Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Шишков, Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 12, 129–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 07:40:24

УДК 517.9

А. Е. Шишков

Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка

Устанавливается общее достаточное условие образования “мертвых” зон у обобщенных решений широкого класса квазилинейных параболических уравнений типа нелинейной диффузии–абсорбции. На его основе выводится близкое к необходимому достаточное условие на поведение на бесконечности интегральной нормы начальной функции по шарам фиксированного радиуса, гарантирующее мгновенную компактификацию носителя произвольного локально энергетического решения соответствующей задачи Коши. Устанавливается точная оценка сверху радиуса компактификации.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

В работе изучается эволюция носителей обобщенных решений $u(t, x)$ задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1}u) + Au + b(t, x, u) = 0; \quad (t, x) \in (0, T_0) \times \mathbb{R}^n \equiv Q, \quad T_0 \leq \infty; \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = u_0 \in L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 1, \quad q > 0; \quad (1.2)$$

$$Au \equiv \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha a_\alpha(t, x, u, Du, D^2u, \dots, D^m u), \quad m \geq 1,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha|$ – длина α ,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad D^a = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{a_n}, \quad D^j u = \{D^\alpha u : |\alpha| = j\}.$$

В качестве модельного представителя этого класса уравнений можно рассматривать следующее уравнение:

$$(|u|^{q-1}u)_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (|D^m u|^{p-1} D^\alpha u) + |u|^{\lambda-1} u = 0, \quad p > 0, \quad \lambda > 0, \quad (1.1^*)$$

где $|D^m u| \equiv (\sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|^2)^{1/2}$.

В общей ситуации рассматриваемый класс уравнений определяется условиями:

- 1) функции $a_\alpha(t, x, \xi) \quad \forall \alpha: |\alpha| \leq m$, $b(t, x, s)$ непрерывны по отношению к $\xi \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}^1$ для всех $(t, x) \in \bar{Q}$ и измеримы по отношению к $(t, x) \in \bar{Q}$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}^1$ (через $N = N(m, n)$ мы обозначаем число различных мультииндексов длины не большей, чем m);

2) выполняются следующие естественные структурные условия:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t, x, \xi) \xi_\alpha \geq d_0 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^{p+1} \quad \forall (t, x, \xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^N, \quad d_0 > 0; \quad (1.3)$$

$$|a_\alpha(t, x, \xi)| \leq d_1 \sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^p \quad \forall (t, x, \xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^N, \quad d_1 < \infty, \quad p > 0; \quad (1.4)$$

$$b(t, x, s) s \geq d_2 |s|^{1+\lambda} \quad \forall (t, x, s) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1, \quad d_2 > 0, \quad \lambda > 0. \quad (1.5)$$

Введенный класс включает многие важные уравнения математической физики, например, уравнение нелинейной теплопроводности с абсорбцией:

$$u_t - \Delta(|u|^{r-1}u) + b_0|u|^{\mu-1}u = 0, \quad r > 0, \quad \mu > 0, \quad b_0 > 0. \quad (1.6)$$

Очевидно, для того чтобы записать это уравнение в форме (1.1) с параметрами $m = 1$, $q = r^{-1}$, $p = 1$, $\lambda = \mu r^{-1}$, достаточно ввести новую неизвестную функцию $v \equiv |u|^{r-1}u$.

Хорошо известно, что качественные свойства решений квазилинейных параболических уравнений существенно отличаются от свойств линейных уравнений. Важным отличием является конечность скорости распространения носителей решений, появляющаяся при определенных условиях на структуру соответствующих уравнений (например, при подходящих соотношениях на параметры m, p, q, λ в уравнении (1.1*)). С конечностью скорости связаны многие другие специфические свойства: наличие конечной или бесконечной временной задержки начала распространения носителя решения, компактификация носителя решения, полное “затухание” решения за конечное время и т. д. (см. [1], [2], [3] и приведенную там литературу). Мы рассматриваем здесь два близких свойства локально энергетических решений (см. определения 3, 4) задачи (1.1), (1.2): эффект появления “мертвых зон” и мгновенная компактификация носителя решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что решение $u(t, x)$ некоторой задачи Коши (например, (1.1), (1.2)) *имеет мертвую зону*, если

$$\exists t^* > 0: \mathbb{R}^n \setminus \{\text{supp } u(t, \cdot)\} \neq \emptyset \quad \forall t > t^*$$

несмотря на то, что $\text{supp } u_0 = \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Некоторая задача Коши (например, (1.1), (1.2)) *имеет свойство мгновенной компактификации* (М.К.-свойство), если для любого $t > 0$ носитель ее решения $u(t, x)$ ограничен при том, что носитель u_0 не ограничен.

Л. Эванс и Б. Кнерр [4] впервые систематически изучили М.К.-свойство. Для полулинейного уравнения теплопроводности

$$u_t - \Delta u + b(u) = 0, \quad b(0) = 0, \quad b(s) > 0 \quad \forall s > 0, \quad (1.7)$$

они нашли точные условия на поведение функции $b(u)$ в окрестности точки 0, обеспечивающие наличие М.К.-свойства при любой неотрицательной, непрерывной,

ограниченной начальной функции $u_0(x)$, стремящейся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Многие авторы изучали М.К.-свойство для различных квазилинейных параболических уравнений и систем второго порядка с “абсорбционным” членом (см. [5]–[11]). В [9] наличие М.К.-свойства было впервые показано для уравнений “быстрой” диффузии с сильной абсорбцией (уравнение (1.6) с $0 < \mu < r < 1$). Точные оценки сверху для границы $\eta(t) \equiv \sup\{|x| : u(t, x) \neq 0\}$ были получены впервые А. С. Калашниковым [8]. Отметим, что анализ во всех упоминавшихся выше работах проводился барьерной техникой, поэтому, например, рассматривались только непрерывные начальные функции, равномерно стремящиеся к нулю на бесконечности.

В [12] появление М.К.-свойства и некоторые оценки сверху радиуса компактификации были установлены для энергетических обобщенных решений задачи Коши для общих параболических уравнений второго порядка структуры (1.1) при $q = 1$, $m = 1$ и произвольных начальных функциях $u_0 \in L_{r+1}(\mathbb{R}^n)$, $0 < r < \infty$. Метод, использованный в [12], связан с доказательством некоторых “интегральных лемм возрастания”, которые близки по смыслу к специфическим априорным оценкам решений, выражающим принцип Сен-Венана в случае уравнений теории упругости. Этот метод имеет общие идеи с методом “локальных энергетических оценок”, предложенным С. Н. Антонцевым [13] и использовавшимся многими авторами для исследования качественных и локализационных свойств обобщенных решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Адаптация метода локальных энергетических оценок к уравнениям высокого порядка была осуществлена Ф. Бернисом (см. [3]).

Условия образования мертвых зон для решений различных квазилинейных параболических уравнений второго порядка также изучались многими авторами. Так, в работах [14], [15] такие условия установлены для решений задач Коши и Коши–Дирихле для уравнения (1.6) при помощи барьерной техники. В [2] образование мертвых зон впервые изучалось для энергетических решений параболических уравнений второго порядка структуры (1.1). Указанное свойство решений было установлено при следующих дополнительных ограничениях на структуру уравнения:

- а) $q < p$ (“медленная” диффузия),
- б) $\lambda < q(p+1)p^{-1} - 1$ (“очень сильная” абсорбция).

В настоящей работе образование мертвых зон и М.К.-свойство изучаются для энергетических решений общих параболических уравнений высокого порядка формы (1.1) при естественных ограничениях на структуру уравнения (см. соотношения (2.3) и (2.3*)). В частности, никакие дополнительные ограничения типа а), б) не предполагаются. Здесь М.К.-свойство установлено для обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2) с произвольной функцией $u_0 \in L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей лишь следующему ограничению на поведение на бесконечности:

$$\int_{|x-y|<1} |u_0(x)|^{q+1} dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |y| \rightarrow \infty.$$

Из вида этого ограничения следует, что описание класса задач Коши, имеющих М.К.-свойство, приводит к необходимости привлекать к рассмотрению начальные функции $u_0(x) \in L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, не принадлежащие $L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$. При таких

начальных данных стандартная теория разрешимости к рассматриваемой задаче Коши не применима. Поэтому для построения полной теории М.К.-свойства задачи (1.1), (1.2) необходимо построить теорию разрешимости указанной задачи с растущими на бесконечности начальными данными. Один результат в этом направлении (случай $q = 1, p > 1$) сформулирован в настоящей работе. Некоторые результаты настоящей работы анонсированы в [16].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полученные в работе результаты несложно обобщить на случай задачи Коши–Дирихле для уравнения (1.1) в произвольной неограниченной цилиндрической области $(0, T) \times \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

§ 2. Формулировки основных результатов

Начнем с необходимых обозначений и определений. Введем пространства:

$$W = W_{p+1}^m(\mathbb{R}^n) \cap L_{q+1}(\mathbb{R}^n), \quad W_{\text{loc}} \equiv W_{p+1, \text{loc}}^m(\mathbb{R}^n) \cap L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

где $W_{p+1}^m(\Omega)$ – обычное пространство Соболева.

Сходимость в пространстве $W_{p+1, \text{loc}}^m(\mathbb{R}^n)$ – это сходимость в $W_{p+1}^m(\Omega)$ для каждой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Локально энергетическим решением* уравнения (1.1) назовем функцию

$$u(t, x) \in C(0, T_0; L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)) \cap L_{p+1, \text{loc}}(0, T_0; W_{\text{loc}}) \cap L_{1+\lambda, \text{loc}}(Q),$$

удовлетворяющую уравнению (1.1) в смысле распределений из $D'(Q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассуждениями, близкими к тем, что проводились в [17], для произвольного решения $u(t, x)$ из определения 3 выводится следующая формула интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} (|u|^{q-1} u), u \eta \varphi \right) dt &= \frac{\varphi(t_1) q}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_1, x)|^{q+1} \eta dx \\ &- \frac{\varphi(t_0) q}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x)|^{q+1} \eta dx - \frac{q}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n \times (t_0, t_1)} |u(t, x)|^{q+1} \varphi'_t \eta dx dt \\ &\quad \forall t_0, t_1: 0 \leq t_0 < t_1 \leq T_0, \end{aligned}$$

где $\varphi(t)$ – произвольная неотрицательная функция из $C^1[0, \infty)$, $\eta(x)$ – произвольная неотрицательная функция из $W_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем. Поэтому произвольное решение из определения 3 удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\begin{aligned} \frac{q}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} [|u(t_1, x)|^{q+1} \varphi(t_1) - |u(t_0, x)|^{q+1} \varphi(t_0)] \eta(x) dx \\ + \int_{\mathbb{R}^n \times (t_0, t_1)} \left[\sum_{|\alpha|=m} D^\alpha(u \eta) a_\alpha(t, x, u, \dots, D^m u) \varphi(t) + b(t, x, u) u(t, x) \eta \varphi \right. \\ \left. - \frac{q}{q+1} |u(t, x)|^{q+1} \varphi'_t \eta(x) \right] dx dt = 0 \quad \forall t_0, t_1: 0 < t_0 < t_1 \leq T_0, \quad (2.1) \end{aligned}$$

где $\eta(x) \geq 0, \varphi(t) \geq 0$ – вышеуказанные функции.

