, z, y)) \leq k_2(t)|x - y|$ п.в. в $T \times Z$, $k_2 \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$;
- (3) $|\tilde{U}(t, z, x)| \leq M(t)$ п.в. в $T \times Z$, $M \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$.

ГИПОТЕЗЫ $H(\tilde{g})$. $\tilde{g}: T \times Z \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — такая функция, что

- (1) функция $(t, z) \rightarrow \tilde{g}(t, z, x, u)$ измерима;
- (2) $|\tilde{g}(t, z, x, u) - \tilde{g}(t, z, y, v)| \leq k_3(t)|x - y| + k_4|u - v|$, $k_3 \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $k_4 > 0$;
- (3) $|\tilde{g}(t, z, x, u)| \leq a_2(t) + b_2(t)|x| + b_3|u|$ п.в. в $T \times Z$, $a_2, b_2 \in L^q(T, \mathbb{R})$.

ГИПОТЕЗА $H(x_0)$. $x_0 \in L^2(Z)$.

Сведем задачи (P') , (RP') к задачам (P) , (RP) в соответствующих функциональных пространствах.

Пусть $W_0^{1,p}(Z)$ — соболевское пространство. Тогда его сопряженным является пространство $W^{-1,q}(Z)$. Положим $V = W_0^{1,p}(Z)$, $H = L^2(Z)$, $V^* = W^{-1,q}(Z)$.

Из теорем вложения для соболевских пространств хорошо известно, что вложения $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ непрерывны, плотны и компактны.

Рассмотрим форму Дирихле $a: T \times W_0^{1,p}(Z) \times W_0^{1,p}(Z) \rightarrow \mathbb{R}$, определенную по формуле

$$\begin{aligned} a(t, x, y) &= \int_Z \sum_{i,j=1}^N k_{i,j}(t, \|Dx\|^{p-2}) D_i x D_j y \, dz \\ &= \int_Z \langle k(t, \|Dx\|^{p-2}) Dx Dy \rangle_{\mathbb{R}^N} dz. \end{aligned}$$

Из неравенств Фридрихса, Гёльдера и из гипотезы $H(k)$ (3) следует, что

$$|a(t, x, y)| \leq \tilde{\beta} \|x\|_{W_0^{1,p}(Z)}^{p-1} \|y\|_{W_0^{1,p}(Z)}, \quad \tilde{\beta} > 0.$$

Поэтому существует оператор $A: T \times W_0^{1,p}(Z) \rightarrow W^{-1,q}(Z)$ такой, что

$$\langle A(t, x), y \rangle = a(t, x, y) \quad \text{и} \quad \|A(t, x)\|_{W^{-1,p}(Z)} \leq \tilde{\beta} \|x\|_{W_0^{1,p}(Z)}^{p-1}.$$

Следовательно, для оператора A гипотеза $H(A)$ (4) имеет место.

Из теоремы Фубини и $H(k)$ (1), (2) следует, что функция $t \rightarrow a(t, x, y)$ измерима для всех $x, y \in W_0^{1,p}(Z)$. Следовательно, отображение $t \rightarrow A(t, x)$ является скалярно измеримым. Так как $W^{-1,q}(Z)$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством, то отображение $t \rightarrow A(t, x)$ является измеримым. Тем самым для оператора A гипотеза $H(A)$ (1) имеет место.

Пусть $x_n \rightarrow x$ в $W_0^{1,p}(Z)$. Тогда $Dx_n \rightarrow Dx$ в $L^p(Z, \mathbb{R}^N)$. Воспользовавшись гипотезой $H(k)$ (2), мы, не нарушая общности, можем считать, что

$$k(t, \|Dx_n(z)\|^{p-2}) \rightarrow k(t, \|Dx(z)\|^{p-2})$$

почти всюду в Z . Тогда, используя гипотезу $H(k)$ (3), легко получить, что

$$\int_Z \langle k(t, \|Dx_n\|^{p-2}) Dx_n, Dy \rangle_{\mathbb{R}^N} dz \rightarrow \int_Z \langle k(t, \|Dx\|^{p-2}) Dx, Dy \rangle_{\mathbb{R}^N} dz$$

для любого $y \in W_0^{1,p}(Z)$. Это означает, что $A(t, x_n) \rightarrow A(t, x)$ в $w\text{-}W^{-1,q}(Z)$, т.е. отображение $x \rightarrow A(t, x)$ является деминепрерывным и, следовательно, хеминепрерывным.

