Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Алгебра Дайера–Лашофа и алгебра Стинрода для обобщенных гомологий и когомологий, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 12, 93–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:57:48

УДК 513.83

В. А. Смирнов

Алгебра Дайера–Лашофа и алгебра Стинрода для обобщенных гомологий и когомологий

В работе определяются аналоги алгебры Дайера–Лашофа $\mathbb{R}$ и алгебры Стинрода $\mathbb{A}$ для обобщенных теорий гомологий и когомологий. Показывается, что в случае, если на спектре $\mathbb{H}$ имеется E_∞ -мультипликативная структура, то на соответствующих обобщенных когомологиях $\mathbb{H}^*(X)$ топологического пространства X имеется действие алгебры Стинрода $\mathbb{A} \otimes \mathbb{H}^*(X) \rightarrow \mathbb{H}^*(X)$, если же пространство X является E_∞ -пространством, то на обобщенных гомологиях $\mathbb{H}_*(X)$ имеется действие алгебры Дайера–Лашофа $\mathbb{R} \otimes \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X)$. Проводятся вычисления этих действий для кобордизмов топологических пространств. Устанавливается связь между операциями Стинрода и операциями Ландвебера–Новикова.

Библиография: 17 названий.

Введение

Известно, какую важную роль для обычных теорий гомологий и когомологий играют алгебры Дайера–Лашофа R [1] и алгебра Стинрода A [2]. Здесь мы определим аналоги этих алгебр $\mathbb{R}$ и $\mathbb{A}$ для обобщенных теорий гомологий и когомологий. Покажем, что если на спектре $\mathbb{H}$ имеется E_∞ -мультипликативная структура, то на соответствующих обобщенных когомологиях $\mathbb{H}^*(X)$ топологического пространства X имеется действие алгебры Стинрода $\mathbb{A} \otimes \mathbb{H}^*(X) \rightarrow \mathbb{H}^*(X)$, если же пространство X является E_∞ -пространством, то на обобщенных гомологиях $\mathbb{H}_*(X)$ имеется действие алгебры Дайера–Лашофа $\mathbb{R} \otimes \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X)$. Проведем вычисления этих действий для кобордизмов топологических пространств. Установим связь между операциями Стинрода и операциями Ландвебера–Новикова [3]–[5].

Удобным языком для описания операций Дайера–Лашофа и операций Стинрода для обычных гомологий является язык операд Мэя [6], [7].

Напомним, что *операда* $\mathcal{E}$ представляет собой семейство пространств $\mathcal{E}(j)$, $j \geq 1$ (точки которых следует представлять себе как j -арные операции), на которых действуют симметрические группы Σ_j , и заданы операции

$$\gamma: \mathcal{E}(k) \times \mathcal{E}(j_1) \times \cdots \times \mathcal{E}(j_k) \rightarrow \mathcal{E}(j_1 + \cdots + j_k),$$

согласованные с действием симметрических групп и удовлетворяющие некоторому соотношению ассоциативности [6].

Операда E называется E_∞ -*операдой*, если пространства $E(j)$ стягиваемы и симметрическая группа действует на них свободно.

Работа поддержана грантом Британского Королевского Общества.

Говорят, что операда $\mathcal{E}$ действует на топологическом пространстве X , или что X является $\mathcal{E}$ -пространством, если заданы отображения

$$\mu: \mathcal{E}(j) \times_{\Sigma_j} X^{\times j} \rightarrow X,$$

удовлетворяющие некоторому соотношению ассоциативности [6].

Пространство X , на котором действует E_∞ -операда, называется E_∞ -пространством. Примеры E_∞ -пространств дают бесконечнократные пространства петель.

Понятие операды определяется не только в категории топологических пространств, но и в категории цепных комплексов [7]. В этом случае операда $\mathcal{E}$ представляет собой семейство цепных комплексов $\mathcal{E}(j)$, на которых заданы действия симметрических групп и операции

$$\gamma: \mathcal{E}(k) \otimes \mathcal{E}(j_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}(j_k) \rightarrow \mathcal{E}(j_1 + \cdots + j_k).$$

Говорят, что операда $\mathcal{E}$ действует на цепном комплексе X , или что X является алгеброй над операдой $\mathcal{E}$, если заданы отображения

$$\mu: \mathcal{E}(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j} \rightarrow X,$$

удовлетворяющие некоторому соотношению ассоциативности.

Алгебры над E_∞ -операдой называются E_∞ -алгебрами.

Легко показывается, что если X — $\mathcal{E}$ -пространство, то сингулярный цепной комплекс $C_*(X)$ будет $C_*(\mathcal{E})$ -алгеброй. В частности, сингулярный цепной комплекс E_∞ -пространства будет E_∞ -алгеброй.

Структура E_∞ -пространства на топологическом пространстве X определяет на его гомологиях $H_*(X)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$ действие алгебры Дайера–Лашофа

$$\mu_*: \mathbb{R} \otimes H_*(X) \rightarrow H_*(X).$$

По существу алгебра Дайера–Лашофа получается переградуировкой элементов гомологий симметрических групп $H_*(\Sigma_j) = H_*(E(j)/\Sigma_j)$, а действие алгебры Дайера–Лашофа на гомологиях E_∞ -пространства X задается композицией

$$H_*(E(j)/\Sigma_j) \otimes H_*(X) \rightarrow H_*(E(j) \times_{\Sigma_j} X^{\times j}) \rightarrow H_*(X).$$

С другой стороны, как показано в работе [7], на коцепном комплексе $C^*(X)$ топологического пространства X имеется структура E_∞ -алгебры. Эта структура определяет на когомологиях $H^*(X)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$ действие алгебры Стиррода

$$\mu^*: A \otimes H^*(X) \rightarrow H^*(X).$$

Как и алгебра Дайера–Лашофа, алгебра Стиррода получается переградуировкой элементов гомологий симметрических групп, а действие алгебры Стиррода на когомологиях пространства X задается композицией

$$H_*(E(j)/\Sigma_j) \otimes H^*(X) \rightarrow H_*(E(j) \otimes_{\Sigma_j} C^*(X)^{\otimes j}) \rightarrow H^*(X).$$

Попытки перенести операдные методы на обобщенные теории гомологий и определить аналоги алгебры Дайера–Лашофа и алгебры Стинрода предпринимались многими авторами [8]–[12].

Основная трудность здесь заключается в том, что на спектрах Тома MO , MU , MSp нет естественного действия E_∞ -оперადы и поэтому простой перенос операдных методов невозможен.

Для преодоления этой трудности мы в §1 вводим понятие биоперადы и выясняем, какая структура имеется на гомологиях биоперადы.

В §2 показывается, что на основных классических группах имеется структура биоперады, что позволяет определить E_∞ -мультипликативную структуру на классифицирующих пространствах.

В §3 вычисляется структура на гомологиях классифицирующих пространств.

В §4 рассматриваются спектры Тома и показывается, что на них имеется E_∞ -мультипликативная структура.

В §5 для обобщенных гомологий $\mathbb{H}_*$, соответствующих E_∞ -мультипликативному спектру $\mathbb{H}$, определяется аналог алгебры Дайера–Лашофа. Производятся вычисления этих алгебр для бордизмов топологических пространств.

В §6 для обобщенных когомологий $\mathbb{H}^*$, соответствующих E_∞ -мультипликативному спектру $\mathbb{H}$, определяется аналог алгебры Стинрода. Проводятся вычисления этих алгебр для кобордизмов топологических пространств.

Отметим, что в отличие от алгебры Ландвебера–Новикова $\mathbb{H}^*(\mathbb{H})$, которая определена для произвольных (даже не мультипликативных) спектров $\mathbb{H}$, алгебра Стинрода определена только для E_∞ -мультипликативных спектров $\mathbb{H}$. При этом умножение в алгебре Ландвебера–Новикова использует только композиционную структуру на когомологиях $\mathbb{H}^*(\mathbb{H})$, а умножение в алгебре Стинрода существенным образом использует E_∞ -мультипликативную структуру спектра $\mathbb{H}$.

Тем не менее между алгеброй Стинрода и алгеброй Ландвебера–Новикова имеется взаимосвязь. Показывается, что в отличие от обычных когомологий, для которых алгебра Стинрода совпадает с алгеброй Ландвебера–Новикова, для обобщенных когомологий имеет место вложение алгебры Стинрода в алгебру Ландвебера–Новикова. Поэтому действие алгебры Стинрода на обобщенных когомологиях топологического пространства порождает только часть когомологических операций. Все же когомологические операции порождаются действием алгебры Ландвебера–Новикова.

Таким образом, при исследовании вопросов, связанных с использованием когомологических операций для теорий когомологий, соответствующих E_∞ -мультипликативным спектрам, появляется возможность вместо довольно большой алгебры Ландвебера–Новикова ограничиться рассмотрением меньшей алгебры – алгебры Стинрода.

В частности, эта алгебра Стинрода может быть использована для построения спектральной последовательности типа спектральной последовательности Адамса, в которой член E^2 выражается не через алгебру Ландвебера–Новикова, а через меньшую алгебру – алгебру Стинрода. Предложенный операдный метод определения алгебры Стинрода позволяет не только найти выражение для члена E^2 этой спектральной последовательности, но и определить на обобщенных когомологиях высшие когомологические операции, дающие высшие дифференциалы построенной спектральной последовательности.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Манчестерского университета Найджелу Рэю за помощь, оказанную им в работе над рукописью.

§ 1. Биопералы и биалгебры Хопфа

Напомним необходимые факты о симметрических группах и симметрических семействах [13].

Пусть $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(n)\}_{n \geq 1}$ и $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(n)\}_{n \geq 1}$ – семейства топологических пространств. Обозначим

$$\mathcal{E}(k) * \mathcal{F}(n) = \mathcal{E}(k) \times \mathcal{F}(n)^{\times k}.$$

Легко видеть, что имеются перестановочные отображения

$$T: (\mathcal{E}'(k) \times \mathcal{E}''(k)) * (\mathcal{F}'(n) \times \mathcal{F}''(n)) \rightarrow (\mathcal{E}'(k) * \mathcal{F}'(n)) \times (\mathcal{E}''(k) * \mathcal{F}''(n)).$$

Рассмотрим семейство $\Sigma = \{\Sigma_n\}$ симметрических групп Σ_n с дискретной топологией. На нем имеются внутренние умножения $\cdot: \Sigma_n \times \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$, индуцированные групповой структурой. Кроме этого, имеются внешние умножения

$$\pi: \Sigma_n \times \Sigma_m \rightarrow \Sigma_{n+m}, \quad \gamma: \Sigma_k * \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{kn}.$$

Умножение π сопоставляет перестановкам $\sigma \in \Sigma_n$, $\tau \in \Sigma_m$ перестановку $\sigma \times \tau$ в Σ_{n+m} , которая действует на первых n элементах как σ и на последних m элементах как τ .

Умножение γ сопоставляет перестановкам $\sigma \in \Sigma_k$ и $\tau_i \in \Sigma_n$, $1 \leq i \leq k$, перестановку $\sigma(\tau_1 \times \cdots \times \tau_k) \in \Sigma_{k \cdot n}$, которая действует на $(1, \dots, k \cdot n)$ следующим образом. Сначала множество $(1, \dots, k \cdot n)$ разбивается на k блоков по n элементов; затем элементы в каждом блоке переставляются с помощью перестановок $\tau_1, \dots, \tau_k$ соответственно; наконец, сами блоки переставляются с помощью перестановки σ .

Непосредственная проверка показывает, что так определенные умножения π , γ ассоциативны и дистрибутивны, что означает коммутативность следующих диаграмм:

$$\begin{array}{ccc} (\Sigma_{k'} \times \Sigma_{k''}) * \Sigma_n & \xrightarrow{\pi \circ 1} & \Sigma_{k'+k''} * \Sigma_n \\ \downarrow & & \downarrow \gamma \\ (\Sigma_{k'} * \Sigma_n) \times (\Sigma_{k''} * \Sigma_n) & & \Sigma_{(k'+k'')n} \\ \gamma \times \gamma \downarrow & & \downarrow = \\ \Sigma_{k'n} \times \Sigma_{k''n} & \xrightarrow{\pi} & \Sigma_{k'n+k''n} \end{array}.$$

Рассмотрим диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_k * (\Sigma_n \times \Sigma_m) & \xrightarrow{1 * \pi} & \Sigma_k * \Sigma_{n+m} \\ \nabla * 1 \downarrow & & \downarrow \gamma \\ (\Sigma_k \times \Sigma_k) * (\Sigma_n \times \Sigma_m) & & \Sigma_{k(n+m)} \\ T \downarrow & & \uparrow \pi \\ (\Sigma_k * \Sigma_n) \times (\Sigma_k * \Sigma_m) & \xrightarrow{\gamma \times \gamma} & \Sigma_{kn} \times \Sigma_{km} \end{array},$$

где $\nabla: \Sigma_k \rightarrow \Sigma_k \times \Sigma_k$ – диагональное отображение $\nabla(\sigma) = \sigma \times \sigma$.

Эти диаграммы не коммутативны. Однако они коммутативны с точностью до некоторых изоморфизмов $\xi: \Sigma_{kn+km} \rightarrow \Sigma_{kn+km}$. Для определения этих изоморфизмов зафиксируем разбиение множества $(1, \dots, k(n+m))$ на чередующиеся блоки по n и m элементов и рассмотрим перестановку $\xi \in \Sigma_{k(n+m)}$, которая располагает сначала блоки из n элементов и затем блоки из m элементов. Определим изоморфизм ξ , полагая $\xi(x) = \xi^{-1}x\xi$. Непосредственные вычисления показывают, что если мы вставим этот изоморфизм в диаграмму после отображения π , то получим коммутативную диаграмму.

Пусть $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(n)\}$ – симметрическое семейство топологических пространств. Это означает, что заданы действия $\mu: \mathcal{E}(n) \times \Sigma_n \rightarrow \mathcal{E}(n)$. Симметрическое семейство $\mathcal{E}$ будем называть *биооперацией*, если заданы отображения

$$\pi: \mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(m) \rightarrow \mathcal{E}(n+m), \quad \gamma: \mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(n) \rightarrow \mathcal{E}(kn),$$

удовлетворяющие следующим условиям.

1. Отображения π и γ согласованы с действиями симметрических групп, т.е.

$$\pi(x\sigma \times y\tau) = \pi(x \times y)\pi(\sigma \times \tau),$$

где $x \in \mathcal{E}(n)$, $y \in \mathcal{E}(m)$, $\sigma \in \Sigma_n$, $\tau \in \Sigma_m$;

$$\gamma(x\sigma \times y_1\tau_1 \times \dots \times y_k\tau_k) = \gamma(x \times y_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times y_{\sigma^{-1}(k)})\gamma(\sigma \times \tau_1 \times \dots \times \tau_k),$$

где $x \in \mathcal{E}(k)$, $y_i \in \mathcal{E}(n)$, $\sigma \in \Sigma_k$, $\tau_i \in \Sigma_n$.

