Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Сандраков, Осреднение системы уравнений теории упругости с контрастными коэффициентами, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 12, 37–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 06:41:56

УДК 517.955.8

Г. В. Сандраков

Осреднение системы уравнений теории упругости с контрастными коэффициентами

Рассматривается нестационарная задача линеаризованной теории упругости в периодической среде с порами, заполненными легкодеформируемым материалом. Период рассматриваемой среды задается малым положительным параметром. Предполагается, что плотность и отношение минимального и максимального модулей упругости легкодеформируемого материала также являются малыми положительными параметрами. Получены осредненные системы уравнений, решения которых приближают решения рассматриваемой задачи, и доказаны оценки точности соответствующих приближений. Вид осредненных уравнений и оценки точности приближения существенно зависят от геометрических свойств множеств, занимаемых легкодеформируемым материалом, и от выполнения некоторых предельных соотношений между соответствующими малыми параметрами.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

В работе рассматривается нестационарная система уравнений линеаризованной теории упругости с коэффициентами, зависящими от двух малых положительных параметров ε и σ . Параметр мелкомасштабности ε задает период коэффициентов этой системы, а величина, обратная параметру контрастности σ , характеризует разброс коэффициентов тензора упругости. Начально-краевая задача для такой системы уравнений моделирует в линейном приближении упругое поведение микронеоднородной среды (композита) с порами, заполненными легкодеформируемым материалом и расположенными периодическим образом с периодом ε . Предполагается, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнены соотношение $\sigma \rightarrow 0$ и одно из следующих трех условий:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \rightarrow \vartheta, \quad (1.2)$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

где ϑ – заданная положительная постоянная. Будут получены осредненные (предельные) системы уравнений, решения которых приближают решения рассматриваемой системы, и доказаны оценки точности такого приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01394) и фонда INTAS (грант № 96-1061).

Пусть для $n \geq 2$ заданы ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой (класса C^∞) границей, положительное T , финитные в Ω и гладкие вектор-функции $f, g_k \in C_0^\infty([0, T] \times \Omega)^n$ и $w_0, w_1 \in C_0^\infty(\Omega)^n$, где $k = 1, \dots, n$. Определим вектор-функцию $u = (u_1, \dots, u_n)$ как решение начально-краевой задачи для нестационарной системы уравнений линеаризованной теории упругости:

$$m_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_h} \left(A_{\sigma\varepsilon}^{hk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = r_\varepsilon f + \frac{\partial}{\partial x_h} (B_{\sigma\varepsilon}^{hk} g_k) \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (1.4)$$

$$u|_{t=0} = w_0 \text{ в } \Omega, \quad u'|_{t=0} = w_1 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T),$$

зависящей от малых положительных параметров ε и σ , следующим образом.

Пусть F_1 и F_2 являются открытыми 1-периодическими подмножествами $\mathbb{R}^n$ с границами класса C^2 , $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} = \emptyset$, $F_0 \equiv \mathbb{R}^n \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2})$ является множеством с границей класса C^2 и $F_s^\varepsilon \equiv \varepsilon F_s = \{\varepsilon x : x = (x_1, \dots, x_n) \in F_s\}$ для $s = 0, 1, 2$. Здесь и далее 1-периодичность множества (функции) означает периодичность характеристической функции этого множества (этой функции) с периодом 1 по каждому x_k , $k = 1, \dots, n$. Таким образом, $Y = [0, 1]^n$ является ячейкой периодичности, и множества F_0, F_1, F_2 вполне определяются множествами $Y_0 = Y \cap F_0$, $Y_1 = Y \cap F_1$ и $Y_2 = Y \cap F_2$. Предполагается, что множества Y_1 и Y_2 связны и выполнены условия положительности для мер Лебега в $\mathbb{R}^n$:

$$\theta_0 = \text{mes}(Y_0) > 0, \quad \theta_1 = \text{mes}(Y_1) > 0, \quad \theta_2 = \text{mes}(Y_2) > 0. \quad (1.5)$$

Кроме того, отождествляя противоположные грани Y , множества Y_0, Y_1 и Y_2 можно также рассматривать как подмногообразия тора с общими границами (класса C^2): $S_0 \equiv \partial Y_0$, $S_1 \equiv \partial Y_1 = \partial Y_0 \setminus \partial Y_2$, $S_2 \equiv \partial Y_2 = \partial Y_0 \setminus \partial Y_1$.

Для $h, k = 1, \dots, n$ матричнозначные функции $A_{\sigma\varepsilon}^{hk}$ и $B_{\sigma\varepsilon}^{hk}$ в (1.4) зависят от малых параметров ε и σ :

$$\begin{aligned} A_{\sigma\varepsilon}^{hk} &= \sigma A_0^{hk} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad B_{\sigma\varepsilon}^{hk} = \sigma B_0^{hk} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon \equiv \Omega \cap F_0^\varepsilon, \\ A_{\sigma\varepsilon}^{hk} &= A_1^{hk} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad B_{\sigma\varepsilon}^{hk} = B_1^{hk} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } \Omega_1^\varepsilon \equiv \Omega \cap F_1^\varepsilon, \\ A_{\sigma\varepsilon}^{hk} &= A_2^{hk} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad B_{\sigma\varepsilon}^{hk} = B_2^{hk} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } \Omega_2^\varepsilon \equiv \Omega \cap F_2^\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Предполагается, что для $s = 0, 1, 2$ и $i, j, h, k = 1, \dots, n$ компоненты $a_{ijs}^{hk}(y), b_{ijs}^{hk}(y)$ матричнозначных функций $A_s^{hk}(y)$ и $B_s^{hk}(y)$ являются 1-периодическими ограниченными (почти всюду) функциями на F_s соответственно. Кроме того, для этих компонент выполнены условия симметрии, а для $a_{ijs}^{hk}(y)$ и условие равномерной эллиптичности:

$$\begin{aligned} a_{ijs}^{hk}(y) &= a_{jis}^{kh}(y) = a_{ijs}^{ik}(y), \quad b_{ijs}^{hk}(y) = b_{jis}^{kh}(y) = b_{ijs}^{ik}(y), \\ \alpha \xi_{ih} \xi_{ih} &\leq a_{ijs}^{hk}(y) \xi_{ih} \xi_{jk} \leq \beta \xi_{ih} \xi_{ih} \quad \text{для } y \in Y_s \text{ и } s = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где α и β — заданные положительные постоянные и $\xi_{ij} = \xi_{ji}$ для $i, j = 1, \dots, n$. Здесь и далее приняты обычные для теории упругости обозначения и соглашение о суммировании по повторяющимся индексам i, j, h, k от 1 до n . Функции m_ε и r_ε в (1.4) зависят только от ε :

$$m_\varepsilon = m_s \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad r_\varepsilon = r_s \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } \Omega_s^\varepsilon, \quad (1.8)$$

где $m_s(y)$ и $r_s(y)$ являются 1-периодическими ограниченными функциями на F_s для $s = 0, 1, 2$. Кроме того, $m_s(y)$ отделены от нуля:

$$\alpha \leq m_s(y) \leq \beta \quad \text{для } y \in Y_s \text{ и } s = 0, 1, 2. \quad (1.9)$$

Предполагается также, что множество F_1 является связным, а множество F_2 вполне несвязно. Последнее по определению означает, что $(\overline{F_2} + z) \cap \partial Y = \emptyset$ для некоторого $z \in Y$. Это определение введено В. В. Жиковым [1] в более общей ситуации для фрактальных множеств. Таким образом, между множествами F_1 и F_2 имеется существенное различие. Множество F_2 составлено из изолированных компонент, и нагрузка, приложенная к части этих компонент, не передается на другие компоненты, а для множества F_1 это не так, поскольку F_1 связно. Аналогичное замечание относится и к множествам Ω_1^ε и Ω_2^ε , что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow 0$ приводит к нулевому вкладу компонент Ω_2^ε в осредненный тензор упругости.

В качестве типичного примера двумерных ($n = 2$) множеств F_0 , F_1 и F_2 , удовлетворяющих сформулированным условиям, можно выбрать 1-периодическое продолжение множеств Y_0 , Y_1 и Y_2 , изображенных на рис. 1. Поскольку связность множества Y_0 не предполагается, 1-периодическое продолжение ячейки, изображенной на рис. 2, также приводит к множествам F_0 , F_1 и F_2 , удовлетворяющим сформулированным условиям. В трехмерном случае также несложно привести “типичные” примеры подходящих множеств F_0 , F_1 и F_2 . Кроме того, полученные в данной работе утверждения выполнены и в случае, когда $Y_1 = \emptyset$ или $Y_2 = \emptyset$ (в этих утверждениях необходимо только обнулить соответствующие функции и постоянные). В этом частном случае система уравнений (1.4) описывает динамическое поведение композита с легкодеформируемыми включениями (при $Y_2 = \emptyset$) или композита с включениями в легкодеформируемой матрице (при $Y_1 = \emptyset$).

Рис. 1

Рис. 2

В рассматриваемом здесь общем случае быстроосциллирующие коэффициенты первой системы уравнений в (1.4) имеют единичный порядок на множестве $\Omega_{12}^\varepsilon \equiv \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$, но коэффициенты тензора упругости асимптотически малы на Ω_0^ε . Кроме того, малость этих коэффициентов контролируется одним из предположений (1.1)–(1.3), а на множества Ω_0^ε , Ω_1^ε и Ω_2^ε наложены условия непустоты (1.5) и некоторой регулярности “внутренних” границ, разделяющих эти множества. Таким образом, система уравнений (1.4) описывает динамическое поведение композита с достаточно сложной структурой. Цель исследования этой системы при сделанных предположениях – подчеркнуть существенное различие вклада компонент Ω_1^ε и Ω_2^ε

в осредненные задачи и отметить возможную взаимосвязь этих компонент через коэффициенты осредненных задач.

Поскольку коэффициенты в (1.4) могут быть разрывными, следуя [2], определим решение этой задачи как элемент $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)^n)$, удовлетворяющий для каждого $\varphi \in H_0^1(\Omega)^n$ и почти всех $t \in (0, T)$ интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left(m_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi \right) dx + \int_{\Omega} \left(A_{\sigma\varepsilon}^{hk} \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \right) dx = \int_{\Omega} (r_\varepsilon f, \varphi) dx - \int_{\Omega} \left(B_{\sigma\varepsilon}^{hk} g_k, \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \right) dx \quad (1.10)$$

и начальным условиям $u|_{t=0} = w_0$ в $H_0^1(\Omega)^n$, $u'_t|_{t=0} = w_1$ в $L^2(\Omega)^n$. Здесь и далее $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$ и используются функциональные пространства, определенные, например, в [2]. Известно [2], [3], что существует единственное (для фиксированных ε и σ) решение этой задачи, такое, что $u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)^n)$ и $u'_t \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)$.

Основные результаты работы составляют теоремы о предельном поведении решений задачи (1.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в предположении, что выполнены соотношение $\sigma \rightarrow 0$ и одно из условий (1.1)–(1.3). Для точной формулировки этих утверждений понадобятся некоторые дополнительные обозначения.

Пусть для $p = 1, \dots, n$ матричнозначные функции $N_{1a}^p(y)$ являются 1-периодическими решениями задач Неймана на Y_1 :

$$-\frac{\partial}{\partial y_h} \left(A_1^{hk} \frac{\partial}{\partial y_k} N_{1a}^p \right) = \frac{\partial}{\partial y_h} A_1^{hp} \text{ в } Y_1, \quad -\nu_h \left(A_1^{hk} \frac{\partial}{\partial y_k} N_{1a}^p \right) = \nu_h A_1^{hp} \text{ на } S_1, \quad (1.11)$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – внешняя нормаль к границе S_1 и использованы обозначения (1.6). Определим для $q, p = 1, \dots, n$ матрицы $\hat{A}_1^{qp}$ с постоянными компонентами равенствами

$$\hat{A}_1^{qp} = \left\langle A_1^{qp} + A_1^{qi} \frac{\partial}{\partial y_i} N_{1a}^p \right\rangle_1 \equiv \int_{Y_1} \left(A_1^{qp} + A_1^{qi} \frac{\partial}{\partial y_i} N_{1a}^p \right) dy. \quad (1.12)$$

Известно [4], [5], что компоненты матриц $\hat{A}_1^{qp}$ удовлетворяют условиям симметрии и равномерной эллиптичности (1.7).

Пусть для $p = 1, \dots, n$ матричнозначные функции $N_{1b}^p(y)$ и $N_{2b}^p(y)$ являются 1-периодическими решениями задач Неймана на Y_1 и Y_2 :

$$-\frac{\partial}{\partial y_h} \left(A_s^{hk} \frac{\partial}{\partial y_k} N_{sb}^p \right) = \frac{\partial}{\partial y_h} B_s^{hp} \text{ в } Y_s, \quad -\nu_h \left(A_s^{hk} \frac{\partial}{\partial y_k} N_{sb}^p \right) = \nu_h B_s^{hp} \text{ на } S_s, \quad (1.13)$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ обозначает также внешнюю нормаль к границе S_s , $s = 1, 2$, и использованы обозначения (1.6). Далее, учитывая (1.6) и (1.8), введем для $q, p = 1, \dots, n$ обозначения

$$\begin{aligned} \hat{B}_2^{qp} &= \left\langle B_2^{qp} + A_2^{qi} \frac{\partial}{\partial y_i} N_{2b}^p \right\rangle_2 \equiv \int_{Y_2} \left(B_2^{qp} + A_2^{qi} \frac{\partial}{\partial y_i} N_{2b}^p \right) dy, \\ M &= \langle m_0 \rangle_0 + \langle m_1 \rangle_1 + \langle m_2 \rangle_2 \equiv \int_{Y_0} m_0 dy + \int_{Y_1} m_1 dy + \int_{Y_2} m_2 dy, \\ \hat{B}_1^{qp} &= \left\langle B_1^{qp} + A_1^{qi} \frac{\partial}{\partial y_i} N_{1b}^p \right\rangle_1, \quad R = \langle r_0 \rangle_0 + \langle r_1 \rangle_1 + \langle r_2 \rangle_2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Определим вектор-функцию $v = (v_1, \dots, v_n)$ как решение начально-краевой задачи для осредненной системы уравнений с постоянными коэффициентами:

$$M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\hat{A}_1^{hk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = Rf + \frac{\partial}{\partial x_h} ((\hat{B}_1^{hk} + \hat{B}_2^{hk}) g_k) \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad (1.15)$$

$$v|_{t=0} = w_0 \text{ в } \Omega, \quad v'_t|_{t=0} = w_1 \text{ в } \Omega, \quad v = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T),$$

где использованы обозначения (1.12) и (1.14).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие (1.1). Предположим, что u является решением задачи (1.4) и v – решение задачи (1.15). Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C (\varepsilon + \sigma + \varepsilon^2/\sigma),$$

где постоянная C не зависит от ε и σ .

Пусть матричнозначная функция $E_1(y)$ является 1-периодическим решением задачи Дирихле на Y_0 :

$$\frac{\partial}{\partial y_h} \left(A_0^{hk} \frac{\partial}{\partial y_k} E_1 \right) = 0 \text{ в } Y_0, \quad E_1 = E \text{ на } \overline{Y}_1, \quad E_1 = 0 \text{ на } \overline{Y}_2, \quad (1.16)$$

где E – единичная матрица для $\mathbb{R}^n$ и использованы обозначения (1.6). Более традиционно, например, условие $E_1 = E$ на $\overline{Y}_1$ означает, что $E_1 = E$ на S_1 и E_1 продолжена как единичная матрица на Y_1 . Отметим также, что Y_0 может иметь несколько связанных компонент (рис. 2). В этом случае задача (1.16) “распадается” на несколько задач, но на компонентах Y_0 , полностью содержащихся в Y_1 или Y_2 , решение этих задач совпадает с единичной или нулевой матрицей соответственно.

Используемые до сих пор матрицы (и матричнозначные функции) имели размерность $n \times n$, но в дальнейшем понадобятся и более общие матрицы, размерность которых определяется явно или ясна из контекста. Пусть $\tilde{n} = n + n(n-1)/2$ и $E_2 = (e_1, \dots, e_{\tilde{n}})$ обозначает $(n \times \tilde{n})$ -матрицу, столбцы которой образуют базис в линейном пространстве жестких перемещений в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [3], [5]). Без ограничения общности можно считать, что первые n столбцов E_2 образуют единичную матрицу, $E_2(y)$ определена и непрерывна на Y_2 и выполнено условие нормировки:

$$\langle m_2 E_2^T E_2 \rangle_2 = \langle m_2 \rangle_2 \tilde{E}, \quad (1.17)$$

где $\tilde{E}$ – единичная матрица для $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ и использованы обозначения (1.8). Здесь E_2^T обозначает матрицу, сопряженную к E_2 . Доопределим $E_2(y)$ на $Y \setminus \overline{Y}_2$ как 1-периодическое решение задачи Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial y_h} \left(A_0^{hk} \frac{\partial}{\partial y_k} E_2 \right) = 0 \text{ в } Y_0, \quad E_2 = 0 \text{ на } \overline{Y}_1, \quad E_2 = E_2 \text{ на } \overline{Y}_2. \quad (1.18)$$

Пусть $(n \times n)$ -матричнозначные функции $P(t, y)$, $Q_1(t, y)$ и $(n \times \tilde{n})$ -матричнозначная функция $Q_2(t, y)$ являются 1-периодическими решениями начально-краевых задач на Y_0 :

$$\begin{aligned} m_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \vartheta \frac{\partial}{\partial y_h} \left(A_0^{hk} \frac{\partial P}{\partial y_k} \right) &= 0 \text{ в } Y_0 \times (0, \infty), \\ P|_{t=0} &= 0 \text{ в } Y_0, \quad P'_t|_{t=0} = \frac{r_0}{m_0} E \text{ в } Y_0, \quad P = 0 \text{ на } \overline{Y}_{12} \times (0, \infty), \\ m_0 \frac{\partial^2 Q_s}{\partial t^2} - \vartheta \frac{\partial}{\partial y_h} \left(A_0^{hk} \frac{\partial Q_s}{\partial y_k} \right) &= 0 \text{ в } Y_0 \times (0, \infty), \\ Q_s|_{t=0} &= 0 \text{ в } Y_0, \quad Q'_s|_{t=0} = E_s \text{ в } Y_0, \quad Q_s = 0 \text{ на } \overline{Y}_{12} \times (0, \infty), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $s = 1, 2$, $Y_{12} = Y_1 \cup Y_2$ и учтены обозначения (1.2), (1.6) и (1.8). Далее, введем для $s, l = 1, 2$ и $q, p = 1, \dots, n$ обозначения

$$\begin{aligned} M_s &= \langle m_s \rangle_s, \quad R_s^0(t) = \langle m_0 E_s^T P''_{tt} \rangle_0, \quad M_s^l(t) = \langle m_0 E_l^T (Q_s)''_{tt} \rangle_0, \\ a_s^l &= \vartheta \left\langle \frac{\partial E_l^T}{\partial y_h} A_0^{hk} \frac{\partial E_s}{\partial y_k} \right\rangle_0, \quad \tilde{B}_2^{qp} = \left\langle E_2^T \left(B_2^{qp} + A_2^{qi} \frac{\partial}{\partial y_i} N_{2b}^p \right) \right\rangle_2, \\ R_s &= \langle E_s^T r_s \rangle_s, \quad E_{l\varepsilon} = E_l \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad Q_{l\varepsilon} = Q_l \left(t, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad P_\varepsilon = P \left(t, \frac{x}{\varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где, например, $P(t, y)$ продолжена как 1-периодическая функция на $\mathbb{R}^n$ и тогда P_ε обозначает ограничение этого продолжения при $y = x/\varepsilon$ на Ω . Пусть $\tilde{w}_0, \tilde{w}_1$ обозначают $\tilde{n}$ -мерные вектор-функции, первые n компонент которых равны w_0, w_1 соответственно, а остальные компоненты являются нулевыми. Определим n -мерную вектор-функцию v_1 и $\tilde{n}$ -мерную вектор-функцию v_2 как решения начально-краевой задачи для осредненной системы уравнений:

$$\begin{aligned} M_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - M_1^* \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) - M_2^* \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \right) + a_1^1 v_1 + a_2^1 v_2 \\ - \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\hat{A}_1^{hk} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \right) &= R_1 f - R_1^0 * f + \frac{\partial}{\partial x_h} (\hat{B}_1^{hk} g_k) \text{ в } \Omega \times (0, T), \\ M_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - M_1^2 * \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) - M_2^2 * \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \right) + a_1^2 v_1 + a_2^2 v_2 \\ &= R_2 f - R_2^0 * f + \frac{\partial}{\partial x_h} (\tilde{B}_2^{hk} g_k) \text{ в } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$v_1|_{t=0} = w_0 \text{ в } \Omega, \quad (v_1)_t|_{t=0} = w_1 \text{ в } \Omega, \quad v_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$v_2|_{t=0} = \tilde{w}_0 \text{ в } \Omega, \quad (v_2)_t|_{t=0} = \tilde{w}_1 \text{ в } \Omega,$$

где $*$ обозначает свертку по t и использованы обозначения (1.14) и (1.20).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено условие (1.2), $f, g_k \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^n$, $w_0 = 0$ и $w_1 = 0$, где $k = 1, \dots, n$. Предположим, что u является решением задачи (1.4) и (v_1, v_2) — решение задачи (1.21). Тогда

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u - E_{1\varepsilon} v_1 - E_{2\varepsilon} v_2 - P_\varepsilon * f + Q_{1\varepsilon} * ((v_1)''_{tt}) + Q_{2\varepsilon} * ((v_2)''_{tt})\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \\ \leq c \left(\varepsilon(1 + \vartheta + \sqrt{\vartheta}) + \sigma + \varepsilon \frac{1 + \sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\sigma\vartheta}} \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right) \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right), \end{aligned}$$

где постоянные C и c не зависят от ε, σ и, кроме того, c не зависит от ϑ .

Пусть χ_0^ε , χ_1^ε и χ_2^ε обозначают характеристические функции множеств Ω_0^ε , Ω_1^ε и Ω_2^ε соответственно. Определим n -мерную вектор-функцию v_1 и $\tilde{n}$ -мерную вектор-функцию v_2 как решения начально-краевых задач для осредненных систем уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} M_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\hat{A}_1^{hk} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \right) &= R_1 f + \frac{\partial}{\partial x_h} (\hat{B}_1^{hk} g_k) \text{ в } \Omega \times (0, T), \\ v_1|_{t=0} &= w_0 \text{ в } \Omega, \quad (v_1)_t|_{t=0} = w_1 \text{ в } \Omega, \quad v_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T), \\ M_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= R_2 f + \frac{\partial}{\partial x_h} (\tilde{B}_2^{hk} g_k) \text{ в } \Omega \times (0, T), \\ v_2|_{t=0} &= \tilde{w}_0 \text{ в } \Omega, \quad (v_2)_t|_{t=0} = \tilde{w}_1 \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где использованы обозначения (1.12), (1.14) и (1.20).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено условие (1.3) и $\nabla_y(r_0/m_0) \in L^\infty(Y_0)^n$. Предположим, что u является решением задачи (1.4) и v_1, v_2 – решение задач (1.22). Тогда

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \left\| u - \chi_1^\varepsilon v_1 - \chi_2^\varepsilon E_{2\varepsilon} v_2 - \chi_0^\varepsilon w_0 - \chi_0^\varepsilon w_1 t - \chi_0^\varepsilon \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon \int_0^t \int_0^t f \, dt \, dt \right\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \\ \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon}} \right), \end{aligned}$$

где интегралы обозначают вторую первообразную по t и постоянная C не зависит от ε и σ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Проверяется, что в условиях теорем 1–3 достаточно гладкие решения осредненных задач (1.15), (1.21), (1.22) существуют и определены однозначно. Гладкость и финитность f, g_k, w_0, w_1 (и равенства $w_0 = 0, w_1 = 0$ из условий теоремы 2) используются в доказательстве именно этого утверждения о решениях осредненных задач. Это утверждение для задач (1.15) и (1.22) хорошо известно [3], [6], поскольку при сделанных предположениях на исходные данные выполнены условия согласования произвольного порядка. Это утверждение для задачи (1.21) доказывается в §2 методами работы [7], в которой была доказана разрешимость аналогичной задачи для линейаризованной системы уравнений гидродинамики.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для построения начальных членов асимптотического разложения решения задачи (1.4) используются методы работ [7] и [8]. Как обычно [4], [7], [8], это построение заключается в последовательном разрешении некоторых периодических задач на ячейке (типа задач (1.11), (1.13)), условия разрешимости которых приводят к осредненным задачам (1.15), (1.21) или (1.22) в зависимости от выполнения одного из условий (1.1)–(1.3). Кратко это построение излагается в §3. После того как начальные члены асимптотики построены, доказательство оценок теорем 1–3 проводится в §§ 4–10 энергетическими методами. При этом учитывается гладкость решений осредненных задач (на самом деле конечного порядка, см. §2) и некоторая регулярность решений задач на ячейке, в доказательстве которой используется гладкость (класса C^2) границ S_1 и S_2 . В доказательстве теоремы 3 используется также условие регулярности отношения коэффициентов

r_0 и m_0 . В задачах, встречающихся на практике, коэффициенты $m_0, m_1, m_2, \dots$, как правило, постоянны, так что это условие не слишком существенно. Отметим также, что с помощью подходящих аппроксимаций исходных данных из теорем 1–3 несложно вывести утверждения о сходимости решений задачи (1.4) при более слабых предположениях на f, g_k, w_0 и w_1 , где $k = 1, \dots, n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теоремы 1–3 выполнены также, когда $Y_1 = \emptyset$ или $Y_2 = \emptyset$. Так, например, в последнем случае интегралы по Y_2 следует считать нулевыми, что согласуется с определением интеграла Лебега. Кроме того, следует выбрать $E_1 = E, E_2 = 0$ и поэтому $Q_2 = 0, v_2 = 0$, впрочем, это подразумевается определениями решений соответствующих задач. Более того, после соответствующих изменений в формулировках теоремы 1–3 выполнены и в случае, когда имеются s_1 связных непустых открытых 1-периодических множеств $F_1, \dots, F_{s_1}$ и s_2 вполне несвязных непустых открытых 1-периодических множеств $F_{s_1+1}, \dots, F_{s_1+s_2}$ с границами класса C^2 , замыкания которых не пересекаются, и $F_0 \equiv \mathbb{R}^n \setminus (\overline{F_1} \cup \dots \cup \overline{F_{s_1+s_2}})$. Для простоты формулировок и ясности изложения здесь подробно рассматривается случай $s_1 = 1$ и $s_2 = 1$. Относительно общего случая произвольных неотрицательных s_1 и s_2 (причем $s_1 + s_2 > 0$) в дальнейшем будут приводиться замечания, достаточные для восстановления соответствующих деталей. Когда выполнено условие (1.1), наиболее существенное изменение в (1.15) – это замена матриц $\hat{A}_1^{hk}$ и $\hat{B}_1^{hk} + \hat{B}_2^{hk}$ на суммы матриц $\hat{A}_1^{hk} + \dots + \hat{A}_{s_1}^{hk}$ и $\hat{B}_1^{hk} + \dots + \hat{B}_{s_1+s_2}^{hk}$, где $\hat{A}_{l_1}^{hk}$, $\hat{B}_{l_1}^{hk}$ и $\hat{B}_{l_2}^{hk}$ вычисляются по формулам (1.12) и (1.14) через решения задач (1.11) и (1.13), в которых 1 и 2 заменены на $l_1 = 1, \dots, s_1$ и $l_2 = s_1 + 1, \dots, s_1 + s_2$ соответственно. Когда выполнено условие (1.2), осредненная задача (1.21) содержит $s_1 + s_2$ связанных систем уравнений относительно вектор-функций $v_1, \dots, v_{s_1+s_2}$ и соответствующие начальные и граничные условия. В случае, когда выполнено условие (1.3), осредненная задача (1.22) содержит $s_1 + s_2$ независимых задач относительно вектор-функций $v_1, \dots, v_{s_1+s_2}$. Такие осредненные задачи принято называть многокомпонентными. Это определение введено Г. П. Панасенко [9], [10], в случае, когда множества $F_1, \dots, F_{s_1+s_2}$ составлены из цилиндров. Этот случай является в некотором смысле прямым произведением рассматриваемых здесь случаев, поскольку каждый такой цилиндр является связным в направлении образующей и вполне несвязен в перпендикулярных направлениях. Кроме того, в работах [9], [10] предполагается, что m_0 имеет порядок σ , поэтому осредненные задачи из этих работ существенно отличаются от осредненных задач, полученных здесь. Используемые в данной работе методы позволяют рассмотреть задачу (1.4) и в более общей ситуации, когда m_0 или m_0 и r_0 имеют порядок μ , где μ является малым положительным параметром. Поскольку коэффициенты m_ε и r_ε соответствуют плотности, последний случай встречается в задачах, возникающих на практике, и будет рассмотрен здесь более подробно.