Для любых $x, y \in W_0^{-1,p}(Z)$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \langle A(t, x) - A(t, y), x - y \rangle \\ &= \int_Z \langle k(t, \|Dx\|^{p-2})Dx - k(t, \|Dy\|^{p-2})Dy, Dx - Dy \rangle_{\mathbb{R}^N} dz. \end{aligned}$$

Следовательно, монотонность оператора $A(t, \cdot)$ следует из гипотезы $H(k)$ (4). Таким образом, для оператора A гипотеза $H(A)$ (2) имеет место.

И, наконец, из гипотезы $H(k)$ (5) вытекает

$$\langle A(t, x), x \rangle \geq \tilde{\beta}_1 \|x\|_{W_0^{1,p}(Z)}^p, \quad \tilde{\beta}_1 > 0.$$

Таким образом, мы показали, что для оператора A выполняются все гипотезы $H(A)$.

В качестве пространства управлений мы берем пространство $Y = L^2(Z)$. Согласно гипотезам $H(\tilde{U})$ (1), (2) для любого $x \in H = L^2(Z)$ многозначное отображение $(t, z) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x(z))$ измеримо. Воспользовавшись гипотезой $H(\tilde{U})$ (3) и теоремой 5.6 из [11], мы получим, что существует последовательность $\varphi_n \in L^2(T \times Z)$, $n \geq 1$, такая, что

$$\tilde{U}(t, z, x(z)) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t, z)} \quad \text{для всех } (t, z) \in T \times Z.$$

Из теоремы Фубини следует, что при почти всех $t \in T$ каждая функция $z \rightarrow \varphi_n(t, z)$ измерима. Следовательно, согласно теореме 5.6 из [11] при почти каждом $t \in T$ многозначное отображение $z \rightarrow \tilde{U}(t, z, x(z))$ измеримо. Поэтому мы можем рассмотреть многозначное отображение $(t, x) \rightarrow U(t, x)$, $x \in H$, определенное по правилу

$$U(t, x) = \{u \in Y : u(z) \in \tilde{U}(t, z, x(z)) \text{ п.в.}\}. \quad (6.5)$$

Так как множество $\tilde{U}(t, z, x)$ компактно в $\mathbb{R}$, то $\text{co } \tilde{U}(t, z, x) = \overline{\text{co } \tilde{U}(t, z, x)}$. Поэтому согласно теореме 1.5 из [18] имеет место равенство

$$\overline{\text{co } U(t, x)} = \{u \in Y : u(z) \in \text{co } \tilde{U}(t, z, x(z)) \text{ п.в.}\} = \text{co } U(t, x). \quad (6.6)$$

Из $H(\tilde{U})$ (3) вытекает, что U является отображением из $T \times H$ в $cb(Y)$ и

$$\|U(t, x)\|_Y \leq M_1(t) \text{ п.в.}, \quad M_1 \in L^q(T, \mathbb{R}^+).$$

Покажем, что многозначное отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо. Пусть $d_Y(v, K)$ обозначает расстояние от точки $v \in Y$ до множества $K \subset Y$ и $h_Y(\cdot, \cdot)$ — метрика Хаусдорфа на пространстве $cb(Y)$. Возьмем фиксированное $v \in Y$. Тогда согласно утверждению 4.1 из [12]

$$d_Y(v, U(t, x)) = \left(\int_Z d(v(z), \tilde{U}(t, z, x(z)))^2 dz \right)^{1/2}.$$

Так как функция $(t, z) \rightarrow d(v(z), \tilde{U}(t, z, x(z)))$ является элементом пространства $L^2(T \times Z)$, то из теоремы Фубини следует, что функция $t \rightarrow d_Y(v, U(t, x))$ измерима для любого $v \in Y$. Воспользовавшись теоремой 3.5 из [11], мы получим, что многозначное отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо.

Из гипотезы $H(\tilde{U})$ (2) и [12; утверждение 4.2] следует, что

$$h_Y(U(t, x), U(t, y)) \leq \left(\int_Z h(\tilde{U}(t, z, x(z)), \tilde{U}(t, z, y(z)))^2 dz \right)^{1/2} \leq k_2(t) \|x - y\|_H.$$

Следовательно, для многозначного отображения $U: T \times H \rightarrow cb(Y)$, определенного по правилу (6.5), все гипотезы $H(U)$ выполняются.