Зафиксируем теперь произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и введем следующие “энергетические” функции, связанные с изучаемым решением $u(t, x)$ уравнения (1.1):

$$H(s, T) \equiv \left(\int_{\{|x-x_0|<s, 0<t<T\}} |u(t, x)|^{p+1} dx dt \right)^{1+\nu} + \left(\int_{\{|x-x_0|<s, 0<t<T\}} |u(t, x)|^{q+1} dx dt \right)^{1+\mu} \quad (2.2)$$

$$\forall s > 0, \quad \forall T \in (0, T_0],$$

$$\nu = \frac{m(p+1)(q-\lambda)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(q+1)}, \quad \mu = \frac{m(p+1)(p-\lambda)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(q+1)}.$$

Определим также множество

$$\Pi = \{(s, T) \in \mathbb{R}_+^1 \times (0, T_0] : s \geq \max(1; T^{\frac{p-\lambda}{m(p+1)(q-\lambda)}})\}. \quad (2.2^*)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть параметры уравнения (1.1) удовлетворяют соотношениям

$$0 < \lambda < q \leq p \quad (2.3)$$

или

$$0 < \lambda < p < q, \quad p > \frac{q(n-m) - m}{n + m(q+1)}. \quad (2.3^*)$$

Тогда существует непрерывная функция $L(s, T) > 0$, $s > 0$, $T \in (0, T_0]$, обладающая следующим свойством. Если в некоторой точке (s_1, T_1) , $s_1 > 0$, $T_1 \in (0, T_0]$, энергетическая функция $H(s, T)$ изучаемого решения $u(t, x)$ удовлетворяет условию малости

$$H(s_1, T_1) < L(s_1, T_1),$$

то у решения $u(t, x)$ имеется мертвая зона в окрестности точки x_0 , т.е. существуют

$$\delta_1 = \delta_1(s_1, T_1) > 0, \quad \tau: 0 < \tau \leq T_1$$

такие, что

$$u(\tau, x) \equiv 0 \quad \forall x: |x - x_0| < \delta_1.$$

При этом о функции $L(s, T)$ можно утверждать следующее:

- а) существует непрерывная строго монотонно возрастающая по обоим своим аргументам функция $L_1(s, T)$ такая, что

$$L(s, T) \geq L_1(s, T) > 0 \quad \forall (s, T) \in \Pi,$$

- б) $L_1(s, T) \geq L_0(T) \equiv C_1 \cdot T^{\frac{(1+\nu)(1+\mu)}{\nu}} \quad \forall (s, T) \in \Pi \cap \{T < C_1^{-\frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}}\}$, где C_1 , $0 < C_1 < \infty$, — постоянная, зависящая лишь от параметров уравнения (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мы называем функцию

$$u(t, x) \in C([0, T_0]; L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)) \cap L_{p+1}(0, T_0; W_{\text{loc}}) \cap L_{1+\lambda}(0, T_0; L_{1+\lambda, \text{loc}}(\mathbb{R}^n))$$

энергетическим решением задачи (1.1), (1.2), если она удовлетворяет уравнению (1.1) в смысле $D'(Q)$, а также начальному условию (1.2) в соответствующем интегральном смысле.

Используя формулу интегрирования по частям из замечания 2, выводим следующее интегральное тождество для произвольного энергетического решения $u(t, x)$ из определения 4:

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(T)q}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(T, x)|^{q+1} \eta dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n \times (0, T)} \left[\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t, x, \dots, D^m u) D_x^\alpha(u\eta) \varphi(t) \right. \\ & \quad \left. + b(t, x, u) u \eta \varphi - \frac{q}{q+1} |u(t, x)|^{q+1} \varphi'_t(t) \eta \right] dx dt \\ & = \frac{q\varphi(0)}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^{q+1} \eta(x) dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\forall T \leq T_0, \quad \forall \varphi(t) \in C^1[0, T], \quad \eta(x) \in W_\infty^m(\mathbb{R}^n): \quad \varphi \geq 0, \quad \eta \geq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Разрешимость задачи (1.1), (1.2) с $u_0(x) \in L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$ изучалась многими авторами (см. [3], [18]). Например, в [18] существование энергетического решения установлено при $b(t, x, v) = |v|^{\lambda-1}v$ и вариационной структуре оператора A с $a_\alpha \equiv a_\alpha(x, \xi)$.

Введем теперь следующую функцию, характеризующую локальное и глобальное поведение начальной функции $u_0(x)$:

$$f_0(y, s) \equiv \int_{|x-y| \leq s} |u_0(x)|^{q+1} dx, \quad 0 < s < \infty, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Зафиксируем $y = x_0$ и введем мажоранту $f(s)$ функции $f_0(x_0, s)$:

$$f(s) \geq f_0(s) \equiv f_0(x_0, s) \quad \forall s > 0,$$

удовлетворяющую дополнительно следующему условию регулярной монотонности:

$$f(s) \leq S_1 f(s - S_2 f(s)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}) \quad \forall s > s' > 0, \quad (2.5)$$

с некоторыми фиксированными постоянными S_1, S_2 : $1 < S_1 < \infty$, $0 < S_2 < \infty$; μ из (2.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Например, для функции $f(s) = cs^\alpha$, где

$$\alpha < \frac{m(p+1)}{\mu} = n + \frac{m(p+1)(q+1)}{p-\lambda}, \quad c = \text{const} < \infty,$$

условие (2.5) выполняется при произвольных $S_1 > 1$, $S_2 > 0$ для всех $s > s' = s'(S_1, S_2)$, $s'(S_1, S_2) < \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть задана произвольная функция $u_0(x) \in L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$ и

$$u \in C([0, T_0]; L_{q+1}(\mathbb{R}^n)) \cap L_{p+1}(0, T_0; W) \cap L_{1+\lambda}(0, T_0; L_{1+\lambda}(\mathbb{R}^n))$$

– энергетическое решение соответствующей задачи Коши (1.1), (1.2). Тогда существуют постоянные: $1 < S_1 < \infty$, $0 < S_2 < \infty$, $f^{(0)} > 0$, зависящие лишь от параметров $d_0, d_1, d_2, p, q, \lambda$ такие, что имеет место следующее свойство. Если мажоранта $f(s)$ функции $f_0(s)$ удовлетворяет условию регулярной монотонности (2.5) с указанными выше постоянными S_1, S_2 и справедливо условие малости

$$f(s') \leq S_1^{-1} f^{(0)}, \text{ где } s' \text{ из (2.5),}$$

то существует t_1 , $0 < t_1 \leq S_1^\nu \cdot K f(s')^\nu$, такое, что $u(t_1, x) = 0 \quad \forall x: |x - x_0| < \delta$, где $\delta > 0$, $K < \infty$ – постоянные, зависящие лишь от известных параметров уравнения (1.1), ν из (2.2). Другими словами, в момент времени $t = t_1$ в окрестности точки x_0 появляется мертвая зона.

В этой форме условие появления мертвой зоны может быть использовано для описания М.К.-свойства энергетических решений задачи Коши (1.1), (1.2).

Пусть теперь некоторая функция $u_0(x) \in L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет лишь следующему ограничению на поведение на бесконечности:

$$f_0(y, s) \equiv \int_{|x-y|<s} |u_0(x)|^{q+1} dx \rightarrow 0 \quad \text{при } |y| \rightarrow \infty \quad \forall s = \text{const} < \infty. \quad (2.6)$$

Пусть $\{u_0^{(j)}(x)\}$, $j = 1, 2, \dots$, – произвольная последовательность функций из $L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая только следующей оценке:

$$f_0^{(j)}(y, s) \equiv \int_{|x-y|<s} |u_0^{(j)}(x)|^{q+1} dx \leq f_0(y, s) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+^1. \quad (2.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для произвольной $u_0(x) \in L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ в качестве последовательности $\{u_0^{(j)}(x)\}$ может быть взята, как несложно проверить, последовательность $u_0^{(j)}(x) = u_0(x) \eta_j(|x|)$, $j = 1, 2, \dots$, где $\eta_j(s)$ – непрерывная срезающая функция: $0 \leq \eta_j(s) \leq 1$, $\eta_j(s) = 1$, если $s \leq j$, $\eta_j(s) = 0$, если $s \geq j + 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть некоторая функция $u_0(x) \in L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и последовательность $u_0^{(j)}(x) \in L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (2.6), (2.7). Тогда задача (1.1), (1.2) с начальной функцией $u_0^{(j)}(x)$, $j = 1, 2, \dots$, обладает М.К.-свойством и, более того, М.К.-свойство равномерно по отношению к $j \in \mathbb{N}$. То есть для любого $\tilde{t} > 0$ существует постоянная $c = c(\tilde{t}) < \infty$ такая, что каждое энергетическое решение

$$u^{(j)}(t, x) \in C([0, T_0]; L_{q+1}(\mathbb{R}^n)) \cap L_{p+1}(0, T_0; W) \cap L_{1+\lambda}(0, T_0; L_{1+\lambda}(\mathbb{R}^n))$$

соответствующей задачи Коши (1.1), (1.2) обладает следующим свойством:

$$\supp u^{(j)}(t, \cdot) \in \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq c(\tilde{t})\} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3 позволяет изучать М.К.-свойство для задачи (1.1), (1.2) с $u_0(x) \in L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ даже в ситуации, когда разрешимость этой задачи не доказана. Для различных классов квазилинейных параболических уравнений существует много результатов о разрешимости задачи Коши с растущими на бесконечности начальными данными (см., например, [11], [18], [19]). Для уравнений высокого порядка структуры (1.1) имеется следующий результат.

ТЕОРЕМА 4 [20]. Пусть в уравнении (1.1) $q = 1$, $p > 1$. Предположим выполненным дополнительно следующее структурное условие:

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha|=m} [a_\alpha(t, x, \xi) - a_\alpha(t, x, \tilde{\xi})](\xi_\alpha - \tilde{\xi}_\alpha) \\ & \geq d_3 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha - \tilde{\xi}_\alpha|^{p+1} - d_4 \sum_{|\alpha| \leq m-1} |\xi_\alpha - \tilde{\xi}_\alpha|^{p+1} \\ & \quad \forall \xi, \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{N(m)}, \quad d_3 > 0, \quad d_4 < \infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Пусть начальная функция $u_0(x) \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующему ограничению на поведение на бесконечности:

$$f_0(s) \equiv \int_{|x| \leq s} |u_0(x)|^2 dx \leq cs^{n + \frac{2m(p+1)}{p-1}} \quad \forall s > s_0, \quad s_0 < \infty, \quad c < \infty. \quad (2.9)$$

Пусть функции $u_0^{(j)}(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \dots$, являются функциями из замечания 5 и $u^{(j)}(t, x)$, $j = 1, 2, \dots$, — соответствующие $u_0^{(j)}(x)$ энергетические решения задачи (1.1), (1.2). Тогда существует подпоследовательность $\{u^{(i)}(t, x)\}$ последовательности $\{u^{(j)}(t, x)\}$, которая сходится в пространстве $L_{p+1}(0, T_0; L_{p+1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n))$ к локально энергетическому решению $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) с указанной выше начальной функцией $u_0(x)$:

$$\|u^{(j)} - u\|_{L_{p+1}((0, T_0) \times \Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Здесь Ω — произвольная ограниченная область.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Рассмотрения в [20] касаются случая $b(t, x, u) \equiv 0$, но они практически без изменения переносятся на случай $b(t, x, u)$ из (1.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В случае $p = 1$, $q = 1$ необходимые ограничения на рост $u_0(x)$ на бесконечности сводятся к неравенству

$$f_0(s) \leq c \exp(c_1 s^{\frac{2m}{2m-1}}) \quad \forall s > s_0, \quad c < \infty, \quad c_1 < \infty.$$

Это соответствует хорошо известному в линейной теории классу однозначной разрешимости Тихонова.

