Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа.
Аномальные точки, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 1, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:11:44

УДК 517.9

А. В. Арутюнов

Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки

Изучается гладкое нелинейное отображение в окрестности анормальной (вырожденной) точки. Получены теоремы об обратной и неявной функции в анормальной точке. Доказательство основано на изучении строящегося семейства экстремальных задач с ограничениями, к которым применяются необходимые условия экстремума второго порядка, содержательные также и в анормальном случае. Если рассматриваемая точка нормальна, то полученные теоремы превращаются в классические.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Введение

Пусть заданы векторное пространство X , банахово пространство Y и гладкое отображение $F: X \times Y \rightarrow Z$, где $Z = E^k$ — k -мерное арифметическое пространство.¹ Пусть также заданы точки $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$, которые удовлетворяют условию $F(x_0, y_0) = z_0$. Для произвольных (y, z) , лежащих в окрестности точки (y_0, z_0) , рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = z \quad (1)$$

относительно неизвестного x . Если точка (x_0, y_0) нормальна, т.е.

$$\operatorname{Im} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = Z \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)X = Z, \quad (2)$$

то по классической теореме о неявной функции (см., например, [1], [2]) в окрестности точки (y_0, z_0) определено гладкое отображение $\varphi = \varphi(y, z)$, дающее решение уравнения (1), т.е.

$$F(\varphi(y, z), y) \equiv z, \quad \varphi(y_0, z_0) = x_0.$$

Если же в дополнение к (2) предположить, что оператор $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ обратим, то в некоторой окрестности x_0 это решение $x = \varphi(y, z)$ является единственным.

В предположении нормальности точки (x_0, y_0) приведенная классическая теорема о неявной функции обобщалась на случаи, когда пространство Y не имеет линейной структуры и является просто топологическим, пространство Z бесконечномерно, отображение F не является непрерывно дифференцируемым в окрестности и т. д. (по этому поводу см., например, [2], [3]).

¹Топология в X и связанное с ней понятие гладкости определяются в следующем параграфе, а пока во введении для определенности будем считать пространство X банаховым, а гладкость — обычной двукратной непрерывной дифференцируемостью.

Нас, однако, будет интересовать иное направление развития классической теоремы о неявной функции. А именно: как исследовать уравнение (1) в случае, когда точка (x_0, y_0) аномальна, т.е. в ней условие (2) нарушается?

Хорошо известно, что для аномальных точек утверждение классической теоремы о неявной функции не выполняется, так как если даже решение φ уравнения (1) и существует, то оно, очевидно, не может быть дифференцируемым по z в аномальной точке. Но главное это то, что в окрестности аномальной точки решение уравнения (1) может существовать не для всех y, z . Примером сказанному является скалярное уравнение относительно неизвестного $x = (x_1, x_2)$

$$x_1^2 + \sigma x_2^2 = z,$$

рассматриваемое в окрестности нуля ($\sigma = \pm 1$ – параметр). Очевидно, что при $\sigma = 1$ это уравнение имеет решение лишь для $z \geq 0$, при $\sigma = -1$ для любого z решение будет неединственным, причем каждое из этих решений как функция от z недифференцируемо по z в нуле (и даже не является липшицевым ни в какой окрестности нуля).

Покажем на примере, как проблема исследования уравнения (1) в окрестности аномальной точки возникает естественным образом. Пусть $Q: X \rightarrow E^k$ – заданное квадратичное отображение. Последнее означает, что $Q(x) \equiv Q[x, x]$, где $Q: X \times X \rightarrow E^k$ – билинейное симметричное отображение, а в квадратные скобки заключаются аргументы билинейного отображения. Естественным образом возникает следующий вопрос: когда квадратичное отображение Q будет сюръективным, т.е. $Q(X) = E^k$, или, более того, если X нормировано, то когда существует такая константа const , что

$$\forall z \in E^k \exists x \in X: Q(x) = z, \quad \|x\| \leq \text{const} \cdot \sqrt{\|z\|}?$$

Изучение этой задачи приводит к исследованию уравнения $Q(x) = z$ в окрестности нуля, являющегося аномальной точкой для отображения Q .

В настоящей статье получена теорема о неявной функции, которая справедлива в аномальных точках при достаточно общих предположениях и превращается в классическую теорему о неявной функции в нормальных точках. Приведено ее обобщение на случай, когда часть уравнений в (1) заменена на неравенства.

Отметим один принципиально важный момент (он отражен в названии статьи). Приведенное в работе доказательство теоремы о неявной функции основано на применении необходимых условий экстремума в форме правила множителей Лагранжа к задаче, естественным образом конструируемой по заданному отображению F . При этом если точка (x_0, y_0) нормальна, то достаточно обойтись классическим правилом множителей Лагранжа, дающим необходимые условия экстремума первого порядка [2]. Если же указанная точка аномальна, то следует воспользоваться обобщающими классические необходимыми условиями экстремума первого и второго порядка в форме Лагранжа, полученными в [4], которые остаются содержательными и в аномальных точках. При этом заметим, что вывод всех указанных необходимых условий экстремума в форме Лагранжа проведен в [4] с помощью метода возмущений без какого-либо использования теорем об обратной или неявной функции. Таким образом, в работе предложена схема, противоположная стандартной, по которой правило множителей Лагранжа (как и необходимые

условия второго порядка) выводится из теоремы о неявной функции или родственных ей утверждений типа теоремы Люстерника о касательном конусе [2], [4].