Пусть в условия (1.8) внесено изменение, состоящее в том, что

$$m_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \mu m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad r_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \mu r\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon, \quad (1.23)$$

где $\mu \rightarrow 0$ и $m(y), r(y)$ являются 1-периодическими ограниченными (почти всюду) функциями на F_0 . Кроме того, функция $m(y)$ отделена от нуля и удовлетворяет неравенствам (1.9). Определим

$$\widehat{M} = \langle m_1 \rangle_1 + \langle m_2 \rangle_2, \quad \widehat{R} = \langle r_1 \rangle_1 + \langle r_2 \rangle_2. \quad (1.24)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия (1.1) и (1.23). Предположим, что u является решением задачи (1.4) и v – решение задачи (1.15), в которой M и R заменены на $\widehat{M}$, $\widehat{R}$ соответственно. Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v\|_{L^2(\Omega_{12})^n}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right),$$

где постоянная C не зависит от ε , σ и μ .

В этой теореме разность $u - v$ оценивается только на множестве $\Omega_{12}^\varepsilon \equiv \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ в отличие от теоремы 1, что связано со спецификой рассматриваемой задачи. Впрочем, и эта оценка дает представление об асимптотическом поведении решения задачи (1.4) в рассматриваемом случае. Кроме того, в процессе доказательства этой теоремы будет оценена “энергетическая” норма разности первообразных решения задачи (1.4) и начальных членов асимптотического разложения на всем множестве Ω .

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия (1.2) и (1.23). Предположим, что u является решением задачи (1.4) и (v_1, v_2) – решение задачи (1.21), в которой $M_s^l = 0$ и $R_s^0 = 0$ для $s, l = 1, 2$. Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - E_{1\varepsilon} v_1 - E_{2\varepsilon} v_2\|_{L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^n}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right),$$

где постоянная C не зависит от ε , σ и μ .

В случае, когда выполнены условия (1.3) и (1.23), предполагается также, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнены соотношения $\sigma \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$ и одно из следующих трех условий:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2 \mu} \rightarrow \infty, \quad (1.25)$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2 \mu} \rightarrow \theta, \quad (1.26)$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2 \mu} \rightarrow 0, \quad (1.27)$$

где θ – заданная положительная постоянная.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены условия (1.3), (1.23) и (1.25). Предположим, что u является решением задачи (1.4) и v_1, v_2 – решение задач (1.22). Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - E_{1\varepsilon} v_1 - E_{2\varepsilon} v_2\|_{L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^n}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} + \left(\frac{\varepsilon^2 \mu}{\sigma} \right)^2 \right),$$

где постоянная C не зависит от ε , σ и μ .

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия (1.3), (1.23), (1.26), $f, g_k \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^n$, $w_0 = 0$ и $w_1 = 0$, где $k = 1, \dots, n$. Предположим, что u является решением задачи (1.4) и v_1, v_2 – решение задач (1.22). Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - E_{1\varepsilon} v_1 - E_{2\varepsilon} v_2\|_{L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^n}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} + \left| \theta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2 \mu} \right| \right),$$

где постоянная C не зависит от ε , σ и μ .

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнены условия (1.3), (1.23), (1.27) и $\nabla_y(r/m) \in L^\infty(Y_0)^n$. Предположим, что u является решением задачи (1.4) и v_1, v_2 — решение задач (1.22). Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - \chi_1^\varepsilon v_1 - \chi_2^\varepsilon E_{2\varepsilon} v_2\|_{L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^n}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} + \frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt[4]{\mu}\sqrt{\varepsilon}} \right),$$

где постоянная C не зависит от ε , σ и μ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вопросы осреднения стационарного варианта задачи (1.4) рассматривались в работах [4], [9] и [11]. Параболический вариант задачи (1.4) рассматривался в [12]. В работе [10] предложен алгоритм построения асимптотики решения задачи (1.4) в случае, когда m_0 имеет порядок σ . В работе [9] намечена схема обоснования этой асимптотики в предположении, что условия Дирихле из (1.4) заменены на условия периодичности и множества $F_1, \dots$ являются цилиндрами.

Доказательства представленных здесь утверждений даны в §§ 4–10. Несколько вспомогательных лемм, используемых в этих доказательствах, приведены в § 2. Частные случаи теорем 1–3 были анонсированы в заметке [13]. Утверждения, близкие к теореме 1, были ранее доказаны Н. С. Бахваловым.

Автор выражает признательность Н. С. Бахвалову за многочисленные полезные советы по рассматриваемым в статье вопросам.

§ 2. Леммы

В дальнейшем изложении C обозначает постоянные, не зависящие от малых параметров ε , σ и μ . Кроме того, для заданной 1-периодической на Y функции $P(y)$ через $P_\varepsilon = P(x/\varepsilon)$ обозначается ε -периодическое продолжение этой функции на Ω . Более точно, $P(y)$ продолжается как 1-периодическая функция на $\mathbb{R}^n$ и выбирается ограничение полученной функции при $y = x/\varepsilon$ на Ω , которое и обозначается P_ε .

Следуя, например, [5; гл. 12], будем по возможности использовать безиндексную форму записи рассматриваемых систем уравнений. Тогда задачу (1.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} m_\varepsilon u_{tt}'' - \operatorname{div}(A_\sigma^\varepsilon \nabla u) &= r_\varepsilon f + \operatorname{div}(B_\sigma^\varepsilon g) \text{ в } \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} &= w_0 \text{ в } \Omega, \quad u_t'|_{t=0} = w_1 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из свойств симметрии (1.7) тензора A_σ^ε следует, что

$$A_\sigma^\varepsilon \nabla u = A_\sigma^\varepsilon e(u), \quad e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T). \quad (2.2)$$

Действительно, например, на множестве Ω_1^ε для компонент матрицы $A_\sigma^\varepsilon \nabla u$ по определению имеем равенства

$$(A_\sigma^\varepsilon \nabla u)_{jk} = a_{ij1}^{hk} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} = a_{hj1}^{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} = a_{ij1}^{hk} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} = (A_\sigma^\varepsilon \nabla u^T)_{jk}, \quad (2.3)$$

которые доказывают (2.2). Здесь и далее $i, j, h, k = 1, \dots, n$.

Из (1.7) также следует, что матрицы $A_\sigma^\varepsilon e(u)$ и $B_\sigma^\varepsilon g$ симметричны. Поэтому с учетом (2.2) интегральное тождество (1.10) можно переписать в более традиционном для теории упругости виде

$$\int_{\Omega} (m_\varepsilon u''_{tt}, \varphi) dx + \int_{\Omega} (A_\sigma^\varepsilon e(u), e(\varphi)) dx = \int_{\Omega} (r_\varepsilon f, \varphi) dx - \int_{\Omega} (B_\sigma^\varepsilon g, e(\varphi)) dx, \quad (2.4)$$

где $\varphi \in H_0^1(\Omega)^n$ и $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов или матриц. Например, для $A = \{a_{hk}\}$ и $B = \{b_{hk}\}$ из $\mathbb{R}^{n \times n}$ по определению $(A, B) = a_{hk} b_{hk}$ и $|A|^2 = (A, A)$.

ЛЕММА 1. Для решений задачи (1.4) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) &\equiv \|u'_t\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)}^2 + \sigma \|e(u)\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n})}^2 \\ &\quad + \|e(u)\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^{n \times n})}^2 \\ &\leq C (\|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \sigma \|e(w_0)\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n}}^2 + \|e(w_0)\|_{L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^{n \times n}}^2 + \|w_1\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \\ &\quad + \|g\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 + \|g'_t\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, для решений задачи (1.4) выполнены включения $u'_t \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)$ и $u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)^n)$. Поэтому величина $\mathcal{E}(u)$ определена, и необходимо только выяснить зависимость соответствующих постоянных от ε и σ . Выбирая $\varphi = u'_t$ в тождестве (2.4), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} m_\varepsilon |u'_t|^2 dx \right)'_t + \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (A_\sigma^\varepsilon e(u), e(u)) dx \right)'_t \\ = \int_{\Omega} (r_\varepsilon f, u'_t) dx - \int_{\Omega} (B_\sigma^\varepsilon g, e(u'_t)) dx, \end{aligned}$$

где учтены свойства симметрии тензора A_σ^ε . Интегрируя это равенство по t и используя условия (1.7), (1.9), имеем

$$\begin{aligned} &\|u'_t(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \sigma \|e(u(t))\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n}}^2 + \|e(u(t))\|_{L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^{n \times n}}^2 \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \left(\frac{\beta}{2} \left(\|w_1\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \sigma \|e(w_0)\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n}}^2 + \|e(w_0)\|_{L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^{n \times n}}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^t \int_{\Omega} (r_\varepsilon f, u'_t) dx dt \right| + \left| \int_0^t \int_{\Omega} (B_\sigma^\varepsilon g, e(u'_t)) dx dt \right| \right). \quad (2.5) \end{aligned}$$

Интегрируя по частям в последнем слагаемом этого неравенства, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\Omega} (B_\sigma^\varepsilon g, e(u'_t)) dx dt \right| &\leq \left| \int_{\Omega} (B_\sigma^\varepsilon g(t), e(u(t))) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} (B_\sigma^\varepsilon g|_{t=0}, e(w_0)) dx \right| + \left| \int_0^t \int_{\Omega} (B_\sigma^\varepsilon g'_t, e(u)) dx dt \right|. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Воспользуемся для оценки интегралов в (2.5) и (2.6) неравенством Коши–Буняковского и “ δ -неравенством”, записанным в виде $|ab| \leq (\delta/2)a^2 + b^2/(2\delta)$ для положительного δ и произвольных a, b . Тогда

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} (B_{\sigma}^{\varepsilon} g, e(u)) dx \right| &\leq \left| \int_{\Omega_0^{\varepsilon}} (B_{\sigma}^{\varepsilon} g, e(u)) dx \right| + \left| \int_{\Omega_{12}^{\varepsilon}} (B_{\sigma}^{\varepsilon} g, e(u)) dx \right| \\
&\leq \sigma C \|g\|_{L^2(\Omega_0^{\varepsilon})^{n \times n}} \|e(u)\|_{L^2(\Omega_0^{\varepsilon})^{n \times n}} + C \|g\|_{L^2(\Omega_{12}^{\varepsilon})^{n \times n}} \|e(u)\|_{L^2(\Omega_{12}^{\varepsilon})^{n \times n}} \\
&\leq C \left(\frac{\sigma \delta}{2} \|e(u)\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega_0^{\varepsilon})^{n \times n})}^2 + \frac{\sigma}{2\delta} \|g\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega_0^{\varepsilon})^{n \times n})}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta}{2} \|e(u)\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega_{12}^{\varepsilon})^{n \times n})}^2 + \frac{1}{2\delta} \|g\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega_{12}^{\varepsilon})^{n \times n})}^2 \right) \\
&\leq \frac{\alpha}{12} \mathcal{E}(u) + \frac{3C^2}{\alpha} \|g\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где было выбрано $\delta = \alpha/(6C)$ и учтено, что $\sigma < 1$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \int_{\Omega} (B_{\sigma}^{\varepsilon} g'_t, e(u)) dx dt \right| &+ \left| \int_0^t \int_{\Omega} (r_{\varepsilon} f, u'_t) dx dt \right| \\
&\leq \frac{\alpha}{6} \mathcal{E}(u) + C (\|g'_t\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Используя (2.6)–(2.8) и неравенство

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} (B_{\sigma}^{\varepsilon} g|_{t=0}, e(w_0)) dx \right| &\leq C (\|g\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \\
&\quad + \sigma \|e(w_0)\|_{L^2(\Omega_0^{\varepsilon})^{n \times n}}^2 + \|e(w_0)\|_{L^2(\Omega_{12}^{\varepsilon})^{n \times n}}^2),
\end{aligned}$$

перейдем к максимуму по $t \in [0, T]$ в неравенстве (2.5). Тогда из (2.5)–(2.8) следует неравенство леммы с дополнительным слагаемым $(1/2)\mathcal{E}(u)$ в правой части. Это дополнительное слагаемое можно вычесть из левой части полученного неравенства, что завершает доказательство леммы 1.

Постоянные C в неравенствах леммы 1 не зависят от T . Как уже отмечалось, $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)$. Поэтому из представления $u(t) = w_0 + \int_0^t u'_{\tau}(\tau) d\tau$ следует оценка

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L^2(\Omega)^n} &\leq \|w_0\|_{L^2(\Omega)^n} + \int_0^T \|u'_t\|_{L^2(\Omega)^n} dt \\
&\leq \|w_0\|_{L^2(\Omega)^n} + T \|u'_t\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Таким образом, в левую часть первого неравенства леммы 1 можно добавить в качестве слагаемого величину $\|u\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)}^2$, но в этом случае постоянная C из этого неравенства будет зависеть от T .

Будем обозначать через $H_P^1(Y_1)$ пространство Соболева 1-периодических функций из $H^1(Y_1)$ (см., например, [4], [5]). Эквивалентно $H_P^1(Y_1)$ определяется как пространство квадратично интегрируемых вместе с производными первого порядка функций на многообразии Y_1 с границей S_1 класса C^2 . Тогда [2] определены пространство $H_P^{1/2}(S_1)$ следов на S_1 элементов из $H_P^1(Y_1)$ и пространство

$H_P^{-1/2}(S_1)$, сопряженное к $H_P^{1/2}(S_1)$. Аналогично определяются пространства $H_P^1(Y_0)$, $H_P^1(Y_2), \dots$. При этом $H_P^1(Y_2) = H^1(Y_2)$ и $H_P^{-1/2}(S_2) = H^{-1/2}(S_2)$ в силу предположений на множество Y_2 (см. рис. 1 и 2).

Кроме того, из результатов [3; гл. 3, §3.5] и [14; гл. 1, теорема 1.2] следует формула интегрирования по частям

$$-\int_{S_0} (W, \nu V) ds = \int_{Y_0} (W, \operatorname{div}_y V) dy + \int_{Y_0} (\nabla_y W, V) dy, \quad (2.10)$$

где $W \in H_P^1(Y_0)^n$, $V \in L^2(Y_0)^{n \times n}$ с $\operatorname{div}_y V \in L^2(Y_0)^n$ и след νV определен как элемент пространства $H_P^{-1/2}(S_0)^n$:

$$\|\nu V\|_{H_P^{-1/2}(S_0)^n}^2 \leq C(\|V\|_{L^2(Y_0)^{n \times n}}^2 + \|\operatorname{div}_y V\|_{L^2(Y_0)^n}^2). \quad (2.11)$$

Аналогичные неравенства для следа и формулы интегрирования по частям выполнены для множеств Y_1 и Y_2 , но с обратным знаком у граничного интеграла, поскольку нормаль ν является внутренней для границы S_0 и внешней для границ S_1 и S_2 . Отметим также, что для $V = V^T$ последний интеграл в (2.10) можно переписать в виде

$$\int_{Y_0} (\nabla_y W, V) dy = \int_{Y_0} (e_y(W), V) dy, \quad e_y(W) = \frac{1}{2}(\nabla_y W + \nabla_y W^T). \quad (2.12)$$

Известно [4], [5], что решения $N_{1a}^p, N_{1b}^p \in (H_P^1(Y_1) \cap L^2(Y_1)/\mathbb{R})^{n \times n}$ задач (1.11) и (1.13) существуют и определены однозначно, где $p = 1, \dots, n$. Эти утверждения выполнены и при более слабых предположениях на S_1 , но в дальнейшем встретятся более общие задачи Неймана на Y_1 . Гладкость S_1 существенна в доказательстве следующего известного (см., например, [2], [3]) утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть $V \in L^2(Y_1)^n$, $W \in H_P^{-1/2}(S_1)^n$ и $L \in L^2(Y_1)^{n \times n}$ удовлетворяют равенству $\int_{Y_1} V dy = \int_{S_1} W ds$. Тогда существует единственное решение $U \in (H_P^1(Y_1) \cap L^2(Y_1)/\mathbb{R})^n$ 1-периодической задачи Неймана

$$-\operatorname{div}_y (A_1 \nabla_y U) = V + \operatorname{div}_y L \text{ в } Y_1, \quad -\nu(A_1 \nabla_y U) = W + \nu L \text{ на } S_1,$$

удовлетворяющее неравенству

$$\|U\|_{L^2(Y_1)^n} + \|\nabla_y U\|_{L^2(Y_1)^{n \times n}} \leq C(\|V\|_{L^2(Y_1)^n} + \|W\|_{H_P^{-1/2}(S_1)^n} + \|L\|_{L^2(Y_1)^{n \times n}}).$$

В дальнейшем используется также аналогичное утверждение для задачи Неймана на Y_2 . Это утверждение формулируется несколько сложнее, поскольку в силу условий на Y_2 ядро и коядро такой задачи совпадают с $\tilde{n}$ -мерным линейным пространством $\mathfrak{H}$ жестких перемещений в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что базис в $\mathfrak{H}$ образуют векторы $e_1, \dots, e_{\tilde{n}}$, составляющие матрицу E_2 и удовлетворяющие условиям нормировки (1.17). Гладкость S_2 существенна в доказательстве следующего известного (см., например, [2], [3]) утверждения.

ЛЕММА 3. Пусть $V \in L^2(Y_2)^n$, $W \in H^{-1/2}(S_2)^n$ и $L \in L^2(Y_2)^{n \times n}$ удовлетворяют равенствам

$$-\int_{Y_2} (\nabla_y e_l, L) dy + \int_{Y_2} (e_l, V) dy = \int_{S_2} (e_l, W) ds \quad \text{для } l = 1, \dots, \tilde{n}. \quad (2.13)$$

Тогда существует единственное решение $U \in H^1(Y_2)^n \cap L^2(Y_2)^n / \mathfrak{R}$ задачи

$$-\operatorname{div}_y (A_2 \nabla_y U) = V + \operatorname{div}_y L \quad \text{в } Y_2, \quad -\nu(A_2 \nabla_y U) = W + \nu L \quad \text{на } S_2,$$

удовлетворяющее неравенству

$$\|U\|_{L^2(Y_2)^n} + \|\nabla_y U\|_{L^2(Y_2)^{n \times n}} \leq C (\|V\|_{L^2(Y_2)^n} + \|W\|_{H_P^{-1/2}(S_2)^n} + \|L\|_{L^2(Y_2)^{n \times n}}).$$

Отметим, что для $L = L^T$ первый интеграл в (2.13) равен нулю:

$$\int_{Y_2} (\nabla_y \Psi, L) dy = \int_{Y_2} (e_y(\Psi), L) dy = 0, \quad (2.14)$$

поскольку $e_y(\Psi) = 0$ для $\Psi \in \mathfrak{R}$. Поэтому из свойств симметрии (1.7) для тензора B_σ^ε и леммы 3 следует, что решения $N_{2b}^p \in (H^1(Y_2)^n \cap L^2(Y_2)^n / \mathfrak{R})^n$ второй задачи из (1.13) существуют и определены однозначно, где $p = 1, \dots, n$.

Известно [2], [3], что решения $P, Q_1 \in C^0([0, T]; H_P^1(Y)^{n \times n})$ и $Q_2 \in C^0([0, T]; H_P^1(Y)^{n \times \tilde{n}})$ задач (1.19) существуют и определены однозначно. С учетом неравенства Корна (см., например, [3]) доказательство следующего утверждения повторяет доказательство леммы 1.

ЛЕММА 4. Для решений задач (1.19) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|P_t'\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n})}^2 + \vartheta \|\nabla_y P\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n \times n})}^2 &\leq C, \\ \|Q_{1t}'\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n})}^2 + \vartheta \|\nabla_y Q_1\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n \times n})}^2 &\leq C, \\ \|Q_{2t}'\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times \tilde{n}})}^2 + \vartheta \|\nabla_y Q_2\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times \tilde{n} \times n})}^2 &\leq C, \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ϑ и T .

Асимптотические свойства решений задач (1.19) при больших и малых ϑ также используются в дальнейшем. Для точной формулировки соответствующих утверждений понадобятся некоторые дополнительные обозначения.

Определим $p, q_1 \in H_P^1(Y)^{n \times n}$ и $q_2 \in H_P^1(Y)^{n \times \tilde{n}}$ как 1-периодические решения задач Дирихле

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y p) &= r_0 E \quad \text{в } Y_0, \quad p = 0 \quad \text{на } \bar{Y}_{12}, \\ -\operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y q_s) &= m_0 E_s \quad \text{в } Y_0, \quad q_s = 0 \quad \text{на } \bar{Y}_{12}, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Далее, введем обозначения для первообразных по t от решений задач (1.19):

$$\dot{P} = \int_0^t P d\tau, \quad \dot{Q}_1 = \int_0^t Q_1 d\tau, \quad \dot{Q}_2 = \int_0^t Q_2 d\tau.$$

ЛЕММА 5. Пусть $\omega = 1/\vartheta$ является малым параметром в задачах (1.19). Тогда

$$\begin{aligned} & \|\dot{P} - \omega p\|_{L^2((0,T);L^2(Y_0)^{n \times n})} + \|\nabla_y(\dot{P} - \omega p)\|_{L^2((0,T);L^2(Y_0)^{n \times n \times n})} \leq C\omega^2(1+T), \\ & \|\dot{Q}_1 - \omega q_1\|_{L^2((0,T);L^2(Y_0)^{n \times n})} + \|\nabla_y(\dot{Q}_1 - \omega q_1)\|_{L^2((0,T);L^2(Y_0)^{n \times n \times n})} \leq C\omega^2(1+T), \\ & \|\dot{Q}_2 - \omega q_2\|_{L^2((0,T);L^2(Y_0)^{n \times \tilde{n}})} + \|\nabla_y(\dot{Q}_2 - \omega q_2)\|_{L^2((0,T);L^2(Y_0)^{n \times \tilde{n} \times n})} \leq C\omega^2(1+T), \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ω и T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, первую задачу из (1.19). Интегрируя по t уравнения этой задачи и учитывая (2.15), для $R = \dot{P} - \omega p$ получаем уравнения

$$\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y R) = \omega m_0 P'_t \text{ в } Y_0 \times (0, \infty), \quad R = 0 \text{ на } \bar{Y}_{12} \times (0, \infty). \quad (2.16)$$

Умножая эти уравнения на R и интегрируя по Y_0 , для всех $t \in [0, \infty)$ имеем

$$\|\nabla_y R\|_{L^2(Y_0)^{n \times n \times n}}^2 \leq \omega C \|P'_t\|_{L^2(Y)^{n \times n}} \|R\|_{L^2(Y)^{n \times n}} \leq \omega C \|\nabla_y R\|_{L^2(Y)^{n \times n \times n}},$$

где учтены лемма 4 и неравенство Фридрихса (см., например, [2]). Поэтому

$$\|R\|_{C^0([0,T];L^2(Y_0)^{n \times n})} \leq C\omega,$$

где постоянная C не зависит от ω и T . Аналогично, умножая уравнения из (2.16) на R и интегрируя по $Y_0 \times (0, T)$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{Y_0} (A_0 \nabla_y R, \nabla_y R) dy dt \\ &= \omega \int_{Y_0} (m_0 P(T), R(T)) dy - \omega \int_0^T \int_{Y_0} (m_0 P, R'_t) dy dt \\ &\leq \omega C \|P\|_{C^0([0,T];L^2(Y_0)^{n \times n})} \|R\|_{C^0([0,T];L^2(Y_0)^{n \times n})} + \omega C \int_0^T \|P\|_{L^2(Y_0)^{n \times n}}^2 dt \\ &\leq \omega^2 C + \omega C \int_0^T \|\nabla_y P\|_{L^2(Y_0)^{n \times n \times n}}^2 dt, \end{aligned}$$

поскольку $R'_t = P$. Теперь лемма 5 следует из леммы 4.