ТЕОРЕМА 5. Пусть структура уравнения (1.1) соответствует условиям теоремы 4 и начальная функция $u_0(x) \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет ограничению (2.6) на поведение на бесконечности. Тогда существует энергетическое решение $u(t, x)$ рассматриваемой задачи Коши, обладающее М.К.-свойством.

Наконец, приведем некоторые общие оценки сверху радиуса компактификации

$$\rho(t) \equiv \sup_{j \in \mathbb{N}} \rho_j(t), \quad \rho_j(t) \equiv \sup\{|x| : x \in \text{supp } u^{(j)}(t, \cdot)\}, \quad (2.11)$$

где $u^{(j)}(t, x)$ — решения, рассмотренные в теореме 3. Пусть $u_0(x) \in L_{q+1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $u_0^{(j)} \in L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$, $f_0^{(j)}(y, s)$, $f_0(y, s)$, $j = 1, 2, \dots$, — функции из (2.6), (2.7). Пусть $f(y, s)$ — некоторая мажоранта функции $f_0(y, s)$:

$$f_0(y, s) \leq f(y, s) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+^1,$$

удовлетворяющая условию регулярной монотонности:

$$f(y, s) \leq S_1 f(y, s - S_2 f(y, s)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}) \quad \forall s > s' > 0, \quad S_1 > 1, \quad 0 < S_2 < \infty, \quad (2.12)$$

равномерно по всем y : $|y| > c$, $c < \infty$. Зафиксируем $s' > 0$ и определим функцию

$$F(\rho) \equiv \sup_{|y|=\rho} f(y, s'), \quad \rho > 0.$$

Теперь сформулируем утверждение, непосредственно вытекающее из теорем 2, 3.

СЛЕДСТВИЕ 1. *В условиях и обозначениях теоремы 3 существуют постоянные $1 < S_1 < \infty$, $0 < S_2 < \infty$, зависящие лишь от известных параметров уравнения (1.1) такие, что имеет место следующее свойство. Если начальная функция $u_0(x)$ такова, что соответствующая ей функция $f_0(y, s)$ имеет мажоранту $f(y, s)$, удовлетворяющую условию регулярной монотонности (2.12) с указанными выше постоянными S_1, S_2 , то справедлива следующая априорная оценка радиуса компактификации $\rho(t)$:*

$$\rho(t) \leq \tilde{F}^{-1}(S_1^{-1} K t^{\frac{1}{\nu}}) \quad \forall t \leq T' = T'(s'), \quad T' > 0. \quad (2.13)$$

Здесь $\tilde{F}^{-1}(\tau) \equiv \inf\{\rho : F(\rho) \leq \tau \quad \forall \rho' \geq \rho\}$. (Если $F(\rho)$ является строго монотонной функцией, то $\tilde{F}^{-1}(\tau) \equiv F^{-1}(\tau)$ является обычной обратной функцией.)

Оценка (2.13) является принципиально более сильной, чем оценка из [12], полученная в случае $m = 1, q = 1, u_0(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Мы не располагаем никакой другой информацией о радиусе компактификации решений с локально неограниченными начальными данными, но следующее рассуждение позволяет сделать косвенное сравнение с точными оценками из [8], [10], полученными в случае $n = 1, m = 1$ для непрерывных неотрицательных начальных функций, равномерно стремящихся к нулю на бесконечности.

Итак, пусть $m = 1, u_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Зафиксируем $d > q$ и предположим, что

$$f_{0,d}(y, s') \equiv \int_{|x-y|<s'} |u_0(x)|^{d+1} dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |y| \rightarrow \infty, \quad s' = \text{const} > 0.$$

Объединяя рассуждения из теорем 2, 3 и теоремы 3 [12], легко выводим следующий аналог оценки (2.13):

$$\rho(t) \leq \tilde{F}_d^{-1}(K_1 t^{\frac{1}{\nu(d)}}) \quad \forall t < T', \quad T' > 0, \quad K_1 = K_1(S_1, d, s') > 0, \quad (2.14)$$

где $F_d(\rho) = \sup_{|y|=\rho} f_d(y, s')$, $f_d(y, s')$ – мажоранта функции $f_{0,d}(y, s')$, удовлетворяющая условию регулярной монотонности (2.12),

$$\nu(d) = \frac{(p+1)(q-\lambda)}{(d+1)(p+1) + n(p-\lambda)}.$$

Очевидно, что

$$F_d(\rho)^{\frac{1}{d+1}} \leq c \sup_{\rho-s' < |x| \leq \rho+s'} |u_0(x)| \equiv cU_0(\rho), \quad c = c(s') < \infty.$$

Поэтому соотношение (2.14) приводит к оценке

$$\rho(t) \leq c \tilde{U}_0^{-1} \left(K_2 \cdot t^{\frac{1}{q-\lambda} + \frac{n(p-\lambda)}{(d+1)(p+1)(q-\lambda)}} \right) \quad \forall t < T', \quad K_2 = K_2(S_1, d, s') < \infty.$$

При $d \rightarrow \infty$ получаем

$$\rho(t) \leq c(\varepsilon) \tilde{U}_0^{-1} \left(K_3 \cdot t^{\frac{1}{q-\lambda} + \varepsilon} \right) \quad \forall t < T', \quad c(\varepsilon) < \infty, \quad K_3 < \infty, \quad (2.15)$$

где $\varepsilon > 0$ может быть взято как угодно малым. Эта оценка при $\varepsilon = 0$ соответствует точным оценкам из [8], [10]. Кстати, точное время “затухания” для решения $u(t, x) = u(t)$ задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (|u|^{q-1} u) - \Delta_p u + |u|^{\lambda-1} u &= 0, \quad \lambda < q, \\ u(0, x) &= u_0 = \text{const} > 0, \end{aligned}$$

есть $t_0 \equiv (q - \lambda)^{-1} u_0^{q-\lambda}$. Имея в виду приведенные соображения, можно высказать гипотезу, что установленная оценка (2.13) радиуса компактификации является точной в общей ситуации.

§ 3. Условия появления мертвой зоны

Зафиксируем снова произвольно точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и введем следующие семейства ограниченных областей:

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < s\}, \quad K(s, \delta) = \Omega(s) \setminus \Omega(s - \delta), \quad 0 < \delta < s < \infty; \\ Q_{t_1}^{t_2}(s) &= \Omega(s) \times (t_1, t_2), \quad G_{t_1}^{t_2}(s, \delta) = Q_{t_1}^{t_2}(s) \setminus Q_{t_1}^{t_2}(s - \delta), \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T_0; \\ Q^{(t)}(s) &\equiv Q_0^{(t)}(s), \quad G^{(t)}(s, \delta) \equiv G_0^{(t)}(s, \delta). \end{aligned}$$

Мы будем систематически использовать интерполяционные неравенства Гальярдо–Ниренберга в форме:

$$\begin{aligned} \|D^j v\|_{a, K(s, \delta)} &\leq k_1 \delta^{-j - \frac{n(a-g)}{ag}} \|v\|_{g, K(s, \delta)} + k_2 \|D^m v\|_{b, K(s, \delta)}^\theta \cdot \|v\|_{g, K(s, \delta)}^{1-\theta} \\ \forall j &\leq m - 1, \quad 0 < \delta < s < \infty, \quad k_1 < \infty, \quad k_2 < \infty. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $v(x)$ – произвольная функция из пространства

$$W_b^m(K(s, \delta)) \cap L_g(K(s, \delta)), \quad \|v\|_{a, B}^a \equiv \int_B |v|^a dx, \quad g > 0, \quad a > 1, \quad b > 1,$$

постоянная $\theta \in [j/m, 1]$ определяется соотношением

$$\frac{1}{a} - \frac{j}{n} = \theta \left(\frac{1}{b} - \frac{m}{n} \right) + (1 - \theta) \frac{1}{g},$$

а постоянные k_1, k_2 не зависят от $s, \delta, v(x)$.

Зафиксируем произвольно числа $0 < \omega < \tau \leq T_0$, $0 < \delta < s < \infty$ и введем монотонные срезающие функции $\eta(h) \in C^m(\mathbb{R}^1)$, $\psi(t) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ такие, что $\eta(h) = 0$, если $h \geq s$, $\eta(h) = 1$, если $h \leq s - \delta$; $\psi(t) = 1$, если $t \geq T_0 - \tau + \omega$, $\psi(t) = 0$, если $t \leq T_0 - \tau$, а также

$$0 \leq \psi'_t(t) \leq k_3 \omega^{-1}, \quad |D^j \eta(h)| \leq k_4 \delta^{-j}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2)$$

Здесь постоянные $k_3 < \infty$, $k_4 < \infty$ не зависят от s, δ, τ, ω .