Пусть $f(t, x)u$, где $x \in H$, $u \in Y$, — функция, определенная по правилу:

$$(f(t, x)u)(z) = \tilde{f}(t, z, x(z))u(z). \quad (6.7)$$

Из гипотез $H(\tilde{f})$ и теоремы Фубини вытекает, что $f(t, x) \in \mathcal{L}(Y, H)$ при почти каждом $t \in T$ и $\|f(t, x)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq m$ п.в. Поскольку $Y = H = L^2(Z)$, то легко убедиться, что оператор $f(t, x)$ является самосопряженным. Воспользовавшись гипотезами $H(\tilde{f})$ (1), (2) и достаточно стандартными рассуждениями, получим, что отображение $t \rightarrow f(t, x)u$ измеримо для любых $(x, y) \in H \times Y$. Пусть $x_n \rightarrow x$ в H . Не нарушая общности, мы можем считать, что $x_n(z) \rightarrow x(z)$ почти всюду. Тогда из $H(\tilde{f})$ (2) вытекает, что $(f(t, x_n)u)(z) \rightarrow (f(t, x)u)(z)$ почти всюду на $T \times Z$. Воспользовавшись $H(\tilde{f})$ (3) и теоремой Лебега об ограниченной сходимости, получим, что отображение $x \rightarrow f(t, x)u$ непрерывно для почти всех $t \in T$ и для любых $u \in Y$.

Так как оператор $f(t, x)$ самосопряженный, то отображение $x \rightarrow f^*(t, x)h$ непрерывно почти всюду на T для любых $h \in H$.

И, наконец, для любых $x, y \in H$ и любого $u \in \overline{\text{co}} U(t, x)$ в соответствии с гипотезами $H(\tilde{f})$ (2), $H(\tilde{U})$ (3)

$$\|(f(t, x) - f(t, y))u\|_H \leq M(t)k_1(t)\|x - y\|_H.$$

Так как $Mk \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, то все гипотезы $H(f)$ для отображения $f(t, x)u$, определенного по формуле (6.7), выполняются.

Поэтому управляемые системы (6.1), (6.2) и (6.1), (6.4) в операторной форме можно записать как управляемые системы (0.1), (0.2) и (0.1), (0.3).

Рассмотрим функцию $g: T \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, определенную по формуле

$$g(t, x, u) = \int_Z \tilde{g}(t, z, x(z), u(z)) dz. \quad (6.8)$$

Используя гипотезы $H(\tilde{g})$ и достаточно стандартные рассуждения, применяемые нами неоднократно, получаем, что для функции (6.8) выполняются все гипотезы $H(g)$.

Пусть $g_u: T \times H \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — функция, определенная по правилу

$$g_u(t, x, u) = \begin{cases} g(t, x, u), & u \in U(t, x), \\ +\infty, & u \notin U(t, x), \end{cases}$$

и $g^{**}(t, x, u)$ — биполярная функция $u \rightarrow g_u(t, x, u)$.

Из (6.3) и гипотезы $H(\tilde{g})$ (3) следует, что

$$\int_Z \tilde{g}_u(t, z, x(z), u(z)) dz = +\infty$$

тогда и только тогда, когда мера множества $\{z \in Z : u(z) \notin \tilde{U}(t, z, x(z))\}$ больше нуля. Поэтому

$$g_u(t, x, u) = \int_Z \tilde{g}_u(t, z, x(z), u(z)) dz. \quad (6.9)$$

Пусть $x \in H$ фиксировано. Тогда из $H(\tilde{g})$ (3), $H(\tilde{U})$ (3) следует, что почти всюду в $T \times Z$

$$-a_2(t) - b_2(t)|x(z)| - b_3M(t) \leq \tilde{g}_u(t, z, x(z), u). \quad (6.10)$$

Воспользовавшись $H(\tilde{g})$ (1), (2), $H(\tilde{U})$ (1), (2), теоремой Фубини, следствием 3 из [19; гл. 9, §8], мы получим, что существует такое измеримое множество $T_0 \subset T$, $\mu(T \setminus T_0) = 0$, что для каждого $t \in T_0$

- а) функция $z \rightarrow \tilde{g}(t, z, x(z), u)$ измерима;
- б) функция $u \rightarrow \tilde{g}(t, z, x(z), u)$ непрерывна при почти всех $z \in Z$;
- в) функция $z \rightarrow \tilde{U}(t, z, x(z))$ измерима;
- г) неравенство (6.10) выполняется при почти всех $z \in Z$.