ЛЕММА 6. Пусть $\nabla_y(r_0/m_0) \in L^\infty(Y)$ и $\omega = \sqrt{\vartheta}$ является малым параметром в задачах (1.19). Тогда

$$\begin{aligned} & \left\| P'_t - \frac{r_0}{m_0} E \right\|_{C^0([0,T];L^2(Y_0)^{n \times n})} + \|Q'_{1t} - E_1\|_{C^0([0,T];L^2(Y_0)^{n \times n})} \\ & \quad + \|Q'_{2t} - E_2\|_{C^0([0,T];L^2(Y_0)^{n \times \tilde{n}})} \leq C\sqrt{\omega}(1+T), \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ω и T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, первую задачу из (1.19). Определим гладкую в Y_0 функцию η_ω , равную нулю при $\text{dist}(y, S_0) \leq \omega$ и единице при $\text{dist}(y, S_0) \geq 2\omega$, где $\text{dist}(y, S_0)$ обозначает расстояние от точки $y \in Y_0$ до границы $S_0 = \partial Y_0$. Для достаточно малых ω ($\leq \omega_0$ для некоторого положительного ω_0) такие функции существуют, $\omega |\nabla_y \eta_\omega| \leq C$ в Y_0 , и носители функций $\eta_\omega - 1$ и $\nabla_y \eta_\omega$ содержатся в приграничной полосе $Y_{2\omega} \subset Y_0$ ширины 2ω (см., например, [4]). Продолжим функцию η_ω нулем на Y_1 и Y_2 . Тогда из ограниченности множества Y и известной оценки $\text{mes}(Y_{2\omega}) \leq C\omega$ следуют неравенства

$$\|\eta_\omega - 1\|_{L^2(Y_0)}^2 \leq C\omega, \quad \|\nabla_y \eta_\omega\|_{L^2(Y_0)^n}^2 \leq \frac{C}{\omega}. \quad (2.17)$$

Пусть матричнозначная функция $P_\omega(t, y)$ является 1-периодическим решением начально-краевой задачи на Y_0 :

$$\begin{aligned} m_0(P_\omega)''_{tt} - \omega^2 \text{div}_y(A_0 \nabla_y P_\omega) &= 0 \text{ в } Y_0 \times (0, \infty), \\ P_\omega|_{t=0} &= 0 \text{ в } Y_0, \quad (P_\omega)'_t|_{t=0} = E_\omega \text{ в } Y_0, \quad P_\omega = 0 \text{ на } \bar{Y}_{12} \times (0, \infty), \end{aligned}$$

где $E_\omega = \eta_\omega(r_0/m_0)E$. Тогда, используя (2.17) и повторяя доказательство леммы 1, получаем

$$\|(P - P_\omega)'_t\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n})}^2 \leq C\|\eta_\omega - 1\|_{L^2(Y_0)}^2 \leq C\omega. \quad (2.18)$$

Определим $U_\omega = P_\omega - tE_\omega$. Тогда для U_ω имеем начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} m_0(U_\omega)''_{tt} - \omega^2 \text{div}_y(A_0 \nabla_y U_\omega) &= \omega^2 t \text{div}_y(A_0 \nabla_y E_\omega) \text{ в } Y_0 \times (0, \infty), \\ U_\omega|_{t=0} &= 0 \text{ в } Y_0, \quad (U_\omega)'_t|_{t=0} = 0 \text{ в } Y_0, \quad U_\omega = 0 \text{ на } \bar{Y}_{12} \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Следовательно, используя (2.17) и условия леммы, получаем

$$\begin{aligned} \|(P_\omega)'_t - E_\omega\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n})}^2 &= \|(U_\omega)'_t\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n})}^2 \\ &\leq \omega^2 C \|t \nabla_y E_\omega\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n \times n})}^2 + \omega^2 C \|\nabla_y E_\omega\|_{L^1(0, T; L^2(Y)^{n \times n \times n})}^2 \\ &\leq \omega C(T^2 + T) \end{aligned}$$

(см. доказательство леммы 1 для $g = t \nabla_y E_\omega$).

Таким образом, учитывая (2.17), (2.18) и неравенство треугольника, имеем

$$\begin{aligned} \|P'_t - (r_0/m_0)E\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n})} &\leq \|(P - P_\omega)'_t\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n})} \\ &\quad + \|(P_\omega)'_t - E_\omega\|_{C^0([0, T]; L^2(Y)^{n \times n})} + \|E_\omega - (r_0/m_0)E\|_{C^0([0, T]; L^2(Y_0)^{n \times n})} \\ &\leq C\sqrt{\omega}(1 + \sqrt{T^2 + T}) \leq C\sqrt{\omega}(1 + T), \end{aligned}$$

что доказывает лемму 6.

Напомним, что свертка по t от гладких функций $P(t, x)$ и $v(t, x)$ определяется равенствами

$$(P * v)(t) = \int_0^t P(t - \tau)v(\tau) d\tau = \int_0^t P(\tau)v(t - \tau) d\tau \quad (2.19)$$

и выполняются формулы дифференцирования

$$(P * v)'_t = (P|_{t=0})v + (P'_t) * v = P(v|_{t=0}) + P * (v'_t). \quad (2.20)$$

Это определение можно продолжить достаточно стандартным образом на более общие классы функций и распределений (см., например, [15]).

ЛЕММА 7. Пусть $P \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ и $v \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$. Тогда $P * v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Кроме того, $P * v \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, если $v'_t \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\begin{aligned} \|(P * v)(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \int_0^t \|P(t - \tau)v(\tau)\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\ &\leq \int_0^t \|P(t - \tau)\|_{L^2(\Omega)} \|v(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} d\tau \\ &\leq \|P\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|v\|_{L^2(0, T; L^\infty(\Omega))}, \end{aligned}$$

что доказывает первую часть леммы 7. В соответствии со вторым равенством из (2.20) имеем $(P * v)'_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, если $v'_t \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$. Тогда лемма 7 следует из теоремы “вложения” (см., например, [14; гл. 3, лемма 1.2]).

ЛЕММА 8. Пусть $P \in L^1(0, T)$ и $v \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Тогда $P * v \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ с $\|h\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = 1$ и продолжим P, v, h нулем при $t \in \mathbb{R} \setminus [0, T]$. Тогда, используя теорему Фубини и инвариантность нормы в пространстве $L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ относительно сдвигов по t , получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} (P * v)(t) h(t) dx dt \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t |P(\tau)| |v(t - \tau)| |h(t)| d\tau dx dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |P(\tau)| \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t - \tau)| |h(t)| dt dx d\tau \\ &\leq \int_0^T |P(\tau)| d\tau \|v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Супремум по h от левой части этого неравенства задает норму в пространстве $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, что доказывает лемму 8.

Фиксируем $\gamma > 0$ и определим пространство $L^2_\gamma(0, \infty; L^2(\Omega))$ как множество функций из $L^2_{\text{loc}}(0, \infty; L^2(\Omega))$, для которых конечна величина

$$\|u\|_{L^2_\gamma(0, \infty; L^2(\Omega))} = \|e^{-\gamma t} u\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))}.$$

Последнее равенство определяет норму в пространстве $L^2_\gamma(0, \infty; L^2(\Omega))$, относительно которой это пространство является полным (см., например, [16]).

Следуя [16], определим пространство $E_\gamma(L^2(\Omega))$ как множество функций $U(\rho) = U(\rho_1 + i\rho_2)$ со значениями в $L^2(\Omega)$, заданных и голоморфных в комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_\gamma = \{\rho \in \mathbb{C} : \rho = \rho_1 + i\rho_2, \rho_1 > \gamma\}$, для которых конечна величина

$$\|U(\rho)\|_{E_\gamma(L^2(\Omega))}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|U(\gamma + i\rho_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\rho_2,$$

где интеграл определяется как предел в среднем интеграла от K до $-K$ при $K \rightarrow \infty$. Последнее равенство определяет норму в пространстве $E_\gamma(L^2(\Omega))$. Следующий вариант теоремы Пэли–Винера доказан в [16].

ТЕОРЕМА 9. *Преобразование Лапласа*

$$\widehat{u(t)} = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(t) dt = U(\rho)$$

отображает пространство $L_\gamma^2(0, \infty; L^2(\Omega))$ на пространство $E_\gamma(L^2(\Omega))$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Аналогично определяются пространства $E_\gamma(H_0^1(\Omega))$ и $E_\gamma(L^2(Y))$, для которых также выполнен аналог теоремы 9. Кроме того [16], преобразование Лапласа коммутирует с дифференцированиями по пространственным переменным и оператор свертки по t переводится преобразованием Лапласа в оператор поточечного умножения.

ЛЕММА 10. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует единственное достаточно гладкое решение начально-краевой задачи (1.21), причем константы в оценках соответствующих норм не зависят от ϑ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала более простой случай $Y_2 = \emptyset$. Тогда в соответствии с замечанием 3 задача (1.21) принимает вид

$$\begin{aligned} M_1 v_{tt}'' - M_1^* (v_{tt}'') - \operatorname{div}(\widehat{A}_1 \nabla v) &= R_1 f - R_1^0 * f + \operatorname{div}(\widehat{B}_1 g) \text{ в } \Omega \times (0, \infty), \\ v|_{t=0} &= 0 \text{ в } \Omega, \quad v_t'|_{t=0} = 0 \text{ в } \Omega, \quad v = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, \infty), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $v = v_1$, $v_2 = 0$, использованы обозначения (1.12), (1.14), (1.20) и финитные по t функции f, g продолжены нулем при $t \notin (0, T)$.

Для доказательства существования и единственности решения в подходящих пространствах, как обычно, наиболее существенный момент — это априорные оценки (см., например, [2], [3]). В соответствии с теоремой 9 эти оценки можно попытаться доказать для преобразования Лапласа от решения задачи (2.21). Введем обозначения $V = \widehat{v}$, $F = \widehat{f}$, $G = \widehat{g}$ для преобразований Лапласа от функций v, f и g из (2.21). Тогда, применяя преобразование Лапласа к (2.21), получаем краевую задачу для V с комплексным параметром ρ :

$$\rho^2 M V - \rho^2 m V - \operatorname{div}(A \nabla V) = R F - r F + \operatorname{div}(B G) \text{ в } \Omega, \quad V = 0 \text{ на } \partial\Omega \quad (2.22)$$

(см., например, [16], [17]), где использованы обозначения

$$\begin{aligned} m &= \widehat{M}_1^1 = \rho^2 \langle m_0 E^T q \rangle_0 - \langle m_0 E^T (Q'_{1t})|_{t=0} \rangle_0 = \rho^2 \langle m_0 E^T q \rangle_0 - \langle m_0 E^T E \rangle_0, \\ r &= \widehat{R}_1^0 = \rho^2 \langle m_0 E^T p \rangle_0 - \langle r_0 E^T E \rangle_0, \\ p &= \widehat{P}, \quad q = \widehat{Q}_1, \quad E = E_1, \quad M = M_1, \quad A = \widehat{A}_1, \quad B = \widehat{B}_1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Отметим, что в силу леммы 4 функции $q(\rho), p(\rho)$ и поэтому $m(\rho), r(\rho)$ определены и являются голоморфными функциями на $\mathbb{C}_0$ со значениями в соответствующих пространствах (см., например, [17; гл. 6]). Из (1.19) получаем для $p(\rho)$ краевую задачу

$$m_0 \rho^2 p - \vartheta \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y p) = r_0 E \text{ в } Y_0, \quad p = 0 \text{ на } \overline{Y}_{12}. \quad (2.24)$$

Умножая скалярно в $\mathbb{C}^{n \times n}$ первое уравнение этой задачи на матрицу $\bar{\rho}\bar{p}$ (с компонентами, комплексно сопряженными к компонентам матрицы ρp) и интегрируя полученное соотношение по Y_0 , имеем

$$\rho \langle (m_0 \rho p, \bar{\rho}\bar{p}) \rangle_0 + \vartheta \bar{p} \langle (A_0 \nabla_y p, \nabla_y \bar{p}) \rangle_0 = \langle (r_0 E, \bar{\rho}\bar{p}) \rangle_0. \quad (2.25)$$

Далее, рассмотрим уравнение, комплексно сопряженное к первому уравнению из (2.24). Умножая это уравнение на ρp и интегрируя по Y_0 , получаем

$$\bar{p} \langle (m_0 \bar{\rho}\bar{p}, \rho p) \rangle_0 + \vartheta \rho \langle (A_0 \nabla_y \bar{p}, \nabla_y p) \rangle_0 = \langle (r_0 E, \rho p) \rangle_0. \quad (2.26)$$

Учитывая свойства симметрии (1.7) тензора A_0 , сложим соотношения (2.25) и (2.26). Тогда $\rho_1 \langle (m_0 \rho p, \bar{\rho}\bar{p}) \rangle_0 + \vartheta \rho_1 \langle (A_0 \nabla_y p, \nabla_y \bar{p}) \rangle_0 = \operatorname{Re} \langle (r_0 E, \bar{\rho}\bar{p}) \rangle_0$, где по определению $\operatorname{Re} a = (a + \bar{a})/2$, и поэтому $|\operatorname{Re} a| \leq (|a| + |\bar{a}|)/2 = |a|$ для $a \in \mathbb{C}$. Следовательно, для всех $\rho = \rho_1 + i\rho_2$ с $\rho_1 \geq 1$ имеем неравенство

$$\|\rho p\|_{L^2(Y_0)^{n \times n}}^2 \leq \frac{1}{\alpha} |\operatorname{Re} \langle (r_0 E, \bar{\rho}\bar{p}) \rangle_0| \leq \frac{1}{\alpha} \|r_0 E\|_{L^2(Y_0)^{n \times n}} \|\rho p\|_{L^2(Y_0)^{n \times n}}.$$

Таким образом, используя обозначения (2.23), заключаем, что

$$|r| \leq |\langle r_0 E^T E \rangle_0| + |\rho| |\langle m_0 E^T \rho p \rangle_0| \leq C(1 + |\rho|), \quad (2.27)$$

где постоянная C не зависит от ϑ и $\rho \in \mathbb{C}_1$.

В соответствии с (1.19) краевая задача для $q(\rho)$ имеет вид

$$m_0 \rho^2 q - \vartheta \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y q) = m_0 E \text{ в } Y_0, \quad q = 0 \text{ на } \bar{Y}_{12}.$$

Умножая матрично в $\mathbb{C}^{n \times n}$ первое уравнение этой задачи на $\bar{\rho}^2 \bar{q}^T$ и интегрируя по Y_0 , имеем $\langle m_0 \bar{\rho}^2 \bar{q}^T (\rho^2 q - E) \rangle_0 + \vartheta \bar{p} \langle (\nabla_y (\bar{\rho}\bar{q})^T A_0 \nabla_y q) \rangle_0 = 0$. Учтем это соотношение в равенстве $\langle m_0 (-E^T) (\rho^2 q - E) \rangle_0 = -m$. Тогда

$$-\rho m = \rho \langle m_0 (\bar{\rho}^2 \bar{q} - E)^T (\rho^2 q - E) \rangle_0 + \vartheta \bar{p} \langle (\nabla_y (\bar{\rho}\bar{q})^T A_0 \nabla_y \rho q) \rangle_0.$$

Непосредственно из этого равенства следует, что симметричная матрица

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(-\rho m) &= -\frac{1}{2}(\rho m + \overline{\rho m}^T) \\ &= \rho_1 \langle m_0 (\bar{\rho}^2 \bar{q} - E)^T (\rho^2 q - E) \rangle_0 + \vartheta \rho_1 \langle (\nabla_y (\bar{\rho}\bar{q})^T A_0 (\nabla_y \rho q)) \rangle_0 \end{aligned}$$

неотрицательно определена. Действительно, для $\rho \in \mathbb{C}_0$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^T \operatorname{Re}(-\rho m) \xi &= \rho_1 \langle m_0 ((\bar{\rho}^2 \bar{q} - E) \bar{\xi})^T ((\rho^2 q - E) \xi) \rangle_0 \\ &\quad + \vartheta \rho_1 \langle \nabla_y (\bar{\rho}\bar{q} \bar{\xi})^T A_0 \nabla_y (\rho q \xi) \rangle_0 \\ &\geq \alpha \rho_1 \|(\rho^2 q - E) \xi\|_{L^2(Y_0)^n}^2 + \alpha \vartheta \rho_1 \|\nabla_y (\rho q \xi)\|_{L^2(Y_0)^{n \times n}}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Умножим скалярно в $\mathbb{C}^n$ первое уравнение из (2.22) на $\bar{\rho}\bar{V}$ и проинтегрируем полученное соотношение по Ω . Тогда

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} (M \rho V, \bar{\rho}\bar{V}) dx + \int_{\Omega} ((-\rho m) \rho V, \bar{\rho}\bar{V}) dx + \bar{\rho} \int_{\Omega} (A \nabla V, \nabla \bar{V}) dx \\ = \int_{\Omega} (F_0, \bar{\rho}\bar{V}) dx - \int_{\Omega} (r F, \bar{\rho}\bar{V}) dx, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $F_0 = RF + \operatorname{div}(BG)$. Далее, рассмотрим уравнение, комплексно сопряженное к первому уравнению из (2.22). Умножая это уравнение на ρV , интегрируя по Ω и складывая полученное соотношение с (2.29), имеем

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_{\Omega} (M\rho V, \bar{\rho}\bar{V}) dx + \int_{\Omega} (\operatorname{Re}(-\rho m)\rho V, \bar{\rho}\bar{V}) dx + \rho_1 \int_{\Omega} (A\nabla V, \nabla\bar{V}) dx \\ = \operatorname{Re} \int_{\Omega} (F_0, \bar{\rho}\bar{V}) dx - \operatorname{Re} \int_{\Omega} (rF, \bar{\rho}\bar{V}) dx. \end{aligned}$$

Тогда из неравенства (2.28) следует, что

$$\int_{\Omega} (M\rho V, \bar{\rho}\bar{V}) dx + \int_{\Omega} (A\nabla V, \nabla\bar{V}) dx \leq (\|F_0\|_{L^2(\Omega)^n} + \|rF\|_{L^2(\Omega)^n}) \|\rho V\|_{L^2(\Omega)^n}$$

для всех $\rho = \rho_1 + i\rho_2$ с $\rho_1 \geq 1$. Поэтому, используя δ -неравенство, (1.7), (2.27) и неравенство Корна, получаем

$$\begin{aligned} \|\rho V\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\nabla V\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 &\leq C(\|F_0\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|rF\|_{L^2(\Omega)^n}^2) \\ &\leq C(\|F_0\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|F\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\rho F\|_{L^2(\Omega)^n}^2), \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ϑ и $\rho \in \mathbb{C}_1$. Кроме того, умножая это неравенство на $|\rho|^{2s}$ для $s = 0, 1, \dots$, имеем априорную оценку

$$\begin{aligned} \|\rho^{s+1}V\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\rho^s\nabla V\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 \\ \leq C(\|\rho^s F_0\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\rho^s F\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\rho^{s+1}F\|_{L^2(\Omega)^n}^2), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где постоянная C не зависит от ϑ , s и $\rho \in \mathbb{C}_1$.

Из неравенства (2.30) следует, что для каждого $\rho \in \mathbb{C}_1$ решение задачи (2.22) существует и определено однозначно, поскольку система уравнений этой задачи является эллиптической системой уравнений с комплексными коэффициентами (см., например, [2]). Это решение является непрерывной функцией на $\mathbb{C}_1$ со значениями в $H_0^1(\Omega)^n$. Действительно, фиксируем несовпадающие ρ и ρ_0 из $\mathbb{C}_1$. Тогда $V_0 = V(\rho) - V(\rho_0)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \rho^2 M V_0 - \rho^2 m V_0 - \operatorname{div}(A\nabla V_0) &= \mathbb{F}(\rho) - \mathbb{F}(\rho_0) + (\mathbb{M}(\rho) - \mathbb{M}(\rho_0))V(\rho_0) \text{ в } \Omega, \\ V_0 &= 0 \text{ на } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $\mathbb{F} = F_0 - rF$ и $\mathbb{M} = \rho^2 M - m\rho^2$ являются голоморфными (и потому непрерывными) функциями на $\mathbb{C}_0$ со значениями в соответствующих пространствах. Следовательно, используя неравенство (2.30), имеем

$$\|V(\rho) - V(\rho_0)\|_{H_0^1(\Omega)^n} \rightarrow 0 \text{ при } \rho_0 \rightarrow \rho, \quad (2.32)$$

что доказывает непрерывность решения задачи (2.22).

Продифференцируем формально (2.22) по ρ и рассмотрим краевую задачу

$$\rho^2 M V_1 - \rho^2 m V_1 - \operatorname{div}(A\nabla V_1) = \mathbb{F}'_{\rho} + \mathbb{M}'_{\rho} V \text{ в } \Omega, \quad V_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (2.33)$$

В силу уже доказанных результатов решение этой задачи существует, непрерывно зависит от $\rho \in \mathbb{C}_1$ и удовлетворяет неравенству, аналогичному (2.30).

Разделим уравнения (2.31) на $\rho - \rho_0$ и вычтем из полученных соотношений уравнения (2.33). Тогда $V_2 = (V(\rho) - V(\rho_0))/(\rho - \rho_0) - V_1$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \rho^2 M V_2 - \rho^2 m V_2 - \operatorname{div}(A \nabla V_2) &= \mathbb{F}_\Delta - \mathbb{F}'_\rho + \mathbb{M}_\Delta V_0 + (\mathbb{M}_\Delta - \mathbb{M}'_\rho) V \text{ в } \Omega, \\ V_2 &= 0 \text{ на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

где $\mathbb{F}_\Delta = (\mathbb{F}(\rho) - \mathbb{F}(\rho_0))/(\rho - \rho_0)$ и $\mathbb{M}_\Delta = (\mathbb{M}(\rho) - \mathbb{M}(\rho_0))/(\rho - \rho_0)$. Следовательно, используя неравенство (2.30) и (2.32), имеем

$$\left\| \frac{V(\rho) - V(\rho_0)}{\rho - \rho_0} - V_1 \right\|_{H_0^1(\Omega)^n} \rightarrow 0 \text{ при } \rho_0 \rightarrow \rho.$$

Таким образом, решение задачи (2.22) является голоморфной функцией на $\mathbb{C}_1$ со значениями в $H_0^1(\Omega)^n$.

Из неравенства (2.30) и теоремы 9 следует, что

$$\begin{aligned} &\|v_t^{(s+1)}\|_{L_1^2(0, \infty; L^2(\Omega)^n)}^2 + \|\nabla v_t^{(s)}\|_{L_1^2(0, \infty; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \\ &\leq C(\|f_t^{(s+1)}\|_{L_1^2(0, \infty; L^2(\Omega)^n)}^2 + \|f_t^{(s)}\|_{L_1^2(0, \infty; L^2(\Omega)^n)}^2 + \|\nabla g_t^{(s)}\|_{L_1^2(0, \infty; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2), \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ϑ и $s = 0, 1, \dots$. Весовая функция e^{-t} из определения пространства $L_1^2(0, \infty; L^2(\Omega)^n)$ отделена от нуля на конечном интервале $(0, T)$ и поэтому

$$\begin{aligned} &\|v\|_{H^{s+1}(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \|v\|_{H^s(0, T; H_0^1(\Omega)^n)}^2 \\ &\leq C(\|f\|_{H^{s+1}(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \|g\|_{H^s(0, T; H^1(\Omega)^n)}^2), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где постоянная C не зависит от ϑ , но зависит от T .

Перепишем (2.21) в виде “эллиптической” краевой задачи

$$-\operatorname{div}(\hat{A}_1 \nabla v) = U \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad v = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T). \quad (2.35)$$

Из теоремы 9, неравенств (2.30), (2.27) для $r(\rho)$ и $m(\rho)$ следует, что $U \in H^{s-2}(0, T; L^2(\Omega)^n) \cap H^{s-3}(0, T; H_0^1(\Omega)^n)$. Здесь целое s достаточно велико и оценки соответствующих норм не зависят от ϑ . Поэтому для решения задачи (2.35) имеем $v \in H^{s-2}(0, T; H^2(\Omega)^n) \cap H^{s-3}(0, T; H^3(\Omega)^n)$ в силу эллиптической регулярности (см., например, [2]). Продолжая по индукции, получаем $v \in H^s(0, T; H^s(\Omega)^n)$, что доказывает лемму 10 для задачи (2.21).

В случае $Y_1 = \emptyset$ задача (1.21) также принимает вид (2.21), где $v = v_2$, $v_1 = 0$, $\hat{A}_1 = 0$, $\hat{B}_1 = \tilde{B}_2$ и в остальных обозначениях следует заменить единицу на 2. Поэтому, повторяя проведенное доказательство, в этом случае заключаем, что решение задачи (2.21) существует и

$$\|v\|_{H^{s+1}(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 \leq C(\|f\|_{H^{s+1}(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \|g\|_{H^s(0, T; H^1(\Omega)^n)}^2),$$

где постоянная C не зависит от ϑ . Кроме того, гладкость по x решения задачи (2.21) эквивалентна гладкости по x правой части этой задачи, что доказывает лемму 10 в рассматриваемом случае.

Для доказательства леммы 10 в общем случае введем обозначения

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} M_1^1 & M_2^1 \\ M_1^2 & M_2^2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_0 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \quad R_0 = \begin{pmatrix} R_1^0 \\ R_2^0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из определений следует, что симметричная матрица a_0 неотрицательно определена. Действительно, для $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\tilde{n}}$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^T a_0 \xi &= \bar{\xi}_1^T a_1^1 \xi_1 + \bar{\xi}_1^T a_2^1 \xi_2 + \bar{\xi}_2^T a_1^2 \xi_1 + \bar{\xi}_2^T a_2^2 \xi_2 \\ &= \vartheta \langle \nabla_y (E_1 \bar{\xi}_1 + E_2 \bar{\xi}_2)^T A_0 \nabla_y (E_1 \xi_1 + E_2 \xi_2) \rangle_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Аналогично доказывается неравенство (2.28) для $m = \widehat{M}_0$. Следовательно, применяя преобразование Лапласа к задаче (1.21), получим для $V = \widehat{v}$ краевую задачу вида (2.22) с дополнительным слагаемым $a_0 V$, но это слагаемое несущественно в априорных оценках в силу неравенства (2.36). Таким образом, комбинирование доказательств уже рассмотренных случаев завершает доказательство леммы 10.

На самом деле в §§ 4–10 используется только гладкость конечного порядка решений осредненных задач (1.15), (1.21), и (1.22):

$$\partial_t^{\varkappa} \partial_{x_1}^{\varkappa_1} \dots \partial_{x_n}^{\varkappa_n} v_0 \in C^0([0, T]; L^\infty(\Omega)) \quad \text{для} \quad \varkappa + \varkappa_1 + \dots + \varkappa_n \leq 4, \quad (2.37)$$

где через $\partial_t, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$ обозначены соответствующие частные производные и v_0 обозначает компоненты соответствующих решений. Достаточные для выполнения (2.37) условия на исходные данные для задач (1.15) и (1.22) можно вывести из результатов работ [3] и [6], а для задачи (1.21) эти условия выводятся из доказательства леммы 10 и теорем вложений. Но мы не будем останавливаться на формулировке этих громоздких предположений на f, g, w_0, w_1 и Ω .

§ 3. Построение начальных членов асимптотики

Алгоритм построения асимптотики решений общих эллиптических краевых задач с быстроосциллирующими коэффициентами подробно описан в работе [8]. После применения преобразования Лапласа к (1.4) эта задача перейдет в эллиптическую краевую задачу с комплексным параметром. Поэтому для построения начальных членов асимптотики решений этой задачи можно воспользоваться алгоритмом из [8]. Для упрощения построений удобно рассматривать задачу (1.4) как начально-краевую задачу с условиями сопряжения.