2. Отображения π и γ ассоциативны, т.е. коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(k) \times \mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(m) & \xrightarrow{\pi \times 1} & \mathcal{E}(k+n) \times \mathcal{E}(m) \\ 1 \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{E}(k) \times \mathcal{E}(n+m) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{E}(k+n+m) \\ \mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(n) * \mathcal{E}(m) & \xrightarrow{\gamma * 1} & \mathcal{E}(kn) * \mathcal{E}(m) \\ 1 * \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(nm) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{E}(knm) \end{array}.$$

3. Задана единица $1 \in \mathcal{E}(1)$ такая, что

$$\gamma(1 * x) = \gamma(x * 1) = x, \quad x \in \mathcal{E}(n).$$

4. Выполняются соотношения дистрибутивности, что означает коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}(k') \times \mathcal{E}(k'')) * \mathcal{E}(n) & \xrightarrow{\pi * 1} & \mathcal{E}(k' + k'') * \mathcal{E}(n) \\ \downarrow & & \downarrow \gamma \\ (\mathcal{E}(k') * \mathcal{E}(n)) \times (\mathcal{E}(k'') * \mathcal{E}(n)) & & \mathcal{E}((k' + k'')n) \\ \gamma \times \gamma \downarrow & & \downarrow = \\ \mathcal{E}(k'n) \times \mathcal{E}(k''n) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{E}(k'n + k''n) \end{array},$$

а диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}(k) * (\mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(m)) & \xrightarrow{1 * \pi} & \mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(n + m) \\
 \nabla * 1 \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 (\mathcal{E}(k) \times \mathcal{E}(k)) * (\mathcal{E}(n) \times \mathcal{E}(m)) & & \mathcal{E}(k(n + m)) \\
 \downarrow & & \uparrow \xi \circ \pi \\
 (\mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(n)) \times (\mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(m)) & \xrightarrow{\gamma \times \gamma} & \mathcal{E}(kn) \times \mathcal{E}(km)
 \end{array}$$

коммутативны с точностью до некоторых гомеоморфизмов

$$\xi: \mathcal{E}(k(n + m)) \rightarrow \mathcal{E}(k(n + m))$$

таких, что $\xi(x\sigma) = \xi(x)\xi(\sigma)$, $x \in \mathcal{E}(k(n + m))$, $\sigma \in \Sigma_{k(n + m)}$.

Биоперату E будем называть E_∞ -биоператой, если пространства $E(n)$ стягиваемы и симметрические группы действуют на них свободно.

Заметим, что понятие биоператы отличается от понятия операты. Для операты $\mathcal{E}$ требуется задание операций

$$\gamma: \mathcal{E}(k) \times \mathcal{E}(n_1) \times \cdots \times \mathcal{E}(n_k) \rightarrow \mathcal{E}(n_1 + \cdots + n_k)$$

для произвольных номеров $n_1, \dots, n_k$, а не только для равных, как для биоператы. С другой стороны, для операты, вообще говоря, не требуется задания операций π и выполнения соотношений дистрибутивности.

Мы видоизменили понятие операты в связи с тем, что для определения умножений в алгебре Стиррода и алгебре Дайера–Лашофа требуются только операции типа

$$\gamma: \mathcal{E}(k) * \mathcal{E}(n) \rightarrow \mathcal{E}(kn).$$

Кроме того, для определения соотношений в этих алгебрах, например соотношения Адема, требуются операции π и соотношения дистрибутивности.

Конечно, семейство $\Sigma = \{\Sigma_n\}$ дает пример биоператы. Для того чтобы привести пример E_∞ -биоператы, рассмотрим симплицальные резольвенты $B_*(\Sigma_n, \Sigma_n)$ симметрических групп Σ_n . Тогда их реализации дадут искомые стягиваемые пространства $E(n)$ со свободным действием симметрических групп Σ_n .

Структура биоператы на семействе Σ индуцирует структуру биоператы на семействе E .

Пусть $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(n)\}$ – семейство топологических пространств, $\mathcal{E}$ – биоперата. Будем говорить, что семейство $\mathcal{F}$ является $\mathcal{E}$ -мультипликативным семейством, если заданы отображения

$$\pi: \mathcal{F}(n) \times \mathcal{F}(m) \rightarrow \mathcal{F}(n + m), \quad \mu: \mathcal{E}(k) * \mathcal{F}(n) \rightarrow \mathcal{F}(kn),$$

согласованные с действиями симметрических групп и удовлетворяющие соотношениям ассоциативности и дистрибутивности.

Топологическое пространство X будем называть $\mathcal{E}$ -мультипликативным пространством, если соответствующее семейство $\{X(n)\}$, $X(n) = X$, является $\mathcal{E}$ -мультипликативным.

Если E является E_∞ -биоперადой, то E -мультипликативное семейство F будем называть E_∞ -мультипликативным семейством и E -мультипликативное пространство X будем называть E_∞ -мультипликативным пространством.

Пусть $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(n)\}$ – биоперада, $\mathcal{E}_*(n) = H_*(\mathcal{E}(n)/\Sigma_n)$, где гомологии берутся с $\mathbb{Z}/2$ коэффициентами. Обозначим $\mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(n)$ тензорное произведение $\mathcal{E}_*(k) \otimes \mathcal{E}_*(n)$, размерность элементов $x \otimes y \in \mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(n)$ в котором полагается равной $\dim(x) + k \cdot \dim(y)$. Тогда структура биоперады индуцирует умножения

$$\pi_*: \mathcal{E}_*(n) \otimes \mathcal{E}_*(m) \rightarrow \mathcal{E}_*(n+m), \quad \gamma_*: \mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(n) \rightarrow \mathcal{E}_*(kn).$$

Кроме этого, имеет место коумножение

$$\nabla_*: \mathcal{E}_*(n) \rightarrow \mathcal{E}_*(n) \otimes \mathcal{E}_*(n).$$

Из определения биоперады непосредственно следует, что семейство $\mathcal{E}_* = \{\mathcal{E}_*(n)\}$ вместе с операциями π_* , γ_* , ∇_* является биалгеброй Хопфа [13], т.е. выполняются следующие условия.

1. Операции (π_*, ∇_*) и (γ_*, ∇_*) определяют на $\mathcal{E}_*$ структуру алгебры Хопфа.
2. Между операциями γ_* и π_* имеет место соотношение дистрибутивности, т.е. диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}_*(k') \otimes \mathcal{E}_*(k'')) * \mathcal{E}_*(n) & \xrightarrow{\pi_* * 1} & \mathcal{E}_*(k' + k'') * \mathcal{E}_*(n) \\ \downarrow & & \downarrow \gamma_* \\ (\mathcal{E}_*(k') * \mathcal{E}_*(n)) \otimes (\mathcal{E}_*(k'') * \mathcal{E}_*(n)) & & \mathcal{E}_*((k' + k'')n) \\ \gamma_* \otimes \gamma_* \downarrow & & \downarrow = \\ \mathcal{E}_*(k'n) \otimes \mathcal{E}_*(k''n) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathcal{E}_*(k'n + k''n) \end{array}$$

коммутативны, а диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_*(k) * (\mathcal{E}_*(n) \otimes \mathcal{E}_*(m)) & \xrightarrow{\nabla_* * 1} & (\mathcal{E}_*(k) \otimes \mathcal{E}_*(k)) * (\mathcal{E}_*(n) \otimes \mathcal{E}_*(m)) \\ 1 * \pi_* \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(n+m) & & (\mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(n)) \otimes (\mathcal{E}_*(k) * \mathcal{E}_*(m)) \\ \gamma_* \downarrow & & \downarrow \gamma_* \otimes \gamma_* \\ \mathcal{E}_*(k(n+m)) & \xleftarrow{\pi_*} & \mathcal{E}_*(kn) \otimes \mathcal{E}_*(km) \end{array}$$

коммутативны с точностью до изоморфизмов $\xi_*: \mathcal{E}_*(k(n+m)) \rightarrow \mathcal{E}_*(k(n+m))$.

Заметим, что понятие биалгебры Хопфа похоже, но не совпадает с понятием кольца Хопфа [12]. Для биалгебры Хопфа мы не требуем коммутативности умножения γ_* , кроме того, различаются соотношения дистрибутивности.

Если E – E_∞ -биоперада, то $E_* = \{E_*(n)\}$ является свободной коммутативной биалгеброй Хопфа с одной 1-мерной образующей $e_1 \in E_*(2)$ [12]. Образующие в $E_*(2)$, рассматриваемом как $\mathbb{Z}/2$ -модуль, обычно обозначаются e_i , $\dim(e_i) = i \geq 0$. Обозначим также $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k$, элементы из $E_*(2^k)$ размерности

$i_1 + \dots + 2^{k-1}i_k$, являющиеся произведениями элементов $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ относительно операции γ_* . Тогда E_* будет алгеброй многочленов от образующих $e_{i_1} \dots e_{i_k}$.

Операция γ_* на образующих $e_i, e_j \in E_*(2)$ задается формулой $\gamma_*(e_i * e_j) = e_i e_j$, если $i \leq j$, и

$$\gamma_*(e_i * e_j) = \sum_k \binom{k-j-1}{i-k-1} e_{i+2(j-k)} e_k,$$

если $i > j$.

Операция ∇_* на образующих e_i задается формулой

$$\nabla_*(e_i) = \sum_{k=0}^i e_k \otimes e_{i-k}.$$

Эти формулы непосредственно следуют из определения свободной биалгебры Хопфа.

Пусть $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(n)\}$ — $\mathcal{E}$ -мультипликативное семейство. Тогда эта структура индуцирует на гомологиях $\mathcal{F}_* = \{\mathcal{F}_*(n)\}$, $\mathcal{F}_*(n) = H_*(\mathcal{F}(n))$, умножения

$$\pi_*: \mathcal{F}_*(n) \otimes \mathcal{F}_*(m) \rightarrow \mathcal{F}_*(n+m), \quad \mu_*: \mathcal{E}_*(k) * \mathcal{F}_*(n) \rightarrow \mathcal{F}_*(kn).$$

Кроме того, имеется коумножение

$$\nabla_*: \mathcal{F}_*(n) \rightarrow \mathcal{F}_*(n) \otimes \mathcal{F}_*(n),$$

и $\mathcal{F}_*$ вместе с операциями π_* , μ_* и ∇_* будет алгеброй Хопфа над биалгеброй Хопфа $\mathcal{E}_*$. Это означает, что

- 1) операции μ_* , ∇_* определяют на $\mathcal{F}_*$ структуру $\mathcal{E}_*$ -модуля Хопфа;
- 2) операции π_* , ∇_* определяют на $\mathcal{F}_*$ структуру алгебры Хопфа;
- 3) между операциями μ_* и π_* имеют место соотношения дистрибутивности.

Заметим, что если E является E_∞ -биооперацией и F — E -мультипликативное семейство, то задание действия $\mu_*: E_* * F_* \rightarrow F_*$ равносильно заданию на F_* действия алгебры Дайера–Лашофа и эти два действия связаны между собой формулами

$$\mu_*(e_i * x_n) = Q^{n+i}(x_n), \quad \text{где } e_i \in E_*(2), \quad x_n \in F_*.$$

В действительности для построения операций Дайера–Лашофа на гомологиях F_* E -мультипликативного семейства F мы не используем всю E -мультипликативную структуру, а используем только операции $\mu: E(k) * F(n) \rightarrow F(kn)$. Вся структура нужна для получения соотношений между этими операциями.

§ 2. Биооперации и классические группы

В 1966 г. Мильграм [14] ввел полиэдры $C(k)$, с помощью которых построил аппроксимацию итерированных пространств петель $\Omega^n S^n X$ над связным CW -комплексом X .

Позже аппроксимации итерированных пространств петель над линейно связными топологическими пространствами были построены Мэем [6] при помощи операд n -мерных кубиков E_n . Однако операд E_n не являются CW -комплексами и это,

Таким образом, с одной стороны, имеются полиэдры Мильграма $C(k)$, на которых нет естественной структуры операды. С другой стороны, имеются операды n -мерных кубиков E_n , но они не являются CW -комплексами. Мы покажем, что на полиэдрах Мильграма имеется структура биоперады.

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}), \quad \sigma \in \Sigma_n$$
$$\sigma(1, 2, \dots, n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma \in \Sigma_n.$$

Пространство $E^1(n)$ также может быть определено как множество точек $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих соотношениям

[illegible]

ТЕОРЕМА 1. Семейство $E^1 = \{E^1(n)\}$ полиэдров Мильграма является биоперადой.

$$\pi((x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_m)) = (x_1, \dots, x_n, y_1 + n, \dots, y_m + n).$$

Определим операции $\gamma: E^1(k) * E^1(n) \rightarrow E^1(kn)$, полагая

$$\gamma(x \times y^1 \times \cdots \times y^k) = (z_1, \dots, z_{kn}) = ((x_1 - 1)n + y_1^1, \dots, (x_1 - 1)n + y_n^1, \\ (x_2 - 1)n + y_1^2, \dots, (x_2 - 1)n + y_n^2, \dots, \\ (x_k - 1)n + y_1^k, \dots, (x_k - 1)n + y_n^k),$$

где $x = (x_1, \dots, x_k) \in E(k)$, $y^i = (y_1^i, \dots, y_n^i) \in E(n)$, $1 \leq i \leq k$.

Легко видеть, что операции γ согласованы с действиями симметрических групп и являются линейными отображениями, которые сопоставляют вершинам полиэдра $E(k) * E(n)$ вершины полиэдра $E(kn)$.

Непосредственная проверка показывает, что выполняются соотношения ассоциативности и дистрибутивности.

Заметим, что если $x = (1, 2, \dots, k) \in E(k)$, то $\gamma(x \times y^1 \times \dots \times y^k)$ будет равно итерированному произведению элементов $y^1, \dots, y^k$. В частности, для $x = (1, 2) \in E(2)$ имеем

$$\gamma((1, 2) \times y^1 \times y^2) = \pi(y^1 \times y^2).$$

Рассмотрим другой пример биопералды также из статьи Мильграма [14].

Пусть $I(n) = [0, n]$, $I = I(1) = [0, 1]$, I^n — n -мерный куб, $P(n)$ — пространство путей $f: I(n) \rightarrow I^n$ длины n , начинающихся в начальной точке $(0, \dots, 0)$ и кончающихся в конечной точке $(1, \dots, 1)$.

ТЕОРЕМА 2. Семейство $P = \{P(n)\}$ является биопералдой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеют место операции $\pi: P(n) \times P(m) \rightarrow P(n+m)$, определенные по формулам

$$\pi(f \times g)(\tau) = \begin{cases} (y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0), & 0 \leq \tau \leq n, \\ (1, \dots, 1, z_1, \dots, z_m), & n \leq \tau \leq n+m, \end{cases}$$

где $f \in P(n)$, $g \in P(m)$, $(y_1, \dots, y_n) = f(\tau)$, $(z_1, \dots, z_m) = g(\tau - n)$.