ЛЕММА 1. Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение уравнения (1.1). Тогда для всех $0 < \delta < s < \infty$, $0 < \omega < \tau \leq T \leq T_0$ имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s-\delta)} |u(T, x)|^{q+1} dx + \int_{Q_{T-\tau+\omega}^{(T)}(s-\delta)} [\tau^{-1} |u|^{q+1} + |D^m u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1}] dx dt \\ & \leq c \left[\delta^{-m(p+1)} \int_{G_{T-\tau}^{(T)}(s, \delta)} |u|^{p+1} dx dt + \omega^{-1} \int_{Q_{T-\tau}^{(T-\tau+\omega)}(s)} |u|^{q+1} dx dt \right] \\ & \equiv c Z_T(s, \delta, \tau, \omega). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь и в дальнейшем через c, c_i обозначаем различные постоянные, зависящие лишь от известных параметров уравнения (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. 1. Подставим функцию $\psi(t) \exp(-\tau^{-1}(t-T+\tau))$ в интегральное тождество (2.1) в качестве пробной функции φ , а $\eta(|x - x_0|)$ – как пробную функцию η . Здесь $\psi(t)$ и $\eta(h)$ – срезающие функции из (3.2). Оцениваем сверху член

$$\int_{G_{T-\tau}^{(T)}(s, \delta)} a_\alpha(t, \dots, D^m u) D^\beta u \cdot D^{\alpha-\beta} \eta \cdot \psi(t) \exp\left(-\frac{t-T+\tau}{\tau}\right) dx dt$$

$\forall \beta: |\beta| \leq m-1$, применяя неравенство Гёльдера, условие (1.4), неравенства (3.2), интерполяционное неравенство (3.1) при $a = b = g \equiv p+1$ и, наконец, неравенство Юнга с “ ε ”. Оценивая стандартно остальные члены, учитывая условия (1.3), (1.5) и проводя простые вычисления, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} |u(T, x)|^{q+1} \eta dx + \int_{Q_{T-\tau}^{(T)}(s)} (\tau^{-1} |u|^{q+1} + |D^m u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1}) \eta \cdot \psi dx dt \\ & \leq \varepsilon \int_{G_{T-\tau}^{(T)}(s, \delta)} |D^m u|^{p+1} \psi(t) dx dt + \frac{c_1(\varepsilon)}{\delta^{m(p+1)}} \int_{G_{T-\tau}^{(T)}(s, \delta)} |u|^{p+1} \psi dx dt \\ & \quad + \frac{c_2}{\omega} \int_{Q_{T-\tau}^{(T-\tau+\omega)}(s)} |u|^{q+1} \eta dx dt \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Зафиксируем числа $0 < \tau < T \leq T_0$ и введем следующие функции аргумента s :

$$\begin{aligned} B_1(s) &\equiv \int_{\Omega(s)} |u(T, x)|^{q+1} dx + \int_{Q_{T-\tau}^{(T)}(s)} (\tau^{-1}|u|^{q+1} + |u|^{\lambda+1})\psi(t) dx dt, \\ B_2(s) &\equiv \int_{Q_{T-\tau}^{(T)}(s)} |D^m u|^{p+1} \psi dx dt, \\ B_3(s) &\equiv \int_{G_{T-\tau}^{(T)}(s, \delta)} |u|^{p+1} \psi dx dt, \\ B_4(s) &\equiv \omega^{-1} \int_{Q_{T-\tau}^{(T-\tau+\omega)}(s)} |u|^{q+1} dx dt. \end{aligned}$$

Тогда соотношение (3.4) порождает неравенство

$$B_1(s - \delta) + B_2(s - \delta) \leq \varepsilon B_2(s) + c_1(\varepsilon) \delta^{-m(p+1)} B_3(s) + c_2 B_4(s) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Фиксируя здесь соответствующие значения аргумента s и свободного параметра δ , получаем следующее семейство неравенств:

$$\begin{aligned} B_1\left(s - \frac{\delta}{2^{j-1}}\right) + B_2\left(s - \frac{\delta}{2^{j-1}}\right) \\ \leq \varepsilon B_2\left(s - \frac{\delta}{2^j}\right) + c_1(\varepsilon) \left(\frac{2^j}{\delta}\right)^{m(p+1)} \cdot B_3(s) + c_2 B_4(s), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

При выводе (3.5) мы воспользовались монотонным неубыванием функций $B_3(s)$, $B_4(s)$. Запишем теперь неравенство (3.5) при $j = 1$. Член $B_2(s - \delta/2)$ в правой части этого неравенства оценим при помощи соотношения (3.5) при $j = 2$. Затем член $B_2(s - \delta/2^2)$ оцениваем, используя неравенство (3.5) при $j = 3$, и т. д. Повторяя описанную процедуру i раз, получаем

$$\begin{aligned} B_1(s - \delta) + B_2(s - \delta) \\ \leq \varepsilon^i B_2\left(s - \frac{\delta}{2^i}\right) + \left(\frac{2}{\delta}\right)^{m(p+1)} \cdot c_1(\varepsilon) B_3(s) \cdot \sum_{k=0}^{i-1} (\varepsilon \cdot 2^{m(p+1)})^k + c_2 \cdot B_4(s) \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^k. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\varepsilon = 2^{-1-m(p+1)}$, при $i \rightarrow \infty$ получаем

$$B_1(s - \delta) + B_2(s - \delta) \leq 2 \left(\frac{2}{\delta}\right)^{m(p+1)} \cdot c_1(2^{-1-m(p+1)}) B_3(s) + 2c_2 B_4(s).$$

Неравенство (3.3) следует из последнего соотношения непосредственно. Лемма 1 доказана.

Зафиксируем теперь произвольно $0 < T \leq T_0$ и введем следующие новые функции, связанные с изучаемым решением $u(t, x)$ уравнения (1.1):

$$\begin{aligned} I_T(s, \tau) &\equiv \int_{Q_{T-\tau}^{(T)}(s)} |u|^{p+1} dx dt, \quad E_T(s, \tau) \equiv \int_{Q_{T-\tau}^{(T)}(s)} |u|^{q+1} dx dt; \\ \Phi_{T,h}(s, \delta, \tau, \omega) &= \int_0^T \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} \eta(|x - x_0|) dx \right)^h \psi(t) dt, \quad h > 0; \\ \Psi_{T,h}(s, \tau) &\equiv \int_{T-\tau}^T \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, t)|^{q+1} dx \right)^h dt. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть $u(t, x)$ – произвольное локально энергетическое решение уравнения (1.1). Тогда для произвольных чисел $h_2 > h_1 > 0$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi_{T, h_2}(s, \delta, \tau, \omega) &\leq c \Phi_{T, h_1}(s, \delta, \tau, \omega) \cdot Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{h_2 - h_1}, \\ 0 < \delta < s, \quad 0 < \tau < T, \quad \omega < \max(T - \tau; \tau), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $Z_T(s, \delta, \tau, \omega)$ из (3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем вспомогательную функцию

$$\chi_h(t) \equiv \int_0^t \left(\int_{\Omega(s)} |u(\theta, x)|^{q+1} \eta(|x - x_0|) dx \right)^h \psi(\theta) d\theta, \quad h > 0.$$

В силу теоремы Фубини имеет место равенство

$$\Phi_{T, h+1}(s, \delta, \tau, \omega) = \chi_{h+1}(T) = \int_{Q^{(T)}(s)} |u(t, x)|^{q+1} \eta(|x - x_0|) \frac{d}{dt} \chi_h(t) dx dt. \quad (3.7)$$

Поэтому, подставляя функцию $\eta(|x - x_0|)$ в интегральное тождество (2.1) в качестве пробной функции η и функцию $\chi_h(t)$ в качестве пробной функции φ , выводим, учитывая соотношение (3.7):

$$\begin{aligned} &\Phi_{T, h+1}(s, \delta, \tau, \omega) \\ &= \chi_h(T) \int_{\Omega(s)} |u(T, x)|^{q+1} \eta dx \\ &\quad + \frac{q}{q+1} \int_{Q_{T-\tau}^{(T)}(s)} \left[b(t, x, u) u \eta + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t, x, \dots, D^m u) D^\alpha(u \eta) \right] \chi_h(t) dx dt \\ &\leq \Phi_{T, h}(s, \delta, \tau, \omega) \left[\int_{\Omega(s)} |u(T, x)|^{q+1} \eta dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q_{T-\tau}^{(T)}(s)} \left(b u \eta + \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(t, x, \dots, D^m u)| \cdot |D^\alpha(u \eta)| \right) dx dt \right]. \end{aligned}$$

Второй сомножитель в правой части оцениваем, используя условия (1.4), (1.5), неравенства (3.2), интерполяционное неравенство (3.1) при $a = b = g = p + 1$, $j = 0, 1, \dots, m - 1$ и установленную оценку (3.3). В результате получаем

$$\Phi_{T, h+1}(s, \delta, \tau, \omega) \leq c \Phi_{T, h}(s, \delta, \tau, \omega) Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega).$$

Из этого соотношения, применяя неравенство Гёльдера, легко выводим необходимое соотношение (3.6). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $u(t, x)$ – произвольное локально энергетическое решение уравнения (1.1) при $0 < \lambda < q \leq p$. Тогда для соответствующих энергетических функций $I_T(s, \tau)$, $E_T(s, \tau)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta, \tau - \omega) &\leq c_1 Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1+\mu} r(s - \delta, \tau)^{1-\theta} \\ &\quad + c_2 Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1+\frac{\mu}{1-\theta}} r(s - \delta, \tau)(s - \delta)^{-\frac{n(p-q)}{q+1}}, \\ 0 < \delta < s, \quad 0 < \omega < \tau \leq T, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$E_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c_3 Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1+\nu} r(s - \delta, \tau). \quad (3.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} r(s, \tau) &\equiv 1 + s^{-n(1-\xi)} \tau^{\frac{(q+1)\xi - (\lambda+1)}{q-\lambda}} = 1 + s^{-n\nu} \tau^{\frac{\nu n(p-\lambda)}{m(p+1)(q-\lambda)}}, \\ \theta &= \frac{n(p-q)}{n(p-q) + m(p+1)(q+1)}, \\ \xi &= \frac{n(p-\lambda) + m(p+1)(\lambda+1)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(q+1)}, \\ \mu &= \left(\frac{p+1}{q+1} - \xi \right) (1-\theta) = \frac{m(p+1)(p-\lambda)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(q+1)}, \\ \nu &= 1 - \xi = \frac{m(p+1)(q-\lambda)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(q+1)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем интерполяционное неравенство (3.1) для решения $u(t, x)$ в области $\Omega(s - \delta)$ при $a = b = p + 1$, $g = q + 1$, $j = 0$, возведем его в степень $(p + 1)$ и проинтегрируем по t . Используя оценку (3.3), получаем

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta, \tau - \omega) &\leq ck_1^{p+1} (s - \delta)^{-\frac{n(p-q)}{q+1}} \Psi_{T, \frac{p+1}{q+1}}(s - \delta, \tau - \omega) \\ &\quad + ck_2^{p+1} Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^\theta \Psi_{T, \frac{p+1}{q+1}}(s - \delta, \tau - \omega)^{1-\theta}, \\ \theta &= \frac{n(p-q)}{n(p-q) + (p+1)(q+1)m}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Теперь запишем интерполяционное неравенство (3.1) для функции $u(t, x)$ при $a = 1 + q$, $b = 1 + p$, $g = 1 + \lambda$, $j = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(s-\delta)} |u|^{q+1} dx &\leq ck_1^{q+1} (s - \delta)^{-\frac{n(q-\lambda)}{\lambda+1}} \left(\int_{\Omega(s-\delta)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{\frac{q+1}{\lambda+1}} \\ &\quad + \left(\int_{\Omega(s-\delta)} |D^m u|^{p+1} dx \right)^{\frac{\theta_1(q+1)}{p+1}} ck_2^{q+1} \left(\int_{\Omega(s-\delta)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{\frac{(1-\theta_1)(q+1)}{\lambda+1}}, \\ \theta_1 &= \frac{n(p+1)(q-\lambda)}{(q+1)[n(p-\lambda) + m(p+1)(\lambda+1)]}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Возведем это неравенство в степень

$$\left[\frac{\theta_1(q+1)}{p+1} + \frac{(1-\theta_1)(q+1)}{\lambda+1} \right]^{-1} = \xi = \frac{n(p-\lambda) + m(p+1)(\lambda+1)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(q+1)} < 1$$