В соответствии с определениями из § 1 область Ω составлена из трех множеств $\Omega_0^\varepsilon, \Omega_1^\varepsilon$ и Ω_2^ε , разделенных общими границами:

$$S_0^\varepsilon \equiv \partial\Omega_0^\varepsilon \setminus \partial\Omega, \quad S_1^\varepsilon \equiv \partial\Omega_1^\varepsilon \setminus \partial\Omega, \quad S_2^\varepsilon \equiv \partial\Omega_2^\varepsilon \setminus \partial\Omega, \quad S_0^\varepsilon = S_1^\varepsilon \cup S_2^\varepsilon. \quad (3.1)$$

Поэтому [2], [4] задачу (1.4) можно переписать как начально-краевую задачу с условиями сопряжения:

$$\begin{aligned}
 m_{0\varepsilon} u''_{tt} - \sigma \operatorname{div}(A_{0\varepsilon} \nabla u + B_{0\varepsilon} g) &= r_{0\varepsilon} f \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon \times (0, T), \\
 m_{1\varepsilon} u''_{tt} - \operatorname{div}(A_{1\varepsilon} \nabla u + B_{1\varepsilon} g) &= r_{1\varepsilon} f \quad \text{в } \Omega_1^\varepsilon \times (0, T), \\
 m_{2\varepsilon} u''_{tt} - \operatorname{div}(A_{2\varepsilon} \nabla u + B_{2\varepsilon} g) &= r_{2\varepsilon} f \quad \text{в } \Omega_2^\varepsilon \times (0, T), \\
 u|_{t=0} &= w_0 \text{ в } \Omega, \quad u'_t|_{t=0} = w_1 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T), \\
 \nu_\varepsilon (A_{1\varepsilon} \nabla u + B_{1\varepsilon} g) &= \sigma \nu_\varepsilon (A_{0\varepsilon} \nabla u + B_{0\varepsilon} g) \text{ на } S_1^\varepsilon \times (0, T), \\
 \nu_\varepsilon (A_{2\varepsilon} \nabla u + B_{2\varepsilon} g) &= \sigma \nu_\varepsilon (A_{0\varepsilon} \nabla u + B_{0\varepsilon} g) \text{ на } S_2^\varepsilon \times (0, T)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

и $u \in H_0^1(\Omega)^n$ для всех $t \in [0, T]$, где $m_{0\varepsilon} = m_0(x/\varepsilon), \dots$. Последние два равенства в (3.2) означают непрерывность вектора нормальных напряжений на внутренних границах (поверхностях контакта рассматриваемых сред). В этих равенствах для $s = 0, 1, 2$ след $\nu_\varepsilon(A_{s\varepsilon} \nabla u + B_{s\varepsilon} g)$ в точке $x_0 \in S_s^\varepsilon$ определяется как предельное значение при $x \rightarrow x_0$ вектор-функций $\nu_\varepsilon(A_{s\varepsilon} \nabla u + B_{s\varepsilon} g)$ в точках $x \in \Omega_s^\varepsilon$. Здесь ν_ε — внутренняя (внешняя) нормаль для $S_0^\varepsilon (S_1^\varepsilon \cup S_2^\varepsilon)$.

Следует отметить, что переход от задачи (1.4) к задаче (3.2) корректен, например, если компоненты тензоров A_0, A_1 и A_2 являются постоянными или гладкими функциями. В общем случае формулировку задачи (3.2) следует уточнить, но произведенный переход и дальнейшие манипуляции этого параграфа можно рассматривать как формальные соображения, приводящие к построению начальных членов асимптотики решения задачи (1.4). В дальнейших параграфах для построенной здесь асимптотики доказываются оценки точности из теорем 1–8, в формулировках которых подразумевается, что задача (1.4) определяется в вариационной форме (1.10).

Введем обозначения $U = \hat{u}, F = \hat{f}, G = \hat{g}$ для преобразований Лапласа от функций u, f и g из (3.2). Тогда, применяя преобразование Лапласа к (3.2), получаем для $U \in H_0^1(\Omega)^n$ краевую задачу с условиями сопряжения и комплексным параметром ρ :

$$\begin{aligned}
 \rho^2 m_{0\varepsilon} U - \sigma \operatorname{div}(A_{0\varepsilon} \nabla U + B_{0\varepsilon} G) &= m_{0\varepsilon} (\rho w_0 + w_1) + r_{0\varepsilon} F \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon, \\
 \rho^2 m_{s\varepsilon} U - \operatorname{div}(A_{s\varepsilon} \nabla U + B_{s\varepsilon} G) &= m_{s\varepsilon} (\rho w_0 + w_1) + r_{s\varepsilon} F \quad \text{в } \Omega_s^\varepsilon, \\
 \nu_\varepsilon (A_{s\varepsilon} \nabla U + B_{s\varepsilon} G) &= \sigma \nu_\varepsilon (A_{0\varepsilon} \nabla U + B_{0\varepsilon} G) \quad \text{на } S_s^\varepsilon, \quad s = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

В соответствии с [8] для построения асимптотики решения задачи (3.3) прежде всего следует описать ядро (нуль-пространство) оператора старшего порядка этой задачи, рассматриваемого на 1-периодических вектор-функциях при $\varepsilon = 1$. Это ядро образуют столбцы матричнозначных функций $E_1(y)$ и $E_2(y)$, удовлетворяющих (1.16) и (1.18), что проверяется непосредственной подстановкой. Поэтому [8] с вектор-функции

$$E_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V_1(x) + E_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V_2(x) \tag{3.4}$$

начинается асимптотическое разложение решения задачи (3.3), где $V_1 = (v_1^1, \dots, v_n^1)^T$ и $V_2 = (v_1^2, \dots, v_n^2)^T$ пока не определены. Кроме того, к вектор-функции (3.4) полезно добавить неизвестную вектор-функцию $V_0(x/\varepsilon, x)$ с носителем на Ω_0^ε , поскольку заранее не определено, какой из операторов имеет старший порядок в первом уравнении из (3.3). Здесь и далее запись $V_0(x/\varepsilon, x)$ означает, что $V_0(y, x)$ является 1-периодической функцией от y со значениями в подходящих пространствах.

Таким образом, начальные члены асимптотического разложения решений задачи (3.3) можно попытаться искать в виде

$$U_a = E_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V_1(x) + E_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V_2(x) + V_0\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) + \varepsilon U_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) + \varepsilon U_2\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) + \varepsilon^2 W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) + \varepsilon^2 W_2\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right), \quad (3.5)$$

где по определению $V_0 = 0$ на Ω_{12}^ε , $E_1 V_1, U_1, W_1 = 0$ на Ω_2^ε и $E_2 V_2, U_2, W_2 = 0$ на Ω_1^ε . Следующие две известные формулы для функций вида $V(x/\varepsilon, x)$, зависящих от ε специальным образом, часто используются в дальнейшем

$$\begin{aligned} \nabla\left(V\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)\right) &= (\varepsilon^{-1} \nabla_y V(y, x) + \nabla_x V(y, x))\big|_{y=x/\varepsilon}, \\ \operatorname{div}\left(V\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)\right) &= (\varepsilon^{-1} \operatorname{div}_y V(y, x) + \operatorname{div}_x V(y, x))\big|_{y=x/\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставим равенство (3.5) вместо U во второе уравнение из (3.3) при $s = 2$. Тогда, учитывая (3.6) и сохраняя только существенные для дальнейшего слагаемые, имеем

$$\begin{aligned} &\rho^2 m_2 E_2 V_2 - \varepsilon^{-2} \operatorname{div}_y (A_2 \nabla_y (E_2 V_2)) - \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_x (A_2 \nabla_y (E_2 V_2)) \\ &\quad - \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_y (A_2 \nabla_x (E_2 V_2) + B_2 G) - \operatorname{div}_x (A_2 \nabla_x (E_2 V_2) + B_2 G) \\ &\quad - \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_y (A_2 \nabla_y U_2) - \operatorname{div}_x (A_2 \nabla_y U_2) - \operatorname{div}_y (A_2 \nabla_x U_2) \\ &\quad - \operatorname{div}_y (A_2 \nabla_y W_2) = m_2 (\rho w_0 + w_1) + r_2 F \quad \text{при } y = x/\varepsilon \text{ и } x \in \Omega_2^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Вектор-функция $E_2(y)V_2(x)$ является суммой столбцов матрицы $E_2(y)$, умноженных на компоненты вектора $V_2(x)$. Поэтому $A_2 \nabla_y (E_2 V_2) = A_2 e_y (E_2 V_2) = 0$ в силу определений (см. (2.2) и (2.14)). Таким образом, еще два слагаемых в (3.7) являются несущественными.

1. Пусть выполнено условие (1.2). Тогда разность $\vartheta - \sigma/\varepsilon^2$ можно считать малым параметром. Подставляя равенство (3.5) вместо U в условия сопряжения из (3.3) при $s = 2$, имеем

$$\begin{aligned} &\nu_\varepsilon (A_2 \nabla_x (E_2 V_2) + B_2 G + A_2 \nabla_y U_2 + \varepsilon A_2 \nabla_x U_2 + \varepsilon A_2 \nabla_y W_2) \\ &\quad = \nu_\varepsilon \left(\varepsilon \vartheta A_0 \nabla_y V_0 + \varepsilon \vartheta A_0 \nabla_y (E_1 V_1) + \varepsilon \vartheta A_0 \nabla_y (E_2 V_2) \right. \\ &\quad \quad \left. - \varepsilon \left(\vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) (A_0 \nabla_y V_0 + \dots) \right) \quad \text{при } y = x/\varepsilon \text{ и } x \in S_2^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Приравнявая коэффициенты при ε^{-1} в (3.7) и при ε^0 в (3.8), получаем

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y (A_2 \nabla_y U_2) &= \operatorname{div}_y (A_2 E_2 \nabla_x V_2 + B_2 G) \quad \text{при } y = x/\varepsilon \text{ и } x \in \Omega_2^\varepsilon, \\ -\nu_\varepsilon (A_2 \nabla_y U_2) &= \nu_\varepsilon (A_2 E_2 \nabla_x V_2 + B_2 G) \quad \text{при } y = x/\varepsilon \text{ и } x \in S_2^\varepsilon. \end{aligned}$$

Эти равенства будут выполнены, если выбрать $U_2 = N_{2a}(y) \nabla_x V_2(x) + N_{2b}(y) G(x)$ и определить $N_{2a}(y), N_{2b}(y)$ как 1-периодические решения задач

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y (A_2 \nabla_y N_{2a}) &= \operatorname{div}_y (A_2 E_2) \text{ в } Y_2, \quad -\nu (A_2 \nabla_y N_{2a}) = \nu (A_2 E_2) \text{ на } S_2, \\ -\operatorname{div}_y (A_2 \nabla_y N_{2b}) &= \operatorname{div}_y B_2 \text{ в } Y_2, \quad -\nu (A_2 \nabla_y N_{2b}) = \nu B_2 \text{ на } S_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В координатной записи вторая из этих задач выписана в (1.13), а первая имеет вид: $(n \times \tilde{n})$ -матричнозначные функции $N_{2a}^p(y)$, $p = 1, \dots, n$, являются 1-периодическими решениями задач Неймана на Y_2 :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_h} \left(A_2^{hk} \frac{\partial}{\partial y_k} N_{2a}^p \right) &= \frac{\partial}{\partial y_h} (A_2^{hp} E_2) \quad \text{в } Y_2, \\ -\nu_h \left(A_2^{hk} \frac{\partial}{\partial y_k} N_{2a}^p \right) &= \nu_h (A_2^{hp} E_2) \quad \text{на } S_2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В соответствии с леммой 3 решения задач (3.9) однозначно определены и имеют компоненты из $H_P^1(Y_2)$. (Неявно здесь использовано равенство, аналогичное (2.14), которое следует из свойств симметрии (1.7).) Поэтому определены следы на S_2 этих компонент как элементы $H_P^{1/2}(S_2)$. Продолжим N_{2a} и N_{2b} на $Y_0 \cup Y_1$ как 1-периодические решения задач Дирихле

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y N_{2a}) &= 0 \quad \text{в } Y_0, \quad N_{2a} = 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1, \quad N_{2a} = N_{2a} \quad \text{на } \bar{Y}_2, \\ \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y N_{2b}) &= 0 \quad \text{в } Y_0, \quad N_{2b} = 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1, \quad N_{2b} = N_{2b} \quad \text{на } \bar{Y}_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тогда $N_{2a} \in H_P^1(Y)^{n \times \tilde{n}}$ и $N_{2b} \in H_P^1(Y)^{n \times n}$ (см., например, [2]).

Приравнявая коэффициенты при ε^0 в (3.7) и при ε^1 в (3.8), получаем

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y (A_2 \nabla_y W_2) &= r_2 F + m_2 E_2 (\rho \tilde{w}_0 + \tilde{w}_1) - \rho^2 m_2 E_2 V_2 \\ &\quad + \operatorname{div}_x ((A_2 E_2 + A_2 \nabla_y N_{2a}) \nabla_x V_2 + (B_2 + A_2 \nabla_y N_{2b}) G) \\ &\quad + \operatorname{div}_y (A_2 \nabla_x U_2) \quad \text{при } y = x/\varepsilon \text{ и } x \in \Omega_2^\varepsilon, \\ -\nu_\varepsilon (A_2 \nabla_y W_2) &= -\vartheta \nu_\varepsilon (A_0 \nabla_y V_0 + A_0 \nabla_y E_1 V_1 + A_0 \nabla_y E_2 V_2) \\ &\quad + \nu_\varepsilon (A_2 \nabla_x U_2) \quad \text{при } y = x/\varepsilon \text{ и } x \in S_2^\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где учтены уже полученное представление для U_2 и определения $\tilde{w}_0, \tilde{w}_1$, данные перед (1.21). Рассмотрим эти соотношения как задачу Неймана для W_2 с параметром x (подробности см., например, в [8]). В силу леммы 3 эта задача разрешима, если выполнено равенство

$$\begin{aligned} R_2 F + M_2 (\rho \tilde{w}_0 + \tilde{w}_1 - \rho^2 V_2) \\ + \operatorname{div}_x (\langle E_2^T (A_2 E_2 + A_2 \nabla_y N_{2a}) \rangle_2 \nabla_x V_2 + \tilde{B}_2 G) \\ = -\vartheta \int_{S_2} E_2^T \nu (A_0 \nabla_y V_0) ds - \vartheta \int_{S_2} E_2^T \nu (A_0 \nabla_y E_1 V_1 + A_0 \nabla_y E_2 V_2) ds, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где учтены условия нормировки (1.17) и обозначения (1.20).

Поменяем в проведенных рассуждениях индексы $s = 2$ и $s = 1$ местами (см. (3.7)–(3.13)). Тогда $U_1 = N_{1a}(y) \nabla_x V_1(x) + N_{1b}(y) G(x)$, где $N_{1a}(y)$, $N_{1b}(y)$ являются решениями задач (1.11), (1.13) на Y_1 и продолжены на $Y_0 \cup Y_2$ как 1-периодические решения задач Дирихле, аналогичных (3.11). Кроме того, в силу леммы 2 условие разрешимости (3.13) следует заменить на равенство

$$\begin{aligned} R_1 F + M_1 (\rho w_0 + w_1 - \rho^2 V_1) + \operatorname{div}_x (\hat{A}_1 \nabla_x V_1 + \hat{B}_1 G) \\ = -\vartheta \int_{S_1} E_1^T \nu (A_0 \nabla_y V_0) ds - \vartheta \int_{S_1} E_1^T \nu (A_0 \nabla_y E_1 V_1 + A_0 \nabla_y E_2 V_2) ds, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где учтены обозначения (1.12), (1.20) и равенство $E_1 = E$ на $\overline{Y}_1$ из (1.16).

В соответствии с определениями из § 1 множество Y_2 отделено от границ ячеек Y , и поэтому условия 1-периодичности в задачах (3.9) выполнены автоматически. Следовательно, равенство $N_{2a}^p = -y_p E_2$ определяет частное решение задачи (3.10). Действительно,

$$A_2^{hk} \frac{\partial}{\partial y_k} (y_p E_2) = A_2^{hp} E_2 + y_p A_2^{hk} \frac{\partial}{\partial y_k} E_2 = A_2^{hp} E_2, \quad (3.15)$$

поскольку $A_2 \nabla_y E_2 = 0$. Аналогично $N_{2b}^p = -y_p E$, если $B_2 = A_2$.

Таким образом, $\hat{A}_2 = \langle E_2^T (A_2 E_2 + A_2 \nabla_y N_{2a}) \rangle_2 = 0$ в (3.13). С другой стороны, тензор $\hat{A}_1$ не является нулевым, поскольку удовлетворяет условию эллиптичности (1.7), что следует из связности множества F_1 (см., например, [4], [5]).

Обозначим через $E_2^1(y)$ матрицу, составленную из первых n столбцов матрицы $E_2(y)$. Тогда из (1.16) и (1.18) непосредственно следует, что

$$E_1(y) + E_2^1(y) = E \quad \text{для } y \in Y. \quad (3.16)$$

Подставим равенство (3.5) вместо U в первое уравнение из (3.3). Тогда, учитывая (1.16), (1.18), (3.6), (3.16) и сохраняя только существенные для дальнейшего слагаемые, имеем

$$\begin{aligned} \rho^2 m_0 V_0 - \vartheta \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y V_0) &= r_0 F + m_0 E_1 (\rho w_0 + w_1 - \rho^2 V_1) \\ &+ m_0 E_2 (\rho \tilde{w}_0 + \tilde{w}_1 - \rho^2 V_2) \quad \text{при } y = x/\varepsilon \text{ и } x \in \Omega_0^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Напомним, что $\vartheta - \sigma/\varepsilon^2$ является малым параметром. Это равенство и равенство $V_0 = 0$ на Ω_{12}^ε будут выполнены, если выбрать

$$V_0 = \hat{P}F - \hat{Q}_1(\rho^2 V_1 - w_1 - \rho w_0) - \hat{Q}_2(\rho^2 V_2 - \tilde{w}_1 - \rho \tilde{w}_0) \quad (3.18)$$

и определить $\hat{P}(\rho, y)$, $\hat{Q}_1(\rho, y)$, $\hat{Q}_2(\rho, y)$ как 1-периодические решения задач Дирихле на Y_0 с параметром ρ :

$$\begin{aligned} m_0 \left(\rho^2 \hat{P} - \frac{r_0}{m_0} \right) &= \vartheta \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y \hat{P}) \text{ в } Y_0, \quad \hat{P} = 0 \text{ на } \overline{Y}_{12}, \\ m_0 (\rho^2 \hat{Q}_s - E_s) &= \vartheta \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y \hat{Q}_s) \text{ в } Y_0, \quad \hat{Q}_s = 0 \text{ на } \overline{Y}_{12}, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отметим, что обратное преобразование Лапласа от этих задач совпадает в точности с задачами (1.19).

Умножим второе уравнение из (3.19) на E_l^T для $l = 1, 2$ и проинтегрируем полученное соотношение по Y_0 . Тогда, учитывая (1.16), (1.18) и (2.10), имеем

$$\begin{aligned} \langle m_0 E_l^T (\rho^2 \hat{Q}_s - E_s) \rangle_0 &= \vartheta \langle E_l^T \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y \hat{Q}_s) \rangle_0 \\ &= -\vartheta \langle \nabla_y E_l^T A_0 \nabla_y \hat{Q}_s \rangle_0 - \vartheta \int_{S_0} E_l^T \nu (A_0 \nabla_y \hat{Q}_s) ds \\ &= -\vartheta \int_{S_l} E_l^T \nu (A_0 \nabla_y \hat{Q}_s) ds. \end{aligned} \quad (3.20)$$

С другой стороны, $\langle m_0 E_l^T (\rho^2 \widehat{Q}_s - E_s) \rangle_0$ совпадает с преобразованием Лапласа от матричнозначных функций $M_s^l(t)$, определенных в (1.20) для $s, l = 1, 2$. Кроме того, умножая первое уравнение из (3.19) на E_l^T для $l = 1, 2$, получим представление через граничные интегралы для преобразования Лапласа от матричнозначных функций $R_1^0(t)$ и $R_2^0(t)$ из (1.20). Аналогично, умножая уравнения из (1.16), (1.18) на E_l^T для $l = 1, 2$, имеем

$$a_s^l = \vartheta \langle \nabla_y E_l^T A_0 \nabla_y E_s \rangle_0 = -\vartheta \int_{S_l} E_l^T \nu (A_0 \nabla_y E_s) ds, \quad l, s = 1, 2. \quad (3.21)$$

Обозначим через v_1, v_2 обратные преобразования Лапласа от V_1 и V_2 соответственно. Подставим соотношение (3.18) вместо V_0 в равенства (3.13) и (3.14). Тогда, применяя обратное преобразование Лапласа к этим равенствам и учитывая (3.20), (3.21), получим для v_1, v_2 начально-краевую задачу (1.21). Кроме того, из (3.5) имеем представление для начальных членов асимптотического разложения решения задачи (1.4):

$$\begin{aligned} u_a = E_{1\varepsilon} v_1 + E_{2\varepsilon} v_2 + P_\varepsilon * f - Q_{1\varepsilon} * ((v_1)''_{tt}) - Q_{2\varepsilon} * ((v_2)''_{tt}) \\ + \varepsilon N_{1a\varepsilon} \nabla_x v_1 + \varepsilon N_{1b\varepsilon} g + \varepsilon N_{2a\varepsilon} \nabla_x v_2 + \varepsilon N_{2b\varepsilon} g. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Следуя [8], можно определить W_2 из (3.12) и продолжить построение асимптотического разложения, но представления (3.22) будет достаточно для доказательства оценки точности из теоремы 2. Кроме того, дальнейшие построения асимптотики не приводят к существенному улучшению этой оценки, что связано с краевыми эффектами, возникающими в задаче (1.4) вблизи $\partial\Omega$.

2. Пусть выполнено условие (1.3). Тогда $\omega = \sqrt{\sigma}/\varepsilon$ можно считать малым параметром. Повторим проведенные в этом параграфе построения в случае, когда $\vartheta = \omega^2$ (см. (3.7)–(3.22)). Тогда для начальных членов асимптотического разложения решения задачи (1.4) получим представление (3.22). В этом представлении v_1, v_2 являются решением начально-краевой задачи (1.21) и P, Q_1, Q_2 удовлетворяют задачам (1.19). Эти задачи зависят от малого параметра ω , что приводит к некоторому упрощению представления (3.22).

В соответствии с (3.21) коэффициенты a_s^l имеют порядок ω^2 , и поэтому можно положить $a_s^l = 0$ в (1.21) для $s, l = 1, 2$. Используя определения (1.20) и формулы дифференцирования свертки (2.20), получаем

$$\begin{aligned} R_s^0 * f &= \langle m_0 E_s^T P''_{tt} \rangle_0 * f = \left(\left\langle m_0 E_s^T \int_0^t P''_{tt} dt \right\rangle_0 \right)'_t * f \\ &= \left\langle m_0 E_s^T \left(P'_t - \frac{r_0}{m_0} E \right) \right\rangle_0 * (f'_t) + \left\langle m_0 E_s^T \left(P'_t - \frac{r_0}{m_0} E \right) \right\rangle_0 (f|_{t=0}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из лемм 6, 8 и неравенства Коши–Буняковского следует, что эти величины имеют порядок $\sqrt{\omega}$, и поэтому полагаем $R_s^0 = 0$ в (1.21) для $s = 1, 2$. По аналогичной причине выбираем $M_s^l = 0$ в (1.21) для $s, l = 1, 2$. Тогда v_1, v_2 являются решениями начально-краевых задач (1.22).

Вновь используя формулы дифференцирования (2.20), имеем

$$Q_{1\varepsilon} * (v_1'') = \left(Q_{1\varepsilon} * \left(\int_0^t v_1'' dt \right) \right)'_t = (Q_{1\varepsilon})'_t * (v_1' - w_1).$$

Здесь и далее $v'_1 = (v_1)'_t$ и $v''_1 = (v_1)''_{tt}$. В силу леммы 6 разность $(Q'_{1t} - E_1)_\varepsilon$ имеет порядок $\sqrt{\omega}$. Поэтому из леммы 7 следует асимптотическое равенство

$$Q_{1\varepsilon} * (v''_1) = E_{1\varepsilon} \int_0^t (v'_1 - w_1) dt = E_{1\varepsilon}(v_1 - w_1 t - w_0), \quad (3.24)$$

поскольку свертка с функцией $E_{1\varepsilon}$, не зависящей от t , совпадает с взятием первообразной (см. (2.19)). Аналогичные асимптотические равенства выполнены для $Q_{2\varepsilon} * (v''_2)$ и $P_\varepsilon * f$. Напомним также, что по определению $P_\varepsilon, Q_{1\varepsilon}, Q_{2\varepsilon} = 0$ на $\overline{\Omega}_{12}^\varepsilon$, $E_{1\varepsilon} = 0$ на $\overline{\Omega}_2^\varepsilon$, $E_{2\varepsilon} = 0$ на $\overline{\Omega}_1^\varepsilon$. Таким образом, представление (3.22) в рассматриваемом случае можно переписать в виде

$$u_a = \chi_1^\varepsilon E_{1\varepsilon} v_1 + \chi_2^\varepsilon E_{2\varepsilon} v_2 + \chi_0^\varepsilon \left(w_0 + w_1 t + \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon \int_0^t \int_0^t f dt dt \right) + \varepsilon u_1, \quad (3.25)$$

где $\chi_0^\varepsilon, \chi_1^\varepsilon$ и χ_2^ε обозначают характеристические функции множеств $\Omega_0^\varepsilon, \Omega_1^\varepsilon$ и Ω_2^ε соответственно. Здесь и далее $u_1 = N_{1a\varepsilon} \nabla_x v_1 + N_{1b\varepsilon} g + N_{2a\varepsilon} \nabla_x v_2 + N_{2b\varepsilon} g$.