Пусть $t \in T_0$ фиксировано. Тогда из а), б), в) и [10; лемма 1.3] вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $Z_\varepsilon \subset Z$ такое, что мера множества $Z \setminus Z_\varepsilon$ не превышает ε и сужение отображения $(z, u) \rightarrow \tilde{g}(t, z, x(z), u)$ на $Z_\varepsilon \times \mathbb{R}$ непрерывно, а график сужения отображения $z \rightarrow \tilde{U}(t, z, x(z))$ на Z_ε замкнут в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Тогда сужение отображения $(z, u) \rightarrow \tilde{g}_u(t, z, x(z), u)$ на $Z_\varepsilon \times \mathbb{R}$ является полунепрерывным снизу. Воспользовавшись теоремой 1.1 из [1; гл. 8, §1, п. 1], получим, что для каждого $t \in T_0$ отображение $(z, u) \rightarrow \tilde{g}_u(t, z, x(z), u)$ является нормальным интегрантом (см. [1; гл. 8, §1, п. 1, определение 1.1]). Имея в виду г) и используя сдвиг, если необходимо, мы можем считать, что функция $(z, u) \rightarrow \tilde{g}_u(t, z, x(z), u)$ неотрицательна. Тогда из [1; гл. 9, §2, п. 2 предложение 2.3] и равенства (6.9) вытекает, что для каждого $t \in T_0$ и любого $u \in Y = L^2(Z)$

$$g^{**}(t, x, u) = \int_Z \tilde{g}^{**}(t, z, x(z), u(z)) dz.$$

Отсюда мы получаем, что для любого $x \in C(T, H)$ и любого $u \in L^q(T, Y) = L^q(T, L^2(Z))$

$$\begin{aligned} I^{**}(x, u) &= \int_T g^{**}(t, x(t), u(t)) dt \\ &= \int_T \int_Z \tilde{g}^{**}(t, z, x(t, z), u(t, z)) dz dt. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Обозначим через $L^{2,q}(T \times Z)$ банахово пространство всех измеримых на $T \times Z$ функций с конечной нормой [20]

$$\|u\|_{2,q} = \left(\int_T \left(\int_Z |u(t, z)|^2 dz \right)^{q/2} dt \right)^{1/q}.$$

Тогда $L^q(T, H) = L^q(T, L^2(Z)) = L^{2,q}(T \times Z)$.

Как обычно, под решением уравнения (6.1) при фиксированном $u \in L^{2,q}(T \times Z)$ мы понимаем обобщенное решение x , т.е. решение уравнения (0.1), порожденного уравнением (6.1). Тогда решением управляемой системы (6.1), (6.2) является пара (x, u) , $u \in L^{2,q}(T \times Z)$, такая, что x является решением уравнения (0.1) и почти всюду на $T \times Z$ имеет место включение (6.2).

Из [19; гл. 9, §8, следствие 3] вытекает, что $u(t) \in U(t, x(t))$ почти всюду на T тогда и только тогда, когда $u(t, z) = u(t)(z) \in \tilde{U}(t, z, x(t)(z))$ почти всюду на $T \times Z$. Поэтому из (6.5) следует, что множество решений управляемой системы (6.1), (6.2) совпадает с множеством решений управляемой системы (0.1), (0.2). Аналогично, согласно (6.6) множество решений управляемой системы (6.1), (6.4) совпадает с множеством решений управляемой системы (0.1), (0.3). Если мы воспользуемся равенством (6.11), то получим, что проблемы (P'), (RP') и (P), (RP) эквивалентны.

Прежде чем сформулировать основной результат этого параграфа, приведем вспомогательное утверждение.