и проинтегрируем по t . Используя оценку (3.3), получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{T,\xi}(s-\delta, \tau-\omega) &\leq ck_1^{\xi(q+1)}(s-\delta)^{-\frac{n(q-\lambda)\xi}{\lambda+1}} \\ &\times \int_{T-(\tau-\omega)}^T \left(\int_{\Omega(s-\delta)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{\frac{(q+1)\xi}{\lambda+1}} dt + ck_2^{\xi(q+1)} Z_T(s, \delta, \tau, \omega). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Так как $(q+1)\xi > \lambda+1$, то, применяя неравенство Гёльдера, выводим

$$\begin{aligned} &\int_{T-(\tau-\omega)}^T \left(\int_{\Omega(s-\delta)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{\frac{(q+1)\xi}{\lambda+1}} dt \\ &\leq c(s-\delta)^{\frac{n[(q+1)\xi-(\lambda+1)]}{(\lambda+1)}} \int_{Q_{T-\tau+\omega}^{(T)}(s-\delta)} |u|^{(q+1)\xi} dx dt \\ &\leq c(s-\delta)^{\frac{n[(q+1)\xi-(\lambda+1)]}{(\lambda+1)}} \left(\int_{Q_{T-\tau+\omega}^{(T)}(s-\delta)} |u|^{q+1} dx dt \right)^{\theta_2} \\ &\quad \times \left(\int_{Q_{T-\tau+\omega}^{(T)}(s-\delta)} |u|^{\lambda+1} dx dt \right)^{1-\theta_2}, \\ \theta_2 &= \frac{(q+1)\xi - (\lambda+1)}{q-\lambda} = \frac{n(p-\lambda)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(q+1)} < 1. \end{aligned}$$

Подставляя последнюю оценку в неравенство (3.12) и используя дополнительно оценку (3.3), получаем

$$\Psi_{T,\xi}(s-\delta, \tau-\omega) \leq c Z_T(s, \delta, \tau, \omega) r(s-\delta, \tau). \quad (3.13)$$

Учитывая (3.13), выводим из соотношения (3.6) при $h_2 = \frac{p+1}{q+1}$, $h_1 = \xi$ следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \Psi_{T, \frac{p+1}{q+1}}(s-\delta, \tau-\omega) &\leq \Phi_{T, \frac{p+1}{q+1}}(s, \delta, \tau, \omega) \\ &\leq \Phi_{T,\xi}(s, \delta, \tau, \omega) Z_T(s+\delta, \delta, \tau+\omega, \omega)^{\frac{p+1}{q+1}-\xi} \\ &\leq c_1 r(s, \tau+\omega) Z_T(s+\delta, \delta, \tau+\omega, \omega)^{1-\xi+\frac{p+1}{q+1}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставляя, наконец, (3.14) в соотношение (3.10), получаем

$$\begin{aligned} I_T(s-\delta, \tau-\omega) &\leq c_2 \cdot r(s, \tau+\omega)^{1-\theta} \cdot Z_T(s+\delta, 2\delta, \tau+\omega, 2\omega)^{1+\mu} \\ &+ c_3 (s-\delta)^{-\frac{n(p-q)}{q+1}} \cdot r(s, \tau+\omega) \cdot Z_T(s+\delta, \delta, \tau+\omega, \omega)^{1+\frac{\mu}{1-\theta}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Теперь получим необходимую оценку для $E_T(s - \delta, \tau - \omega)$. Вернемся к соотношению (3.6), где положим $h_2 = 1$, $h_1 = \xi$. Используя также оценку (3.13), получаем

$$\begin{aligned} E_T(s - \delta, \tau - \omega) &\equiv \Psi_{T,1}(s - \delta, \tau - \omega) \leq \Phi_{T,1}(s, \tau) \\ &\leq c\Phi_{T,\xi}(s, \tau) \cdot Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{1-\xi} \\ &\leq c\Psi_{T,\xi}(s, \tau) \cdot Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{1-\xi} \\ &\leq cr(s, \tau + \omega) \cdot Z_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{2-\xi}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Вводя теперь новые аргументы: $s_1 = s + \delta$, $\delta_1 = 2\delta$, $\tau_1 = \tau + \omega$, $\omega_1 = 2\omega$ и опуская затем индекс, выводим из соотношений (3.15), (3.16) необходимые неравенства (3.8), (3.9). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть параметры уравнения (1.1) удовлетворяют соотношениям (2.3*) и $u(t, x)$ — локально энергетическое решение уравнения (1.1). Тогда соответствующие энергетические функции $E_T(s, \tau)$, $I_T(s, \tau)$ удовлетворяют соотношениям:

$$E_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c_1 Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1+\nu} r(s - \delta, \tau), \quad (3.17)$$

$$I_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c_2 Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1+\mu} r(s - \delta, \tau)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}}, \quad (3.18)$$

где функция $r(s, \tau)$ и числа ν, μ из леммы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношения (2.3*) имеет место вложение

$$W_{p+1}^m(\Omega) \hookrightarrow L_{q+1}(\Omega).$$

Поэтому справедливо интерполяционное неравенство (3.1) и, как следствие, снова выводится соотношение (3.16). Для того чтобы установить соотношение для $I_T(s, \tau)$, запишем неравенство Гёльдера:

$$\int_{\Omega(s-\delta)} |u(t, x)|^{p+1} dx \leq \left(\int_{\Omega(s-\delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}} \cdot \left(\int_{\Omega(s-\delta)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{\frac{q-p}{q-\lambda}}.$$

Интегрируя это неравенство по t и используя априорную оценку (3.3), выводим

$$I_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c \cdot Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{\frac{q-p}{q-\lambda}} \cdot \Psi_{T,1}(s - \delta, \tau - \omega)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}}.$$

Применяя к второму сомножителю справа оценку (3.16), получаем

$$I_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c \cdot Z_T(s + \delta, 2\delta, \tau + \omega, 2\omega)^{1+\mu} \cdot r(s, \tau + \omega)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}}. \quad (3.19)$$

Из соотношения (3.16), (3.19) после стандартной замены аргументов выводим необходимые неравенства (3.17), (3.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала рассмотрим случай $0 < \lambda < q < p$. Возводя неравенство (3.8) в степень $1 + \nu$, а соотношение (3.9) – в степень $1 + \mu$ и складывая, получаем

$$\begin{aligned} H_T(s - \delta, \tau - \omega) &\equiv I_T(s - \delta, \tau - \omega)^{1+\nu} + E_T(s - \delta, \tau - \omega)^{1+\mu} \\ &\equiv B_T(s - \delta, \tau - \omega) + A_T(s - \delta, \tau - \omega) \\ &\leq r_1(s - \delta, \tau) \cdot Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{(1+\nu)(1+\mu)} \\ &\quad + r_2(s - \delta, \tau) \cdot Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{(1+\frac{\mu}{1-\theta})(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned} r_1(s, \tau) &= c_1^{1+\nu} \cdot r(s, \tau)^{(1-\theta)(1+\nu)} (1 + \mu) + c_3^{1+\mu} \cdot r(s, \tau)^{1+\mu}, \\ r_2(s, \tau) &= c_2^{1+\nu} \cdot (1 + \mu) \cdot s^{-\frac{n(p-q)(1+\nu)}{q+1}} \cdot r(s, \tau)^{1+\nu}, \end{aligned}$$

постоянные c_1, c_2, c_3 из (3.8), (3.9). Введем теперь разностные операторы

$$\Delta_s I_T(s, \tau) = I_T(s, \tau) - I_T(s - \delta, \tau), \quad \Delta_\tau E_T(s, \tau) = E_T(s, \tau) - E_T(s, \tau - \omega).$$

Имея в виду следующие просто проверяемые неравенства

$$\begin{aligned} (\Delta_s I_T(s, \tau))^{1+\alpha} &\leq I_T(s, \tau)^{1+\alpha} - I_T(s - \delta, \tau)^{1+\alpha} \quad \forall \alpha \geq 0, \\ \Delta_\tau E_T(s, \tau)^{1+\beta} &\leq E_T(s, \tau)^{1+\beta} - E_T(s, \tau - \omega)^{1+\beta} \quad \forall \beta \geq 0 \end{aligned}$$

и вспоминая определение функции $Z_T(s, \delta, \tau, \omega)$, выводим из соотношения (3.20):

$$\begin{aligned} H_T(s - \delta, \tau - \omega) &\leq \left[\frac{B_T(s, \tau)^\mu \cdot \Delta_s B_T(s, \tau)}{\delta^{m(p+1)(1+\nu)(1+\mu)}} + \frac{A_T(s, \tau)^\nu \cdot \Delta_\tau A_T(s, \tau)}{\omega^{(1+\nu)(1+\mu)}} \right] \\ &\quad \times (1 + \nu)(1 + \mu)r_1(s - \delta, \tau) + (1 + \nu) \left(1 + \frac{\mu}{1 - \theta} \right) r_2(s - \delta, \tau) \\ &\quad \times \left[\frac{\Delta_s B_T(s, \tau) \cdot B_T(s, \tau)^{\frac{\mu}{1-\theta}}}{\delta^{m(p+1)(1+\nu)(1+\frac{\mu}{1-\theta})}} + \frac{\Delta_\tau A_T(s, \tau) \cdot E_T(s, \tau)^{(1+\nu)(1+\frac{\mu}{1-\theta})-(1+\mu)}}{\omega^{(1+\nu)(1+\frac{\mu}{1-\theta})}} \right]. \end{aligned}$$

Полагая в этом неравенстве

$$\delta = \delta(s, \tau) = B_T(s, \tau)^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\nu)(1+\mu)}}, \quad \omega = \omega(s, \tau) = A_T(s, \tau)^{\frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}},$$

после простых вычислений получаем

$$\begin{aligned} &H_T(s - \delta(s, \tau), \tau - \omega(s, \tau)) \\ &\leq \Delta_s B_T(s, \tau) \left[(1 + \nu)(1 + \mu)r_1(s - \delta(s, \tau), \tau) \right. \\ &\quad \left. + (1 + \nu) \left(1 + \frac{\mu}{1 - \theta} \right) r_2(s - \delta(s, \tau), \tau) B_T(s, \tau)^{\frac{\mu\theta}{(1-\theta)(1+\mu)}} \right] \\ &\quad + \Delta_\tau A_T(s, \tau) \left[(1 + \nu)(1 + \mu)r_1(s - \delta(s, \tau), \tau) \right. \\ &\quad \left. + r_2(s - \delta(s, \tau), \tau) \cdot (1 + \nu) \left(1 + \frac{\mu}{1 - \theta} \right) A_T(s, \tau)^{\frac{\mu\theta}{(1-\theta)(1+\mu)}} \right]. \end{aligned}$$

Из этого неравенства, используя монотонность функции $H_T(s, \tau)$ по обоим ее аргументам, выводим соотношение

$$H_T(s - H_T(s, \tau)^{\beta_1}, \tau - H_T(s, \tau)^{\beta_2}) \leq \zeta H_T(s, \tau), \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\mu}{m(p+1)(\nu+1)(\mu+1)}, \quad \beta_2 = \frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}, \quad \zeta \equiv 1 - \Lambda^{-1} < 1, \\ \Lambda &= 1 + (1+\nu)(1+\mu)r_1(s - H_T(s, \tau)^{\beta_1}, \tau) \\ &\quad + (1+\nu)\left(1 + \frac{\mu}{1-\theta}\right)r_2(s - H_T(s, \tau)^{\beta_1}, \tau)H_T(s, \tau)^{\frac{\mu\theta}{(1+\theta)(1+\mu)}} \\ &\equiv \Lambda(s - H_T(s, \tau)^{\beta_1}, \tau, H_T(s, \tau)). \end{aligned}$$