3. Пусть выполнено условие (1.1). Тогда $\omega = \varepsilon^2/\sigma$ можно считать малым параметром. Повторим проведенные в п. 1 этого параграфа построения в случае, когда $\vartheta = 1/\omega$ (см. (3.7)–(3.21)). Тогда для начальных членов асимптотического разложения решения задачи (1.4) получим представление (3.22). Используя формулы (2.20), имеем

$$P_\varepsilon * f = \left(\left(\int_0^t P_\varepsilon dt \right) * f \right)'_t = \dot{P}_\varepsilon * (f'_t) + \dot{P}_\varepsilon (f|_{t=0}).$$

Поэтому из лемм 5 и 7 следует асимптотическое равенство

$$P_\varepsilon * f = \frac{\varepsilon^2}{\sigma} p_\varepsilon \left(\int_0^t f'_t dt \right) + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} p_\varepsilon (f|_{t=0}) = \frac{\varepsilon^2}{\sigma} p_\varepsilon f. \quad (3.26)$$

Аналогичные равенства выполнены для $Q_{1\varepsilon} * (v''_1)$ и $Q_{2\varepsilon} * (v''_2)$. Таким образом, представление (3.22) в рассматриваемом случае можно переписать в виде

$$u_a = E_{1\varepsilon} v_1 + E_{2\varepsilon} v_2 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} p_\varepsilon f - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} q_{1\varepsilon} (v''_1) - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} q_{2\varepsilon} (v''_2) + \varepsilon u_1, \quad (3.27)$$

где p, q_1 и q_2 являются 1-периодическими решениями задач (2.15). Следовательно, выражение (3.18) для V_0 можно записать в виде

$$V_0 = \frac{\varepsilon^2}{\sigma} (pF - q_1(\rho^2 V_1 - w_1 - \rho w_0) - q_2(\rho^2 V_2 - \tilde{w}_1 - \rho \tilde{w}_0)). \quad (3.28)$$

Умножим второе уравнение из (2.15) на E_l^T для $l = 1, 2$ и проинтегрируем полученное соотношение по Y_0 . Тогда, учитывая (1.16), (1.18) и (2.10), имеем

$$\begin{aligned} \hat{m}_s^l &\equiv \langle m_0 E_l^T E_s \rangle_0 = -\langle E_l^T \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y q_s) \rangle_0 \\ &= \langle \nabla_y E_l^T A_0 \nabla_y q_s \rangle_0 + \int_{S_0} E_l^T \nu (A_0 \nabla_y q_s) ds = \int_{S_l} E_l^T \nu (A_0 \nabla_y q_s) ds \end{aligned} \quad (3.29)$$

для $s, l = 1, 2$ (ср. с (3.20)). Аналогично, умножая первое уравнение из (2.15) на E_l^T для $l = 1, 2$, получаем

$$\hat{r}_l^0 \equiv \langle r_0 E_l^T E \rangle_0 = \int_{S_l} E_l^T \nu (A_0 \nabla_y p) ds. \quad (3.30)$$

Подставим соотношение (3.28) вместо V_0 в равенства (3.13) и (3.14). Тогда, применяя обратное преобразование Лапласа к этим равенствам и учитывая (3.21), (3.29), (3.30), получим для v_1, v_2 начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} M_1 v_1'' + \hat{m}_1^1 v_1'' + \hat{m}_2^1 v_2'' - \operatorname{div}(\hat{A}_1 \nabla v_1) + a_1^1 v_1 + a_2^1 v_2 \\ = R_1 f + \hat{r}_1^0 f + \operatorname{div}(\hat{B}_1 g) \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ M_2 v_2'' + \hat{m}_1^2 v_1'' + \hat{m}_2^2 v_2'' + a_1^2 v_1 + a_2^2 v_2 \\ = R_2 f + \hat{r}_2^0 f + \operatorname{div}(\tilde{B}_2 g) \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ v_1|_{t=0} = w_0 \text{ в } \Omega, \quad v_1'|_{t=0} = w_1 \text{ в } \Omega, \quad v_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T), \\ v_2|_{t=0} = \tilde{w}_0 \text{ в } \Omega, \quad v_2'|_{t=0} = \tilde{w}_1 \text{ в } \Omega. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Отметим, что при переходе к задаче (3.31) сингулярный множитель $\vartheta = \sigma/\varepsilon^2$ при граничных интегралах из (3.13), (3.14), содержащих V_0 , сокращается с соответствующим множителем из (3.28), но остается в коэффициентах матриц a_s^l для $s, l = 1, 2$ (см. (3.21)). Введем обозначения

$$\tilde{a} = \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{m} = \begin{pmatrix} \hat{m}_1^1 & \hat{m}_2^1 \\ \hat{m}_1^2 & \hat{m}_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Непосредственно из определений следует, что симметричные матрицы $a_0, \tilde{a}, \tilde{m}$ неотрицательно определены (см. доказательство неравенства (2.36)). Следовательно, повторяя доказательство леммы 10, получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 11. Пусть $f, g_k \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^n$, $w_0 = 0$ и $w_1 = 0$, где $k = 1, \dots, n$. Тогда существует единственное достаточно гладкое решение начально-краевой задачи (3.31), причем константы в оценках соответствующих норм не зависят от σ/ε^2 .

Будем рассматривать матрицу $\tilde{a}$ как (3×3) -матрицу, действующую на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\tilde{n}-n}$ и составленную из матричных блоков $\tilde{a}_s^l$, $s, l = 0, 1, 2$, соответствующих размеров. Симметричный матричный блок $a \equiv \tilde{a}_1^1 = \langle \nabla_y E_1^T A_0 \nabla_y E_1 \rangle_0$ является “скалярным” квадратом матрицы E_1 , составленной из линейно независимых столбцов. Следовательно, матрица a положительно определена и обратима. Действительно, $\xi^T a \xi = \langle \nabla_y (E_1 \xi)^T A_0 \nabla_y (E_1 \xi) \rangle_0 \geq 0$ для $\xi \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\xi_0^T a \xi_0 = 0$ для некоторого $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда $E_1 \xi_0$ является жестким перемещением на Y_0 . По определению $E_1 = 0$ на одной из частей границы ∂Y_0 и $E_1 = E$ на другой части, поэтому $\xi_0 = 0$. Таким образом, матрица a положительно определена.

Симметричный матричный блок $d \equiv \tilde{a}_3^3 = \langle \nabla_y E_3^T A_0 \nabla_y E_3 \rangle_0$ также является “скалярным” квадратом матрицы E_3 , составленной из последних (линейно независимых) $\tilde{n} - n$ столбцов матрицы E_2 . Следовательно, матрица d положительно

определена и обратима. По аналогичной причине обратим и “скалярный” квадрат матрицы E_2 : найдется такая матрица c на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\tilde{n}-n}$, что

$$c \begin{pmatrix} \tilde{a}_2^2 & \tilde{a}_3^2 \\ \tilde{a}_2^3 & \tilde{a}_3^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2^T & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_2^2 & \tilde{a}_3^2 \\ \tilde{a}_2^3 & \tilde{a}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E_{\tilde{n}-n} \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

где $E_{\tilde{n}-n}$ обозначает единичную матрицу для $\mathbb{R}^{\tilde{n}-n}$.

Определим $b \equiv \tilde{a}_3^1 = \langle \nabla_y E_1^T A_0 \nabla_y E_3 \rangle_0$ и напомним, что $a = \tilde{a}_1^1$, $d = \tilde{a}_3^3$. Из равенства (3.16) следует, что

$$\nabla_y E_1 = -\nabla_y E_2^1, \quad A_0 \nabla_y E_1 = -A_0 \nabla_y E_2^1 \quad \text{для } y \in Y_0.$$

Учитывая эти равенства в определениях (3.21) и (3.32), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1^1 &= a, & \tilde{a}_2^1 &= -a, & \tilde{a}_3^1 &= b, \\ \tilde{a}_1^2 &= -a, & \tilde{a}_2^2 &= a, & \tilde{a}_3^2 &= -b, \\ \tilde{a}_1^3 &= b^T, & \tilde{a}_2^3 &= -b^T, & \tilde{a}_3^3 &= d. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Обозначим через D обратимую матрицу на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, диагональ которой составлена из блоков a^{-1} и c , а остальные элементы нулевые. Тогда из (3.33) и (3.34) заключаем, что

$$D\tilde{a} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_2^T & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -a & b \\ -a & a & -b \\ b^T & -b^T & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -E & a^{-1}b \\ -E & E & 0 \\ 0 & 0 & E_{\tilde{n}-n} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Пусть v_2^1 и v_3 обозначают первые n и последние $\tilde{n}-n$ компонент вектор-функции v_2 и $w = (v_1, v_2)^T = (v_1, v_2^1, v_3)^T$. Выделяя сингулярные слагаемые в первых двух уравнениях из (3.31), получаем

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \tilde{a}w = W. \quad (3.36)$$

В силу леммы 11 $W \in H^s(0, T; H^s(\Omega)^{n+\tilde{n}})$ для $s = 0, 1, \dots$, причем константы в оценках соответствующих норм не зависят от σ/ε^2 . Таким образом, учитывая (3.35) и (3.36), для решения v_1, v_2 системы уравнений (3.31) получаем неравенство

$$\|v_1 - v_2^1\|_{H^s(0, T; H^s(\Omega)^n)} + \|v_3\|_{H^s(0, T; H^s(\Omega)^{\tilde{n}-n})} \leq C \frac{\varepsilon^2}{\sigma}, \quad (3.37)$$

где $s = 0, 1, \dots$ и постоянная C не зависит от σ/ε^2 .

Учитывая равенства (3.34), сложим первые n и следующие n уравнений в (3.36). Тогда сингулярные слагаемые сократятся и соответствующая сумма запишется в виде

$$\begin{aligned} M_1 v_1'' + \hat{m}_1^1 v_1'' + \hat{m}_2^1 v_2'' - \operatorname{div}(\hat{A}_1 \nabla v_1) + M_2 (v_2^1)'' + \tilde{m}_1^2 v_1'' + \tilde{m}_2^2 v_2'' \\ = (R_1 + \tilde{R}_2)f + (\hat{r}_1^0 + \tilde{r}_2^0)f + \operatorname{div}((\hat{B}_1 + \tilde{B}_2)g) \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где $\tilde{R}_2 = \langle (E_2^1)^T r_2 \rangle_2$, $\tilde{r}_2^0 = \langle r_0 (E_2^1)^T E \rangle_0$, $\tilde{m}_1^2 = \langle m_0 (E_2^1)^T E_1 \rangle_0$ и $\tilde{m}_2^2 = \langle m_0 (E_2^1)^T E_2 \rangle_0$. Из равенства (3.16) следует, что $\hat{r}_1^0 + \tilde{r}_2^0 = \langle r_0 \rangle_0 E$. Поэтому $(R_1 + \tilde{R}_2 + \langle r_0 \rangle_0 E)f = Rf$

в соответствии с (1.14), (1.16), (1.18) и (1.20). Используя неравенство (3.37), можно заменить с достаточной степенью точности v_2 и v_2^1 на v_1 в соотношении (3.38). Тогда $v = v_1$ является решением начально-краевой задачи (1.15), поскольку соответствующие коэффициенты $\hat{m}_1^1, \hat{m}_2^1, \tilde{m}_1^2, \tilde{m}_2^2$ в сумме равны $\langle m_0 \rangle_0 E$.

Решение задачи (1.15) определено однозначно и поэтому с достаточной степенью точности приближает решение задачи (3.31) (в смысле выполнения неравенства (3.37)). Таким образом, представление (3.27) для начальных членов асимптотики в рассматриваемом случае можно переписать в виде

$$u_a = v + E_{2\varepsilon}^1(v_2^1 - v) + E_{3\varepsilon}v_3 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} p_\varepsilon f - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} q_{1\varepsilon} v_1'' - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} q_{2\varepsilon} v_2'' + \varepsilon u_1, \quad (3.39)$$

где второе и третье слагаемые в правой части этого равенства достаточно малы по крайней мере в норме пространства $H^s(0, T; L^2(\Omega)^n)$ для $s = 0, 1, \dots$. Для доказательства теоремы 1 при однородных начальных условиях достаточно воспользоваться разложением (3.39). Однако эти условия не являются естественными в рассматриваемом случае. Поэтому удобнее “переразложить” представление (3.39) для начальных членов асимптотического разложения.

В соответствии с (3.37) определим “новое” v_2 равенством $(\varepsilon^2/\sigma)v_2 = (v_2^1 - v, v_3)$. Учтем также (3.16) и (3.37) в остальных слагаемых из (3.39) и представим u_a в виде

$$u_a = v + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} E_{2\varepsilon}v_2 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} p_\varepsilon f - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} q_\varepsilon v_{tt}'' + \varepsilon U_1 + \varepsilon U_2 + \varepsilon^2 W_1 + \varepsilon^2 W_2, \quad (3.40)$$

где U_1, U_2, W_1 и W_2 определяются так же, как и в (3.5). Кроме того, $q \in H_P^1(Y)^{n \times n}$ является 1-периодическим решением задачи Дирихле

$$-\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y q) = m_0 E \quad \text{в } Y_0, \quad q = 0 \quad \text{на } \bar{Y}_{12}. \quad (3.41)$$

Заметим, что $q = q_1 + q_2^1$ в соответствии с (2.15) и (3.16), где q_2^1 обозначает матрицу, составленную из первых n столбцов матрицы q_2 .

Подставим равенство (3.40) вместо u в третье и последнее уравнения из (3.2). Тогда (не используя преобразование Лапласа) получим соотношения, аналогичные (3.7)–(3.12). Учитывая (3.40), наиболее существенное изменение следует внести в (3.8):

$$\begin{aligned} & \nu_\varepsilon (A_2 \nabla_x v + B_2 g + A_2 \nabla_y U_2 + \varepsilon A_2 \nabla_x U_2 + \varepsilon A_2 \nabla_y W_2) \\ &= \nu_\varepsilon (\varepsilon A_0 \nabla_y (E_2 v_2) + \varepsilon A_0 \nabla_y (p f) - \varepsilon A_0 \nabla_y (q v_{tt}'')) \end{aligned} \quad (3.42)$$

при $y = x/\varepsilon$ и $x \in S_2^\varepsilon$. Поэтому выберем $U_2 = N_{2a}^1(y) \nabla_x v(x) + N_{2b}(y) g(x)$ (см. (3.8), (3.9)) и определим N_{2a}^1, N_{2b} как 1-периодические решения задач (3.9), в которых E_2 заменено на E (равное E_2^1 в Y_2). Кроме того, продолжим N_{2a}^1, N_{2b} в соответствии с (3.11). Аналогично имеем $U_1 = N_{1a} \nabla_x v + N_{1b} g$, как и в п. 1.

Определим $\hat{A}_2^1 = \langle E_2^T (A_2 + A_2 \nabla_y N_{2a}^1) \rangle_2$ (равное нулю в силу (3.15)). Тогда, учитывая (3.42) в (3.12), получим вместо (3.13) равенство

$$\begin{aligned} & R_2 f - M_2 v_{tt}'' + \operatorname{div}_x (\hat{A}_2^1 \nabla_x v + \tilde{B}_2 g) \\ &= - \int_{S_2} E_2^T \nu (A_0 \nabla_y E_2 v_2) ds - \int_{S_2} E_2^T \nu (A_0 \nabla_y (p f) - A_0 \nabla_y (q v_{tt}'')) ds. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Пусть $\hat{m}_l^0 = \langle m_0 E_l^T E \rangle_0$, $\hat{r}_l^0 = \langle r_0 E_l^T E \rangle_0$ (ср. с (3.29), (3.30)) и $\hat{a}_s^l = \langle \nabla_y E_l^T A_0 \nabla_y E_s \rangle_0$ для $s, l = 1, 2$ (ср. с (3.21)). Тогда, используя (3.21), (3.29) и (3.30), равенство (3.43) можно переписать в виде

$$M_2 v_{tt}'' + \hat{m}_2^0 v_{tt}'' + \hat{a}_2^2 v_2 = R_2 f + \hat{r}_2^0 f + \operatorname{div}_x(\tilde{B}_2 g). \quad (3.44)$$

Аналогично получаем вместо (3.14) равенство

$$M_1 v_{tt}'' + \hat{m}_1^0 v_{tt}'' - \operatorname{div}_x(\hat{A}_1 \nabla_x v) + \hat{a}_2^1 v_2 = R_1 f + \hat{r}_1^0 f + \operatorname{div}_x(\hat{B}_1 g). \quad (3.45)$$

В соответствии с (3.32) и (3.34) имеем $\hat{a}_2^1 = (-a, b)$, и

$$\hat{a}_2^2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b^T & d \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

является положительно определенной и обратимой матрицей. Учитывая (3.16) и (3.46), сложим первые n уравнений из (3.44) с уравнениями из (3.45). Тогда, вспоминая о начальных и краевых условиях, получим для v в точности задачу (1.15). Как уже отмечалось, достаточно гладкое решение этой задачи определено однозначно. Следовательно, можно определить достаточно гладкое v_2 как решение линейной системы уравнений $\hat{a}_2^2 v_2 = W$ из (3.44).

Таким образом, из (3.40) имеем представление для начальных членов асимптотического разложения решения задачи (1.4):

$$u_a = v + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} E_{2\varepsilon} v_2 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} p_\varepsilon f - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} q_\varepsilon v_{tt}'' + \varepsilon N_{1a\varepsilon} \nabla_x v + \varepsilon N_{1b\varepsilon} g + \varepsilon N_{2a\varepsilon}^1 \nabla_x v + \varepsilon N_{2b\varepsilon} g. \quad (3.47)$$

4. Пусть выполнены условия (1.1) и (1.23). Определим $p^0, q^0, q_1^0 \in H_P^1(Y)^{n \times n}$ и $q_2^0 \in H_P^1(Y)^{n \times \tilde{n}}$ как 1-периодические решения задач

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y p^0) &= rE \text{ в } Y_0, \quad p^0 = 0 \text{ на } \bar{Y}_{12}, \\ -\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y q^0) &= mE \text{ в } Y_0, \quad q^0 = 0 \text{ на } \bar{Y}_{12}, \\ -\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y q_s^0) &= mE_s \text{ в } Y_0, \quad q_s^0 = 0 \text{ на } \bar{Y}_{12}, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Повторяя проведенные в п. 3 построения, заметим, что матричнозначные функции $p_\varepsilon, q_{1\varepsilon}, q_{2\varepsilon}$ в представлении (3.27) следует заменить на $\mu p_\varepsilon^0, \mu q_{1\varepsilon}^0, \mu q_{2\varepsilon}^0$ в соответствии с (1.23), (2.15) и (3.48). Такая замена отразится на вычислении коэффициентов $\hat{m}_s^l = \mu \langle m E_l^T E_s \rangle_0$, $\hat{m}_l^0 = \mu \langle m E_l^T E \rangle_0$ и $\hat{r}_l^0 = \mu \langle r E_l^T E \rangle_0$ для $s, l = 1, 2$, но не повлияет на дальнейшие рассуждения из п. 3.

Таким образом, представление (3.47) для начальных членов асимптотики в рассматриваемом случае можно переписать в виде

$$u_a = v + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} E_{2\varepsilon} v_2 + \frac{\varepsilon^2 \mu}{\sigma} p_\varepsilon^0 f - \frac{\varepsilon^2 \mu}{\sigma} q_\varepsilon^0 v_{tt}'' + \varepsilon N_{1a\varepsilon} \nabla_x v + \varepsilon N_{1b\varepsilon} g + \varepsilon N_{2a\varepsilon}^1 \nabla_x v + \varepsilon N_{2b\varepsilon} g, \quad (3.49)$$

где v является решением задачи (1.15). Коэффициенты M и R в этой задаче зависят от μ , поскольку $\langle m_0 \rangle_0 = \mu \langle m \rangle_0$ и $\langle r_0 \rangle_0 = \mu \langle r \rangle_0$; однако такая зависимость не является сингулярной.

Действительно, будем искать решение этой задачи в виде асимптотического ряда $v_a^N = v_0 + \dots + \mu^N v_N$. Тогда для v_0 получим задачу (1.15), в которой M и R заменены на $\widehat{M}$ и $\widehat{R}$, определенные равенствами (1.24). Для v_s , $s = 1, \dots, N$, получаем аналогичную задачу с правой частью $\langle r \rangle_0 f \delta_{1s} - \langle m \rangle_0 (v_{s-1})''_{tt}$ и нулевыми начальными и граничными условиями. Поскольку исходные данные в задаче (1.15) являются гладкими и согласованными, несложно доказать, что

$$\|v - v_N\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega)^n)} \leq C\mu^{N+1}, \quad (3.50)$$

где постоянная C не зависит от μ . Аналогичная оценка выполнена для подходящего приближения v_2^N к решению системы линейных уравнений из (3.44).

5. Пусть выполнены условия (1.2) и (1.23). Теперь можно повторить только начало проведенных в п. 3 построений, в соответствии с которыми матричнозначные функции $(\varepsilon^2/\sigma)p_\varepsilon$, $(\varepsilon^2/\sigma)q_{1\varepsilon}$, $(\varepsilon^2/\sigma)q_{2\varepsilon}$ в разложении (3.27) следует заменить на $(\mu/\vartheta)p_\varepsilon^0$, $(\mu/\vartheta)q_{1\varepsilon}^0$ и $(\mu/\vartheta)q_{2\varepsilon}^0$. Тогда для v_1, v_2 получаем начально-краевую задачу (3.31) с положительной постоянной ϑ из условия (1.2) в равенствах (3.21). Коэффициенты этой задачи зависят от μ , но не сингулярным образом, поскольку $\widehat{m}_s^l = \mu \langle m E_l^T E_s \rangle_0$ и $\widehat{r}_l^0 = \mu \langle r E_l^T E \rangle_0$ для $s, l = 1, 2$. В первом приближении можно выбрать $\widehat{m}_s^l = 0$, $\widehat{r}_l^0 = 0$ и определить начальные члены асимптотики равенством

$$u_a = E_{1\varepsilon} v_1 + E_{2\varepsilon} v_2 + \frac{\mu}{\vartheta} p_\varepsilon^0 f - \frac{\mu}{\vartheta} q_{1\varepsilon}^0 v_1'' - \frac{\mu}{\vartheta} q_{2\varepsilon}^0 v_2'' + \varepsilon u_1, \quad (3.51)$$

где v_1, v_2 являются решениями задачи (1.21), в которой $M_s^l = 0$ и $R_l^0 = 0$ для $s, l = 1, 2$. Отметим, что выбор в (3.51) решения v_1, v_2 “более точной” задачи (3.31) не улучшает оценки теоремы 5, поскольку при переходе от разложения (3.27) (фактически (3.22)) к разложению (3.51) использованы леммы 5 и 7, гарантирующие только точность $C(\mu/\vartheta)^2$.

6. Пусть выполнены условия (1.3), (1.23) и (1.25). Поскольку из лемм 5 и 7 еще следуют асимптотические равенства, аналогичные (3.26), можно повторить начало построений из п. 3. Тогда матричнозначные функции p_ε , $q_{1\varepsilon}$, $q_{2\varepsilon}$ в разложении (3.27) следует заменить на μp_ε^0 , $\mu q_{1\varepsilon}^0$, $\mu q_{2\varepsilon}^0$ из (3.48) и определить v_1, v_2 как решения задачи (3.31). В соответствии с определениями (3.21), (3.29) и (3.30) коэффициенты этой задачи зависят от μ и σ/ε^2 , но не сингулярным образом. В первом приближении можно выбрать $\widehat{m}_s^l = 0$, $\widehat{r}_l^0 = 0$, $a_s^l = 0$ для $s, l = 1, 2$ и определить начальные члены асимптотики равенством

$$u_a = E_{1\varepsilon} v_1 + E_{2\varepsilon} v_2 + \frac{\varepsilon^2 \mu}{\sigma} p_\varepsilon^0 f - \frac{\varepsilon^2 \mu}{\sigma} q_{1\varepsilon}^0 v_1'' - \frac{\varepsilon^2 \mu}{\sigma} q_{2\varepsilon}^0 v_2'' + \varepsilon u_1, \quad (3.52)$$

где v_1, v_2 являются решениями задач (1.22).

7. Пусть выполнены условия (1.3), (1.23) и (1.26). Вернемся к построениям п. 1 этого параграфа. Тогда равенство (3.17) для определения V_0 в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \rho^2 m V_0 - \theta \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y V_0) &= r F + m E_1 (\rho w_0 + w_1 - \rho^2 V_1) \\ &+ m E_2 (\rho \tilde{w}_0 + \tilde{w}_1 - \rho^2 V_2) \quad \text{при } y = x/\varepsilon \text{ и } x \in \Omega_0^\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.53)$$

поскольку $\theta = \sigma/(\varepsilon^2 \mu)$ является малым параметром. Определим P^0 , Q_1^0 и Q_2^0 как 1-периодические решения задач (1.19), в которых m_0 , r_0 заменены на m , r и ϑ заменена на θ . Из (3.53), как и в п. 1, получаем представление

$$u_a = E_{1\varepsilon} v_1 + E_{2\varepsilon} v_2 + P_\varepsilon^0 * f - Q_{1\varepsilon}^0 * (v_1'') - Q_{2\varepsilon}^0 * (v_2'') + \varepsilon u_1, \quad (3.54)$$

где v_1 и v_2 определяются из соотношений (3.13) и (3.14). В этих соотношениях $\vartheta = \sigma/\varepsilon^2$ является малым параметром в силу условия (1.3) (см. п. 2.). Поэтому в (3.13) и (3.14) граничные интегралы являются несущественными и для определения v_1 , v_2 получаем начально-краевые задачи (1.22).

8. Пусть выполнены условия (1.3), (1.23) и (1.27). Теперь можно воспользоваться леммами 6, 7 и построениями из п. 7. В силу этих лемм выполнены равенства, аналогичные (3.24). Следовательно, используя эти равенства в (3.54), получаем для начальных членов асимптотики представление (3.25), в котором v_1 , v_2 являются решениями задач (1.22) и r_0/m_0 заменено на r/m .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть имеются s_1 связных множеств $F_1, \dots, F_{s_1}$, s_2 вполне несвязных множеств $F_{s_1+1}, \dots, F_{s_1+s_2}$, определенных в замечании 3. Кроме того, пусть $F_0 = \mathbb{R}^n \setminus (\overline{F}_1 \cup \dots \cup \overline{F}_{s_1+s_2})$. Для $l = 0, \dots, s_1 + s_2$ множества Ω_l^ε и S_l^ε определяются так же, как и в (1.6), (3.1). Естественно предполагается, что малый параметр σ входит только в определения (1.6) на Ω_0^ε . Поэтому $s = 1, \dots, s_1 + s_2$ в задаче (3.3). Для таких s определим $E_s(y)$ как 1-периодическое решение задач

$$\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y E_s) = 0 \text{ в } Y_0, \quad E_s = \delta_{sl} E_0^s \text{ на } \overline{Y}_l, \quad l = 1, \dots, s_1 + s_2,$$

где $E_0^s = E$ для $s = 1, \dots, s_1$, а для $s = s_1 + 1, \dots, s_1 + s_2$ столбцы матрицы E_0^s образуют базис в линейном пространстве жестких перемещений $\mathfrak{R}$, нормированный условиями, аналогичными (1.17). Для построения начальных членов асимптотики решения задачи (1.4) в рассматриваемом случае необходимо фактически повторить построения этого параграфа, в которых 1 и 2 заменены на $l_1 = 1, \dots, s_1$ и $l_2 = s_1 + 1, \dots, s_1 + s_2$ соответственно. Тогда осредненные задачи имеют вид, описанный в замечании 3 и зависящий от выполнения одного из условий (1.1)–(1.3). Аналогично рассматривается и случай, когда выполнено условие (1.23).