Ясно, что операции π удовлетворяют соотношению ассоциативности и согласованы с действием симметрических групп.

Определим операции $\gamma: P(k) * P(n) \rightarrow P(kn)$. Пусть $f: I(k) \rightarrow I^k$; f индуцирует отображение $nf: I(kn) \rightarrow I^{kn}$, определенное формулой $(nf)(\tau) = n \cdot f(\tau/n)$.

Для отображений $g_1, \dots, g_k: I(n) \rightarrow I^n$ положим

$$\gamma(f \times g_1 \times \dots \times g_k) = (g_1 \times \dots \times g_k) \circ (nf).$$

Соответствие $f \mapsto nf$ определяет линейное отображение, и, следовательно, операции $\gamma: P(k) * P(n) \rightarrow P(kn)$ являются также линейными.

Непосредственная проверка показывает, что выполняются соотношения ассоциативности и дистрибутивности.

В работе [14] Мильграм построил отображения $j(n): E^1(n) \rightarrow P(n)$. Легко видеть, что эти отображения сохраняют структуру биопералды и, следовательно, определяют отображение биопералды $j: E^1 \rightarrow P$.

Пусть теперь $\mathbb{F}$ — поле действительных чисел $\mathbb{R}$, или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, или тело кватернионов $\mathbb{H}$. Рассмотрим семейство $GL = \{GL(\mathbb{F}, n)\}_{n \geq 1}$ полных линейных групп $GL(\mathbb{F}, n)$ векторных пространств $\mathbb{F}^n$. Перестановки сомножителей в $\mathbb{F}^n$ индуцируют свободное действие симметрических групп Σ_n на $GL(\mathbb{F}, n)$:

$$(\sigma f)(x) = f(\sigma^{-1}x), \quad f \in GL(\mathbb{F}, n), \quad x \in \mathbb{F}^n, \quad \sigma \in \Sigma_n.$$

Если мы представляем элементы в $GL(\mathbb{F}, n)$ матрицами, то действие симметрических групп Σ_n определяется перестановками столбцов этих матриц.

Имеют место отображения $\pi: GL(\mathbb{F}, n) \times GL(\mathbb{F}, m) \rightarrow GL(\mathbb{F}, n + m)$, которые сопоставляют матрицам (A, B) матрицу

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix},$$

где O обозначает нулевую матрицу.

Определим отображения

$$\gamma: GL(\mathbb{F}, k) * GL(\mathbb{F}, n) \rightarrow GL(\mathbb{F}, kn).$$

Для этого рассмотрим матрицы $A \in GL(\mathbb{F}, k)$, $B_i \in GL(\mathbb{F}, n)$, $1 \leq i \leq k$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $A(n)$ матрицу в $GL(\mathbb{F}, kn)$, состоящую из $(n \times n)$ -матриц

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} \end{pmatrix},$$

$1 \leq i, j \leq k$. Используя тензорное произведение матриц, матрицу $A(n)$ можно переписать в виде $A(n) = A \otimes I_n$, где I_n — единичная матрица в $GL(\mathbb{F}, n)$.

Положим $\gamma(A \times B_1 \times \dots \times B_k) = A(n) \cdot (B_1 \oplus \dots \oplus B_k)$.

Непосредственная проверка показывает, что требуемые соотношения выполняются, и следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 3. Семейство $GL = \{GL(\mathbb{F}, n)\}$ с определенными выше операциями

$$\pi: GL(\mathbb{F}, n) \times GL(\mathbb{F}, m) \rightarrow GL(\mathbb{F}, n + m), \quad \gamma: GL(\mathbb{F}, k) * GL(\mathbb{F}, n) \rightarrow GL(\mathbb{F}, kn)$$

является биоперადой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соответствующее отображение

$$\xi: GL(\mathbb{F}, k(n + m)) \rightarrow GL(\mathbb{F}, k(n + m))$$

определено следующим образом. Рассмотрим определенную выше перестановку $\xi \in \Sigma_{k(n+m)}$. Она индуцирует изоморфизм $\xi: \mathbb{F}^{k(n+m)} \rightarrow \mathbb{F}^{k(n+m)}$. Определим изоморфизм

$$\xi: GL(\mathbb{F}, k(n + m)) \rightarrow GL(\mathbb{F}, k(n + m)),$$

полагая $\xi(f) = \xi^{-1} \circ f \circ \xi$.

В частности, имеют место следующие биоперადы:

- 1) биоперада ортогональных групп $O = \{O(n)\}$;
- 2) биоперада унитарных групп $U = \{U(n)\}$;
- 3) биоперада симплектических групп $Sp = \{Sp(n)\}$.

Для групп $G(n) = GL(\mathbb{F}, n)$ рассмотрим симплициальные резольвенты $EG(n)$, которые являются реализациями симплициальных объектов

$$B_*(*, G(n), G(n)): G(n) \longleftarrow G(n) \times G(n) \longleftarrow \dots \longleftarrow G(n)^{\times m+1} \longleftarrow \dots.$$

Тогда структура биоперасы на GL индуцирует структуру биоперасы на семействе $EG = \{EG(n)\}$. Учитывая, что $EG(n)$ стягиваемы со свободным действием симметрических групп, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Биопераса EG является E_∞ -биоперасой. В частности, имеют место следующие E_∞ -биоперасы: $EO = \{EO(n)\}$, $EU = \{EU(n)\}$, $ESp = \{ESp(n)\}$.*

Для групп $G(n) = GL(\mathbb{F}, n)$ рассмотрим также классифицирующие пространства $BG(n)$, являющиеся реализациями симплициальных объектов

$$B_*(*, G(n), *): * \longleftarrow G(n) \longleftarrow G(n) \times G(n) \longleftarrow \dots \longleftarrow G(n)^{\times m+1} \longleftarrow \dots.$$

Структура биоперасы на GL индуцирует на $BG = \{BG(n)\}$ действие биоперасы EG . Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Семейство BG является EG -мультипликативным семейством. В частности, BO есть EO -мультипликативное семейство; BU есть EU -мультипликативное семейство; BSp есть ESp -мультипликативное семейство.*

§ 3. Гомологии классифицирующих пространств

Рассмотрим, например, EO -мультипликативное семейство $BO = \{BO(n)\}$. Нашей задачей является вычисление операций $\mu_*: EO_*(k) * BO_*(n) \rightarrow BO_*(kn)$.

Известно, что $BO_*(n)$ является свободной коммутативной коалгеброй, порожденной элементами x_i , $1 \leq i \leq n$, размерности i .

Умножения $\pi_*: BO_*(n) \otimes BO_*(m) \rightarrow BO_*(n+m)$ превращают семейство $BO_* = \{BO_*(n)\}$ в свободную коммутативную алгебру Хопфа с одной 1-мерной образующей $x_1 \in BO_*(1)$. Умножение π_* на элементах x_i задается формулой

$$\pi_*(x_i \otimes x_j) = x_{i+j} + \text{непримитивные элементы}.$$

Из определения $\mu_*: EO_*(2) * BO_*(1) \rightarrow BO_*(2)$ следует, что $\mu_*(e_1 * 1) = x_1$. На остальных элементах μ_* определяется структурой алгебры Хопфа на BO_* .

Двойственным образом рассмотрим когомологии $EO^*(k) = H^*(EO(k)/\Sigma_k)$ и $BO^*(n) = H^*(BO(n))$. Известно, что $BO^*(n)$ является свободной коммутативной алгеброй, порожденной элементами $\bar{x}_i$, $1 \leq i \leq n$, размерности i .

Имеют место операции $\pi^*: BO^*(n) \rightarrow BO^*(i) \otimes BO^*(n-i)$, которые превращают $BO^* = \{BO^*(n)\}$ в свободную коммутативную алгебру Хопфа с одной 1-мерной образующей $\bar{x}_1 \in BO^*(1)$.

Кроме этого, имеют место кодействия $\mu^*: BO^*(kn) \rightarrow EO^*(k) * BO^*(n)$. Из определения $\mu^*: BO^*(2) \rightarrow EO^*(2) * BO^*(1)$ следует, что $\mu^*(\bar{x}_1) = \bar{e}_1 * 1$. На остальных элементах кодействие μ^* определяется структурой алгебры Хопфа на BO^* .

Например, для $\mu^*: BO^*(2) \rightarrow EO^*(2) * BO^*(1)$ мы имеем формулу

$$\mu^*(\bar{x}_1^n \cdot \bar{x}_2^m) = \bar{e}_n * \bar{x}_1^m.$$

Вычислим кодействие $\mu^*: BO^*(2n) \rightarrow EO^*(2) * BO^*(n)$. Так как μ^* является отображением алгебр, то его достаточно вычислить на образующих $\bar{x}_m \in BO^*(2n)$. Для этого воспользуемся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} BO^*(2n) & \xrightarrow{\mu^*} & EO^*(2) * BO^*(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BO^*(2)^{\otimes n} & \xrightarrow{(\mu^*)^{\otimes n}} & EO^*(2) * (BO^*(1)^{\otimes n}) \end{array}.$$

Из нее следует

ТЕОРЕМА 6. Кодействие $\mu^*: BO^*(2n) \rightarrow EO^*(2) * BO^*(n)$ на образующих $\bar{x}_m \in BO^*(2n)$ задается формулой

$$\mu^*(\bar{x}_m) = \sum_k \binom{n-k}{m-2k} \bar{e}_{m-2k} * \bar{x}_k.$$

На остальных элементах μ^* определяется структурой алгебры.

Переходя к двойственной ситуации, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6'. Действие $\mu_*: EO_*(2) * BO_*(n) \rightarrow BO_*(2n)$ на примитивных элементах $x_k \in BO_*(n)$ задается формулой

$$\mu_*(e_i * x_k) = \binom{n-k}{i} x_{i+2k} + \text{непримитивные элементы}.$$

Иногда удобнее использовать другие образующие в BO_* . Обозначим через a_m элемент $x_1^{\otimes m} \in BO_*(1)$. Тогда BO_* будет свободной коммутативной алгеброй, порожденной элементами a_m , и коумножение на этих элементах задается формулой

$$\nabla(a_m) = \sum_{i=0}^m a_i \otimes a_{m-i}.$$

Прямые вычисления показывают, что действие $\mu_*: EO_*(2) * BO_*(1) \rightarrow BO_*(2)$ задается формулой (см. [15]):

$$\mu_*(e_i * a_m) = \sum_{k \geq 0} \binom{i+k-1}{k} a_{m-k} \cdot a_{i+m+k}.$$

Из этой формулы следует, что действие $\mu_*: EO_*(2) * BO_*(n) \rightarrow BO_*(2n)$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mu_*(e_i * a_{m_1} \cdots a_{m_n}) = & \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_n = i \\ k_1, \dots, k_n}} \binom{i_1 + k_1 - 1}{k_1} a_{m_1 - k_1} a_{i_1 + m_1 + k_1} \\ & \cdots \binom{i_n + k_n - 1}{k_n} a_{m_n - k_n} a_{i_n + m_n + k_n}. \end{aligned}$$

В частности [16],

$$\mu_*(e_i * a_m) = \binom{i+m-1}{m} a_{i+2m} + \text{неразложимые элементы.}$$

Заметим, что действия μ_* и кодействия μ^* являются нестабильными и, следовательно, не дают действия и кодействия на гомологиях $H_*(BO) = \lim_n H_*(BO(n))$ и когомологиях $H^*(BO) = \lim_n H^*(BO(n))$ соответственно.

Так как $BO_*(n)$ являются гомологиями топологического пространства $BO(n)$, то имеют место кодействия $\tau_*: BO_*(n) \rightarrow EO^*(k) * BO_*(n)$ и двойственные действия $\tau^*: EO_*(k) * BO^*(n) \rightarrow BO^*(n)$.

Например, $\tau^*: EO_*(2) * BO^*(1) \rightarrow BO^*(1)$ задается формулой

$$\tau^*(e_i * \bar{x}_1) = \begin{cases} \bar{x}_1^2, & i = 0, \\ \bar{x}_1, & i = 1, \\ 0, & i > 1. \end{cases}$$

На остальных элементах τ^* определяется структурой алгебры

$$\tau^*(e_i * \bar{x}_1^n) = \binom{n}{i} \bar{x}_1^{2n-i}.$$

Так как $\tau^*: EO_*(2) * BO^*(n) \rightarrow BO^*(n)$ согласовано со структурой коалгебры, то имеет место

ТЕОРЕМА 7. Действие $\tau^*: EO_*(2) * BO^*(n) \rightarrow BO^*(n)$ на образующих $\bar{x}_m \in BO^*(n)$ задается формулой

$$\tau^*(e_i * \bar{x}_m) = \begin{cases} \bar{x}_{m-i} \bar{x}_m, & i \leq m, \\ 0, & i > m. \end{cases}$$

На остальных элементах τ^* определяется структурой алгебры.

Переходя к двойственной ситуации, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7'. Кодействие $\tau_*: BO_*(n) \rightarrow EO^*(2) * BO_*(n)$ на образующих $a_m \in BO_*(n)$ задается формулой

$$\tau_*(a_m) = \sum_i \binom{i}{m-i} \bar{e}_{2i-m} * a_i.$$

На остальных элементах τ_* определяется структурой алгебры на $BO_*(n)$.

Рассмотрим гомологии $BU_*(n) = H_*(BU(n))$. Они являются свободной коммутативной коалгеброй, порожденной элементами y_i , $1 \leq i \leq n$, размерности $2i$.

Операции $\pi_*: BU_*(n) \otimes BU_*(m) \rightarrow BU_*(n+m)$ превращают $BU_* = \{BU_*(n)\}$ в свободную коммутативную алгебру Хопфа с одной 2-мерной образующей y_1 в $BU_*(1)$. Операция π_* на элементах y_i задается формулой

$$\pi_*(y_i \otimes y_j) = y_{i+j} + \text{непримитивные элементы.}$$

Из определения действия $\mu_*: EU_*(2) * BU_*(1) \rightarrow BU_*(2)$ следует, что

$$\mu_*(e_1 * 1) = 0, \quad \mu_*(e_2 * 1) = y_1.$$

На остальных элементах действие μ_* определяется структурой алгебры Хопфа на BU_* .

Аналогично, когомологии $BU^*(n) = H^*(BU(n))$ являются свободной коммутативной алгеброй, порожденной элементами $\bar{y}_i$, $1 \leq i \leq n$, размерности $2i$.

Операции $\pi^*: BU^*(n) \rightarrow BU^*(i) \otimes BU^*(n-i)$ превращают $BU^* = \{BU^*(n)\}$ в свободную коммутативную алгебру Хопфа с одной 2-мерной образующей $\bar{y}_1$ в $BU^*(1)$.