Используем теперь лемму 9 из § 5 для анализа свойств функции $H_T(s, \tau)$, удовлетворяющей соотношению (3.21). В качестве точки s_1 зафиксируем точку $s > 0$, а в качестве s_0 — точку $s/2$. Согласно определению (5.4) находим

$$\zeta_0 = \zeta_0(s, T, H) \equiv 1 - \Lambda_0^{-1},$$

где

$$\Lambda_0 = 1 + (1+\nu)(1+\mu)r_1\left(\frac{s}{2}, T\right) + (1+\nu)\left(1 + \frac{\mu}{1-\theta}\right)r_2\left(\frac{s}{2}, T\right)H^{\frac{\mu\theta}{(1-\theta)(1+\mu)}}.$$

Выбор числа H обуславливается лишь ограничением (5.3), которое может быть записано сейчас в виде

$$P_{s,T}(H) \equiv H^{\beta_1}(1 - \zeta_0^{\beta_1})^{-1} \leq \frac{s}{2}, \quad (3.22)$$

$$R_{s,T}(H) \equiv H^{\beta_2}(1 - \zeta_0^{\beta_2})^{-1} \leq T, \quad (3.23)$$

где $\zeta_0 = \zeta_0(s, T, H) = 1 - \Lambda_0(s, T, H)^{-1}$. Легко убедиться, что функции

$$P_{s,T}(H), \quad R_{s,T}(H) \quad (3.24)$$

являются положительными непрерывными строго монотонно возрастающими функциями аргумента $H \geq 0$ при всех значениях параметров $T \geq 0$, $s > 0$, причем

$$P_{s,T}(0) = R_{s,T}(0) = 0.$$

По отношению к параметрам $s > 0$, $T > 0$ семейства (3.24) являются непрерывными и соответственно строго монотонно убывающими и строго монотонно возрастающими функциями. Обратные к функциям (3.24) функции

$$P_{s,T}^{-1}(U), \quad R_{s,T}^{-1}(U)$$

являются также непрерывными строго монотонно возрастающими функциями аргумента $U \geq 0$, а относительно параметров $s > 0$, $T > 0$ соответственно непрерывными монотонно убывающими или монотонно возрастающими семействами функций. Теперь условие малости (5.5) и ограничение (5.3), записанное в виде (3.22), (3.23), могут быть переписаны в эквивалентной форме:

$$H_T(s, T) \equiv H(s, T) \leq \min \left\{ P_{s,T}^{-1} \left(\frac{s}{2} \right); R_{s,T}^{-1}(T) \right\} \equiv L(s, T). \quad (3.25)$$

Лемма 9 теперь гарантирует следующее: если энергетическая функция $H(s, T)$ некоторого решения $u(t, x)$ уравнения (1.1) удовлетворяет при некоторых $s > 0$, $T > 0$ условию (3.25), то

$$u(t, x) \equiv 0 \quad \forall (t, x) \in \{0 \leq t < \delta_1, |x - x_0| < \delta_2\},$$

где $\delta_1 = \delta_1(s, T) > 0$, $\delta_2 = \delta_2(s, T) > 0$.

Тем самым основное утверждение теоремы 1 доказано.

Проверим теперь справедливость утверждений а), б) теоремы 1. Просто проверяется, что

$$\Lambda_0(s, T, H) \leq \Lambda_{0,0}(H) \equiv c_4 + c_5 H^{\frac{\mu\theta}{(1-\theta)(1+\mu)}} \quad \forall (s, T) \in \Pi,$$

где

$$\begin{aligned} c_4 &= 1 + c_1^{1+\nu}(1+\nu)(1+\mu)^2(1+2^{n\nu})^{(1-\theta)(1+\nu)} \\ &\quad + c_3^{1+\mu}(1+\nu)(1+\mu)^2(1+2^{n\nu})^{(1+\mu)}, \\ c_5 &= (1+\nu)(1+\mu) \left(1 - \frac{\mu}{1-\theta} \right) c_2^{1+\nu}(1+2^{n\nu})^{1+\nu} 2^{\frac{n(p-q)(1+\nu)}{q+1}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P_{s,T}(H) &\leq P_1(H) \equiv H^{\beta_1} (1 - \zeta_{0,0}(H)^{\beta_1})^{-1} \quad \forall (s, T) \in \Pi, \quad \forall H \in \mathbb{R}_+^1, \\ R_{s,T}(H) &\leq R_1(H) \equiv H^{\beta_2} (1 - \zeta_{0,0}(H)^{\beta_2})^{-1} \quad \forall (s, T) \in \Pi, \quad \forall H \in \mathbb{R}_+^1, \end{aligned}$$

где $\zeta_{0,0}(H) = 1 - \Lambda_{0,0}(H)^{-1}$. Справедливость утверждения а) доказана, так как мажоранты $P_1(H)$, $R_1(H)$ являются строго монотонно возрастающими функциями.

Обозначим постоянную $c_6 = 1 - (c_4 + c_5)^{-1} < 1$. Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} P_1(H) &\leq (1 - c_6^{\beta_1})^{-1} H^{\beta_1} \quad \forall H < 1, \\ R_1(H) &\leq (1 - c_6^{\beta_2})^{-1} H^{\beta_2} \quad \forall H < 1. \end{aligned}$$

Поэтому следующее ограничение достаточно для выполнения условия малости (3.25):

$$H(s, T) \leq \min \left(1, (1 - c_6^{\beta_2})^{\frac{1}{\beta_2}} T^{\frac{1}{\beta_2}}; (1 - c_6^{\beta_1})^{\frac{1}{\beta_1}} \left(\frac{s}{2} \right)^{\frac{1}{\beta_1}} \right) \quad \forall (s, T) \in \Pi.$$

Так как $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{p-\lambda}{m(p+1)(q-\lambda)}$, то из последнего неравенства следует справедливость утверждения б) с

$$C_1 = \min \left((1 - c_6^{\beta_2})^{\frac{1}{\beta_2}}; \left(\frac{1 - c_6^{\beta_1}}{2} \right)^{\frac{1}{\beta_1}} \right). \quad (3.26)$$

Рассмотрим теперь случай (2.3*). Начнем с оценок (3.17), (3.18). Возводя (3.17) в степень $1 + \mu$, а (3.18) – в степень $1 + \nu$ и складывая, получаем

$$H_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq r_3(s - \delta, \tau) Z_T(s, \delta, \tau, \omega)^{(1+\mu)(1+\nu)}, \quad (3.27)$$

где $r_3(s, \tau) = c_1^{1+\mu} r(s, \tau)^{1+\mu} + c_2^{1+\nu} r(s, \tau)^{\frac{(1+\nu)(p-\lambda)}{q-\lambda}}$.

Опирируя с соотношением (3.27) так же, как с соотношением (3.20) в случае $0 < \lambda < q < p$, получаем после простых вычислений соотношение (3.21) с $\zeta = 1 - \Lambda^{-1}$, где

$$\Lambda = 1 + (1 + \nu)(1 + \mu) r_3(s - H_T(s, \tau)^{\beta_1}, \tau) \equiv \Lambda(s - H_T(s, \tau)^{\beta_1}, \tau).$$

Применяя снова лемму 9, получаем условия малости (3.22), (3.23) с $\zeta_0 = \zeta_0(s, T) = 1 - \Lambda_0^{-1}$, где

$$\begin{aligned} \Lambda_0 = \Lambda_0(s, T) = & 1 + c_1^{1+\mu} (1 + \nu)(1 + \mu) \cdot r\left(\frac{s}{2}, T\right)^{1+\mu} \\ & + c_2^{1+\nu} (1 + \nu)(1 + \mu) r\left(\frac{s}{2}, T\right)^{\frac{(1+\nu)(p-\lambda)}{q-\lambda}}. \end{aligned}$$

Следовательно, аналогом условия малости (3.26) является условие

$$H(s, T) \leq \min \left\{ (1 - \zeta_0(s, T)^{\beta_1})^{\frac{1}{\beta_1}} \left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{1}{\beta_1}}; (1 - \zeta_0(s, T)^{\beta_2})^{\frac{1}{\beta_2}} T^{\frac{1}{\beta_2}} \right\} \equiv L(s, T). \quad (3.26^*)$$

Утверждения а), б) следуют из (3.26*) непосредственно. Теорема 1 доказана полностью.

§ 4. Достаточные условия мгновенной компактификации носителей решений с бесконечной энергией

Сначала рассмотрим решение $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией $u_0(x) \in L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$. Наша задача – оценить энергетическую функцию $H(s, T) \equiv H_T(s, T)$ этого решения через функцию $f_0(s) = \int_{\Omega(s)} |u_0(x)|^{q+1} dx$.

Сначала установим “неоднородные” аналоги оценок из § 3.

ЛЕММА 5. Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (1.1), (1.2). Тогда для всех $0 < \delta < s < \infty$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s-\delta)} |u(T, x)|^{q+1} dx + \int_{Q^{(T)}(s-\delta)} (T^{-1}|u|^{q+1} + |D^m u|^{p+1} + |u|^{\lambda+1}) dx dt \\ & \leq c \left[\delta^{-m(p+1)} \cdot \int_{G^{(T)}(s, \delta)} |u|^{p+1} dx dt + f_0(s) \right] \equiv cZ(s, \delta) \quad \forall T \leq T_0. \quad (4.1) \end{aligned}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 1. Отличие состоит в том, что вместо пробной функции $\varphi(t) \equiv \psi(t) \cdot \exp(-\tau(t-T+\tau))$ используем $\exp(-T^{-1}t)$.

Итак, пусть зафиксировано $T \leq T_0$. Введем обозначения:

$$I(s) \equiv I_T(s, T), \quad E(s) \equiv E_T(s, T), \quad \Psi_h(s) \equiv \Psi_{T,h}(s, T),$$

$$\Phi_h(s, \delta) \equiv \Phi_{T,h}(s, \delta, T, 0) = \int_0^T \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} \eta(|x - x_0|) dx \right)^h dt, \quad h > 0.$$

Следующие утверждения являются аналогами лемм 2–4. Их доказательство с очевидными изменениями повторяет доказательство соответствующих утверждений из §3.

ЛЕММА 6. Для произвольного энергетического решения $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) имеет место соотношение

$$\Phi_{h_2}(s, \delta) \leq c \Phi_{h_1}(s, \delta) \cdot Z(s + \delta, \delta)^{h_2 - h_1} \quad \forall h_2 > h_1 > 0.$$

ЛЕММА 7. Пусть $0 < \lambda < q < p$. Тогда для любого решения задачи (1.1), (1.2) справедливы следующие априорные оценки:

$$I(s - \delta) \leq c_1 Z(s, \delta)^{1+\mu} \cdot r(s - \delta, T)^{1-\theta} + c_2 Z(s, \delta)^{1+\frac{\mu}{1-\theta}} \cdot r(s - \delta, T)(s - \delta)^{-\frac{n(p-q)}{q+1}}, \quad 0 < \delta < s, \quad (4.2)$$

$$E(s - \delta) \leq c_3 Z(s, \delta)^{1+\nu} \cdot r(s - \delta, T), \quad 0 < \delta < s, \quad (4.3)$$

где $\theta, \nu, \mu, \xi, r(s, \tau)$ из леммы 3.