§ 4. Доказательство теоремы 2

В случае, когда выполнено условие (1.2), начальные члены асимптотического разложения решения задачи (1.4) определим равенством (3.22). В этом равенстве все слагаемые, кроме $\varepsilon N_{1a\varepsilon} \nabla v_1$ и $\varepsilon N_{2a\varepsilon} \nabla v_2$, удовлетворяют однородным граничным условиям Дирихле на $\partial\Omega$. Полезно подправить и эти слагаемые в (3.22). Для этого определим гладкую в Ω функцию η , равную нулю при $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$ и единице при $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$, где $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ обозначает расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$. Для достаточно малых ε ($\leq \varepsilon_0$) такие функции существуют, $\varepsilon |\nabla \eta| \leq C$ в Ω , и носители функций $\eta - 1$ и $\nabla \eta$ содержатся в приграничной полосе $\Omega_{2\varepsilon} \subset \Omega$ ширины 2ε (см., например, [4]). Тогда подправленная асимптотика задается равенством

$$\begin{aligned} v_a = & E_{1\varepsilon} v_1 + E_{2\varepsilon} v_2 + P_\varepsilon * f - Q_{1\varepsilon} * ((v_1)_{tt}'') - Q_{2\varepsilon} * ((v_2)_{tt}'') \\ & + \varepsilon (N_{1a})_\varepsilon \eta \nabla v_1 + \varepsilon (N_{1b})_\varepsilon g + \varepsilon (N_{2a})_\varepsilon \eta \nabla v_2 + \varepsilon (N_{2b})_\varepsilon g, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где (v_1, v_2) является решением задачи (1.21) и, например, $(N_{1a})_\varepsilon = N_{1a}(x/\varepsilon)$ обозначает ε -периодическое продолжение этой функции на Ω (см. § 2).

Из ограниченности области Ω и известной оценки $\text{mes}(\Omega_{2\varepsilon}) \leq C\varepsilon$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|(N_{1a})_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 + \|(\nabla_y N_{1a})_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{n \times n \times n}}^2 &\leq C, \\ \|(N_{1a})_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{2\varepsilon})^{n \times n}}^2 + \|(\nabla_y N_{1a})_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{2\varepsilon})^{n \times n \times n}}^2 &\leq C\varepsilon \end{aligned} \quad (4.2)$$

и аналогичные неравенства для матричнозначных функций E_1, E_2, N_{1b}, N_{2a} и N_{2b} (см., например, [11]). Напомним, что эти функции определяются в (1.11), (1.13), (1.16), (1.18), (3.9), (3.11) и имеют компоненты из $H_P^1(Y)$.

Из ограниченности области Ω и леммы 4 следует также неравенство

$$\|(P'_t)_\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 + \vartheta \|(\nabla_y P)_\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^{n \times n \times n})}^2 \leq C \quad (4.3)$$

и аналогичные неравенства для Q_1 и Q_2 . В этих неравенствах и далее в этом параграфе постоянная C не зависит от ε, σ и ϑ . Из равенств (2.20) имеем, например, $Q_{1\varepsilon} * (v_1'') = (Q'_1)_\varepsilon * (v_1')$. Поэтому слагаемые со свертками в (4.1) определены как элементы пространства $C^1([0,T];H_0^1(\Omega)^n)$ в силу леммы 7, неравенств (4.3) и гладкости v_1, v_2 и f .

Следующий вариант первой формулы из (3.6) и различные его вариации в обозначениях часто используются в дальнейшем:

$$\nabla(P_\varepsilon * f) = \varepsilon^{-1}(\nabla_y P)_\varepsilon * f + P_\varepsilon * (\nabla f). \quad (4.4)$$

Пусть u является решением задачи (1.4). Введем обозначения

$$r = u - v_a, \quad r_a = v_a - u_a. \quad (4.5)$$

Учитывая (3.21), (4.1) и (4.4), имеем $r_a = \varepsilon(N_{sa})_\varepsilon(\eta - 1)\nabla v_s$ и

$$\nabla(r_a) = (\nabla_y N_{sa})_\varepsilon(\eta - 1)\nabla v_s + \varepsilon(N_{sa})_\varepsilon(\nabla \eta)\nabla v_s + \varepsilon(N_{sa})_\varepsilon(\eta - 1)\nabla^2 v_s.$$

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам $s = 1, 2$. Следовательно, используя второе неравенство из (4.2) и гладкость v_1, v_2 , получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla(r_a)\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 + \|\nabla(r_a)'_t\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \\ + \|r_a\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^n)}^2 + \|(r_a)'_t\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2 \leq C\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.6)$$

так что v_a достаточно близка к асимптотике u_a и $v_a = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$.

Выберем $\varphi = r'_t$ в интегральном тождестве (2.4) и вычтем соответствующие интегралы от v_a . Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega m_\varepsilon |r'_t|^2 dx \right)'_t + \left(\frac{1}{2} \int_\Omega (A_\sigma^\varepsilon e(r), e(r)) dx \right)'_t \\ = \int_\Omega (r_\varepsilon f, r'_t) dx - \int_\Omega (m_\varepsilon (v_a)''_{tt}, r'_t) dx - \int_\Omega (A_\sigma^\varepsilon e(v_a) + B_\sigma^\varepsilon g, e(r'_t)) dx \equiv I_t. \end{aligned}$$

В силу условий теоремы и определений (4.1), (4.5) имеем при $t = 0$ равенства $r = 0$ и $r'_t = 0$. Поэтому так же, как и в доказательстве леммы 1, получаем

$$\|r'_t\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \sigma \|e(r)\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n}}^2 + \|e(r)\|_{L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^{n \times n}}^2 \leq \frac{2}{\alpha} \left| \int_0^t I_t dt \right| \equiv I. \quad (4.7)$$

Воспользуемся соотношениями (2.9) для r . Тогда для доказательства теоремы 2 достаточно получить неравенство

$$I \leq \frac{1}{2} \mathcal{E}(u) + C \left(\varepsilon(1 + \vartheta + \sqrt{\vartheta}) + \sigma + \varepsilon \frac{1 + \sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\sigma \vartheta}} \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right), \quad (4.8)$$

где постоянная C не зависит от ε , σ и ϑ (см. доказательство леммы 1).

Введем обозначение $g_s = g$. Тогда, используя (4.4) и (4.5), имеем

$$\begin{aligned} \nabla v_a &= \nabla r_a + \nabla u_a = \nabla r_a + \varepsilon^{-1}(\nabla_y E_s)_\varepsilon v_s + \varepsilon^{-1}(\nabla_y P)_\varepsilon * f \\ &\quad - \varepsilon^{-1}(\nabla_y Q_s)_\varepsilon * (v_s'') + (\nabla_y N_{sa})_\varepsilon \nabla v_s + (\nabla_y N_{sb})_\varepsilon g_s + (E_s)_\varepsilon \nabla v_s \\ &\quad + P_\varepsilon * (\nabla f) - Q_{s\varepsilon} * (\nabla(v_s'')) + \varepsilon(N_{sa})_\varepsilon \nabla^2 v_s + \varepsilon(N_{sb})_\varepsilon \nabla g_s \\ &\equiv \nabla r_a + \varepsilon^{-1}(\nabla_y E_s)_\varepsilon v_s + \varepsilon^{-1}(\nabla_y P)_\varepsilon * f - \varepsilon^{-1}(\nabla_y Q_s)_\varepsilon * (v_s'') \\ &\quad + (E_s + \nabla_y N_{sa})_\varepsilon \nabla v_s + (\nabla_y N_{sb})_\varepsilon g_s + P_\varepsilon * (\nabla f) - Q_{s\varepsilon} * (\nabla(v_s'')) + \varepsilon J. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь и далее $\|J\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} + \|J'_t\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$ в силу первого неравенства из (4.2) и гладкости v_1 , v_2 и g .

По определению $E_{1\varepsilon}$, P_ε , $Q_{s\varepsilon}$, $N_{1a\varepsilon}$ и $N_{1b\varepsilon}$ имеют нулевые компоненты на $\overline{\Omega}_2^\varepsilon$. Кроме того, выполнено равенство $(A_2 \nabla_y E_2 v_2)_\varepsilon = 0$ на Ω_2^ε (см. § 3). Следовательно,

$$A_\varepsilon^\sigma \nabla v_a + B_\varepsilon^\sigma g = A_\varepsilon^\sigma \nabla r_a + \varepsilon A_\varepsilon^\sigma J + (\tilde{A}_{2a})_\varepsilon \nabla v_2 + (\tilde{A}_{2b})_\varepsilon g \quad \text{в } \Omega_2^\varepsilon, \quad (4.10)$$

где $\tilde{A}_{2a}(y) = A_2 E_2 + A_2 \nabla_y N_{2a}$ и $\tilde{A}_{2b}(y) = B_2 + A_2 \nabla_y N_{2b}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \langle E_2^T \tilde{A}_{2a} \rangle_2 &= \hat{A}_2, \quad \langle E_2^T \tilde{A}_{2b} \rangle_2 = \tilde{B}_2, \\ \operatorname{div}_y \tilde{A}_{2a} &= 0, \quad \operatorname{div}_y \tilde{A}_{2b} = 0 \quad \text{в } Y_2, \quad \nu \tilde{A}_{2a} = 0, \quad \nu \tilde{A}_{2b} = 0 \quad \text{на } S_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

в соответствии с (1.13), (1.20), (3.9) и (3.13). Аналогично получаем

$$A_\varepsilon^\sigma \nabla v_a + B_\varepsilon^\sigma g = A_\varepsilon^\sigma \nabla r_a + \varepsilon A_\varepsilon^\sigma J + (\tilde{A}_{1a})_\varepsilon \nabla v_1 + (\tilde{A}_{1b})_\varepsilon g \quad \text{в } \Omega_1^\varepsilon, \quad (4.12)$$

где $\tilde{A}_{1a}(y) = A_1 E_1 + A_1 \nabla_y N_{1a}$ и $\tilde{A}_{1b}(y) = B_1 + A_1 \nabla_y N_{1b}$ удовлетворяют соотношениям (4.11), в которых $\tilde{B}_2$ заменен на $\hat{B}_1$ и 2 заменена на 1.

Соответствующие интегралы по $\Omega \times (0, t)$ из (4.7), содержащие ∇r_a и εJ , несущественны в (4.8). Действительно, учитывая (4.6) и доказательство неравенств (2.6)–(2.8), получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \int_\Omega (A_\varepsilon^\sigma e(r_a), e(r'_t)) dx dt \right| \\ &\leq \frac{C}{2\delta} \|\nabla r_a\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 + \frac{C}{2\delta} \|\nabla(r_a)_t'\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 + \delta C \mathcal{E}(r) \\ &\leq C\varepsilon + \delta_1 \mathcal{E}(r), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\delta = \delta_1/C$. Здесь и далее положительные постоянные $\delta_1, \dots, \delta_l$ будут выбраны так, чтобы $(2/\alpha)(\delta_1 + \dots + \delta_l) = 1/2$ (см. (4.7) и (4.8)).

Используя первое равенство из (2.20) и начальные условия из (1.19), имеем

$$\begin{aligned}
(v_a)''_{tt} &= E_{s\varepsilon}(v_s)''_{tt} + (P''_{tt})_\varepsilon * f + (P'_t|_{t=0})_\varepsilon f \\
&\quad - ((Q_s)''_{tt})_\varepsilon * ((v_s)''_{tt}) - ((Q_s)'_t|_{t=0})_\varepsilon ((v_s)''_{tt}) + \varepsilon J \\
&= (P''_{tt})_\varepsilon * f + (r_0/m_0)_\varepsilon f - ((Q_s)''_{tt})_\varepsilon * ((v_s)''_{tt}) + \varepsilon J \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon, \\
(v_a)''_{tt} &= E_{1\varepsilon}(v_1)''_{tt} + \varepsilon J \quad \text{в } \Omega_1^\varepsilon, \quad (v_a)''_{tt} = E_{2\varepsilon}(v_2)''_{tt} + \varepsilon J \quad \text{в } \Omega_2^\varepsilon,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

где интегралы из (4.7), содержащие J , несущественны в (4.8).

Выделяя сингулярные слагаемые в (4.9), введем обозначения

$$\begin{aligned}
u^0 &= \varepsilon^{-1}(\nabla_y P)_\varepsilon * f - \varepsilon^{-1}(\nabla_y Q_s)_\varepsilon * ((v_s)''_{tt}), \\
u^1 &= \varepsilon^{-1}(\nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, \quad u^2 = u^0 + u^1
\end{aligned} \tag{4.15}$$

и определим u^3 из равенства

$$A_\varepsilon^\sigma \nabla v_a = A_\varepsilon^\sigma u^2 + A_\varepsilon^\sigma u^3 \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon. \tag{4.16}$$

Компоненты тензора A_ε^σ имеют порядок σ на Ω_0^ε , а компоненты вектор-функции u^3 имеют порядок единицы. Поэтому, учитывая (4.2), (4.3), (4.6), (4.9), гладкость v_s , f , g и лемму 7, имеем

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^3, e(r'_t)) dx dt \right| \\
&\leq \frac{\sigma C}{2\delta} \|u^3\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n})}^2 + \frac{\sigma C}{2\delta} \|(u^3)'_t\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n})}^2 + \delta C \mathcal{E}(r) \\
&\leq C\sigma + \delta_2 \mathcal{E}(r),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

где $\delta = \delta_2/C$. Следовательно, этот интеграл и аналогичный интеграл по $\Omega_0^\varepsilon \times (0, t)$ из (4.7), содержащий $B_\sigma^\varepsilon g$, несущественны в (4.8). При выводе неравенства (4.17) использовано, что u^3 не содержит градиентов от P_ε и $Q_{s\varepsilon}$, оценки которых могут зависеть от ϑ .

Таким образом, учитывая (4.10)–(4.17) в неравенстве (4.7), получаем

$$\begin{aligned}
I &\leq \left| \int_0^t \left[\int_{\Omega_0^\varepsilon} ((m_0 Q_s'')_\varepsilon * (v_s''), r'_t) dx - \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((m_0 P'')_\varepsilon * f, r'_t) dx \right. \right. \\
&\quad - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^2, e(r'_t)) dx - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((\tilde{A}_{2a})_\varepsilon \nabla v_2 + (\tilde{A}_{2b})_\varepsilon g, e(r'_t)) dx \\
&\quad + \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((r_2)_\varepsilon f, r'_t) dx - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((m_2 E_2)_\varepsilon v_2'', r'_t) dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((r_1)_\varepsilon f, r'_t) dx \\
&\quad \left. - \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((m_1 E_1)_\varepsilon v_1'', r'_t) dx - \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\tilde{A}_{1a})_\varepsilon \nabla v_1 + (\tilde{A}_{1b})_\varepsilon g, e(r'_t)) dx \right] dt \Big| \\
&\quad + C(\varepsilon + \sigma) + (\delta_1 + \delta_2) \mathcal{E}(r).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

В силу определений r удовлетворяет однородным граничным условиям Дирихле на $\partial\Omega$, и граница $S_2^\varepsilon = \partial\Omega_2^\varepsilon \setminus \partial\Omega$ имеет класс C^2 . Поэтому в области Ω_2^ε выполнена следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_{\Omega_2^\varepsilon} ((\tilde{A}_{2b})_\varepsilon g, e(r'_t)) dx = \int_{S_2^\varepsilon} ((\nu \tilde{A}_{2b})_\varepsilon g, r'_t) ds - \int_{\Omega_2^\varepsilon} (\operatorname{div}((\tilde{A}_{2b})_\varepsilon g), r'_t) dx \quad (4.19)$$

(см. формулы (2.10), (2.12) и [3]). Отметим, что $(\nu \tilde{A}_{2b})_\varepsilon = 0$ на S_2^ε в соответствии с (4.11). Из (3.6) следует, что

$$\operatorname{div}((\tilde{A}_{2b})_\varepsilon g) = \varepsilon^{-1}(\operatorname{div}_y \tilde{A}_{2b})_\varepsilon g + (\tilde{A}_{2b})_\varepsilon \nabla g. \quad (4.20)$$

Таким образом, используя (4.11), (4.19) и (4.20), заключаем, что

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((r_2)_\varepsilon f - (m_2 E_2)_\varepsilon v_2'', r'_t) dx - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((\tilde{A}_{2a})_\varepsilon \nabla v_2 + (\tilde{A}_{2b})_\varepsilon g, e(r'_t)) dx \\ &= \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((r_2)_\varepsilon f - (m_2 E_2)_\varepsilon v_2'', r'_t) dx - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((\tilde{A}_{2a})_\varepsilon \nabla^2 v_2 + (\tilde{A}_{2b})_\varepsilon \nabla g, r'_t) dx. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Определим $E_2^0(y) = (m_2(y)E_2(y))/M_2$. Эта матричнозначная функция примечательна тем, что $\langle E_2^T E_2^0 \rangle_2 = \tilde{E}$ в соответствии с (1.17) и (1.20). Введем также обозначения для матричнозначных функций

$$\begin{aligned} r_2^0(y) &= r_2(y)E - E_2^0(y)R_2, \quad m_2^0(y) = m_2(y)E_2(y) - E_2^0(y)M_2, \\ A_{2a}^0(y) &= \tilde{A}_{2a}(y) - E_2^0(y)\hat{A}_2, \quad A_{2b}^0(y) = \tilde{A}_{2b}(y) - E_2^0(y)\tilde{B}_2, \end{aligned} \quad (4.22)$$

ортогональных на Y_2 матричнозначной функции $E_2(y)$:

$$\langle E_2^T r_2^0 \rangle_2 = 0, \quad \langle E_2^T m_2^0 \rangle_2 = 0, \quad \langle E_2^T A_{2a}^0 \rangle_2 = 0, \quad \langle E_2^T A_{2b}^0 \rangle_2 = 0. \quad (4.23)$$

Напомним, что $\hat{A}_2 = 0$ в силу (3.15), перепишем второе уравнение из (1.21) в виде

$$M_2 v_2'' - M_s^2 * (v_s'') - \hat{A}_2 \nabla^2 v_2 + a_s^2 v_s - R_2 f + R_2 * f - \tilde{B}_2 \nabla g = 0. \quad (4.24)$$

Умножим (4.24) слева на $E_{2\varepsilon}^0$ и справа на r'_t , проинтегрируем полученное соотношение по Ω_2^ε и учтем результат в (4.21). Тогда, используя (4.22), равенство (4.21) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 R_2)_\varepsilon * f + (E_2^0 a_s^2)_\varepsilon v_s - (E_2^0 M_s^2)_\varepsilon * (v_s''), r'_t) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((r_2^0)_\varepsilon f, r'_t) dx - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_{2a}^0)_\varepsilon \nabla^2 v_2 + (A_{2b}^0)_\varepsilon \nabla g + (m_2^0)_\varepsilon v_2'', r'_t) dx. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Последние два интеграла из (4.25) несутельственны в (4.18). Действительно, рассмотрим, например, первый из этих интегралов. Определим $U \in (H_P^1(Y_2))^n \cap L^2(Y_2)^n / \mathfrak{R}^n$ как 1-периодическое решение задачи Неймана на Y_2 :

$$-\operatorname{div}_y(A_2 \nabla_y U) = r_2^0 \text{ в } Y_2, \quad -\nu(A_2 \nabla_y U) = 0 \text{ на } S_2. \quad (4.26)$$

В силу (4.23) и леммы 3 такое решение существует и удовлетворяет оценке

$$\|(A_2 \nabla_y U)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)^{n \times n \times n}} \leq C, \quad (4.27)$$

поскольку область $\Omega_2^\varepsilon \subset \Omega$ ограничена и для A_2 выполнено условие эллиптичности (1.7). Следовательно, используя (4.19), (4.20) и (4.26), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((r_2^0)_\varepsilon f, r'_t) dx &= - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((\operatorname{div}_y (A_2 \nabla_y U))_\varepsilon f, r'_t) dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y U)_\varepsilon (\nabla f), r'_t) dx - \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} (\operatorname{div}((A_2 \nabla_y U)_\varepsilon f), r'_t) dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y U)_\varepsilon (\nabla f), r'_t) dx + \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y U)_\varepsilon f, e(r'_t)) dx, \end{aligned}$$

поскольку $(\nu(A_2 \nabla_y U))_\varepsilon = 0$ на S_2^ε в соответствии с (4.26). Поэтому, учитывая гладкость f , неравенство (4.27) и повторяя доказательство (4.13), получаем

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((r_2^0)_\varepsilon f, r'_t) dx dt \right| \leq C\varepsilon + \delta_3 \mathcal{E}(r). \quad (4.28)$$

Используя первое уравнение из (1.21) и (4.12), можно поменять в (4.19)–(4.28) индекс 2 на 1. Тогда с точностью до несущественных в (4.18) слагаемых интегралы по Ω_1^ε из (4.18) можно переписать в виде

$$I_1 = \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((E_1^0 R_1^0)_\varepsilon * f + (E_1^0 a_s^1)_\varepsilon v_s - (E_1^0 M_s^1)_\varepsilon * (v_s''), r'_t) dx, \quad (4.29)$$

где $E_1^0 = (m_1 E_1)/M_1$ и $E_1 = E$ на Ω_1^ε в соответствии с (1.16).

Рассмотрим теперь интеграл по Ω_0^ε из (4.18), содержащий $u^2 = u^0 + u^1$. Из (1.6) и (4.15) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^1, e(r'_t)) dx &= \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, e(r'_t)) dx \\ &= \varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, e(r'_t)) dx + \varepsilon \omega \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, e(r'_t)) dx, \end{aligned} \quad (4.30)$$

где $\omega = \sigma/\varepsilon^2 - \vartheta$ и последний интеграл несущественен в (4.8). Действительно, интегрируя по частям, как и в (2.6)–(2.8), имеем

$$\begin{aligned} &\left| \varepsilon \omega \int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, e(r'_t)) dx dt \right| \\ &\leq \varepsilon |\omega| \left| \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, e(r)) dx + \int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v'_s, e(r)) dx dt \right| \\ &\leq \varepsilon |\omega| \|e(r)\|_{C^0([0,T]; L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n})} \\ &\quad \times (\|(A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s\|_{C^0([0,T]; L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n})} + \|(A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v'_s\|_{L^1(0,T; L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n})}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma}} |\omega| C. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Здесь учтены лемма 1, первое неравенство из (4.2) для E_s и гладкость v_s для $s = 1, 2$. Кроме того, используя (1.6) и (4.15), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^0, e(r'_t)) dx \\
&= \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, e(r'_t)) dx - \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y Q_s)_\varepsilon * (v_s''), e(r'_t)) dx \\
&= \varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, e(r'_t)) dx - \varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y Q_s)_\varepsilon * (v_s''), e(r'_t)) dx \\
&\quad + \varepsilon \omega \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, e(r'_t)) dx - \varepsilon \omega \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y Q_s)_\varepsilon * (v_s''), e(r'_t)) dx,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

где последние два интеграла несущественны в (4.8). Действительно, как и в (4.31), имеем

$$\begin{aligned}
& \left| \varepsilon \omega \int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, e(r'_t)) dx dt \right| \\
&\leq \varepsilon |\omega| \|e(r)\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n})} \\
&\quad \times (\|(A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n})} + \|(A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * (f'_t)\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n})}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma \vartheta}} |\omega| C,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

где учтены леммы 1 и 7, неравенство (4.3) и гладкость f .

Для области Ω_0^ε также выполнена формула интегрирования по частям (4.19), но с обратным знаком у граничного интеграла, поскольку нормаль ν_ε является внутренней для границы S_0^ε и внешней для границ S_1^ε и S_2^ε . Поэтому, учитывая (4.20), получаем

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, e(r'_t)) dx \\
&= \varepsilon \vartheta \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, r'_t) ds + \varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} (\operatorname{div}((A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s), r'_t) dx \\
&= \varepsilon \vartheta \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, r'_t) ds + \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, r'_t) dx \\
&\quad + \varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon \nabla v_s, r'_t) dx,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

где предпоследний интеграл равен нулю (в силу (1.16), (1.18)), а вклад последнего интеграла в (4.18) оценивается величиной $\varepsilon \vartheta C$ (в силу первого неравенства из (4.2) для E_s , гладкости v_s и леммы 1). Кроме того, имеем

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, e(r'_t)) dx \\
&= \varepsilon \vartheta \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, r'_t) ds + \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, r'_t) dx \\
&\quad + \varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * \nabla f, r'_t) dx,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

где предпоследний интеграл сокращается с интегралом по Ω_0^ε из (4.18), содержащим f (в силу (1.19)), а вклад последнего интеграла в (4.18) оценивается величиной $\varepsilon\sqrt{\vartheta}C$ (в силу лемм 1, 7, неравенства (4.3) и гладкости f). Аналогичные (4.35) равенства выполнены для интеграла по Ω_0^ε из (4.18), содержащего ϑ и Q_s (см. (4.32)).

Таким образом, интегралы по Ω_0^ε заменяются в (4.18) на интегралы по S_0^ε с точностью до несущественных слагаемых. Поэтому, используя (4.25), (4.29)–(4.35), неравенство (4.18) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I \leq & \left| \int_0^t \left[\int_{\Omega_1^\varepsilon} ((E_1^0 R_1^0)_\varepsilon * f + (E_1^0 a_s^1)_\varepsilon v_s - (E_1^0 M_s^1)_\varepsilon * (v_s''), r_t') dx \right. \right. \\ & + \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 R_2^0)_\varepsilon * f, r_t') dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 a_s^2)_\varepsilon v_s - (E_2^0 M_s^2)_\varepsilon * (v_s''), r_t') dx \\ & + \varepsilon \vartheta \int_{S_2^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, r_t') ds - \varepsilon \vartheta \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y Q_s)_\varepsilon * (v_s''), r_t') ds \\ & + \varepsilon \vartheta \int_{S_1^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, r_t') ds + \varepsilon \vartheta \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, r_t') ds \left. \right] dt \Big| \\ & + C \left(\varepsilon(1 + \vartheta + \sqrt{\vartheta}) + \sigma + \frac{\varepsilon|\omega|}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\varepsilon|\omega|}{\sqrt{\sigma\vartheta}} \right) + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)\mathcal{E}(r), \end{aligned} \quad (4.36)$$

поскольку $S_0^\varepsilon = S_1^\varepsilon \cup S_2^\varepsilon$. Интегралы по Ω_1^ε и Ω_2^ε из (4.36) оцениваются одинаково: с точностью до несущественных слагаемых эти интегралы сокращаются с соответствующими граничными интегралами по S_1^ε и S_2^ε . Поэтому рассмотрим, например, интеграл по Ω_2^ε , содержащий матричнозначную функцию R_2^0 . В определение этой функции входит вторая производная по t от решений задачи (1.19). Непосредственно получить априорную оценку для этой производной достаточно сложно. Однако свертка по t примечательна тем, что производные по t можно “перебросить” на второй достаточно гладкий множитель, и возникшая проблема легко решается.