Кроме этого, имеются кодействия $\mu^*: BU^*(kn) \rightarrow EU^*(k) * BU^*(n)$. В случае $\mathbb{Z}/2$ коэффициентов из определения $\mu^*: BU^*(2) \rightarrow EU^*(2) * BU^*(1)$ следует, что

$$\mu^*(\bar{y}_1) = \bar{e}_2 * 1, \quad \mu^*(\bar{y}_2) = \bar{e}_0 * \bar{y}_1.$$

На остальных элементах кодействие μ^* определяется структурой алгебры Хопфа на BU^* .

Вычислим кодействие $\mu^*: BU^*(2n) \rightarrow EU^*(2) * BU^*(n)$. Так как μ^* является отображением алгебр, то достаточно вычислить его на образующих $\bar{y}_m \in BU^*(2n)$. Для этого воспользуемся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} BU^*(2n) & \xrightarrow{\mu^*} & EU^*(2) * BU^*(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BU^*(2)^{\otimes n} & \xrightarrow{(\mu^*)^{\otimes n}} & EU^*(2) * (BU^*(1)^{\otimes n}) \end{array},$$

из которой следует

ТЕОРЕМА 8. Кодействие $\mu^*: BU^*(2n) \rightarrow EU^*(2) * BU^*(n)$ на образующих $\bar{y}_m$ в $BU^*(2n)$ задается формулой

$$\mu^*(\bar{y}_m) = \sum_k \binom{n-k}{m-2k} \bar{e}_{2m-4k} * \bar{y}_k.$$

На остальных элементах μ^* определяется структурой алгебры.

Переходя к двойственной ситуации, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8'. Действие $\mu_*: EU_*(2) * BU_*(n) \rightarrow BU_*(2n)$ на примитивных элементах $y_k \in BU_*(n)$ задается формулой $\mu_*(e_{2i+1} * y_k) = 0$ и

$$\mu_*(e_{2i} * y_k) = \binom{n-k}{i} y_{i+2k} + \text{непримитивные элементы}.$$

Иногда удобнее использовать другие образующие в BU_* . Обозначим через b_m элементы $y_1^{\otimes m} \in BU_*(1)$. Тогда BU_* будет свободной коммутативной алгеброй, порожденной элементами b_m , и коумножение на этих элементах задается формулой

$$\nabla(b_m) = \sum_{i=0}^m b_i \otimes b_{m-i}.$$

Прямые вычисления показывают, что действие $\mu_*: EU_*(2) * BU_*(1) \rightarrow BU_*(2)$ задается формулой (см. [15]):

$$\mu_*(e_{2i} * b_m) = \sum_{k \geq 0} \binom{i+k-1}{k} b_{m-k} \cdot b_{i+m+k}.$$

Из этой формулы следует, что действие $\mu_*: EU_*(2) * BU_*(n) \rightarrow BU_*(2n)$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mu_*(e_{2i} * b_{m_1} \cdots b_{m_n}) = & \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_n = i \\ k_1, \dots, k_n}} \binom{i_1 + k_1 - 1}{k_1} b_{m_1 - k_1} b_{i_1 + m_1 + k_1} \\ & \cdots \binom{i_n + k_n - 1}{k_n} b_{m_n - k_n} b_{i_n + m_n + k_n}. \end{aligned}$$

В частности [16],

$$\mu_*(e_{2i} * b_m) = \binom{i+m-1}{m} b_{i+2m} + \text{неразложимые элементы}.$$

Заметим, что действие μ_* и кодействие μ^* нестабильны и, следовательно, не дают действия и кодействия на гомологиях $H_*(BU) = \lim_n H_*(BU(n))$ и когомологиях $H^*(BU) = \lim_n H^*(BU(n))$ соответственно.

Так как $BU_*(n)$ являются гомологиями топологических пространств $BU(n)$, то имеют место кодействия $\tau_*: BU_*(n) \rightarrow EU^*(k) * BU_*(n)$ и двойственные действия $\tau^*: EU_*(k) * BU^*(n) \rightarrow BU^*(n)$.

Например, $\tau^*: EU_*(2) * BU^*(1) \rightarrow BU^*(1)$ задается формулой

$$\tau^*(e_i * \bar{y}_1) = \begin{cases} \bar{y}_1^2, & i = 0, \\ 0, & i = 1, \\ \bar{y}_1, & i = 2, \\ 0, & i > 2. \end{cases}$$

На остальных элементах τ^* определяется структурой алгебры

$$\tau^*(e_i * \bar{y}_1^n) = \binom{n}{k} \bar{y}_1^{2n-k},$$

если $i = 2k$, и 0, если $i = 2k + 1$.

Так как $\tau^*: EU_*(2) * BU^*(n) \rightarrow BU^*(n)$ согласовано со структурой коалгебры, то имеет место

ТЕОРЕМА 9. Действие $\tau^*: EU_*(2) * BU^*(n) \rightarrow BU^*(n)$ на образующих $\bar{y}_m$ в $BU^*(n)$ задается формулой

$$\tau^*(e_{2i} * \bar{y}_m) = \begin{cases} \bar{y}_{m-i} \bar{y}_m, & i \leq m, \\ 0, & i > m. \end{cases}$$

На остальных элементах τ^* определяется структурой алгебры.

Переходя к двойственной ситуации, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 9'. Кодействие $\tau_*: BU_*(n) \rightarrow EU^*(2) * BU_*(n)$ на образующих b_m в $BU_*(n)$ задается формулой

$$\tau_*(b_m) = \sum_i \binom{i}{m-i} \bar{e}_{4i-2m} * b_i.$$

На остальных элементах τ^* определяется структурой алгебры на $BU_*(n)$.

Рассмотрим теперь гомологии BU с $\mathbb{Z}/p$ коэффициентами. Соответствующая биалгебра Хопфа EU_* будет порождаться элементами $e_2 \in EU_*(p)$ размерности $2(p-1)$ [13].

Из определения действия $\mu_*: EU_*(p) * BU_*(1) \rightarrow BU_*(p)$ следует, что

$$\mu_*(e_2 * 1) = y_{p-1}.$$

На остальных элементах действие μ_* определяется структурой алгебры Хопфа на BU_* .

Кодействие $\mu^*: BU^*(p) \rightarrow EU^*(p) * BU^*(1)$ задается формулой

$$\mu^*(\bar{y}_i) = \begin{cases} \bar{e}_0 * \bar{y}_0, & i = 0, \\ 0, & 0 < i < p-1, \\ \bar{e}_2 * 1, & i = p-1, \\ \bar{e}_0 * \bar{y}_1, & i = p. \end{cases}$$

На остальных элементах кодействие μ^* определяется структурой алгебры Хопфа на BU^* .

Вычислим кодействие $\mu^*: BU^*(pn) \rightarrow EU^*(p) * BU^*(n)$. Так как μ^* является отображением алгебр, то достаточно вычислить его на образующих $\bar{y}_m \in BU^*(pn)$. Для этого воспользуемся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} BU^*(pn) & \xrightarrow{\mu^*} & EU^*(p) * BU^*(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BU^*(p)^{\otimes n} & \xrightarrow{(\mu^*)^{\otimes n}} & EU^*(p) * (BU^*(1)^{\otimes n}) \end{array},$$

из которой следует

ТЕОРЕМА 10. Кодействие $\mu^*: BU^*(pn) \rightarrow EU^*(p) * BU^*(n)$ на образующих $\bar{y}_m$ в $BU^*(pn)$ задается формулой

$$\mu^*(\bar{y}_m) = \sum_{\substack{k \\ m=i(p-1)+kp}} \binom{n-k}{i} \bar{e}_{2i} * \bar{y}_k.$$

На остальных элементах μ^* определяется структурой алгебры.

Рассмотрим операции

$$\tau_*: BU_*(n) \rightarrow EU^*(k) * BU_*(n), \quad \tau^*: EU_*(k) * BU^*(n) \rightarrow BU^*(n)$$

для $\mathbb{Z}/p$ коэффициентов.

Например, $\tau^*: EU_*(p) * BU^*(1) \rightarrow BU^*(1)$ задается формулой

$$\tau^*(e_{2i} * \bar{y}_1) = \begin{cases} \bar{y}_1^p, & i = 0, \\ \bar{y}_1, & i = 1, \\ 0, & i > 1. \end{cases}$$

На остальных элементах τ^* определяется структурой алгебры

$$\tau^*(e_{2i} * \bar{y}_1^n) = \binom{n}{i} \bar{y}_1^{pn-i(p-1)}.$$

Так как $\tau^*: EU_*(p) * BU^*(n) \rightarrow BU^*(n)$ согласовано со структурой коалгебры, то имеет место

ТЕОРЕМА 11. Действие $\tau^*: EU_*(p) * BU^*(n) \rightarrow BU^*(n)$ на образующих $\bar{y}_m$ в $BU^*(n)$ задается формулой

$$\tau^*(e_{2i} * \bar{y}_m) = \begin{cases} \bar{y}_{m-i}^{p-1} \bar{y}_m, & i \leq m, \\ 0, & i > m. \end{cases}$$

На остальных элементах τ^* определяется структурой алгебры.

§ 4. E_∞ -мультипликативные спектры и спектры Тома

Перейдем теперь к рассмотрению спектров. Пусть $\mathcal{E}$ – биоперада. Мультипликативный спектр $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(n)\}$ будем называть $\mathcal{E}$ -мультипликативным, если заданы операции $\mu: \mathcal{E}(k) * \mathbb{X}(n) \rightarrow \mathbb{X}(kn)$, которые вместе с мультипликативной структурой на $\mathbb{X}$ образуют структуру $\mathcal{E}$ -мультипликативного семейства. Если E – E_∞ -биоперада, то соответствующий E -мультипликативный спектр $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(n)\}$ будем называть E_∞ -мультипликативным. Заметим, что это понятие E_∞ -мультипликативного спектра аналогично понятию H_∞ кольцевого предспектра [9] и отличается от понятия E_∞ -кольцевого спектра [8], [9].

Пусть $\mathbb{S} = \{S^n\}$ – спектр сфер. Действия группы $O(n)$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ индуцирует действие $O(n)$ на S^n . Рассмотрим симплициальный объект

$$B_*(*, O(n), S^n): S^n \longleftarrow O(n) \times S^n \longleftarrow \dots \longleftarrow O(n)^{\times m} \times S^n \longleftarrow \dots.$$

Его реализация будет пространством Тома, а семейство $MO = \{MO(n)\}$ будет спектром Тома. Аналогично определяются спектры Тома MU и MSp .

Аналогично тому, как была определена структура биоперады, на семействе $GL = \{GL(n)\}$ можно определить действие $\mu: O(k) \times (\mathbb{R}^n)^{\times k} \rightarrow \mathbb{R}^{kn}$, которое индуцирует действие биоперады $O = \{O(n)\}$ на семействе сфер $\mathbb{S} = \{S^n\}$.

Кроме этого, имеют место естественные отображения $\pi: S^n \wedge S^m \rightarrow S^{n+m}$. Непосредственная проверка показывает, что отображения μ и π удовлетворяют требуемым соотношениям. Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 12. Спектр сфер $\mathbb{S} = \{S^n\}$ является $O = \{O(n)\}$ -мультипликативным.

Эта структура на $\mathbb{S}$ индуцирует отображения

$$\pi: MO(n) \wedge MO(m) \rightarrow MO(n+m), \quad \mu: EO(k) * MO(n) \rightarrow MO(kn),$$

которые задают на спектре Тома $MO = \{MO(n)\}$ структуру EO -мультипликативного спектра. Аналогичные структуры имеют место и на других спектрах Тома. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 13. *Спектр Тома MO является EO -мультипликативным спектром; MU является EU -мультипликативным спектром и MSp является ESp -мультипликативным спектром. Следовательно, спектры Тома E_∞ -мультипликативны.*

Рассмотрим, например, спектр Тома $MO = \{MO(n)\}$. Обозначим $MO_*(n) = H_*(MO(n))$. Наша цель состоит в вычислении действий

$$\mu_*: EO_*(k) * MO_*(n) \rightarrow MO_*(kn)$$

и двойственных кодействий

$$\mu^*: MO^*(kn) \rightarrow EO^*(k) * MO^*(n).$$

Известно, что $MO_*(n)$ является свободным $BO_*(n)$ -комодулем с одной n -мерной образующей $u_n \in S^n$; $MO^*(n)$ является свободным $BO^*(n)$ -модулем с одной n -мерной образующей $\bar{u}_n \in S^n$; MO_* , рассматриваемый со структурой алгебры, является свободным BO_* -комодулем Хопфа с одной 1-мерной образующей $u_1 \in S^1$. Аналогично, MO^* , рассматриваемый со структурой коалгебры, является свободным BO^* -модулем Хопфа с одной 1-мерной образующей $\bar{u}_1$.

Имеют место изоморфизмы Тома $BO_*(n) \rightarrow MO_{*+n}(n)$, которые сопоставляют элементам $x \in BO_*(n)$ элементы $x \otimes u_n \in MO_{*+n}(n)$. Эти изоморфизмы сохраняют умножения π_* . Поэтому умножения

$$\pi_*: MO_*(n) \otimes MO_*(m) \rightarrow MO_*(n+m)$$

определяются умножениями

$$\pi_*: BO_*(n) \otimes BO_*(m) \rightarrow BO_*(n+m)$$

и формулами $\pi_*(u_n \otimes u_m) = u_{n+m}$.

Однако изоморфизмы Тома не сохраняют действие μ_* . Поэтому мы будем использовать другие гомоморфизмы $\eta_*: BO_*(n) \rightarrow MO_*(n)$ и двойственные к ним гомоморфизмы $\eta^*: MO^*(n) \rightarrow BO^*(n)$. Для этого заметим, что $BO(n)$ гомотопически эквивалентно $B(*, O(n), \mathbb{R}^n)$ и имеют место естественные отображения $\eta: B(*, O(n), \mathbb{R}^n) \rightarrow MO(n)$. Эти отображения индуцируют требуемые гомоморфизмы η_*, η^* .