ЛЕММА 8. В случае (2.3*) справедливы следующие априорные оценки произвольного решения $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2):

$$I(s - \delta) \leq c_1 Z(s, \delta)^{1+\mu} \cdot r(s - \delta, T)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}} \quad \forall \delta: 0 < \delta < s, \quad (4.4)$$

$$E(s - \delta) \leq c_3 Z(s, \delta)^{1+\nu} \cdot r(s - \delta, T) \quad \forall \delta: 0 < \delta < s. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала рассмотрим случай (2.3). Из соотношения (4.2) при $s \rightarrow \infty, \delta = \text{const}$ вытекает априорная оценка

$$I(\infty) < c_1 f(\infty)^{1+\mu}, \quad (4.6)$$

где $c_1 < \infty$ — постоянная из (4.2) (эта постоянная зависит лишь от известных параметров уравнения (1.1) и не зависит, в частности, от $u_0(x), T$). Зафиксируем теперь постоянную $N \geq c_1$ (конкретный выбор этой постоянной проведем в дальнейшем). В силу непрерывности функций $I(s)$ и $f(s)$ из (4.6) следует существование $\tilde{s} = \tilde{s}(N) < \infty$ такого, что

$$I(s) \leq N f(s)^{1+\mu} \quad \forall s \geq \tilde{s} > 1, \quad \forall T < T_0. \quad (4.7)$$

Наша цель сейчас – установить оценку типа (4.7) для всех $s \geq s'$, где s' из условия (2.5). Из условия (2.5) вытекает также следующая оценка начальной функции $u_0(x)$:

$$\begin{aligned} f_0(s) \leq f(s) \leq S_2^{-\frac{m(p+1)}{\mu}} s^{\frac{m(p+1)}{\mu}} \quad \forall s > s', \\ \frac{m(p+1)}{\mu} \equiv n + \frac{m(p+1)(q+1)}{p-\lambda}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Конкретизируем теперь выбор постоянной S_2 из условия (2.5), а именно, предполагаем, что имеет место

$$S_2 \geq 2N^{\frac{\mu}{m(p+1)(\mu+1)}}. \quad (4.9)$$

Теперь в силу (4.7), (4.8) и (4.9) имеем

$$\delta_1 \equiv I(s_1)^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)}} \leq 2^{-1} \cdot s_1, \quad s_1 = \max(s'; \tilde{s}). \quad (4.10)$$

Подставив теперь в соотношение (4.2) $\delta = \delta_1$, $s = s_1$, после стандартных преобразований получим

$$I(s_1 - \delta_1) \leq \sigma(s_1 - \delta_1, T, I(s_1)) \cdot I(s_1) + M(s_1 - \delta_1, T, I(s_1), f(s_1)) \cdot f(s_1)^{1+\mu}, \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} 0 < \sigma \equiv \sigma(s, T, U) &= \frac{r_4(s, T, U)}{1 + r_4(s, T, U)} < 1, \quad M(s, T, U, F) = \frac{r_4(s, T, F^{1+\mu})}{1 + r_4(s, T, U)}, \\ r_4(s, T, U) &\equiv c_1(1 + \mu)r(s, T)^{1-\theta} + c_2 \left(1 + \frac{\mu}{1-\theta}\right) r(s, T) \cdot s^{\frac{-n(p-q)}{q+1}} \cdot U^{\frac{\mu\theta}{(1-\theta)(1+\mu)}}. \end{aligned}$$

Используя теперь неравенства (4.10), (4.7), (4.8), (4.9), получаем в результате простых вычислений:

$$\begin{aligned} (s_1 - \delta_1)^{-\frac{n(p-q)}{q+1}} f(s_1)^{\frac{\mu\theta}{1-\theta}} &\leq N^{-\frac{\mu\theta}{(1+\mu)(1-\theta)}}, \\ (s_1 - \delta_1)^{-\frac{n(p-q)}{q+1}} I(s_1)^{\frac{\mu\theta}{(1+\mu)(1-\theta)}} &\leq 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} r_4(s_1 - \delta_1, T, I(s_1)) &\leq r_{4,0} \equiv c_1(1 + \mu)(1 + 2^{n\nu})^{1-\theta} \\ &\quad + c_2 \left(1 + \frac{\mu}{1-\theta}\right) (1 + 2^{n\nu}) \quad \forall T: (s_1, T) \in \Pi, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} r_4(s_1 - \delta_1, T, f(s_1)^{1+\mu}) &\leq r'_{4,0} \equiv r_{4,0} - c_2 \left(1 + \frac{\mu}{1-\theta}\right) (1 + 2^{n\nu}) \\ &\quad \times \left(1 - N^{-\frac{\mu\theta}{(1+\mu)(1-\theta)}}\right) \quad \forall T: (s_1, T) \in \Pi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Предполагая заранее, что $N \geq 1$, выводим из соотношения (4.11) в силу оценок (4.12), (4.13):

$$I(s_1 - \delta_1) \leq \sigma_0 I(s_1) + r_{4,0} f(s_1)^{1+\mu} \quad \forall T: (s_1, T) \in \Pi, \quad \sigma_0 = \frac{r_{4,0}}{1 + r_{4,0}} < 1. \quad (4.14)$$

Отсюда в силу (4.7) следует, что

$$I(s_1 - \delta_1) \leq (\sigma_0 N + r_{4,0}) f(s_1)^{1+\mu}. \quad (4.15)$$

Поэтому в силу монотонности функции $I(s)$, определения (4.10) сдвига δ_1 , неравенства (4.7) при $s = s_1$, используя также условие регулярной монотонности (2.5), получаем

$$I(s_2) \leq N \left(\sigma_0 + \frac{r_{4,0}}{N} \right) S_1^{1+\mu} f(s_2)^{1+\mu}, \quad (4.16)$$

где $s_2 = s_1 - 2^{-1} S_2 f(s_1)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}$. Предположим теперь, что выполнены следующие ограничения на параметры N, S_1 :

$$\begin{aligned} 1 < S_1 &\leq \left(\frac{2}{1 + \sigma_0} \right)^{\frac{1}{\mu+1}}, \\ N &\geq \frac{2r_{4,0}}{1 - \sigma_0}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Тогда из соотношения (4.16) следует, что

$$I(s_2) \leq N f(s_2)^{1+\mu}. \quad (4.18)$$

Итак, мы начали с неравенства (4.7) при $s = s_1$ и доказали его справедливость при $s = s_2$. Прodelывая описанный цикл рассуждений j раз, получаем

$$\begin{aligned} I(s_i) &\leq N f(s_i)^{1+\mu} \quad \forall T: (s_i, T) \in \Pi, \\ s_{i+1} &= s_i - 2^{-1} S_2 f(s_i)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, j. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Число j можно взять таким, что

$$s_i \geq s' \quad \forall i \leq j, \quad s_{j+1} < s'.$$

Используя теперь дополнительно условие (2.5), получаем из последовательности неравенств (4.19) оценку

$$I(s) \leq N S_1^{1+\mu} f(s)^{1+\mu} \quad \forall s \geq s', \quad \forall T: (s, T) \in \Pi, \quad (4.20)$$

где S_1 удовлетворяет (4.17), а

$$N \geq \max \left(c_1; 1; \frac{2r_{4,0}}{1 - \sigma_0} \right) \equiv N_0. \quad (4.21)$$

Теперь оценим $E(s)$. Полагая в соотношении (4.3) $s = s_i, \delta = 2^{-1} S_2 f(s_i)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}$, получаем, учитывая (4.19) и (4.9):

$$E(s_{i+1}) \leq c_3 (1 + 2^{n\nu}) (1 + N^{\frac{1}{1+\mu}})^{1+\nu} \cdot f(s_i)^{1+\nu}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Используя дополнительно условие (2.5), выводим из последнего соотношения:

$$E(s) \leq c_3(1 + 2^{n\nu})(1 + N^{\frac{1}{1+\mu}})^{1+\nu} S_1^{1+\nu} f(s)^{1+\nu} \quad \forall s \geq s', \quad \forall T: (s, T) \in \Pi. \quad (4.22)$$

Объединяя оценки (4.20), (4.22), окончательно получаем

$$H(s) = E(s)^{1+\mu} + I(s)^{1+\nu} \leq N_1 f(s)^{(1+\nu)(1+\mu)} \quad \forall s \geq s', \quad \forall T: (s, T) \in \Pi, \quad (4.23)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= S_1^{(1+\mu)(1+\nu)} [N^{1+\nu} + c_3^{1+\mu} (1 + 2^{n\nu})^{1+\mu} (1 + N^{\frac{1}{1+\mu}})^{(1+\mu)(1+\nu)}] \\ &\equiv S_1^{(1+\nu)(1+\mu)} C_2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

В случае (2.3*) начинаем с соотношений (4.4), (4.5) вместо (4.2), (4.3), а все дальнейшие построения и рассуждения те же, что и в случае (2.3). В результате получаем снова оценки (4.20), (4.22), (4.23) и ограничения (4.9), (4.17) на параметры, определяющие условие регулярной монотонности (2.5). Есть лишь одно отличие по сравнению с случаем (2.3). Постоянная $r_{4,0}$ имеет теперь другое значение, а именно

$$r_{4,0} = c_1(1 + \mu)(1 + 2^{n\nu})^{\frac{p-q}{q-\lambda}}.$$

Теперь перейдем к последнему этапу доказательства теоремы 2. В силу полученной оценки (4.23) из утверждения б) теоремы 1 вытекает, что если

$$N_1 f(s')^{(1+\nu)(1+\mu)} \leq C_1 T^{\frac{(1+\nu)(1+\mu)}{\nu}}, \quad T < C_1^{-\frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}},$$

где C_1 — постоянная из (3.26), то существуют $\delta > 0$, $\tau: 0 < \tau \leq T$, такие, что $u(\tau, x) = 0 \quad \forall x: |x - x_0| < \delta$.