Напомним, что $\dot{P}$ обозначает такую первообразную по t от P , что $\dot{P}|_{t=0} = 0$. Из равенств (2.20) и условий теоремы следует, что

$$\begin{aligned} R_2^0 * f &= \langle m_0 E_2^T P_{tt}'' \rangle_0 * f = \langle m_0 E_2^T P_t' - E_2^T r_0 \rangle_0 * (f_t'), \\ (\nu A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f &= (\nu A_0 \nabla_y \dot{P})_\varepsilon * (f_t') \end{aligned} \quad (4.37)$$

(см. (3.23)). Интегрируя по t уравнение для P из (1.19), имеем

$$m_0 P_t' - r_0 E = \vartheta \operatorname{div}(A_0 \nabla_y \dot{P}) \quad \text{в } Y_0 \times (0, T). \quad (4.38)$$

По определению $P_t' = \dot{P}_{tt}''$ и поэтому $\dot{P}$ удовлетворяет неравенству (4.3) (см. доказательство леммы 1).

Из неравенств (4.3) для P и $\dot{P}$ следует, что $W \equiv \vartheta A_0 \nabla_y \dot{P} \in L^2(Y_0)^{n \times n \times n}$ и $\operatorname{div}_y W \in L^2(Y_0)^{n \times n}$ для всех $t \in [0, T]$. Поэтому для таких $t \in [0, T]$ определен след νW на S_0 как элемент пространства $H_P^{-1/2}(S_0)^{n \times n}$ и

$$\|\nu W\|_{H_P^{-1/2}(S_0)^{n \times n}}^2 \leq C(\|\vartheta A_0 \nabla_y \dot{P}\|_{L^2(Y_0)^{n \times n \times n}}^2 + \|m_0 P_t' - r_0 E\|_{L^2(Y_0)^{n \times n}}^2)$$

в соответствии с неравенством (2.11). Тогда из леммы 4 следует, что

$$\|\nu W\|_{C^0([0,T];H_P^{-1/2}(S_0)^{n \times n})}^2 \leq C(1 + \vartheta). \quad (4.39)$$

Умножим (4.38) на E_2^T , проинтегрируем полученное соотношение по Y_0 и затем по частям. Тогда, учитывая (1.18) и (2.10), получаем

$$\langle E_2^T r_0 - m_0 E_2^T P'_t \rangle_0 = \vartheta \int_{S_2} E_2^T \nu (A_0 \nabla_y \dot{P}) ds$$

(см. (3.20)). Эти равенства гарантируют для всех $t \in [0, T]$ разрешимость задачи Неймана на Y_2 :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y (A_2 \nabla_y V) &= E_2^0 \langle E_2^T r_0 - m_0 E_2^T P'_t \rangle_0 \quad \text{в } Y_2, \\ -\nu (A_2 \nabla_y V) &= \vartheta \nu (A_0 \nabla_y \dot{P}) \quad \text{на } S_2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

В силу леммы 3 для всех $t \in [0, T]$ существует 1-периодическое решение $V \in (H_P^1(Y_2)^n \cap L^2(Y_2)^n / \mathbb{R})^n$ задачи (4.40) и

$$\begin{aligned} \|A_2 \nabla_y V\|_{L^2(Y_2)^{n \times n \times n}} \\ \leq C(\|\vartheta \nu (A_0 \nabla_y \dot{P})\|_{H_P^{-1/2}(S_2)^{n \times n}} + \|E_2^0 \langle E_2^T r_0 - m_0 E_2^T P'_t \rangle_0\|_{L^2(Y_2)^{n \times n}}). \end{aligned}$$

Следовательно, используя (4.2), (4.3) и (4.39), имеем

$$\|(A_2 \nabla_y V)_\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_2^\varepsilon)^{n \times n \times n})} \leq C\sqrt{1 + \vartheta} \leq C(1 + \sqrt{\vartheta}), \quad (4.41)$$

поскольку область $\Omega_2^\varepsilon \subset \Omega$ ограничена.

Таким образом, используя (4.19), (4.20), (4.37) и (4.40), получаем

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 R_2^0)_\varepsilon * f, r'_t) dx &= - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((\operatorname{div}_y A_2 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t), r'_t) dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y V)_\varepsilon * (\nabla f'_t), r'_t) dx - \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} (\operatorname{div}((A_2 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t)), r'_t) dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y V)_\varepsilon * (\nabla f'_t), r'_t) dx + \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t), e(r'_t)) dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{S_2^\varepsilon} ((\nu A_2 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t), r'_t) ds \\ &= \varepsilon \vartheta \int_{S_2^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y \dot{P})_\varepsilon * (f'_t), r'_t) ds + \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y V)_\varepsilon * (\nabla f'_t), r'_t) dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t), e(r'_t)) dx, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где последние два интеграла несутся в (4.36) (в силу лемм 1 и 7, гладкости f и (4.41)), а граничный интеграл сокращается с соответствующим граничным интегралом из (4.36) в силу (4.37). Оценивая аналогичным образом оставшиеся в (4.36) интегралы и выбирая подходящие $\delta_1, \dots, \delta_l$, заключаем, что

$$\mathcal{E}(r) \leq C \left(\varepsilon(1 + \vartheta + \sqrt{\vartheta}) + \sigma + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma}} |\omega| + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma \vartheta}} |\omega| \right). \quad (4.43)$$

Из условия (1.2) следует, что $\varepsilon/\sqrt{\sigma} \rightarrow 1/\sqrt{\vartheta}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $\varepsilon/\sqrt{\sigma}$ ограничена, что доказывает теорему 2.

§ 5. Доказательство теоремы 1

В случае, когда выполнено условие (1.1), начальные члены асимптотического разложения решения задачи (1.4) определим равенством (3.47). Определим также подправленную асимптотику v_a равенством

$$v_a = v + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} E_{2\varepsilon} v_2 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} p_\varepsilon f - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} q_\varepsilon v''_{tt} + \varepsilon(N_{1a})_\varepsilon \eta \nabla v + \varepsilon(N_{1b})_\varepsilon g + \varepsilon(N_{2a}^1)_\varepsilon \eta \nabla v + \varepsilon(N_{2b})_\varepsilon g \quad (5.1)$$

(см. § 4). Здесь v является решением задачи (1.15) и v_2 удовлетворяет соотношениям (3.44) и (3.45). Кроме того, выполнены неравенства (4.2) и аналогичные неравенства для матричнозначных функций E_2 , N_{1b} , N_{2a}^1 , N_{2b} , p и q . Напомним, что эти функции определяются в (1.11), (1.13), (1.18), (2.15), (3.11), (3.41) и (3.9), где E_2 заменено на E_2^1 .

Предположим сначала, что $w_0 = 0$ и $g|_{t=0} = 0$. Пусть u является решением задачи (1.4). Введем обозначения (4.5). Тогда выполнено неравенство (4.6) и $r_a|_{t=0} = 0$ в соответствии с предположениями на начальные данные.

В силу представления (5.1) и первого неравенства из (4.2) имеем

$$\|r'_t|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right). \quad (5.2)$$

Кроме того, $r|_{t=0} = (\varepsilon^2/\sigma) q_\varepsilon v''_{tt}|_{t=0} - (\varepsilon^2/\sigma) p_\varepsilon f|_{t=0}$ и эта вектор-функция имеет нулевые компоненты на $\bar{\Omega}_{12}^\varepsilon$. Следовательно, используя формулу дифференцирования (4.4) и неравенство (4.2) для q и p , получаем

$$\sigma \|e(r|_{t=0})\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n}}^2 + \|e(r|_{t=0})\|_{L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^{n \times n}}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right). \quad (5.3)$$

Таким образом, учитывая доказательство леммы 1 и неравенства (5.2), (5.3), для доказательства теоремы 1 достаточно получить неравенство

$$I \leq \frac{1}{2} \mathcal{E}(r) + C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right), \quad (5.4)$$

где I определено в (4.7) и постоянная C не зависит от ε и σ .

Используя равенства (3.16) и (4.4), имеем

$$\begin{aligned} \nabla v_a &= \nabla r_a + (E_1 + \nabla_y N_{1a})_\varepsilon \nabla v + (\nabla_y N_{1b})_\varepsilon \nabla g \\ &\quad + (E_2^1 + \nabla_y N_{2a}^1)_\varepsilon \nabla v + (\nabla_y N_{2b})_\varepsilon \nabla g + \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y E_2)_\varepsilon v_2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y p)_\varepsilon f - \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y q)_\varepsilon v''_{tt} + \varepsilon J_1 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} J_2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где интегралы по $\Omega \times (0, t)$ из (4.7), содержащие ∇r_a , J_1 и J_2 , несущественны в (5.4) (см., например, (4.13)).

Определим $\tilde{A}_{2a}(y) = A_2 E_2^1 + A_2 \nabla_y N_{2a}^1$ и $\tilde{A}_{2b}(y) = B_2 + A_2 \nabla_y N_{2b}$. Тогда выполнены соотношения (4.11), в которых $\hat{A}_2$ следует заменить на $\hat{A}_2^1 = \langle E_2^T \tilde{A}_{2a} \rangle_2$ (равное нулю в силу (3.15)), и равенство

$$A_\varepsilon^\sigma \nabla v_a + B_\varepsilon^\sigma g = A_\varepsilon^\sigma \nabla r_a + \varepsilon A_\varepsilon^\sigma J_1 + (\tilde{A}_{2a})_\varepsilon \nabla v + (\tilde{A}_{2b})_\varepsilon g \quad \text{в } \Omega_2^\varepsilon. \quad (5.6)$$

Аналогично получаем равенство (4.12), в котором v_1 заменено на v . Кроме того, равенства (4.14) в рассматриваемом случае заменяются на равенства

$$\begin{aligned} (v_a)''_{tt} &= v''_{tt} + \varepsilon J_3 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} J_4 \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon, \\ (v_a)''_{tt} &= E_{1\varepsilon} v''_{tt} + \varepsilon J_3 \quad \text{в } \Omega_1^\varepsilon, \quad (v_a)''_{tt} = E_{2\varepsilon}^1 v''_{tt} + \varepsilon J_3 \quad \text{в } \Omega_2^\varepsilon, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где соответствующие интегралы с J_3 и J_4 несущественны в (5.4).

Выделяя сингулярные слагаемые в (5.5), введем обозначения

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y p)_\varepsilon f - \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y q)_\varepsilon v''_{tt}, \\ u^1 &= \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y E_2)_\varepsilon v_2, \quad u^2 = u^0 + u^1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

и определим u^3 из (4.16). Тогда выполнено (4.17). Следовательно, интегралы по $\Omega_0^\varepsilon \times (0, t)$ из (4.7), содержащие $A_\sigma^\varepsilon u^3$ и $B_\sigma^\varepsilon g$, несущественны в (5.4).

Таким образом, учитывая (4.10)–(4.13), (4.17), (5.5)–(5.8) в (4.7), имеем

$$\begin{aligned} I &\leq \left| \int_0^t \left[\int_{\Omega_0^\varepsilon} ((r_0)_\varepsilon f, r'_t) dx - \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((m_0)_\varepsilon v''_{tt}, r'_t) dx \right. \right. \\ &\quad - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^2, e(r'_t)) dx - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((\tilde{A}_{2a})_\varepsilon \nabla v + (\tilde{A}_{2b})_\varepsilon g, e(r'_t)) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((r_2)_\varepsilon f, r'_t) dx - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((m_2 E_2^1)_\varepsilon v''_{tt}, r'_t) dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((r_1)_\varepsilon f, r'_t) dx \\ &\quad \left. - \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((m_1 E_1)_\varepsilon v''_{tt}, r'_t) dx - \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\tilde{A}_{1a})_\varepsilon \nabla v + (\tilde{A}_{1b})_\varepsilon g, e(r'_t)) dx \right] dt \Big| \\ &\quad + C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right) + (\delta_1 + \delta_2) \mathcal{E}(r). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Обозначим интегралы по Ω_2^ε из (5.9) через I_2 . Тогда, используя (4.11), (4.19) и (4.20), получаем

$$I_2 = \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((r_2)_\varepsilon f - (m_2 E_2^1)_\varepsilon v''_{tt}, r'_t) dx - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((\tilde{A}_{2a})_\varepsilon \nabla^2 v + (\tilde{A}_{2b})_\varepsilon \nabla g, r'_t) dx. \quad (5.10)$$

Определим $E_2^0(y) = (m_2(y) E_2(y))/M_2$. Введем также обозначения (4.22), в которых $\hat{A}_2$ следует заменить на $\hat{A}_2^1$, для матричнозначных функций, удовлетворяющих соотношениям (4.23). Напомнив, что $\hat{A}_2^1 = 0$ в силу (3.15), перепишем равенство (3.44) в виде

$$M_2 v''_{tt} + \hat{m}_2^0 v''_{tt} - \hat{A}_2^1 \nabla^2 v + \hat{a}_2^2 v_2 - R_2 f - \hat{r}_2^0 f - \tilde{B}_2 \nabla g = 0. \quad (5.11)$$

Умножим (5.11) слева на $E_{2\varepsilon}^0$ и справа на r'_t , проинтегрируем полученное соотношение по Ω_2^ε и учтем результат в (5.10). Тогда, используя (4.22), равенство (5.10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 \hat{m}_2^0)_\varepsilon v''_{tt} + (E_2^0 \hat{a}_2^2)_\varepsilon v_2 - (E_2^0 \hat{r}_2^0)_\varepsilon f, r'_t) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((r_2^0)_\varepsilon f, r'_t) dx - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_{2a}^0)_\varepsilon \nabla^2 v + (A_{2b}^0)_\varepsilon \nabla g + (m_2^0)_\varepsilon v''_{tt}, r'_t) dx. \end{aligned} \quad (5.12)$$

В силу (4.26)–(4.28) последние два интеграла из (5.12) несущественны в (5.9).

Аналогично с точностью до несущественных в (5.9) слагаемых интегралы по Ω_1^ε из (5.9) можно переписать в виде

$$I_1 = \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((E_1^0 \widehat{m}_1^0)_\varepsilon v_{tt}'' + (E_1^0 \widehat{a}_2^1)_\varepsilon v_2 - (E_1^0 \widehat{r}_1^0)_\varepsilon f, r_t') dx, \quad (5.13)$$

где $E_1^0 = (m_1 E_1)/M_1$ и использовано равенство (3.45).

Рассмотрим теперь интеграл по Ω_0^ε из (5.9), содержащий u^2 . Непосредственно из (1.6) и (5.8) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^2, e(r_t')) dx &= \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_2)_\varepsilon v_2, e(r_t')) dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y p)_\varepsilon f, e(r_t')) dx - \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y q)_\varepsilon v_{tt}'', e(r_t')) dx. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Таким образом, как и в (4.34), получаем

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_2)_\varepsilon v_2, e(r_t')) dx &= \varepsilon \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y E_2)_\varepsilon v_2, r_t') ds \\ &+ \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y E_2)_\varepsilon v_2, r_t') dx + \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_2)_\varepsilon \nabla v_2, r_t') dx, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где предпоследний интеграл равен нулю (в силу (1.18)), а вклад последнего интеграла в (5.9) оценивается величиной εC (в силу первого неравенства из (4.2) для E_2 , гладкости v_2 и леммы 1). Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y p)_\varepsilon f, e(r_t')) dx &= \varepsilon \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y p)_\varepsilon f, r_t') ds \\ &+ \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y p)_\varepsilon f, r_t') dx + \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y p)_\varepsilon \nabla f, r_t') dx, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где предпоследний интеграл сокращается с интегралом по Ω_0^ε из (5.9), содержащим f (в силу (2.15)), а вклад последнего интеграла в (5.9) оценивается величиной εC (в силу леммы 1, неравенства (4.2) и гладкости f). Аналогичное (5.16) равенство выполнено для интеграла по Ω_0^ε из (5.14), содержащего q .

Таким образом, интегралы по Ω_0^ε заменяются в (5.9) на интегралы по S_0^ε с точностью до несущественных слагаемых. Поэтому, используя (5.12)–(5.16), неравенство (5.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I &\leq \left| \int_0^t \left[\int_{\Omega_1^\varepsilon} ((E_1^0 \widehat{m}_1^0)_\varepsilon v_{tt}'' + (E_1^0 \widehat{a}_2^1)_\varepsilon v_2 - (E_1^0 \widehat{r}_1^0)_\varepsilon f, r_t') dx \right. \right. \\ &\quad - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 \widehat{r}_2^0)_\varepsilon f, r_t') dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 \widehat{a}_2^2)_\varepsilon v_2 + (E_2^0 \widehat{m}_2^0)_\varepsilon v_{tt}'', r_t') dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{S_2^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y p)_\varepsilon f, r_t') ds - \varepsilon \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y q)_\varepsilon v_{tt}'', r_t') ds \\ &\quad + \varepsilon \int_{S_1^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y p)_\varepsilon f, r_t') ds + \varepsilon \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y E_2)_\varepsilon v_2, r_t') ds \Big] dt \Big| \\ &\quad + C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right) + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \mathcal{E}(r), \end{aligned} \quad (5.17)$$

поскольку $S_0^\varepsilon = S_1^\varepsilon \cup S_2^\varepsilon$. Интегралы по Ω_1^ε и Ω_2^ε из (5.17) оцениваются одинаково: с точностью до несущественных слагаемых эти интегралы сокращаются с соответствующими граничными интегралами по S_1^ε и S_2^ε . Поэтому рассмотрим, например, интеграл по Ω_2^ε , содержащий $E_2^0 \hat{r}_2^0$.

Обозначим $W = A_0 \nabla_y p$. Тогда $W \in L^2(Y_0)^{n \times n \times n}$ и $\operatorname{div}_y W \in L^2(Y_0)^{n \times n}$, поскольку $p \in H_P^1(Y_0)^{n \times n}$ удовлетворяет первому уравнению из (2.15). Поэтому определен след νW на S_0 как элемент пространства $H_P^{-1/2}(S_0)^{n \times n}$ в соответствии с неравенством (2.11). Учитывая (1.17) и (3.30), получаем

$$\langle E_2^T E_2^0 \hat{r}_2^0 \rangle_0 = \hat{r}_2^0 = \int_{S_2} E_2^T \nu(A_0 \nabla_y p) ds.$$

Эти равенства гарантируют разрешимость 1-периодической задачи на Y_2 :

$$-\operatorname{div}_y(A_2 \nabla_y U) = E_2^0 \hat{r}_2^0 \text{ в } Y_2, \quad -\nu(A_2 \nabla_y U) = \nu(A_0 \nabla_y p) \text{ на } S_2. \quad (5.18)$$

В силу леммы 3 решение этой задачи существует и удовлетворяет (4.27).

Таким образом, используя (4.19), (4.20) и (5.18), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 \hat{r}_2^0)_\varepsilon f, r'_t) dx &= - \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((\operatorname{div}_y A_2 \nabla_y U)_\varepsilon f, r'_t) dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y U)_\varepsilon \nabla f, r'_t) dx - \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} (\operatorname{div}((A_2 \nabla_y U)_\varepsilon f), r'_t) dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y U)_\varepsilon \nabla f, r'_t) dx + \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y U)_\varepsilon f, e(r'_t)) dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{S_2^\varepsilon} ((\nu A_2 \nabla_y U)_\varepsilon f, r'_t) ds \\ &= \varepsilon \int_{S_2^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y p)_\varepsilon f, r'_t) ds + \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y U)_\varepsilon \nabla f, r'_t) dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((A_2 \nabla_y U)_\varepsilon f, e(r'_t)) dx, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где последние два интеграла несущественны в (5.17) (в силу леммы 1, гладкости f и неравенства (4.27)), а граничный интеграл сокращается с соответствующим граничным интегралом из (5.17), содержащим f . Оценивая аналогичным образом оставшиеся в (5.17) интегралы и выбирая соответствующие $\delta_1, \dots, \delta_l$, заключаем, что

$$\mathcal{E}(r) \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right). \quad (5.20)$$

Будем обозначать через $\dot{u}, \dot{f}, \dot{g}, \dot{v}$ первообразные по t от вектор-функций u, f, g, v из (1.4) и (1.15). Тогда $\dot{u}$ является решением задачи (1.4) с правой частью $r_\varepsilon \dot{f} + m_\varepsilon w_1 + \operatorname{div}(B_\sigma^\varepsilon \dot{g})$ и $\dot{u}|_{t=0} = 0$. Для такой задачи уже доказано неравенство (5.20), и поэтому

$$\|u - v\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)}^2 = \|\dot{u}'_t - \dot{v}'_t\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right),$$

что завершает доказательство теоремы 1.

§6. Доказательство теоремы 3

Из условия (1.3) следует, что $\varkappa \equiv \sqrt{\sigma}/\varepsilon$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Определим P , Q_1 и Q_2 как 1-периодические решения начально-краевых задач (1.19), в которых ϑ заменено на $\varkappa^2$. Пусть v_1, v_2 являются решениями задачи (1.22) и подправленная асимптотика v_a задана равенством (4.1). Как и в §5, предположим сначала, что $w_0 = 0$ и $g|_{t=0} = 0$. Введем обозначения (4.5). Тогда $r|_{t=0} = 0$. Кроме того, из (2.20) и (4.1) получаем

$$\|r'_t|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)^n} \leq C\varepsilon. \quad (6.1)$$

Таким образом, заменяя ϑ на $\varkappa^2$ в соответствующих формулах из §4, для доказательства теоремы 3 можно повторить доказательство теоремы 2 (по крайней мере, до неравенства (4.36)). Задача (1.22) совпадает с задачей (1.21), в которой $M_s^l = 0$, $a_s^l = 0$ и $R_s^0 = 0$ для $s, l = 1, 2$. Поэтому в соответствии с рассуждениями из §4 неравенство (4.36) принимает вид

$$\begin{aligned} I \leq & \left| \int_0^t \left[\varepsilon \varkappa^2 \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, r'_t) ds \right. \right. \\ & - \varepsilon \varkappa^2 \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y Q_s)_\varepsilon * (v_s''), r'_t) ds + \varepsilon \varkappa^2 \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, r'_t) ds \left. \right] dt \Big| \\ & + C(\varepsilon(1 + \varkappa^2 + \varkappa) + \sigma) + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)\mathcal{E}(r). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Напомним, что $\omega = \sigma/\varepsilon^2 - \varkappa^2$ в обозначениях из §4 и поэтому $\omega = 0$ в (4.36).

Для $s = 1, 2$ из неравенств Коши–Буняковского и (4.2) получаем

$$\left| \left\langle m_0 E_s^T \left(P'_t - \frac{r_0}{m_0} E \right) \right\rangle_0 \right| \leq C \left\| P'_t - \frac{r_0}{m_0} E \right\|_{L^2(Y_0)^{n \times n}}, \quad (6.3)$$

и поэтому $\left\| \left\langle m_0 E_s^T (P'_t - (r_0/m_0)E) \right\rangle_0 \right\|_{C^0([0,T])^{n \times n}} \leq C\sqrt{\varkappa}$ с силу леммы 6. В соответствии с (3.21) имеем $a_s^l = \varkappa^2 \langle \nabla_y E_l^T A_0 \nabla_y E_s \rangle_0$ для $s, l = 1, 2$. Поэтому для $l = 1, 2$ выполнено неравенство

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega_l^\varepsilon} ((E_l^0 R_l^0)_\varepsilon * f + (E_l^0 a_s^l)_\varepsilon v_s - (E_l^0 M_s^l)_\varepsilon * (v_s''), r'_t) dx dt \right| \leq C\sqrt{\varkappa}, \quad (6.4)$$

где учтены равенство (3.23), леммы 1, 8, неравенство (6.3) и гладкость f , v_1 и v_2 . Следовательно, добавляя $C\sqrt{\varkappa}$ в правую часть неравенства (6.2), интегралы из (6.4) для $l = 1, 2$ можно внести под знак модуля в (6.2).

Таким образом, доказано неравенство (4.36) с дополнительным слагаемым $C\sqrt{\varkappa}$ в правой части. Поэтому, как и в §4 (см. (4.37)–(4.43)), получаем оценку

$$\mathcal{E}(r) \leq C(\varepsilon(1 + \varkappa^2 + \varkappa) + \sigma + \sqrt{\varkappa}). \quad (6.5)$$

Переходя к первообразным от решения задачи (1.4), как и в §5, можно избавиться от дополнительных предположений на исходные данные. При этом следует иметь в виду равенства (2.20). Поэтому из (6.5) получаем

$$\begin{aligned} & \|u - E_{s\varepsilon} v_s - P_\varepsilon * f + Q_{s\varepsilon} * (v_s'')\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n)}^2 \\ & + \|u - E_{s\varepsilon} v_s\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^n)}^2 \leq C(\varepsilon(1 + \varkappa^2 + \varkappa) + \sigma + \sqrt{\varkappa}), \end{aligned} \quad (6.6)$$

и утверждение теоремы 3 следует из лемм 6, 7 и равенства (3.24).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $w_0 = 0$, $w_1 = 0$, $f, g_k \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^n$, где $k = 1, \dots, n$. В этом случае можно просто повторить доказательство теоремы 4 с ϑ , замененным на $\varkappa^2$. Тогда выполнено неравенство (4.43) – более точное, чем неравенство (6.5). Следовательно, используя (3.23), (3.24) и (6.3), получаем неравенство (6.6) с $\sqrt{\varkappa}$, замененным на $\varkappa$.

§7. Доказательство теоремы 4

В случае, когда выполнено условие (1.23), “энергетическую” норму для задачи (1.4) следует определить равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\mu(u) \equiv & \mu \|u_t'\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n)}^2 + \|u_t'\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^n)}^2 \\ & + \sigma \|e(u)\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n})}^2 + \|e(u)\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^{n \times n})}^2. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Тогда с сохранением доказательства для $\mathcal{E}_\mu(u)$ выполнено неравенство леммы 1.