Легко видеть, что для $\eta^*: MO^*(1) \rightarrow BO^*(1)$ имеет место формула

$$\eta^*(x \otimes \bar{u}_1) = x \cdot \bar{x}_1.$$

Так как η^* сохраняет коумножения, то в общем случае будет иметь место формула

$$\eta^*(x \otimes \bar{u}_n) = x \cdot \bar{x}_n.$$

Из соответствующей формулы для BO^* получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 14. *Кодействие $\mu^*: MO^*(2n) \rightarrow EO^*(2) * MO^*(n)$ на образующих $\bar{x}_m \otimes \bar{u}_{2n} \in MO^*(2n)$ задается формулой*

$$\mu^*(\bar{x}_m \otimes \bar{u}_{2n}) = \sum_k \binom{n-k}{m-2k} \bar{e}_{m-2k} * (\bar{x}_k \otimes \bar{u}_n).$$

В двойственной ситуации гомоморфизм $\eta_*: BO_*(1) \rightarrow MO_*(1)$ задается формулой

$$\eta_*(a_m) = \begin{cases} a_{m-1} \otimes u_1, & m \geq 1, \\ 0, & m = 0. \end{cases}$$

Так как η_* сохраняет умножения, то в общем случае для $\eta_*: BO_*(n) \rightarrow MO_*(n)$ будет иметь место формула

$$\eta_*(a_{m_1} \cdots a_{m_n}) = \begin{cases} a_{m_1-1} \cdots a_{m_n-1} \otimes u_n, & m_k \geq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Действие $\mu_*: EO_*(2) * MO_*(n) \rightarrow MO_*(2n)$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mu_*(e_i * a_{m_1} \cdots a_{m_n} \otimes u_n) = & \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_n = i \\ k_1, \dots, k_n}} \binom{i_1 + k_1 - 1}{k_1} a_{m_1-k_1} a_{i_1+m_1+k_1} \\ & \cdots \binom{i_n + k_n - 1}{k_n} a_{m_n-k_n} a_{i_n+m_n+k_n} \otimes u_{2n}. \end{aligned}$$

В частности,

$$\mu_*(e_i * a_m) = \binom{i+m-1}{m} a_{i+2m} + \text{неразложимые элементы.}$$

Заметим, что действия $\mu_*: EO_*(k) * MO_*(n) \rightarrow MO_*(kn)$ нестабильны и, следовательно, не дают действия на гомологиях $H_*(MO) = \lim_m H_{*+m}(MO(m))$ спектра Тома MO .

Так как $MO_*(n)$ являются гомологиями топологического пространства $MO(n)$, то имеют место кодействия $\tau_*: MO_*(n) \rightarrow EO^*(k) * MO_*(n)$ и двойственные действия $\tau^*: EO^*(k) * MO^*(n) \rightarrow MO^*(n)$. Используя соответствующие формулы для $BO_*(n)$ и гомоморфизм η^* , получаем следующие формулы для действия $\tau^*: EO^*(2) * MO^*(n) \rightarrow MO^*(n)$:

$$\tau^*(e_i * (\bar{x}_m \otimes \bar{u}_n)) = \sum_{k \leq i} \bar{x}_{m-k} \cdot \bar{x}_m \cdot \bar{x}_{n-i+k} \otimes \bar{u}_n.$$

Кодействие $\tau_*: MO_*(n) \rightarrow EO_*(2) * MO_*(n)$ задается формулой

$$\tau_*(a_m \otimes u_n) = \sum_i \binom{i+1}{m-i} \bar{e}_{2i-m+n} * (a_i \otimes u_n).$$

Рассмотрим $H^*(MO) = \lim_n H^{*+n}(MO(n))$. Известно, что $H^*(MO)$ является свободной коммутативной алгеброй, порожденной элементами $\bar{x}_i, i \geq 0$. Действие τ^* индуцирует действие алгебры Стиррода на $H^*(MO)$.

ТЕОРЕМА 15. Действие алгебры Стинрода на $H^*(MO)$ на образующих $\bar{x}_m$ в $H^*(MO)$ задается формулой

$$Sq^i(\bar{x}_m) = \sum_{k \leq m} \bar{x}_k \cdot \bar{x}_{i-k} \cdot \bar{x}_m.$$

На остальных элементах оно определяется структурой алгебры на $H^*(MO)$.

Аналогичным образом рассмотрим спектр Тома $MU = \{MU(n)\}$ и вычислим действие

$$\mu_*: EU_*(k) * MU_*(n) \rightarrow MU_*(kn)$$

и двойственное кодействие

$$\mu^*: MU^*(kn) \rightarrow EU^*(k) * MU^*(n).$$

Известно, что $MU_*(2n)$ является свободным $BU_*(n)$ -комодулем с одной $2n$ -мерной образующей $u_{2n} \in S^{2n}$; $MU^*(2n)$ является свободным $BU^*(n)$ -модулем с одной $2n$ -мерной образующей $\bar{u}_{2n} \in S^{2n}$. Имеют место гомоморфизмы $\eta_*: BU_*(n) \rightarrow MU_*(2n)$ и двойственные к ним гомоморфизмы $\eta^*: MU^*(2n) \rightarrow BU^*(n)$. Легко видеть, что для гомоморфизма $\eta^*: MU^*(2) \rightarrow BU^*(1)$ имеет место формула $\eta^*(y \otimes \bar{u}_2) = y \cdot \bar{y}_1$. Так как η^* сохраняет коумножения, то в общем случае будет иметь место формула

$$\eta^*(y \otimes \bar{u}_{2n}) = y \cdot \bar{y}_n.$$

Из соответствующей формулы для BU^* следует

ТЕОРЕМА 16. Кодействие $\mu^*: MU^*(4n) \rightarrow EU^*(2) * MU^*(2n)$ на образующих $\bar{y}_m \otimes \bar{u}_{4n} \in MO^*(4n)$ задается формулой

$$\mu^*(\bar{y}_m \otimes \bar{u}_{4n}) = \sum_k \binom{n-k}{m-2k} \bar{e}_{2m-4k} * (\bar{y}_k \otimes \bar{u}_{2n}).$$

В двойственной ситуации гомоморфизм $\eta_*: BU_*(1) \rightarrow MU_*(2)$ задается формулой

$$\eta_*(b_m) = \begin{cases} b_{m-1} \otimes u_2, & m \geq 1, \\ 0, & m = 0. \end{cases}$$

Так как η_* сохраняет умножения, то в общем случае для $\eta_*: BU_*(n) \rightarrow MU_*(2n)$ будет иметь место формула

$$\eta_*(b_{m_1} \cdots b_{m_n}) = \begin{cases} b_{m_1-1} \cdots b_{m_n-1} \otimes u_{2n}, & m_k \geq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Действие $\mu_*: EU_*(2) * MU_*(n) \rightarrow MU_*(2n)$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mu_*(e_{2i} * b_{m_1} \cdots b_{m_n} \otimes u_n) = & \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_n = i \\ k_1, \dots, k_n}} \binom{i_1 + k_1 - 1}{k_1} b_{m_1 - k_1} b_{i_1 + m_1 + k_1} \\ & \cdots \binom{i_n + k_n - 1}{k_n} b_{m_n - k_n} b_{i_n + m_n + k_n} \otimes u_{2n}. \end{aligned}$$

В частности,

$$\mu_*(e_{2i} * (b_m \otimes u_n)) = \binom{i+m-1}{m} b_{i+2m} \otimes u_{2n} + \text{неразложимые элементы.}$$

Заметим, что действия $\mu_*: EU_*(k) * MU_*(n) \rightarrow MU_*(kn)$ нестабильны и, следовательно, не дают действия на гомологиях $H_*(MU) = \lim_m H_{*+m}(MU(m))$ спектра Тома MU .

Так как $MU_*(n)$ являются гомологиями топологического пространства $MU(n)$, то имеют место действия $\tau_*: MU_*(n) \rightarrow EU^*(k) * MU_*(n)$ и двойственные действия $\tau^*: EU_*(k) * MU^*(n) \rightarrow MU^*(n)$. Используя соответствующие формулы для $BU_*(n)$ и гомоморфизм η^* , получим следующие формулы для действия $\tau^*: EU_*(2) * MU^*(n) \rightarrow MU^*(n)$:

$$\tau^*(e_{2i} * (\bar{y}_m \otimes \bar{u}_{2n})) = \sum_{k \leq i} \bar{y}_{m-k} \cdot \bar{y}_m \cdot \bar{y}_{n-i+k} \otimes \bar{u}_{2n}.$$

Рассмотрим гомологии $H^*(MU) = \lim_n H^{*+n}(MU(n))$ с $\mathbb{Z}/p$ коэффициентами, $p \geq 2$. Известно, что $H^*(MU)$ является свободной коммутативной алгеброй, порожденной элементами $\bar{y}_i$ размерности $i \geq 0$. Действие τ^* индуцирует действие алгебры Стиррода на $H^*(MU)$.

ТЕОРЕМА 17. *Действие алгебры Стиррода на $H^*(MU)$ на образующих $\bar{y}_m \in H^*(MU)$ задается формулой*

$$P^i(\bar{y}_m) = \sum_{k \leq m} \bar{y}_k^{p-1} \cdot \bar{y}_{i-k}^{p-1} \cdot \bar{y}_m.$$

На остальных элементах оно определяется структурой алгебры на $H^*(MU)$.

§ 5. Алгебра Дайера–Лашофа для обобщенных теорий гомологий

Рассмотрим теорию гомологий, ассоциированную с мультипликативным спектром $\mathbb{H}$. Если X – топологическое пространство, то гомологии $\mathbb{H}_*(X) = \{\mathbb{H}_n(X)\}$ определяются по формуле

$$\mathbb{H}_n(X) = \lim_i \pi_{n+i}(\mathbb{H}(i) \wedge X),$$

где предел берется относительно композиций

$$\pi_{n+i}(\mathbb{H}(i) \wedge X) \rightarrow \pi_{n+i+1}(S\mathbb{H}(i) \wedge X) \rightarrow \pi_{n+i+1}(\mathbb{H}(i+1) \wedge X).$$

В частности, имеют место следующие теории гомологий:

$$\mathbb{M}O_*, \mathbb{M}U_*, \mathbb{M}Sp_*, \mathbb{M}SO_*, \mathbb{M}SU_*.$$

Пусть теперь $\mathbb{X}$ – коспектр, т.е. семейство $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(m)\}$ пространств $\mathbb{X}(m)$ с заданными отображениями $\mathbb{X}(m) \rightarrow S\mathbb{X}(m-1)$. Тогда гомологии коспектра $\mathbb{X}$ определяются по формуле

$$\mathbb{H}_n(\mathbb{X}) = \lim_m \mathbb{H}_{n+m}(\mathbb{X}(m)),$$

где предел берется относительно композиций

$$\mathbb{H}_{n+m}(\mathbb{X}(m)) \rightarrow \mathbb{H}_{n+m}(S\mathbb{X}(m-1)) \rightarrow \mathbb{H}_{n+m-1}(\mathbb{X}(m-1)).$$

Легко видеть, что если X – топологическое пространство и SX – надстроечный коспектр над X , то его гомологии будут изоморфны гомологиям X .

Гомологии $\mathbb{H}_*(\mathbb{X})$ коспектра $\mathbb{X}$ являются не только абелевыми группами. На них имеется действие алгебры $\mathbb{H}_*(S^0)$.

Действительно, имеют место действия $\mu_*: \mathbb{H}_*(S^0) \otimes \mathbb{H}_*(\mathbb{X}(m)) \rightarrow \mathbb{H}_*(\mathbb{X}(m))$, для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_*(S^0) \otimes \mathbb{H}_*(\mathbb{X}(m)) & \xrightarrow{\mu_*} & \mathbb{H}_*(\mathbb{X}(m)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}_*(S^0) \otimes \mathbb{H}_*(\mathbb{X}(m-1)) & \xrightarrow{\mu_*} & \mathbb{H}_*(\mathbb{X}(m-1)) \end{array}.$$

Переходя к пределу, получим требуемое действие $\mu_*: \mathbb{H}_*(S^0) \otimes \mathbb{H}_*(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}_*(\mathbb{X})$.

Мы обобщим понятие коспектра и введем понятие $\mathbb{H}$ -коспектра. А именно, семейство $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(m)\}$ пространств $\mathbb{X}(m)$ будем называть $\mathbb{H}$ -коспектром, если для любого m задано отображение $\varphi: \mathbb{X}(m) \rightarrow \mathbb{H}(k) \wedge \mathbb{X}(m-k)$. Ясно, что S -коспектр является просто коспектром.

Приведем нетривиальные примеры $\mathbb{H}$ -коспектров. Для этого рассмотрим биоперату E и E -мультипликативный спектр $\mathbb{H}$. Для коспектра $\mathbb{X}$ обозначим $E(k, \mathbb{X}(m)) = E(k) *_{\Sigma_k} \mathbb{X}(m)$ и $E(k, \mathbb{X})$ – семейство $\{E(k, \mathbb{X})(n)\}$, для которого

$$E(k, \mathbb{X})(km) = E(k, \mathbb{X}(m)),$$

если $n = km$, и $E(k, \mathbb{X})(n)$ – надстройки над этими пространствами для других n . Имеют место отображения

$$\begin{aligned} E(k, \mathbb{X}(m)) &\rightarrow E(k, S\mathbb{X}(m-1)) \rightarrow E(k, \mathbb{H}(1) \wedge \mathbb{X}(m-1)) \\ &\rightarrow E(k, \mathbb{H}(1)) \wedge E(k, \mathbb{X}(m-1)) \rightarrow \mathbb{H}(k) \wedge E(k, \mathbb{X}(m-1)). \end{aligned}$$

Они определяют искомую структуру $\mathbb{H}$ -коспектра на семействе $E(k, \mathbb{X})$. В частности, для коспектра сфер $\mathbb{S}$ имеем $\mathbb{H}$ -коспектр $E(k, \mathbb{S})$, который будет играть важную роль в построении операций Дайера–Лашофа и операций Стинрода.

Пусть $\mathbb{X}$ – H -коспектр, $\varphi: \mathbb{X}(m) \rightarrow \mathbb{H}(k) \wedge \mathbb{X}(m-k)$. Определим гомологии $\mathbb{H}_*^\varphi(\mathbb{X})$, которые назовем скрученными гомологиями, полагая

$$\mathbb{H}_n(\mathbb{X}) = \lim_m \mathbb{H}_{n+m}(\mathbb{X}(m)),$$

где предел берется относительно композиций

$$\varphi_*: \mathbb{H}_{n+m}(\mathbb{X}(m)) \rightarrow \mathbb{H}_{n+m}(\mathbb{H}(k) \wedge \mathbb{X}(m-k)) \rightarrow \mathbb{H}_{n+m-k}(\mathbb{X}(m-k)).$$

Ясно, что гомологии коспектра, рассматриваемого как $\mathbb{H}$ -коспектр, изоморфны гомологиям коспектра, и для любого $\mathbb{H}$ -коспектра $\mathbb{X}$ имеет место действие

$$\mu_*: \mathbb{H}_*(S^0) \otimes \mathbb{H}_*^\varphi(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}_*^\varphi(\mathbb{X}).$$

Гомологии $\mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{X}))$ рассмотренного выше коспектра $E(k, \mathbb{X})$ дают пример гомологий с нетривиальным скручиванием. В частности, определены гомологии

$$\mathbb{H}_n^\varphi(E(k, \mathbb{S})) = \lim_m \mathbb{H}_{n+km}(E(k, S^m)),$$

где предел берется относительно гомоморфизмов

$$\varphi_*: \mathbb{H}_{n+km}(E(k, S^m)) \rightarrow \mathbb{H}_{n+k(m-1)}(E(k, S^{m-1})),$$

индуцированных отображениями $\varphi: E(k, S^m) \rightarrow \mathbb{H}(k) \wedge E(k, S^{m-1})$.