Пусть D – совокупность всех множеств из $T \times \mathbb{R}^N$ вида $E = [t_1, t_2] \times [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, N$. На пространстве $L^{2,q}(T \times Z)$ введем норму [15]

$$\|u\|_\omega = \sup_{E \in D} \left| \iint_{E \cap (T \times Z)} u(t, z) dz dt \right|. \quad (6.12)$$

Пространство $L^{2,q}(T \times Z)$ с нормой (6.12) будем обозначать через $L_\omega^{2,q}(T \times Z)$. Пусть $\varphi \in L^{2,q}(T \times Z, \mathbb{R}^+)$ и

$$S = \{u \in L^{2,q}(T \times Z) : |u(t, z)| \leq \varphi(t, z) \text{ п.в. в } T \times Z\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. *На множестве S топологии пространств w - $L^{2,q}(T \times Z)$ и $L_\omega^{2,q}(T \times Z)$ совпадают и топология пространства $L_\omega^{2,q}(T \times Z)$ не сильнее топологии пространства $L_\omega^q(T, L^2(Z))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Z – ограниченная область, то, не нарушая общности, мы можем считать, что $T \times Z \subset T \times B$, где $B = [a, b]^N$, $a < b$.

Пусть $u \in S$ и $\tilde{u}: T \times B \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, определенная по правилу: $\tilde{u}(t, z) = u(t, z)$ при $(t, z) \in T \times Z$, $\tilde{u}(t, z) = 0$ при $(t, z) \in T \times (B \setminus Z)$. Ясно, что если последовательность $u_n \rightarrow u$ в w - $L^{2,q}(T \times Z)$, то последовательность $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ в w - $L^{2,q}(T \times B)$, и наоборот. Пусть $\tilde{\varphi}(t, z)$ – функция, определенная по правилу: $\tilde{\varphi}(t, z) = \varphi(t, z)$ при $(t, z) \in T \times Z$, $\tilde{\varphi}(t, z) = 0$ при $(t, z) \in T \times (B \setminus Z)$. Рассмотрим множество

$$\tilde{S} = \{\tilde{u} \in L^{2,q}(T \times B) : |\tilde{u}(t, z)| \leq \tilde{\varphi}(t, z) \text{ п.в. в } T \times B\}.$$

Так как $1 < q \leq 2$, то $\tilde{S}$ является выпуклым компактом в w - $L^{2,q}(T \times B)$.

Пусть $C(T \times B)$ – пространство непрерывных числовых функций с топологией равномерной сходимости. Каждому элементу $\tilde{u} \in \tilde{S}$ поставим в соответствие функцию $x_{\tilde{u}} \in C(T \times B)$, определенную по правилу:

$$x_{\tilde{u}}(t, r_1, \dots, r_N) = \int_0^t \int_a^{r_1} \dots \int_a^{r_N} \tilde{u}(s, z) ds dz, \quad (6.13)$$

$$(t, r_1, \dots, r_N) \in T \times B, \quad z = (z_1, \dots, z_N), \quad dz = dz_1 \dots dz_N.$$

Пусть $C_{\tilde{S}} = \{x_{\tilde{u}} \in C(T \times B) : \tilde{u} \in \tilde{S}\}$. Легко показать, что $C_{\tilde{S}}$ является выпуклым компактным подмножеством пространства $C(T \times B)$, а оператор $P: L^{2,q}(T \times B) \rightarrow C(T, B)$, ставящий в соответствие каждому $\tilde{u} \in L^{2,q}(T \times B)$ функцию $x_{\tilde{u}} \in C(T \times B)$ по формуле (6.13), является непрерывным линейным оператором. Поэтому множества $C_{\tilde{S}} \subset C(T \times B)$ и $w\text{-}\tilde{S}$ топологически изоморфны.

С другой стороны, легко показать, что на множестве $C_{\tilde{S}}$ норма пространства $C(T \times B)$ эквивалентна норме

$$\|x_{\tilde{u}}\|_{\omega} = \sup_{\substack{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1 \\ a \leq a_1 \leq b_1 \leq b \\ \dots \\ a \leq a_N \leq b_N \leq b}} \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{a_1}^{b_2} \dots \int_{a_N}^{b_N} \tilde{u}(t, z) dt dz \right|, \quad x_{\tilde{u}} \in C_{\tilde{S}}. \quad (6.14)$$

Следовательно, на множестве $\tilde{S}$ топология, порожденная нормой (6.14), и слабая топология совпадают. Но из (6.12), (6.14) следует, что $\|x_{\tilde{u}}\|_{\omega} = \|u\|_{\omega}$.