Пусть выполнены условия (1.1) и (1.23). Начальные члены асимптотики решения задачи (1.4) можно определить равенством (3.49). Однако полезно подправить в этом разложении вектор-функцию $E_{2\varepsilon} v_2$ на множестве Ω_0^ε . Поэтому определим подправленную асимптотику v_a равенством

$$\begin{aligned} v_a = & v + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} (E_{2\varepsilon} v_2 + \varepsilon E_{2\varepsilon}^e \nabla v_2) + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} (p_\varepsilon f - q_\varepsilon v_{tt}'') \\ & + \varepsilon (N_{1a})_\varepsilon \eta \nabla v + \varepsilon (N_{1b})_\varepsilon g + \varepsilon (N_{2a}^1)_\varepsilon \eta \nabla v + \varepsilon (N_{2b})_\varepsilon g, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где η определено в §4, v является решением задачи (1.15) и v_2 удовлетворяет соотношениям (3.44) и (3.45). Кроме того, p и q определяются через решения задач (3.48) равенствами $p = \mu p^0$, $q = \mu q^0$ и $E_2^e \in H_P^1(Y)^{n \times \tilde{n} \times n}$ является 1-периодическим решением задачи Дирихле

$$-\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y E_2^e) = A_0 \nabla_y E_2 \quad \text{в } Y_0, \quad E_2^e = 0 \quad \text{на } \bar{Y}_{12}. \quad (7.3)$$

Как и в §5, для периодических функций из (7.2) выполнены неравенства, аналогичные неравенствам (4.2). Кроме того, равенство (7.2) “почти” совпадает с равенством (5.1). Поэтому, заменяя $\mathcal{E}(r)$ на $\mathcal{E}_\mu(r)$ в (5.4), (5.9), (5.17) и (5.20), для доказательства теоремы 4 можно фактически повторить доказательство теоремы 1 из §5. При этом оценки соответствующих интегралов по Ω_1^ε и Ω_2^ε не изменяются, и следует только уточнить оценки интегралов по Ω_0^ε . Оценим, например, вклад J_3 из (5.7) в неравенство (5.9).

По определению $m_{0\varepsilon} = \mu m_\varepsilon$ на Ω_0^ε , где $m(y)$ удовлетворяет (1.9). Поэтому, используя неравенство Коши–Буняковского и δ -неравенство, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} (\varepsilon m_{0\varepsilon} J_3, r'_t) dx dt \right| &\leq \varepsilon \sqrt{\mu} \left| \int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} (m_\varepsilon J_3, \sqrt{\mu} r'_t) dx dt \right| \\ &\leq \varepsilon \sqrt{\mu} \left(\frac{C}{2\delta} + \delta C \|\sqrt{\mu} r'_t\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n)}^2 \right) \\ &\leq C\varepsilon^2 \mu + \delta_4 \mathcal{E}_\mu(r), \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $\delta = \delta_4/(C\varepsilon\sqrt{\mu})$. Таким образом, этот интеграл несуществен в (5.9). Аналогично оценивается последний интеграл в (5.16), поскольку $p = \mu p_0$ и p_0 удовлетворяет неравенству (4.2).

Определенные трудности возникают при оценке последнего интеграла в (5.15). Отметим, что E_2^ε выбрано так, что этот интеграл сокращается с соответствующим интегралом от $\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y E_2^\varepsilon)$, но появляются дополнительные интегралы порядка ε^2 . Точнее, в соответствии с (7.2) равенство (5.15) заменяется на равенство

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y (E_2 + \varepsilon E_2^\varepsilon \nabla_x))_\varepsilon v_2, e(r'_t)) dx &= \varepsilon \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y E_2)_\varepsilon v_2, r'_t) ds \\ &+ \varepsilon^2 \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y E_2^\varepsilon)_\varepsilon \nabla v_2, r'_t) ds + \varepsilon^2 \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_2^\varepsilon)_\varepsilon \nabla \nabla v_2, r'_t) dx, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где использованы уравнения из (1.18) и (7.3).

В соответствии с (5.17)–(5.19) первый граничный интеграл из (7.5) сокращается с суммой интегралов

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} ((E_1^0 \hat{a}_2^1)_\varepsilon v_2, r'_t) dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 \hat{a}_2^2)_\varepsilon v_2, r'_t) dx \quad (7.6)$$

из (5.17) с точностью до несущественных в (5.17) интегралов. Причем эти несущественные интегралы оцениваются на множествах Ω_1^ε и Ω_2^ε (см. (5.19)).

Аналогичным образом можно оценить второй граничный интеграл из (7.5). Действительно, введем обозначения

$$b_2^l = \langle E_l^T A_0 \nabla_y E_2 \rangle_0 = -\langle E_l^T \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y N_2^\varepsilon) \rangle_0 = \int_{S_l} E_l^T \nu (A_0 \nabla_y N_2^\varepsilon) ds, \quad (7.7)$$

где $l = 1, 2$ и использовано уравнение из (7.3) (см. (3.20) или (3.29)). Далее, рассмотрим сумму интегралов

$$\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((E_1^0 b_2^1)_\varepsilon \nabla v_2, r'_t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 b_2^2)_\varepsilon \nabla v_2, r'_t) dx. \quad (7.8)$$

Модуль этой суммы оценивается величиной εC в силу леммы 1, неравенств (4.2) и гладкости v_2 . Следовательно, сумму (7.8) можно внести под знак модуля в (5.17) (с сохранением этого неравенства) и сократить с вторым граничным интегралом из (7.5) (с точностью до несущественных в (5.17) слагаемых).

Таким образом, для доказательства теоремы 4 остается фактически оценить последний интеграл из (7.5). Обозначим этот интеграл через I_3 . Тогда в соответствии с (4.5) получаем

$$I_3 = \varepsilon^2 \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_2^\varepsilon)_\varepsilon \nabla^2 v_2, u'_t) dx - \varepsilon^2 \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_2^\varepsilon)_\varepsilon \nabla^2 v_2, (v_a)'_t) dx, \quad (7.9)$$

где последний интеграл несущественен в (5.17) в силу представления (7.2), неравенств (4.2) и гладкости v , v_2 и g .

Интегрируя по частям, как и в (2.6), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_2^\varepsilon)_\varepsilon \nabla^2 v_2, u'_t) dx dt \right| \\ & \leq \left| \varepsilon^2 \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_2^\varepsilon)_\varepsilon \nabla^2 v_2, u) dx \right| + \left| \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_2^\varepsilon)_\varepsilon \nabla^2 v'_2, u) dx dt \right| \\ & \quad + \left| \varepsilon^2 \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y E_2^\varepsilon)_\varepsilon \nabla^2 v_2^0, w_0) dx \right|, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где $v_2^0 = v_2|_{t=0}$ и последний интеграл несущественен в (5.17) в силу предположений на начальные данные.

Из неравенства леммы 1 следует, что $\|e(u)\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^{n \times n})} \leq C/\sqrt{\sigma}$ и $u = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$. Поэтому, учитывая неравенство Корна и неравенство Фридрихса, имеем для решения задачи (1.4) оценку $\|u\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^n)} \leq C/\sqrt{\sigma}$ (см., например, [2], [3]). Используя эту оценку, неравенство Коши–Буняковского и гладкость v_2 , можно оценить правую часть неравенства (7.10) величиной $C\varepsilon(\varepsilon/\sqrt{\sigma}) \leq C\varepsilon$, поскольку $\varepsilon/\sqrt{\sigma} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow 0$ в силу условия (1.1).

Таким образом, получена подходящая оценка для последнего интеграла из (5.15). Следовательно, как и в §5, имеем неравенство

$$\mu \|u - v\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n)}^2 + \|u - v\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^n)}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right). \quad (7.11)$$

Пусть v_0 обозначает решение задачи (1.15), в которой M и R заменены на $\widehat{M}$, $\widehat{R}$ соответственно. Тогда из неравенств (3.50) и (7.11) получаем

$$\mu \|u - v_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n)}^2 + \|u - v_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^n)}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right),$$

что завершает доказательство теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В соответствии с неравенством (3.50) асимптотику по μ для v из (7.11) можно уточнить и увеличить показатель степени μ в последнем неравенстве. Определяя дополнительные задачи на ячейке (типа задачи (7.3)), можно увеличить и показатели степеней σ и ε^2/σ в (7.11). Однако без дополнительных предположений не улучшается показатель степени ε в (7.11), чему препятствует неулучшаемость оценки (4.6), связанная с краевыми эффектами в задаче (1.4) вблизи $\partial\Omega$.

§ 8. Доказательство теоремы 5

Пусть выполнены условия (1.2) и (1.23). Начальные члены асимптотического разложения решения задачи (1.4) можно определить равенством (3.51). Как и в § 7, подправим в этом разложении вектор-функции $E_{1\varepsilon}v_1$ и $E_{2\varepsilon}v_2$ на множестве Ω_0^ε и определим подправленную асимптотику v_a равенством

$$v_a = E_{s\varepsilon}v_s + \varepsilon E_{s\varepsilon}^e \nabla v_s + P_\varepsilon f - Q_{s\varepsilon}v_s'' + \varepsilon(N_{sa})_\varepsilon \eta \nabla v_s + \varepsilon(N_{sb})_\varepsilon g_s, \quad (8.1)$$

где (v_1, v_2) является решением задачи (3.31), $P = (\mu/\vartheta)p^0$, $Q_s = (\mu/\vartheta)q_s^0$ и использованы обозначения из (3.51) и (4.1). Кроме того, E_2^e является 1-периодическим решением задачи (7.3) и $E_1^e \in H_P^1(Y)^{n \times n \times n}$ определяется как 1-периодическое решение задачи Дирихле

$$-\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y E_1^e) = A_0 \nabla_y E_1 \quad \text{в } Y_0, \quad E_1^e = 0 \quad \text{на } \bar{Y}_{12}. \quad (8.2)$$

Напомним, что в (8.1) и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам $s = 1, 2$.

Как уже отмечалось в § 3, симметричные матрицы $a_0 = \vartheta \tilde{a}$ и $\tilde{m}$ из (3.31), (3.32) неотрицательно определены. Поэтому существование и единственность достаточно гладкого решения задачи (3.31) проверяется по стандартной схеме (см. лемму 10 и [2], [3]). Однако при неоднородных начальных условиях в (3.31) константы в оценках соответствующих норм будут зависеть от ϑ . Впрочем, несложно выписать явно эту зависимость, но мы не будем на этом останавливаться, поскольку в дальнейшем эта зависимость не используется (в отличие от неравенства теоремы 2, которое использовалось при доказательстве теоремы 3). Напомним только, что ϑ — постоянная из условия (1.2).

Как и в § 5, для периодических функций из (8.1) выполнены неравенства, аналогичные неравенствам (4.2), и без ограничения общности можно считать, что $w_0 = 0$ и $g|_{t=0} = 0$. Кроме того, представление (8.1) достаточно “близко” к представлению (4.1), в котором * будем рассматривать как обычное умножение. Поэтому, заменяя $\mathcal{E}(r)$ на $\mathcal{E}_\mu(r)$ в соответствующих неравенствах из § 4, будем придерживаться схемы доказательства теоремы 2, отмечая только существенные изменения. Из (3.6), (3.31), (4.2) и (8.1) следует, что

$$\|r'_t|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \sigma \|e(r|_{t=0})\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n}}^2 \leq C(\varepsilon^2 + \mu^2) \quad (8.3)$$

и $e(r|_{t=0}) = 0$ на множестве $\bar{\Omega}_{12}^\varepsilon$ в силу предположений на начальные данные. Поэтому для доказательства теоремы 5 достаточно получить неравенство

$$I \leq \frac{1}{2} \mathcal{E}_\mu(r) + C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right), \quad (8.4)$$

где I определено в (4.7) и постоянная C не зависит от ε , σ и μ .

В соответствии с (8.1) равенства (4.14) в рассматриваемом случае заменяются на равенства

$$\begin{aligned} (v_a)_{tt}'' &= E_{s\varepsilon}v_s'' + \varepsilon J_5 + \mu J_6 \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon, \\ (v_a)_{tt}'' &= E_{1\varepsilon}v_1'' + \varepsilon J_5 \quad \text{в } \Omega_1^\varepsilon, \quad (v_a)_{tt}'' = E_{2\varepsilon}v_2'' + \varepsilon J_5 \quad \text{в } \Omega_2^\varepsilon, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где соответствующие интегралы с J_5 и J_6 несущественны в (8.4) (см., например, (7.4)). Тогда сохраняются соотношения (4.15)–(4.17), но неравенство (4.18) заменяется на неравенство

$$\begin{aligned} I \leq & \left| \int_0^t \left[\int_{\Omega_0^\varepsilon} ((r_0)_\varepsilon f, r'_t) dx - \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((m_0 E_s)_\varepsilon v''_s, r'_t) dx \right. \right. \\ & \left. \left. + I_1 + I_2 - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^2, e(r'_t)) dx \right] dt \right| \\ & + C(\varepsilon + \sigma + \mu^2) + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_4) \mathcal{E}_\mu(r), \end{aligned} \quad (8.6)$$

где, например, I_2 определяется равенством (4.21).

Заменяем равенство (4.24) на второе уравнение из (3.31). Тогда в соответствии с (4.19)–(4.28) получаем равенство

$$I_2 = \int_{\Omega_2^\varepsilon} ((E_2^0 \hat{m}_s^2)_\varepsilon v''_s + (E_2^0 a_s^2)_\varepsilon v_s - (E_2^0 \hat{r}_2^0)_\varepsilon f, r'_t) dx \quad (8.7)$$

с точностью до несущественных в (8.4) слагаемых. Аналогичное (8.7) равенство выполнено для интеграла I_1 из (8.6).

Рассмотрим теперь интеграл по Ω_0^ε из (8.6), содержащий $u^2 = u^1 + u^0$. Для этого интеграла выполнены соотношения (4.30), в которых $\omega = \sigma/\varepsilon^2 - \vartheta$ и последний интеграл несущественен в (8.4) (см. (4.31)). Здесь учтено, что величина $\varepsilon/\sqrt{\sigma}$ стремится к $1/\sqrt{\vartheta}$ и поэтому ограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow 0$. Аналогично выполнены соотношения (4.32), в которых последние два интеграла несущественны в (8.4) (см. (4.33)).

Кроме того, выполнены соотношения (4.34), в которых предпоследний интеграл равен нулю, а для оценки последнего интеграла следует иметь в виду второе слагаемое из (8.1), подправляющее $E_{s\varepsilon} v_s$ на множестве Ω_0^ε . Тогда в соответствии с (7.5)–(7.10) вклад последнего интеграла из (4.34) в неравенство (8.6) оценивается величиной $C\varepsilon$. Аналогично выполнены соотношения (4.35), в которых предпоследний интеграл сокращается с (первым) интегралом по Ω_0^ε из (8.6), содержащим f (в силу (3.48)), а вклад последнего интеграла в неравенство (8.6) оценивается величиной $C\mu^2\varepsilon$ (см. (7.4)). Напомним, что $P = (\mu/\vartheta)p^0$ в (8.1). Аналогичные (4.35) равенства выполнены для интеграла по Ω_0^ε из (8.6), содержащего q_s для $s = 1, 2$.

Таким образом, доказано неравенство (4.36), в котором последняя строка заменена правой частью из (8.4) и интегралы по Ω_1^ε и Ω_2^ε заменены на I_1 и I_2 . Для $s, l = 1, 2$ постоянные матрицы $\hat{m}_s^l$, a_s^l и $\hat{r}_s^0$ (см. (8.7)) определены так, что интегралы I_1 и I_2 сокращаются с граничными интегралами из (4.36) в соответствии с (3.21), (3.29), (3.30) и (5.17)–(5.19). Поэтому, как и в § 5, имеем

$$\begin{aligned} \mu \|u - E_{s\varepsilon} v_s\|_{C^0([0,T]; L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n)}^2 + \|u - E_{s\varepsilon} v_s\|_{C^0([0,T]; L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^n)}^2 \\ \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right). \end{aligned}$$

Пусть (v_1^0, v_2^0) обозначает решение задачи (1.21), в которой $M_s^l = 0$ и $R_s^l = 0$ для $s, l = 1, 2$. Эта задача определяет первое приближение по μ для задачи (3.31), поскольку выполнено условие (1.23). Поэтому в последнем неравенстве можно заменить (v_1, v_2) на (v_1^0, v_2^0) , что завершает доказательство теоремы 5.

§9. Доказательство теоремы 6

Пусть выполнены условия (1.3), (1.23) и (1.25). В соответствии с (3.52) определим подправленную асимптотику v_a равенством

$$v_a = E_{s\varepsilon} v_s + P_\varepsilon f - Q_{s\varepsilon} v_s'' + \varepsilon (N_{sa})_\varepsilon \eta \nabla v_s + \varepsilon (N_{sb})_\varepsilon g_s, \quad (9.1)$$

где $P = (\varepsilon^2 \mu / \sigma) p^0$, $Q_s = (\varepsilon^2 \mu / \sigma) q_s^0$ и (v_1, v_2) – решение задачи (3.31), в которой $a_s^l = 0$ для $s, l = 1, 2$. В (9.1) использованы обозначения из (3.52) и (4.1).

Как и в §8, достаточно гладкое решение рассматриваемой задачи (3.31) существует и определено однозначно. Для периодических функций из (9.1) выполнены неравенства, аналогичные неравенствам (4.2), и без ограничения общности можно считать, что $w_0 = 0$ и $g|_{t=0} = 0$. Кроме того, представление (9.1) достаточно “близко” к представлению (8.1). Поэтому, как и в §8, будем придерживаться схемы доказательства теоремы 2.

Из (3.6), (3.31), (4.2) и представления (9.1) следует, что

$$\|r'_t|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \sigma \|e(r)|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^{n \times n}}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 + \mu^2 + \left(\frac{\varepsilon^2 \mu}{\sigma} \right)^2 \right) \quad (9.2)$$

и $e(r)|_{t=0} = 0$ на множестве $\overline{\Omega}_{12}^\varepsilon$ в силу предположений на начальные данные. Поэтому для доказательства теоремы 6 достаточно получить неравенство

$$I \leq \frac{1}{2} \mathcal{E}_\mu(r) + C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} + \left(\frac{\varepsilon^2 \mu}{\sigma} \right)^2 \right), \quad (9.3)$$

где I определено в (4.7) и постоянная C не зависит от ε , σ и μ .

В соответствии с (9.1) выполнены равенства (8.5), в которых μJ_6 следует заменить на $(\varepsilon^2 \mu / \sigma) J_6$. Тогда соответствующие интегралы с J_5 и J_6 несутся в (9.3) (см. (7.4)). Кроме того, сохраняются соотношения (4.15)–(4.17), но неравенство (4.18) заменяется на неравенство

$$\begin{aligned} I \leq & \left| \int_0^t \left[\int_{\Omega_0^\varepsilon} ((r_0)_\varepsilon f, r'_t) dx - \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((m_0 E_s)_\varepsilon v_s'', r'_t) dx \right. \right. \\ & \left. \left. + I_1 + I_2 - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^2, e(r'_t)) dx \right] dt \right| \\ & + C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_4) \mathcal{E}_\mu(r), \end{aligned} \quad (9.4)$$

где, например, I_2 определяется равенством (8.7), в котором $a_s^2 = 0$ для $s = 1, 2$ (см. (4.19)–(4.28)). Аналогичное (8.7) равенство выполнено для I_1 из (9.4).

Рассмотрим теперь интеграл по Ω_0^ε из (9.4), содержащий $u^2 = u^1 + u^0$. Непосредственно из (1.6), (4.15) и (9.1) следует, что

$$\int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^1, e(r'_t)) dx dt = \int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} (A_0 \nabla_y E_s)_\varepsilon v_s, \sqrt{\sigma} e(r'_t) \right) dx dt \quad (9.5)$$

(см. (4.30)). Используя неравенство Коши–Буняковского, δ -неравенство и интегрируя по частям в (9.5), как и в (4.17), получаем

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^1, e(r'_t)) dx dt \right| \leq C \frac{\sigma}{\varepsilon^2} + \delta_5 \mathcal{E}_\mu(r). \quad (9.6)$$

Следовательно, интеграл (9.5) несущественен в (9.4).

Непосредственно из (1.6), (4.15) и (9.1) также имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma u^0, e(r'_t)) dx &= \varepsilon \mu \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y p^0)_\varepsilon f, e(r'_t)) dx \\ &\quad - \varepsilon \mu \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y q_s^0)_\varepsilon v''_s, e(r'_t)) dx. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Следовательно, как и в (4.35), получаем

$$\begin{aligned} -\varepsilon \mu \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y p^0)_\varepsilon f, e(r'_t)) dx &= \varepsilon \mu \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y p^0)_\varepsilon f, r'_t) ds \\ &\quad + \mu \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y p^0)_\varepsilon f, r'_t) dx + \varepsilon \mu \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y p^0)_\varepsilon \nabla f, r'_t) dx, \end{aligned} \quad (9.8)$$

где предпоследний интеграл сокращается с (первым) интегралом по Ω_0^ε из (9.4), содержащим f (в силу (3.48)), а вклад последнего интеграла в неравенство (9.4) оценивается величиной $\varepsilon^2 \mu C$ (см. (7.4)). Аналогичные (9.8) равенства выполнены для интеграла по Ω_0^ε из (9.7), содержащего q_s для $s = 1, 2$.

Таким образом, доказано аналогичное (4.36) неравенство

$$\begin{aligned} I \leq \left| \int_0^t \left[\varepsilon \mu \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y p^0)_\varepsilon f, r'_t) ds - \varepsilon \mu \int_{S_0^\varepsilon} ((\nu A_0 \nabla_y q_s^0)_\varepsilon v''_s, r'_t) ds + I_1 + I_2 \right] dt \right| \\ + C \left(\varepsilon + \sigma + \mu^2 + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_4 + \delta_5) \mathcal{E}_\mu(r). \end{aligned}$$

Поэтому доказательство теоремы 6 завершается, как и доказательство теоремы 5 из предыдущего параграфа.

§ 10. Доказательство теорем 7 и 8

Пусть выполнены условия (1.3), (1.23) и (1.26). Определим $P = P^0$ и $Q_s = Q_s^0$ для $s = 1, 2$. Здесь, как и в п. 7 § 3, матричнозначные функции P^0 , Q_1^0 и Q_2^0 являются 1-периодическими решениями задач (1.19), в которых m_0 , r_0 и ϑ заменены на m , r и θ соответственно. Тогда выполнены неравенство (4.3) и аналогичные неравенства для Q_1 и Q_2 с ϑ , замененным на θ . В этих неравенствах и далее в этом параграфе постоянная C не зависит от ε , σ , μ и θ . Вычислим по этим P , Q_1 и Q_2 коэффициенты из равенств (1.20), где $m_0 = \mu m$ и $r_0 = \mu r$ в соответствии с условием (1.23). Пусть (v_1, v_2) является решением задачи (1.21), в которой $a_s^l = 0$ для $s, l = 1, 2$. Существование и единственность достаточно гладкого решения этой задачи проверяется, как и в лемме 10. Причем, константы в оценках соответствующих норм этого решения не зависят от μ (см. доказательство леммы 10).

Учитывая (3.54), определим подправленную асимптотику v_a равенством (4.1). Тогда, заменяя $\mathcal{E}(r)$ на $\mathcal{E}_\mu(r)$ в соответствующих формулах из § 4, можно фактически повторить доказательство теоремы 2. Разумеется, в равенствах (4.25) и (4.29) следует положить $a_s^l = 0$ для $s, l = 1, 2$. Далее, для интеграла по Ω_0^ε из (4.8), содержащего $u^1 = u^2 - u^0$, выполнено неравенство (9.6). Следовательно, этот интеграл несущественен в соответствующем неравенстве. Кроме того, в рассматриваемом случае не нужны соотношения (4.30), (4.31) и (4.34), поскольку именно для оценки граничного интеграла из (4.34) использовались ненулевые матрицы a_s^l из (1.20) (см., например, (5.17)–(5.19)).

Таким образом, в соответствии с доказательством теоремы 2 имеем

$$\mathcal{E}_\mu(r) \leq C \left(\varepsilon(1 + \sqrt{\theta}) + \sigma + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} + \sqrt{\mu} \frac{\varepsilon \sqrt{\mu}}{\sqrt{\sigma \theta}} |v| \right), \quad (10.1)$$

где $v = \sigma / (\varepsilon^2 \mu) - \theta$. Отметим, что величина $\varepsilon \sqrt{\mu} / \sqrt{\sigma}$ стремится к $1 / \sqrt{\theta}$ и поэтому ограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow 0$ в силу условия (1.26).

Пусть (v_1^0, v_2^0) обозначает решение задачи (1.22). Из леммы 7, (1.23), (3.23) и (4.3) следует, что эта задача определяет первое приближение по μ для задачи (1.21), в которой $a_l^s = 0$ для $s, l = 1, 2$. Поэтому из леммы 7 и (10.1) получаем

$$\begin{aligned} \mu \|u - E_{s\varepsilon} v_s^0 - P_\varepsilon * f + Q_{s\varepsilon} * (v_s^0)''_{tt}\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n)}^2 + \|u - E_{s\varepsilon} v_s^0\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega_{12}^\varepsilon)^n)}^2 \\ \leq C \left(\varepsilon(1 + \sqrt{\theta}) + \sigma + \mu^2 + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} + \sqrt{\mu} \frac{\varepsilon \sqrt{\mu}}{\sqrt{\sigma \theta}} |v| \right), \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 7.

Наконец, доказательство теоремы 8 повторяет доказательство теоремы 7 с соответствующими изменениями, описанными в § 6.

В заключение отметим, что в условиях замечаний 3 и 5 для доказательства теорем 1–8 достаточно фактически повторить доказательства из §§ 4–10, в которых 1 и 2 заменены на $l_1 = 1, \dots, s_1$ и $l_2 = s_1 + 1, \dots, s_1 + s_2$ соответственно.

Список литературы

1. Жиков В. В. Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 3–40.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
3. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
4. Батталов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
5. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
6. Ладженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: ГИТТЛ, 1953.
7. Сандраков Г. В. Осреднение линеаризованной системы гидродинамики с малой вязкостью и скорость звука в смесях // Препринт ОВМАН СССР. № 178. М.: ОВМАН СССР, 1987.
8. Сандраков Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 12. С. 1634–1679.
9. Панасенко Г. П. Многокомпонентное осреднение процессов в сильно неоднородных структурах // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 1. С. 134–142.

10. *Панасенко Г. П.* Численно-асимптотический метод многокомпонентного осреднения для уравнений с контрастными коэффициентами // ЖВМ и МФ. 1990. Т. 30. № 2. С. 243–253.
11. *Бажвалов Н. С., Эглит М. Э.* О предельном поведении периодических сред с мягкомодульными включениями // ЖВМ и МФ. 1995. Т. 35. № 6. С. 905–917.
12. *Сандраков Г. В.* Осреднение нестационарных уравнений с контрастными коэффициентами // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 5. С. 605–608.
13. *Сандраков Г. В.* Осреднение нестационарных задач теории сильно неоднородных упругих сред // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 3. С. 309–311.
14. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
15. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
16. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161.
17. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: sandrako@compmath.math.msu.su

Поступила в редакцию
24.03.1999