Отсюда непосредственно следует справедливость утверждения теоремы 2 с

$$K = C_2^{\frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}} \cdot C_1^{-\frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}}, \quad f^{(0)} = C_2^{-\frac{1}{(1+\nu)(1+\mu)}},$$

где C_2 — постоянная из (4.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Зафиксируем произвольно числа $\varepsilon > 0$, $S_1 > 1$, $0 < S_2 < \infty$. Введем функцию

$$f_1(s) = \varepsilon \left(\frac{s}{s_0} \right)^n \quad \forall s \geq s_0, \quad s_0 > 1,$$

где постоянная $s_0 = s_0(\varepsilon, S_1, S_2) < \infty$ определяется условием

$$f_1(s) \leq S_1 f_1(s - S_2 f_1(s)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}) \quad \forall s > s_0, \quad \mu \text{ из (2.5)}. \quad (4.25)$$

Благодаря очевидному неравенству $\frac{n\mu}{m(p+1)} < 1$ легко проверить, что s_0 может быть выбрано как $s_0 = \max(1; s_1)$, где s_1 — решение уравнения

$$S_1^{\frac{1}{n}} (1 - S_2 \cdot \varepsilon^{\frac{\mu}{m(p+1)}} \cdot s_1^{-1}) = 1.$$

В силу условия (2.6) можно найти число $r = r(\varepsilon, s_0) < \infty$ такое, что

$$f_0(y, s_0 \sqrt{n}) \equiv \int_{|x-y| \leq \sqrt{n} \cdot s_0} |u_0(x)|^{q+1} dx \leq \varepsilon \quad \forall y: |y| > r. \quad (4.26)$$

Теперь найдем число

$$M = f_0(0, r) \equiv M(\varepsilon, s_0) < \infty,$$

и определим такое число $R = R(\varepsilon, s_0)$, что

$$f_1(R) \equiv \varepsilon \left(\frac{R}{s_0} \right)^n \geq M \equiv f_0(0, r). \quad (4.27)$$

Легко проверить, что функция

$$f(y, s) \equiv f_1(s) \quad \forall s > s_0, \quad \forall y: |y| \geq R + r,$$

является требуемой мажорантой функции $f_0(y, s)$ при всех $y: |y| \geq R + r$. В силу (4.25) эта мажоранта удовлетворяет условию (2.5) с указанными параметрами $S_1 > 1, S_2 > 0$ и

$$f(y, s_0) = \varepsilon > 0 \quad \forall y: |y| \geq R + r,$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано как угодно малым. Поэтому в силу теоремы 2 каждое энергетическое решение $u^{(j)}(t, x)$, $j = 1, 2, \dots$, рассматриваемой задачи обладает следующим свойством:

$$u^{(j)}(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \{t \leq K\varepsilon^\nu, |x| \geq R + r\}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (4.28)$$

где $R = R(\varepsilon) < \infty$, $r = r(\varepsilon) < \infty$ – постоянные из (4.26), (4.27), $K < \infty$ – постоянная из теоремы 2. Так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно малым, то из (4.28) вытекает справедливость теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $u_0^{(j)}(x) = u_0(x) \cdot \eta_j(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \dots$, где $\{\eta_j(x)\}$ – срезающие функции из замечания 5. Очевидно, что

$$f_0^{(j)}(y, s) \equiv \int_{|x-y| < s} |u_0^{(j)}(x)|^{q+1} dx \leq f_0(y, s) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad s > 0.$$

Поэтому в силу теоремы 3 задача (1.1), (1.2) с начальными функциями $u_0^{(j)}(x)$, $j = 1, 2, \dots$, обладает М.К.-свойством равномерно по $j \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 4 существует подпоследовательность соответствующих энергетических решений $u^{(j)}(t, x)$, сходящаяся в пространстве $L_{p+1, \text{loc}}((0, T_0) \times \mathbb{R}^n)$ к локально энергетическому решению $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией $u_0(x)$. Легко проверить, что из отмеченной равномерности М.К.-свойства и $L_{p+1, \text{loc}}((0, T_0) \times \mathbb{R}^n)$ -сходимости $u^{(j)}(t, x)$ вытекает наличие М.К.-свойства и у решения $u(t, x)$. Теорема 5 доказана.

§5. Приложение

ЛЕММА 9. Пусть некоторая непрерывная неотрицательная функция $H(s, \tau)$, монотонно неубывающая по отношению к обоим своим аргументам: $s \in \mathbb{R}_+^1$, $\tau \in [0, T]$, $T < \infty$, удовлетворяет функциональному соотношению

$$H(s - H(s, \tau)^\alpha, \tau - H(s, \tau)^\beta) \leq \zeta(s - H(s, \tau)^\alpha, \tau, H(s, \tau)) \cdot H(s, \tau) \quad (5.1)$$

$$\forall (s, \tau) \in \{H(s, \tau)^\alpha < s, H(s, \tau)^\beta < \tau\}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

где $\zeta(u, \tau, v)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < \zeta(u, \tau, v) < 1 \quad \forall (u, \tau, v) \in \Gamma \equiv (0, \infty) \times [0, T] \times [0, \infty). \quad (5.2)$$

Предположим, что для некоторых чисел $0 < s_0 < s_1 < \infty$, $0 < H_1 < \infty$ выполняется соотношение

$$H_1 \leq \min((1 - \zeta_0^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(s_1 - s_0)^{\frac{1}{\alpha}}; (1 - \zeta_0^\beta)^{\frac{1}{\beta}}T^{\frac{1}{\beta}}), \quad (5.3)$$

где

$$\zeta_0 = \zeta_0(s_0, s_1, T, H_1)$$

$$\equiv \max\{\zeta(u, \tau, v) : s_0 \leq u \leq s_1, 0 \leq \tau \leq T, 0 \leq v \leq H_1\}. \quad (5.4)$$

Тогда в предположении, что

$$H(s_1, T) \leq H_1, \quad (5.5)$$

имеет место следующее свойство:

$$H(s, \tau) = 0 \quad \forall (s, \tau) \in \{s < (1 - \zeta_0^\alpha)^{-1}H(s_1, T)^\alpha, \tau \leq T - (1 - \zeta_0^\beta)^{-1}H(s_1, T)^\beta\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить последовательность $\{s_i, \tau_i\}$ при помощи рекуррентного соотношения

$$s_{j+1} = s_j - H(s_j, \tau_j)^\alpha, \quad \tau_{j+1} = \tau_j - H(s_j, \tau_j)^\beta, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\tau_1 = T$, s_1 из (5.3). Докажем следующее неравенство:

$$s_j \geq s_0, \tau_j > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.6)$$

Для $j = 2$ в силу условия (5.5) и определения (5.3) имеем

$$s_2 = s_1 - H(s_1, \tau_1)^\alpha \geq s_1 - (s_1 - s_0)(1 - \zeta_0^\alpha) > s_0,$$

$$\tau_2 = T - H(s_1, T)^\beta \geq T - T(1 - \zeta_0^\beta) > 0.$$

Предположим, что неравенство (5.6) уже доказано для всех $j \leq i - 1$. Покажем тогда его справедливость при $j = i$. В силу соотношения (5.1), определения (5.4) и сделанного рекуррентного предположения имеем

$$H(s_{k+1}, \tau_{k+1}) \equiv H(s_k - H(s_k, \tau_k)^\alpha, \tau_k - H(s_k, \tau_k)^\beta) \leq \zeta_0 H(s_k, \tau_k) \quad \forall k \leq i - 2. \quad (5.7)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 s_i &\equiv s_{i-1} - H(s_{i-1}, \tau_{i-1})^\alpha \\
 &= s_1 - H(s_1, \tau_1)^\alpha - H(s_2, \tau_2)^\alpha - \dots - H(s_{i-1}, \tau_{i-1})^\alpha \\
 &\geq s_1 - H(s_1, \tau_1)(1 + \zeta_0^\alpha + \zeta_0^{2\alpha} + \dots + \zeta_0^{\alpha(i-2)}) > s_1 - \frac{H(s_1, \tau_1)}{1 - \zeta_0^\alpha} \\
 &\geq s_1 - (s_1 - s_0)(1 - \zeta_0^\alpha) \frac{1}{1 - \zeta_0^\alpha} = s_0.
 \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
 \tau_i &= \tau_{i-1} - H(s_{i-1}, \tau_{i-1})^\beta = T - \sum_{k=1}^{i-1} H(s_k, \tau_k)^\beta \\
 &> T - H(s_1, T)^\beta \sum_{k=1}^{i-1} \zeta_0^{\beta(k-1)} > T - \frac{H(s_1, T)^\beta}{1 - \zeta_0^\beta} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, неравенства (5.6) доказаны. Теперь из соотношения (5.1) следует, что

$$H(s_{j+1}, \tau_{j+1}) \leq \zeta_0 H(s_j, \tau_j) \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

и значит,

$$H(s_j, \tau_j) \leq \zeta_0^{j-1} H(s_1, \tau_1) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда при $j \rightarrow \infty$ непосредственно вытекает справедливость леммы 9.

Список литературы

1. Калашиников А. С. Некоторые задачи качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. 1987. Т. 42. № 2. С. 135–176.
2. Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I. The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). 1995. V. 4. № 1. P. 5–30.
3. Bernis F. Finite speed of propagations and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1986. V. 104. P. 1–19.
4. Evans L. C., Knerr B. F. Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities // Illinois J. Math. 1979. V. 23. № 1. P. 153–166.
5. Brezis H., Friedman A. Estimates of the support of solutions of parabolic variational inequalities // Illinois J. Math. 1976. V. 20. № 1. P. 82–97.
6. Калашиников А. С. Об условиях мгновенной компактификации носителей решений полулинейных параболических уравнений и систем // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 1. С. 74–80.
7. Kersner R., Nicolosi F. The nonlinear heat equations with absorption: Effect of variable coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 170. № 2. P. 551–566.
8. Калашиников А. С. О поведении вблизи начальной гиперплоскости решений задачи Коши для параболических систем с нелинейной диссипацией // Труды сем. им. И. Г. Петровского. Т. 16. М.: Изд-во МГУ, 1992. С. 106–117.
9. Borelli M., Ughi M. The fast diffusion equation with strong absorption: The instantaneous shrinking phenomenon // Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste. 1994. V. 26. № 1–2. P. 109–140.

10. Абдуллаев У. Г. О точных локальных оценках носителя решений в задачах для нелинейных параболических уравнений // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 8. С. 3–24.
11. Калашиников А. С. О квазилинейных вырождающихся параболических уравнениях с сингулярными младшими членами и растущими начальными данными // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 6. С. 999–1009.
12. Kersner R., Shishkov A. Instantaneous shrinking of the support of energy solutions // J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 198. № 3. P. 729–750.
13. Антонцев С. Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 6. С. 1289–1293.
14. Bandle C., Stakgold I. The formation of dead core in parabolic reaction-diffusion problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 286. P. 275–293.
15. Diaz J. I., Hernandez J. Qualitative properties of free boundaries for some nonlinear degenerate parabolic equations // Nonlinear parabolic equations: qualitative properties of solutions. Proc. Conf., Rome/Italy, 1985. Pitman Res. Notes Math. Ser. 149, 1987. P. 85–93.
16. Shishkov A. E. Dead core and instantaneous shrinking of support of energy solutions of the quasilinear parabolic equations of arbitrary order // Preprint of IAMM of NAS of Ukraine. № 97.03. June 1997.
17. Benilan Ph., Crandall M. G., Pierre M. Solutions of the porous medium equation in $\mathbb{R}^N$ under optimal conditions on initial values // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33. P. 51–87.
18. Bernis F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. 1988. V. 279. № 3. P. 373–394.
19. Di Benedetto E., Herrero M. A. On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 314. № 1. P. 187–224.
20. Шишков А. Е. Эволюция носителя решения с неограниченной энергией квазилинейного вырождающегося параболического уравнения произвольного порядка // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 12. С. 151–172.

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины

Поступила в редакцию
11.12.1998