Заметим, что отображение φ индуцирует изоморфизм обычных гомологий

$$H_*(\mathbb{H} \wedge E(k, S^m)) \rightarrow H_*(\mathbb{H} \wedge E(k, S^{m-1})),$$

и, следовательно, гомоморфизмы $\varphi_*: \mathbb{H}_*(E(k, S^m)) \rightarrow \mathbb{H}_*(E(k, S^{m-1}))$ в действительности являются изоморфизмами. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 18. *Имеют место изоморфизмы*

$$\mathbb{H}_*(E(k, \mathbb{S})) \cong \mathbb{H}_*(E(k, S^0)).$$

Обозначим $\mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S}))$ как $\mathbb{E}_*(k)$. Нашей целью является построение на гомологиях $\mathbb{H}_*(X)$ E -мультипликативного пространства X операций, аналогичных операциям Дайера–Лашофа для обычных гомологий.

Отметим, что в работах [8], [9] был дан общий метод построения операций Дайера–Лашофа для теорий гомологий, соответствующих H_∞ и E_∞ кольцевым спектрам. Для построения этих операций для H_∞ кольцевого предспектра использовался стабилизационный функтор Z , позволяющий перейти от предспектра к H_∞ кольцевому спектру. Мы определим аналог алгебры Дайера–Лашофа и ее действия непосредственно для E_∞ -мультипликативного спектра и, в частности, для H_∞ кольцевого предспектра. Для этого мы используем скрученные гомологии и рассматриваем более общую ситуацию.

Пусть $\mathbb{X}$ — E -мультипликативный спектр, на котором действует E -мультипликативный спектр $\mathbb{H}$. Определим операции Дайера–Лашофа на гомотопических группах $\pi_*(\mathbb{X}) = \lim_m \pi_{*+m}(\mathbb{X}(m))$ спектра $\mathbb{X}$.

Пусть $x \in \pi_n(\mathbb{X})$ и $f: S^{n+m} \rightarrow \mathbb{X}(m)$ — представляющее этот элемент отображение. Оно индуцирует отображение $E(k, S^{n+m}) \rightarrow E(k, \mathbb{X}(m)) \rightarrow \mathbb{X}(km)$ и, следовательно, отображение

$$\mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^{n+m}) \rightarrow \mathbb{H}(j) \wedge \mathbb{X}(km) \rightarrow \mathbb{X}(j + km).$$

Последнее отображение индуцирует гомоморфизм гомотопических групп

$$\pi_{i+j+k(n+m)}(\mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^{n+m})) \rightarrow \pi_{i+j+k(n+m)}(\mathbb{X}(j + km)).$$

Переходя к пределу по j , будем иметь гомоморфизм

$$\mu_f: \mathbb{H}_{i+k(n+m)}(E(k, S^{n+m})) \rightarrow \pi_{i+kn}(\mathbb{X}),$$

и, следовательно, действие

$$\mu_*: \mathbb{H}_{i+k(n+m)}(E(k, S^{n+m})) \times \pi_{n+m}(\mathbb{X}(m)) \rightarrow \pi_{i+kn}(\mathbb{X}).$$

Для гомоморфизма надстройки $S: \pi_{n+m}(\mathbb{X}(m)) \rightarrow \pi_{n+m+1}(\mathbb{X}(m+1))$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_{i+k(n+m+1)}(E(k, S^{n+m+1})) \times \pi_{n+m+1}(\mathbb{X}(m+1)) & \xrightarrow{\mu_*} & \pi_{i+kn}(\mathbb{X}) \\ \uparrow 1 \times S & & \downarrow = \\ \mathbb{H}_{i+k(n+m+1)}(E(k, S^{n+m+1})) \times \pi_{n+m}(\mathbb{X}(m)) & & \\ \downarrow \varphi_* \times 1 & & \downarrow = \\ \mathbb{H}_{i+k(n+m)}(E(k, S^{n+m})) \times \pi_{n+m}(\mathbb{X}(m)) & \xrightarrow{\mu_*} & \pi_{i+kn}(\mathbb{X}) \end{array}.$$

Переходя к пределу по m , получим искомое действие

$$\mu_*: \mathbb{H}_i^\varphi(E(k, \mathbb{S})) \times \pi_n(\mathbb{X}) \rightarrow \pi_{i+kn}(\mathbb{X}),$$

которое аддитивно по первому сомножителю и (вообще говоря) неаддитивно по второму сомножителю.

Обозначим $\mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S})) * \pi_*(\mathbb{X})$ соответствующее полутензорное произведение, размерность элементов $e_i * x_n$ в котором считается равной $i + kn$. Получим операции

$$\mu_*: \mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S})) * \pi_*(\mathbb{X}) \rightarrow \pi_*(\mathbb{X}),$$

которые сохраняют размерности.

В частности, если X — E -мультипликативное топологическое пространство, $\mathbb{X} = \mathbb{H} \wedge X$, то будем иметь операции Дайера–Лашофа

$$\mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X)$$

на обобщенных гомологиях $\mathbb{H}_*(X)$ E -мультипликативного пространства X .

Если в определении операций Дайера–Лашофа $\mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S})) * \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X)$ вместо пространства X мы возьмем $E(n, S^m)$, то получим отображения

$$\gamma_*: \mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S})) * \mathbb{H}_*(E(n, S^m)) \rightarrow \mathbb{H}_*(E(kn, S^m)).$$

Переходя к пределу по m , получим операции

$$\gamma_*: \mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S})) * \mathbb{H}_*^\varphi(E(n, \mathbb{S})) \rightarrow \mathbb{H}_*^\varphi(E(kn, \mathbb{S})),$$

или, что то же самое, операции

$$\gamma_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(kn).$$

Из определения биоперации E следует, что эти операции γ_* удовлетворяют соотношению ассоциативности и, следовательно, семейство $\mathbb{E}_* = \{\mathbb{E}_*(n)\}$, $\mathbb{E}_*(n) = \mathbb{H}_*^\varphi(E(n, \mathbb{S}))$, можно рассматривать как алгебру с операцией

$$\gamma_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(kn).$$

Если $\mathbb{X}$ — E -мультипликативный спектр, на котором действует E -мультипликативный спектр $\mathbb{H}$, то операции

$$\mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \pi_*(\mathbb{X}) \rightarrow \pi_*(\mathbb{X})$$

индуцируют действие алгебры $\mathbb{E}_*$ на гомотопических группах $\pi_*(\mathbb{X})$ спектра $\mathbb{X}$.

В частности, если X — E -мультипликативное пространство, то операции

$$\mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X)$$

индуцируют действие алгебры $\mathbb{E}_*$ на гомологиях $\mathbb{H}_*(X)$ пространства X .

На семействе $\mathbb{E}_* = \{\mathbb{E}_*(n)\}$ имеется не только структура алгебры. Как отмечалось выше, на нем имеется структура $\mathbb{H}_*(S^0)$ -модуля

$$\mu_*: \mathbb{H}_*(S^0) \otimes \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(n).$$

Определим действие

$$\mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}_*(S^0) \rightarrow \mathbb{E}_*(k).$$

Пусть $x \in \mathbb{E}_n(k)$ и $f: S^{n+j+km} \rightarrow \mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^m)$ — представитель x ; $y \in \mathbb{H}_l(S^0)$ и $g: S^{l+i} \rightarrow \mathbb{H}(i) \wedge S^0 = \mathbb{H}(i)$ — представитель y .

Для $m = l + i + p$ композиция

$$S^{n+j+k(i+l+p)} \rightarrow \mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^{l+i+p}) \rightarrow \mathbb{H}(j) \wedge E(k, \mathbb{H}(i) \wedge S^p) \rightarrow \mathbb{H}(j+ki) \wedge E(k, S^p)$$

определяет искомый элемент $\mu_*(x * y) \in \mathbb{E}_{n+kl}(k)$.

Легко видеть, что если $\mathbb{X}$ — E -мультипликативный спектр, на котором действует E -мультипликативный спектр $\mathbb{H}$, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}_*(S^0) \times \pi_*(\mathbb{X}) & \xrightarrow{1 * \mu_*} & \mathbb{E}_*(k) * \pi_*(\mathbb{X}) \\ \mu_* \times 1 \downarrow & & \downarrow \mu_* \\ \mathbb{E}_*(k) * \pi_*(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\mu_*} & \pi_*(\mathbb{X}) \end{array}.$$

Кроме того, умножения $\pi: E(n) \times E(m) \rightarrow E(n+m)$ индуцируют умножения

$$\pi_*: \mathbb{E}_*(n) \otimes \mathbb{E}_*(m) \rightarrow \mathbb{E}_*(n+m).$$

Диагональ $\nabla: E(n) \rightarrow E(n) \times E(n)$ индуцирует отображение

$$E(n, S^{p+q}) \rightarrow E(n, S^p) \wedge E(n, S^q),$$

и, следовательно, в случае, если $\mathbb{H}_*(E(n, S^m))$ — свободные $\mathbb{H}_*(S^0)$ -модули, мы будем иметь гомоморфизмы

$$\mathbb{H}_*(E(n, S^{p+q})) \rightarrow \mathbb{H}_*(E(n, S^p)) \otimes_{\mathbb{H}_*(S^0)} \mathbb{H}_*(E(n, S^q)).$$

Легко видеть, что эти гомоморфизмы перестановочны с φ_* и, следовательно, индуцируют коумножение

$$\nabla_*: \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(n) \otimes_{\mathbb{H}_*(S^0)} \mathbb{E}_*(n).$$

Между операциями γ_* , μ_* , π_* , ∇_* имеют место все возможные соотношения ассоциативности, дистрибутивности и соотношения Хопфа. Мы будем называть такую структуру на $\mathbb{E}_* = \{\mathbb{E}_*(n)\}$ структурой $\mathbb{H}_*(S^0)$ -биалгебры Хопфа. Имеет место

ТЕОРЕМА 19. Если E – биоперада, $\mathbb{H}$ – E -мультипликативный спектр, то на гомологиях $\mathbb{E}_* = \{\mathbb{E}_*(n)\}$, $\mathbb{E}_*(n) = \mathbb{H}_*^\varphi(E(n, \mathbb{S}))$, имеется структура $\mathbb{H}_*(S^0)$ -биалгебры Хопфа. Если $\mathbb{X}$ – E -мультипликативный спектр, на котором действует E -мультипликативный спектр $\mathbb{H}$, то на гомотопических группах $\pi_*(\mathbb{X})$ будет иметь место структура $\mathbb{H}_*(S^0)$ -алгебры над $\mathbb{H}_*(S^0)$ -биалгеброй Хопфа $\mathbb{E}_*$. В частности, если X – E -мультипликативное топологическое пространство, то на гомологиях $\mathbb{H}_*(X)$ будет структура $\mathbb{H}_*(S^0)$ -алгебры над $\mathbb{H}_*(S^0)$ -биалгеброй Хопфа $\mathbb{E}_*$.

В частности, имеют место следующие действия:

$$\mu_*: \mathbb{E}O_* * \mathbb{M}O_* \rightarrow \mathbb{M}O_*, \quad \mu_*: \mathbb{E}U_* * \mathbb{M}U_* \rightarrow \mathbb{M}U_*$$

и т. д.

Заметим, что для определения операций Дайера–Лашофа с $\mathbb{Z}/p$ коэффициентами нужно просто заменить спектр сфер $\mathbb{S}$ на соответствующий спектр Мура $\mathbb{S}_{(p)}$ [9]. Тогда будут иметь место алгебра $\mathbb{E}_*^{(p)} = \{\mathbb{E}_*^{(p)}(n) = \mathbb{H}_*^\varphi(E(k, \mathbb{S}_{(p)}); \mathbb{Z}/p)\}$ и операции

$$\mu_*: \mathbb{E}_*^{(p)}(k) * \mathbb{H}_*(X; \mathbb{Z}/p) \rightarrow \mathbb{H}_*(X; \mathbb{Z}/p).$$

Аналогичным образом операции Дайера–Лашофа могут быть определены для обычных гомологий. А именно, пусть $\mathbb{X}$ – E -мультипликативный спектр, на котором действует E -мультипликативный спектр $\mathbb{H}$. Рассмотрим обычные гомологии

$$H_*(\mathbb{X}) = \lim_m H_{*+m}(\mathbb{X}(m))$$

с коэффициентами в поле.

Обозначим $E_*(k, S^m) = H_*(E(k, S^m))$. Отображения

$$\varphi: E(k, S^m) \rightarrow \mathbb{H}(k) \wedge E(k, S^{m-1})$$

индуцируют гомоморфизмы

$$\varphi_*: H_*(\mathbb{H} \wedge E(k, S^m)) \rightarrow H_*(\mathbb{H} \wedge E(k, S^{m-1})).$$

Предел по этим гомоморфизмам обозначим $\mathbb{E}_*^h(k)$, т.е.

$$\mathbb{E}_*^h(k) = \lim_m H_*(\mathbb{H} \wedge E(k, S^m)).$$

Как было сказано выше, имеют место изоморфизмы

$$\mathbb{E}_*^h(k) \cong H_*(\mathbb{H} \wedge E(k, S^0)) \cong H_*(\mathbb{H}) \otimes E_*(k).$$

Наша цель состоит в определении операций

$$\mu_*^h: \mathbb{E}_*^h(k) * H_*(\mathbb{X}) \rightarrow H_*(\mathbb{X}).$$

Для этого рассмотрим цепные комплексы топологических пространств и спектров. Цепные комплексы $C_*(E(k))$ образуют операду $C_*(E) = \{C_*(E(k))\}$. E -мультипликативная структура на спектре $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(m)\}$ индуцирует $C_*(E)$ -мультипликативную структуру на $C_*(\mathbb{X}) = \{C_*(\mathbb{X}(m))\}$:

$$C_*(E(k)) \otimes_{\Sigma_k} C_*(\mathbb{X}(m))^{\otimes k} \rightarrow C_*(\mathbb{X}(km)).$$

Пусть $x \in H_n(\mathbb{X})$ и $f: C_*(S^{n+m}) \rightarrow C_*(\mathbb{X}(m))$ – отображение, представляющее x . Это отображение индуцирует цепное отображение

$$C_*(E(k)) \otimes_{\Sigma_k} C_*(S^{n+m})^{\otimes k} \rightarrow C_*(E(k)) \otimes_{\Sigma_k} C_*(\mathbb{X}(m))^{\otimes k} \rightarrow C_*(\mathbb{X}(km))$$

и, следовательно, имеет отображение

$$C_*(\mathbb{H}(l)) \otimes C_*(E(k)) \otimes_{\Sigma_k} C_*(S^{n+m})^{\otimes k} \rightarrow C_*(\mathbb{H}(l)) \otimes C_*(\mathbb{X}(km)) \rightarrow C_*(\mathbb{X}(l+km)).$$

Пусть $y \in \mathbb{E}_i^h(k)$ и $g: C_*(S^{i+l+k(n+m)}) \rightarrow C_*(E(k)) \otimes_{\Sigma_k} C_*(S^{n+m})^{\otimes k}$ – отображение, представляющее y . Тогда $\mu_*^h(y * x) \in H_{i+kn}(\mathbb{X})$ будет представляться композицией

$$C_*(S^{i+l+k(n+m)}) \xrightarrow{g} C_*(E(k)) \otimes_{\Sigma_k} C_*(S^{n+m})^{\otimes k} \rightarrow C_*(\mathbb{X}(l+km)).$$

В частности, пусть X – E -мультипликативное топологическое пространство и $\mathbb{X} = \mathbb{H} \wedge X$. Тогда гомологии $H_*(\mathbb{H} \wedge X)$ называются гомологиями X с $\mathbb{H}$ коэффициентами и обозначаются $H_*(X; \mathbb{H})$. Таким образом, мы будем иметь операции

$$\mu_*^h: \mathbb{E}_*^h(k) * H_*(X; \mathbb{H}) \rightarrow H_*(X; \mathbb{H}).$$

Если в определении операций Дайера–Лашофа вместо $\mathbb{X}$ мы возьмем $E(n, \mathbb{S})$, то получим операции

$$\gamma_*^h: \mathbb{E}_*^h(k) * \mathbb{E}_*^h(n) \rightarrow \mathbb{E}_*^h(kn),$$

которые дают структуру алгебры на $\mathbb{E}_*^h = \{\mathbb{E}_*^h(n)\}$.