Согласно (2.12) норма в пространстве $L_{\omega}^q(T, L^2(Z))$ имеет вид

$$\sup_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1} \left(\int_Z \left| \int_{t_1}^{t_2} u(t)(z) dt \right|^2 dz \right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \sup_{E \in D} \left| \iint_{E \cap (T \times Z)} u(t, z) dz dt \right| \\ & \leq \sup_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1} \int_Z \left| \int_{t_1}^{t_2} u(t, z) dt \right| dz \\ & \leq c \cdot \sup_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1} \left(\int_Z \left| \int_{t_1}^{t_2} u(t)(z) dt \right|^2 dz \right)^{1/2}, \quad c > 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Из (6.15) следует, что топология пространства $L_{\omega}^{2,q}(T \times Z)$ не сильнее топологии пространства $L_{\omega}^q(T, L^2(Z))$. Утверждение доказано.

Пусть $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$ и $\mathcal{R}_{co} \tilde{U}(x_0)$ – множества решений управляемых систем (6.1), (6.2) и (6.1), (6.4).

ТЕОРЕМА 6.1. *Задача (RP') имеет решение и*

$$\min_{(x,u) \in \mathcal{R}_{co} \tilde{U}(x_0)} I^{**}(x, u) = \inf_{(x,u) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)} I(x, u). \quad (6.16)$$

Для любого решения (x_, u_*) задачи (RP'), $x_* \in C(T, L^2(Z))$, $u_* \in L^{2,q}(T \times Z) = L^q(T, L^2(Z))$, существует минимизирующая последовательность $(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$ задачи (P') такая, что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \left(\int_Z |x_*(t, z) - x_n(t, z)|^2 dz \right)^{1/2} = 0, \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < t_1 \leq t_2 \leq 1} \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_Z (\tilde{g}^{**}(t, z, x_*(t, z), u_*(t, z)) \right. \\ & \quad \left. - \tilde{g}(t, z, x_n(t, z), u_n(t, z))) dz dt \right| = 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{E \in D} \left| \iint_{E \cap (T \times Z)} (u_*(t, z) - u_n(t, z)) dz dt \right| = 0. \quad (6.19)$$

Обратно, если $(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$ — минимизирующая последовательность задачи (P') , то существует подпоследовательность (x_{n_k}, u_{n_k}) последовательности (x_n, u_n) и решение $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_{\text{сб } \tilde{U}}(x_0)$ задачи (RP') такие, что для подпоследовательности (x_{n_k}, u_{n_k}) выполняются равенства (6.17)–(6.19).

Теорема вытекает из теоремы 5.1, утверждения 6.1 и гипотез $H(\tilde{U})$ (3), $H(\tilde{g})$ (3).

Список литературы

1. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
2. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
3. Суслов С. И. Теорема Боголюбова с ограничением в виде дифференциального включения // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 4. С. 902–914.
4. Papageorgiou N. S. Existence and variational problems for nonlinear evolution inclusions // Math. Japon. 1993. V. 38. № 3. P. 433–443.
5. Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications. II. New York: Springer-Verlag, 1990.
6. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
7. Lions J. L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlineaires. Paris: Dunod, 1969.
8. Migorski S. On an existence result for nonlinear evolution inclusions // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1996. V. 39. P. 133–141.
9. Papageorgiou N. S. On the “bang-bang” principle for nonlinear evolution inclusions // Dynam. Systems Appl. 1993. V. 2. P. 61–74.
10. Толстоногов А. А. К теореме Скорца–Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 109–120.
11. Himmelberg C. J. Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87. P. 53–72.
12. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p -continuous extreme selectors of multifunction with decomposable values: existence theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 173–203.
13. Толстоногов А. А., Толстоногов Д. А. L_p -непрерывные экстремальные селекторы многозначных отображений с разложимыми значениями // Докл. РАН. 1997. Т. 35. № 4. С. 455–457.
14. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. 1983. V. 76. P. 163–174.
15. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 237–269.
16. Balder E. J. Necessary and sufficient condition for L_1 -strong-weak lower semicontinuity of integral functionals // Nonlinear Anal. 1987. V. 11. № 12. P. 1399–1404.
17. Толстоногов А. А. О решениях эволюционных включений. I // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 3. С. 161–174.
18. Hiai F., Umegaki H. Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1977. V. 7. P. 149–182.
19. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
20. Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.