На семействе $\mathbb{E}_*^h = \{\mathbb{E}_*^h(n)\}$ имеется не только структура алгебры. На нем имеется структура $H_*(\mathbb{H})$ -модуля

$$\mu_*^h: H_*(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{E}_*^h(n) \rightarrow \mathbb{E}_*^h(n),$$

действия

$$\mu_*^h: \mathbb{E}_*^h(k) * H_*(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{E}_*^h(k)$$

и коумножения

$$\nabla_*^h: \mathbb{E}_*^h(n) \rightarrow \mathbb{E}_*^h(n) \otimes_{H_*(\mathbb{H})} \mathbb{E}_*^h(n).$$

Из определения операций Дайера–Лашофа для групп гомотопий и гомологий непосредственно следует, что эти операции удовлетворяют соотношениям ассоциативности, дистрибутивности и соотношениям Хопфа, перестановочны с гомоморфизмом Гуревича, т.е. имеет место

ТЕОРЕМА 20. *Если E – биоперада, $\mathbb{H}$ – E -мультипликативный спектр, то на гомологиях $\mathbb{E}_*^h = \{\mathbb{E}_*^h(n)\}$ имеется структура $H_*(\mathbb{H})$ -биалгебры Хопфа. Если $\mathbb{X}$ – E -мультипликативный спектр, то на гомологиях $H_*(\mathbb{X})$ имеется структура $H_*(\mathbb{H})$ -алгебры над $H_*(\mathbb{H})$ -биалгеброй Хопфа $\mathbb{E}_*^h$, причем коммутативны диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_*(k) * \pi_*(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\mu_*} & \pi_*(\mathbb{X}) \\ h * h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{E}_*^h(k) * H_*(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\mu_*^h} & H_*(\mathbb{X}) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{E}_*(n) & \xrightarrow{\gamma_*} & \mathbb{E}_*(kn) \\ h * h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{E}_*^h(k) * \mathbb{E}_*^h(n) & \xrightarrow{\gamma_*^h} & \mathbb{E}_*^h(kn) \end{array}.$$

Для топологического пространства X имеет место изоморфизм

$$\mathbb{H}_*(X) \cong H_*(X) \otimes H_*(\mathbb{H}).$$

Следовательно, имеет место мономорфизм $i_*: H_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X)$, $i_*(x) = x \otimes 1$. В частности, имеют место мономорфизмы $i_*: E_*(k) \rightarrow \mathbb{E}_*^h(k)$.

Из определения операций γ_*^h и μ_*^h непосредственно следует, что имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E_*(k) * E_*(n) & \xrightarrow{\gamma_*} & E_*(kn) & E_*(k) * H_*(X) & \xrightarrow{\mu_*} & H_*(X) \\ i_* * i_* \downarrow & & \downarrow i_* & i_* * i_* \downarrow & & \downarrow i_* \\ \mathbb{E}_*^h(k) * \mathbb{E}_*^h(n) & \xrightarrow{\gamma_*^h} & \mathbb{E}_*^h(kn) & \mathbb{E}_*^h(k) * H_*(X; \mathbb{H}) & \xrightarrow{\mu_*^h} & H_*(X; \mathbb{H}) \end{array}.$$

Вычислим действия

$$\mu_*: \mathbb{E}O_*(k) * \pi_*(MO) \rightarrow \pi_*(MO), \quad \mu_*^h: \mathbb{E}O_*^h(k) * H_*(MO) \rightarrow H_*(MO).$$

Так как гомоморфизм Гуревича $h: \pi_*(MO) \rightarrow H_*(MO)$ является мономорфизмом и коммутирует с этими действиями, то достаточно вычислить только действие μ_*^h .

Рассмотрим действие

$$\mu_*^h: \mathbb{E}O_*^h(2) * H_*(MO) \rightarrow H_*(MO).$$

Гомоморфизмы $\varphi_*: H_*(MO) \otimes E_*(2, S^m) \rightarrow H_*(MO) \otimes E_*(2, S^{m-1})$ задаются формулами

$$\varphi_*(a \otimes e_i * u_m) = \sum_k a \cdot a_k \otimes e_{i-k} * u_{m-1}.$$

Используя гомоморфизмы $E_*(2, S^m) \cong E_*(2)$, перепишем эти гомоморфизмы в виде

$$\varphi_*: H_*(MO) \otimes E_*(2) \rightarrow H_*(MO) \otimes E_*(2), \quad \varphi_*(a \otimes e_i) = \sum_k a \cdot a_k \otimes e_{i-k}.$$

Имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_*(MO) \otimes E_*(2) * MO_{n+m}(n) & \xrightarrow{1 \otimes \mu_*} & H_*(MO) \otimes MO_*(2n) \\ \varphi_*^n \otimes i_* \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ H_*(MO) \otimes E_*(2) * H_m(MO) & \xrightarrow{\mu_*^h} & H_*(MO) \end{array},$$

где φ_*^n — n -кратная композиция φ_* .

Следовательно, если $x \in H_{n+m}(MO(n))$, то

$$\mu_*^h(a \otimes e_i * i_*(x)) = \pi_*(1 \otimes \mu_*)(\varphi_*^{-n}(a \otimes e_i) * x).$$

Прямые вычисления показывают, что итерированные композиции φ_*^{-1} задаются формулами

$$\varphi_*^{-n}(a \otimes e_i) = a \otimes e_i + \binom{n}{1} \sum_{k>0} a a_k \otimes e_{i-k} + \binom{n+1}{2} \sum_{k_1, k_2 > 0} a a_{k_1} a_{k_2} \otimes e_{i-k_1-k_2} + \dots$$

Действие $\mu_*^h: \mathbb{E}O_*(2) * H_*(MO) \rightarrow H_*(MO)$ полностью определяется действиями

$$\mu_*: EO_*(2) * MO_*(n) \rightarrow MO_*(2n)$$

и гомоморфизмами $\varphi_*^{-n}: H_*(MO) \otimes E_*(2) \rightarrow H_*(MO) \otimes E_*(2)$.

Поскольку μ_*^h согласовано с левым действием $H_*(MO)$, то достаточно вычислить μ_*^h только на элементах $1 \otimes e_i * x \in H_*(MO) \otimes E_*(2) * H_*(MO)$. Так как μ_*^h согласовано со структурой алгебры на $H_*(MO)$, то его достаточно вычислить только на элементах $1 \otimes e_i * a_m \in H_*(MO) \otimes E_*(2) * H_*(MO)$.

Из рассмотренной выше диаграммы следует, что имеют место формулы

$$\begin{aligned} \mu_*^h(1 \otimes e_i * a_m) &= \sum_{j \geq 0} \binom{i+j-1}{j} a_{m-j} a_{m+i+j} \\ &+ \sum_{j \geq 0; k > 0} \binom{i-k+j-1}{j} a_k a_{m-j} a_{m+i-k+j} \\ &+ \sum_{j \geq 0; k_1, k_2 > 0} \binom{i-k_1-k_2+j-1}{j} a_{k_1} a_{k_2} a_{m-j} a_{m+i-k_1-k_2+j} + \dots \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что действия $\mu_*: \mathbb{E}O_*(2) * \pi_*(MO) \rightarrow \pi_*(MO)$ совпадают с соответствующими действиями, рассмотренными в работе [8].

Аналогично, для вычисления операций $\gamma_*: \mathbb{E}O_*(k) * \mathbb{E}O_*(n) \rightarrow \mathbb{E}O_*(kn)$ достаточно вычислить операции $\gamma_*^h: \mathbb{E}O_*^h(k) * \mathbb{E}O_*^h(n) \rightarrow \mathbb{E}O_*^h(kn)$.

Из соответствующей коммутативной диаграммы следует, что эти операции определяются операциями $\gamma_*: E_*(k) * E_*(n) \rightarrow E_*(kn)$ и действиями

$$\mu_*^h: \mathbb{E}_*^h(k) * H_*(MO) \rightarrow H_*(MO).$$

Рассмотрим операции

$$\gamma_*^h: \mathbb{E}O_*^h(2) * \mathbb{E}O_*^h(2) \rightarrow \mathbb{E}O_*^h(4)$$

или, что то же самое,

$$\gamma_*^h: H_*(MO) \otimes E_*(2) * H_*(MO) \otimes E_*(2) \rightarrow H_*(MO) \otimes E_*(4).$$

Тогда имеют место формулы

$$\gamma_*^h(a \otimes e_i * x \otimes e_j) = \sum_k \mu_*^h(a \otimes e_k * x) \otimes \gamma_*(e_{i-k} * e_j).$$

§6. Алгебра Стинрода для обобщенных теорий когомологий

Рассмотрим теорию когомологий $\mathbb{H}^*$, ассоциированную со спектром $\mathbb{H}$. Пусть X – топологическое пространство, $\mathbb{H}$ – E -мультипликативный спектр. Обозначим $F(X, \mathbb{H})$ спектр, для которого $F(X, \mathbb{H})(m)$ является пространством непрерывных отображений $f: X \rightarrow \mathbb{H}(m)$. Тогда $F(X, \mathbb{H})$ будет E -мультипликативным спектром, на котором действует спектр $\mathbb{H}$. Следовательно, определены операции

$$\mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \pi_*(F(X, \mathbb{H})) \rightarrow \pi_*(F(X, \mathbb{H})).$$

Напомним, что обобщенные когомологии $\mathbb{H}^*(X)$ пространства X определяются формулой

$$\mathbb{H}^n(X) = \pi_{-n}(F(X, \mathbb{H})).$$

Поэтому имеют место операции

$$\mu_*: \mathbb{E}_i(k) * \mathbb{H}^n(X) \rightarrow \mathbb{H}^{kn-i}(X),$$

которые будем называть операциями Стинрода для обобщенных когомологий. Имеет место

ТЕОРЕМА 21. *Если E – биоперада и $\mathbb{H}$ – E -мультипликативный спектр, то на когомологиях $\mathbb{H}^*(X)$ топологического пространства X имеется структура $\mathbb{H}^*(S^0)$ -алгебры над биалгеброй Хопфа $\mathbb{E}_*$.*

В частности, имеют место операции Стинрода в теориях кобордизмов. Например, имеют место операции Стинрода

$$\mu_*: \mathbb{E}O_* * \mathbb{M}O^*(X) \rightarrow \mathbb{M}O^*(X), \quad \mu_*: \mathbb{E}U_* * \mathbb{M}U^*(X) \rightarrow \mathbb{M}U^*(X),$$

аналогичные операциям Стинрода [17].

Заметим, что для определения операций Стинрода для когомологий с $\mathbb{Z}/p$ коэффициентами нужно просто заменить спектр сфер $\mathbb{S}$ на соответствующий спектр Мура $\mathbb{S}_{(p)}$. Тогда будут иметь место операции

$$\mu_*: \mathbb{E}_*^{(p)}(k) * \mathbb{H}^*(X; \mathbb{Z}/p) \rightarrow \mathbb{H}^*(X; \mathbb{Z}/p).$$

В частности, имеют место mod p операции Стинрода в теориях кобордизмов. Например, имеют место mod p операции Стинрода

$$\mu_*: \mathbb{E}U_*^{(p)} \otimes \mathbb{M}U^*(X; \mathbb{Z}/p) \rightarrow \mathbb{M}U^*(X; \mathbb{Z}/p).$$

Аналогичным образом операции Стинрода можно определить для обычных когомологий топологического пространства X с $\mathbb{H}$ коэффициентами. Для этого для топологического пространства X рассмотрим спектр $F(C_*(X), C_*(\mathbb{H}))$ в категории цепных комплексов. Гомологии этого спектра называются когомологиями X с $\mathbb{H}$ коэффициентами и обозначаются $H^*(X; \mathbb{H})$.

Напомним, что имеются кодействия

$$\tau_*: C_*(E(k)) \otimes C_*(X) \rightarrow C_*(X)^{\otimes k}$$

и действия

$$\mu_*: C_*(E(k)) \otimes_{\Sigma_k} C_*(\mathbb{H}(m))^{\otimes k} \rightarrow C_*(\mathbb{H}(km)).$$

Кроме этого, имеют место действия

$$C_*(\mathbb{H}(l)) \otimes F(C_*(X), C_*(\mathbb{H}(m))) \rightarrow F(C_*(X), C_*(\mathbb{H}(l+m))).$$

Поэтому имеются операции

$$\mu_*^h: \mathbb{E}_*(k) * H^*(X; \mathbb{H}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{H}),$$

которые согласованы с гомоморфизмом Гуревича, т.е. коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}^*(X) & \xrightarrow{\mu_*} & \mathbb{H}^*(X) \\ h_* h \downarrow & & \downarrow h \\ E_*^h(k) * H^*(X; \mathbb{H}) & \xrightarrow{\mu_*^h} & H^*(X; \mathbb{H}) \end{array}.$$

Эти диаграммы дают возможность для вычисления операций Стиррода. В частности, если $X = S^0$ и $\mathbb{H} = MO$, то $MO^*(S^0) \cong MO_{-*}(S^0)$, и полученные выше формулы показывают, что эти операции Стиррода совпадают с операциями Стиррода, рассмотренными в работе [17].

Заметим, что мы построили не только операции Стиррода, как это было сделано в работе [17]. Кроме этого, мы определили алгебру $\mathbb{E}_*$, которая производит эти операции.

Рассмотрим надстроечный изоморфизм $S: \mathbb{H}^{n+1}(SX) \rightarrow \mathbb{H}^n(X)$. Пусть элемент $x \in \mathbb{H}^{n+1}(SX)$ представляется отображением $f: S^m SX \rightarrow \mathbb{H}(n+m+1)$. Тогда элемент $S(x) \in \mathbb{H}^n(X)$ представляется тем же самым отображением f .

Определим отображение $\sigma: \mathbb{E}_{i+k-1}(k) \rightarrow \mathbb{E}_i(k)$. Если $y \in \mathbb{E}_{i+k-1}(k)$ представляется отображением $g: S^{i+k-1+j+km} \rightarrow \mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^m)$, то $\sigma(y) \in \mathbb{E}_i(k)$ представляется композицией

$$S^{i+j+k(m+1)} \xrightarrow{g \wedge 1} \mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^m) \wedge S^1 \xrightarrow{1 \wedge \nabla} \mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^{m+1}).$$

Из определения операций

$$\gamma: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(kn), \quad \mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}^*(X) \rightarrow \mathbb{H}^*(X)$$

непосредственно следует

ТЕОРЕМА 22. *Имеют место коммутативные диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_{i+k-1}(k) * \mathbb{E}_{j+n-1}(n) & \xrightarrow{\gamma_*} & \mathbb{E}_{i+k-1+k(j+n-1)}(kn) \\ \sigma_* \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{E}_i(k) * \mathbb{E}_j(n) & \xrightarrow{\gamma_*} & \mathbb{E}_{i+kj}(kn) \\ \mathbb{E}_{i+k-1}(k) * \mathbb{H}^{n+1}(SX) & \xrightarrow{\mu_*} & \mathbb{H}^{kn-i+1}(SX) \\ \sigma_* S \downarrow & & \downarrow S \\ \mathbb{E}_i(k) * \mathbb{H}^n(X) & \xrightarrow{\mu_*} & \mathbb{H}^{kn-i}(X) \end{array}.$$

Обозначим $\mathbb{A}^m(k) = \varprojlim_n \mathbb{E}_{(k-1)n-m}(k)$, где предел берется относительно гомоморфизмов σ . Тогда операции $\gamma_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{E}_*(j) \rightarrow \mathbb{E}_*(kj)$ индуцируют операции

$$\gamma^*: \mathbb{A}^*(k) \otimes \mathbb{A}^*(j) \rightarrow \mathbb{A}^*(kj).$$

Точнее, операции

$$\gamma^*: \mathbb{A}^m(k) \otimes \mathbb{A}^i(j) \rightarrow \mathbb{A}^{m+i}(kj)$$

индуцируются операциями

$$\gamma_*: \mathbb{E}_{(k-1)(i+n)-m}(k) * \mathbb{E}_{(j-1)n-i}(j) \rightarrow \mathbb{E}_{(kj-1)n-i-m}(kj).$$

Аналогично, операции $\nabla_*: \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(n) \otimes_{\mathbb{H}_*(S^0)} \mathbb{E}_*(n)$ индуцируют операции

$$\nabla^*: \mathbb{A}^*(n) \rightarrow \mathbb{A}^*(n) \otimes_{\mathbb{H}^*(S^0)} \mathbb{A}^*(n).$$

Если X – топологическое пространство, то действия

$$\mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}^*(X) \rightarrow \mathbb{H}^*(X)$$

индуцируют действия

$$\mu^*: \mathbb{A}^*(k) \otimes \mathbb{H}^*(X) \rightarrow \mathbb{H}^*(X).$$

Точнее, операции

$$\mu^*: \mathbb{A}^m(k) \otimes \mathbb{H}^n(X) \rightarrow \mathbb{H}^{m+n}(X)$$

индуцируются операциями

$$\mu_*: \mathbb{E}_{(k-1)n-m}(k) * \mathbb{H}^n(X) \rightarrow \mathbb{H}^{m+n}(X).$$

Поэтому имеет место

ТЕОРЕМА 23. *Операции γ^* , ∇^* образуют на $\mathbb{A}^* = \sum_k \mathbb{A}^*(k)$ структуру $\mathbb{H}^*(S^0)$ -алгебры Хопфа. На когомологиях $\mathbb{H}^*(X)$ топологического пространства X имеется естественная структура $\mathbb{H}^*(S^0)$ -алгебры над $\mathbb{H}^*(S^0)$ -алгеброй Хопфа $\mathbb{A}^*$.*

Для изоморфизмов надстройки имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^* \otimes \mathbb{H}^{*+1}(SX) & \xrightarrow{\mu^*} & \mathbb{H}^{*+1}(SX) \\ 1 \otimes S \downarrow & & \downarrow S \\ \mathbb{A}^* \otimes \mathbb{H}^*(X) & \xrightarrow{\mu^*} & \mathbb{H}^*(X) \end{array},$$

и, следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 24. Если $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}(m)\}$ – спектр, то действия

$$\mu^*(m): \mathbb{A}^* \otimes \mathbb{H}^*(\mathbb{X}(m)) \rightarrow \mathbb{H}^*(\mathbb{X}(m))$$

индуцируют действие

$$\mu^*: \mathbb{A}^* \otimes \mathbb{H}^*(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}^*(\mathbb{X})$$

алгебры Хопфа $\mathbb{A}^*$ на когомологиях $\mathbb{H}^*(\mathbb{X})$ спектра $\mathbb{X}$.

Таким образом, алгебра Хопфа $\mathbb{A}^*$ может рассматриваться как аналог алгебры Стиррода для обобщенных теорий когомологий.

Обозначим $\mathbb{A}O^*$, $\mathbb{A}U^*$, ... соответствующие алгебры Стиррода для $\mathbb{M}O^*$ -, $\mathbb{M}U^*$ -, ... теорий. Например, для $\mathbb{M}O^*$ -теории имеет место изоморфизм

$$\mathbb{A}O^* \cong \mathbb{M}O^* \otimes A^*,$$

где A^* обозначает обычную алгебру Стиррода.

Рассмотрим операции Ландвебера–Новикова $\nu^*: \mathbb{H}^*(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{H}^*(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}^*(\mathbb{X})$ на обобщенных когомологиях спектра $\mathbb{X}$ [4], [5].

Действие $\mu^*: \mathbb{A}^* \otimes \mathbb{H}^*(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{H}^*(\mathbb{H})$ индуцирует отображение алгебр Хопфа

$$\xi^*: \mathbb{A}^* \rightarrow \mathbb{H}^*(\mathbb{H}), \quad \xi^*(x) = \mu^*(x \otimes 1).$$

Из определения операций Ландвебера–Новикова следует

ТЕОРЕМА 25. Имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^* \otimes \mathbb{H}^*(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\xi^* \otimes 1} & \mathbb{H}^*(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{H}^*(\mathbb{X}) \\ = \downarrow & & \downarrow \nu^* \\ \mathbb{A}^* \otimes \mathbb{H}^*(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\mu^*} & \mathbb{H}^*(\mathbb{X}) \end{array}.$$

Таким образом, операции Стиррода на обобщенных когомологиях определяются операциями Ландвебера–Новикова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим топологическое пространство X , и пусть элемент $x \in \mathbb{H}^*(X)$ представляется отображением $f: X \rightarrow \mathbb{H}(n)$, а элемент $y \in \mathbb{A}^*$ представляется отображением $g: S^{i+j+km} \rightarrow \mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^m)$. Тогда $\mu^*(y \otimes x) \in \mathbb{H}^*(X)$ будет представляться отображением

$$\begin{aligned} S^{i+j+km} \wedge X & \xrightarrow{g \wedge 1} \mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^m) \wedge X \\ & \rightarrow \mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^m X) \xrightarrow{1 \wedge E(k, S^m f)} \mathbb{H}(j) \wedge E(k, \mathbb{H}(n+m)) \rightarrow \mathbb{H}(j+kn+km) \end{aligned}$$

и $\nu^*(\xi^*(y) \otimes x) \in \mathbb{H}^*(X)$ будет представляться отображением

$$\begin{aligned} S^{i+j+km} \wedge X & \xrightarrow{g \wedge f} \mathbb{H}(j) \wedge E(k, S^m) \wedge \mathbb{H}(n) \\ & \rightarrow \mathbb{H}(j) \wedge E(k, \mathbb{H}(n+m)) \rightarrow \mathbb{H}(j+kn+km). \end{aligned}$$

Требуемое равенство $\mu^*(y \otimes x) = \nu^*(\xi^*(y) \otimes x)$ теперь следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E(k, S^m) \wedge X & \longrightarrow & E(k, S^m \wedge X) \\ 1 \wedge f \downarrow & & \downarrow E(k, S^m f) \\ E(k, S^m) \wedge \mathbb{H}(n) & & E(k, \mathbb{H}(n+m)) \\ \downarrow & & \downarrow = \\ E(k, S^m \wedge \mathbb{H}(n)) & \longrightarrow & E(k, \mathbb{H}(n+m)) \end{array}.$$

Так как μ^* и ν^* перестановочны с гомоморфизмом надстройки, то требуемое равенство имеет место и для спектров $\mathbb{X}$ и любых $x \in \mathbb{H}^*(\mathbb{X})$, $y \in \mathbb{A}^*$.

Заметим, что для спектра MO имеет место мономорфизм $A^* \rightarrow H^*(MO)$ обычной алгебры Стинрода в обычные когомологии MO . Из приведенных выше вычислений следует, что этот мономорфизм индуцирует мономорфизм $\mathbb{A}O^* \rightarrow \mathbb{M}O^*(MO)$.

Обозначим $\mathbb{A}_m(k) = \varprojlim_n \mathbb{E}_{m-(k-1)n}(k)$, где предел берется относительно гомоморфизмов σ . Тогда операции $\gamma_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{E}_*(j) \rightarrow \mathbb{E}_*(kj)$ индуцируют операции

$$\gamma_*: \mathbb{A}_*(k) \otimes \mathbb{A}_*(j) \rightarrow \mathbb{A}_*(kj).$$

Точнее, операции

$$\gamma_*: \mathbb{A}_m(k) \otimes \mathbb{A}_i(j) \rightarrow \mathbb{A}_{m+i}(kj)$$

индуцируются операциями

$$\gamma_*: \mathbb{E}_{m-(k-1)(i+n)}(k) * \mathbb{E}_{i-(j-1)n}(j) \rightarrow \mathbb{E}_{i+m-(kj-1)n}(kj).$$

Аналогично, операции $\nabla_*: \mathbb{E}_*(n) \rightarrow \mathbb{E}_*(n) \otimes_{\mathbb{H}_*(S^0)} \mathbb{E}_*(n)$ индуцируют операции

$$\nabla_*: \mathbb{A}_*(n) \rightarrow \mathbb{A}_*(n) \otimes_{\mathbb{H}_*(S^0)} \mathbb{A}_*(n).$$

Если $\mathbb{X}$ — E -мультипликативный спектр, то действия

$$\mu_*: \mathbb{E}_*(k) * \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X)$$

индуцируют действия

$$\mu_*: \mathbb{A}_*(k) \otimes \mathbb{H}_*(X) \rightarrow \mathbb{H}_*(X).$$

Точнее, операции

$$\mu_*: \mathbb{A}_m(k) \otimes \mathbb{H}_n(X) \rightarrow \mathbb{H}_{m+n}(X)$$

индуцируются операциями

$$\mu_*: \mathbb{E}_{m-(k-1)n}(k) * \mathbb{H}_n(X) \rightarrow \mathbb{H}_{m+n}(X).$$

Поэтому имеет место

ТЕОРЕМА 26. *Операции γ_* , ∇_* образуют на $\mathbb{A}_* = \sum_k \mathbb{A}_*(k)$ структуру $\mathbb{H}_*(S^0)$ -алгебры Хопфа. На гомологиях $\mathbb{H}_*(\mathbb{X})$ E -мультипликативного спектра $\mathbb{X}$ имеется естественная структура $\mathbb{H}_*(S^0)$ -алгебры над $\mathbb{H}_*(S^0)$ -алгеброй Хопфа $\mathbb{A}_*$.*

Алгебра Хопфа $\mathbb{A}_*$ может рассматриваться как аналог алгебры Дайера–Лашофа для обобщенных теорий гомологий.

Обозначим $\mathbb{A}O_*$, $\mathbb{A}U_*$, $\dots$ соответствующие алгебры Дайера–Лашофа для $\mathbb{M}O_*$ -, $\mathbb{M}U_*$ -, $\dots$ теорий. Например, для $\mathbb{M}O_*$ -теории имеет место изоморфизм

$$\mathbb{A}O_* \cong \mathbb{M}O_* \otimes \mathbb{A}_*,$$

где $\mathbb{A}_*$ обозначает обычную алгебру Дайера–Лашофа.

Список литературы

1. *Dyer E., Lashof R. K.* Homology of iterated loop spaces // Amer. J. Math. 1962. V. 84. № 1. P. 35–88.
2. *Стиррод Н., Энштейн Д.* Когомологические операции. М.: Наука, 1983.
3. *Stong R. E.* Notes on cobordism theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1968.
4. *Landweber P. S.* Cobordism operations and Hopf algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 129. P. 94–110.
5. *Новиков С. П.* Кольца операций и спектральные последовательности типа Адамса в экстраординарных теориях когомологий. U -кобордизмы и k -теория // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172. № 1. С. 33–36.
6. *May J. P.* The geometry of iterated loop spaces // Lecture Notes in Math. V. 271. Berlin: Springer-Verlag, 1972.
7. *Смирнов В. А.* О коцепном комплексе топологического пространства // Матем. сб. 1981. Т. 115 (157). С. 146–158.
8. *May J. P., Quinn F., Ray N., Tornehave J.* E_∞ -ring space and E_∞ -ring spectra // Lecture Notes in Math. V. 577. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
9. *Bruner R. R., May J. P., McClure J. E., Steinberger M.* H_∞ ring spectra and their applications // Lecture Notes in Math. V. 1176. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
10. *Bisson T., Joyal A.* The Dyer–Lashof algebra in bordism // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1995. V. 17. № 4. P. 135–140.
11. *Bisson T., Joyal A.* Nishida relations in bordism and homology // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1995. V. 17. № 4. P. 141–146.
12. *Ravenel D. C., Wilson W. S.* The Hopf ring for complex cobordism // J. Pure Appl. Algebra. 1977. V. 9. P. 241–280.
13. *Смирнов В. А.* Вторичные операции в гомологиях операды E // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 2. С. 449–468.
14. *Milgram R. J.* Iterated loop spaces // Ann. of Math. (2). 1966. V. 84. № 3. P. 386–403.
15. *Priddy S. B.* Dyer–Lashof operations for the classifying spaces of certain matrix groups // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1975. V. 26. P. 179–193.
16. *Kochman S. O.* Homology of the classical groups over the Dyer–Lashof algebra // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 185. P. 83–136.
17. *Dieck T.* Steenrod-Operationen in Kobordismen-Theorien // Math. Z. 1968. V. 107. P. 380–401.

Московский педагогический
государственный университет

Поступила в редакцию
03.06.1999