Отмечу, что, как мне сообщил в личной беседе В.М. Тихомиров, а я ему благодарен за плодотворные обсуждения, возможность вывода теоремы об обратной функции из правила множителей Лагранжа [2] в нормальной точке ему ранее высказывал А. Д. Иоффе.

§ 2. Формулировка основного результата

Напомним, что X – векторное пространство, Y – банахово пространство и $Z = E^k$. Как известно [5; с. 23], в произвольном конечномерном векторном пространстве существует единственная отделимая векторная топология (т.е. топология, превращающая его в отделимое векторное топологическое пространство), и эта топология порождена скалярным произведением. Всюду в дальнейшем, имея дело с конечномерными векторными пространствами, мы будем считать их наделенными этой (единственной отделимой векторной) топологией, соответствующим скалярным произведением и порожденной им нормой.

В векторном пространстве X введем так называемую конечную топологию. В ней открытыми считаются те и только те множества, пересечение которых с любым конечномерным подпространством M открыто в (единственной отделимой векторной) топологии M . Конечную топологию будем обозначать через τ . Если пространство X бесконечномерно, то оно, будучи наделенным конечной топологией τ , вообще говоря, не является векторным топологическим пространством, так как в нем сложение, как правило, разрывно. С другой стороны, конечная топология сильнее всех топологий, превращающих X в векторное топологическое пространство. При этом гладкость отображения относительно конечной топологии означает гладкость его сужения на произвольное конечномерное подпространство, что делает конечную топологию весьма удобной, так как гладкость относительно нее – это наиболее слабое из всех естественных предположений гладкости.

Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ – заданные точки и

$$z_0 = F(x_0, y_0).$$

Будем предполагать, что отображение F дважды непрерывно дифференцируемо относительно конечной топологии в окрестности точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Последнее означает, что для произвольного конечномерного линейного подпространства $M \subseteq X$, содержащего x_0 , сужение F на $M \times Y$ дважды непрерывно дифференцируемо в некоторой (зависящей от M) окрестности (x_0, y_0) . Поэтому существуют линейный оператор $A: X \rightarrow Z$, симметричное билинейное отображение $Q: X \times X \rightarrow Z$, а также отображение $\alpha: X \times Y \rightarrow Z$ такие, что

$$F(x, y_0) = F(x_0, y_0) + A(x - x_0) + \frac{1}{2}Q[x - x_0, x - x_0] + \alpha(x - x_0, y_0) \quad \forall x \in X$$

и для произвольного конечномерного подпространства M имеет место

$$\frac{\|\alpha(x - x_0, y_0)\|_M}{\|x - x_0\|_M^2} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0, \quad x \in M,$$

где $\|\cdot\|_M$ – норма в M .

Опишем построение указанных A и Q . Возьмем произвольное содержащее точку x_0 конечномерное подпространство $M \subseteq X$ и обозначим через F_M сужение F на M . Через Q_M обозначим заданное на $M \times M$ билинейное отображение, определяемое второй производной по переменной x отображения F_M в точке (x_0, y_0) . Теперь если M_1 и M_2 – два конечномерных подпространства и $x_0 \in M_1 \subseteq M_2$, то Q_{M_1} является сужением Q_{M_2} на $M_1 \times M_1$. Последнее вытекает из того, что в окрестности точки x_0 отображение F_{M_1} является сужением F_{M_2} . Таким образом, для произвольных $x_1, x_2 \in X$ значение $Q_M[x_1, x_2]$ не зависит от того конечномерного подпространства M , которое содержит векторы x_1, x_2 . Учитывая сказанное, для произвольных $x_1, x_2 \in X$ положим $Q[x_1, x_2] = Q_M[x_1, x_2]$, где M – произвольное конечномерное подпространство, содержащее векторы x_i . Аналогично определяется линейный оператор A . Очевидно, что построенные A, Q являются искомыми.

Отображения A и Q обозначаются через $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ соответственно и называются первой и второй частными производными отображения F по переменной x в точке (x_0, y_0) . Аналогичные обозначения будут использоваться и для других частных производных отображения F .

Обозначим через $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ конус, состоящий из таких $z \in Z'$, $z \neq 0$, что $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)^* z = 0$ и в X существует подпространство $\Pi = \Pi(z)$:

$$\Pi \subseteq \text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \text{codim } \Pi \leq k;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle z, F(x_0, y_0) \rangle [\xi, \xi] \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi.$$

Здесь Z' – пространство, сопряженное к Z , которое естественно будем отождествлять с самим Z ; угловые скобки обозначают применение линейного функционала и скалярное произведение, а codim – коразмерность подпространства.

Сразу же отметим, что конус $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ может оказаться пустым. Он, например, заведомо пуст, если точка (x_0, y_0) нормальна, так как из (2) вытекает, что $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)^* z \neq 0 \quad \forall z \neq 0$. Кроме того, после присоединения к этому конусу нуля он становится замкнутым, но вовсе не обязан стать выпуклым. Наконец, непосредственно проверяется, что конус $\mathcal{F}_2(x, y)$ (точнее, его пересечение с единичной сферой) полунепрерывно сверху зависит от (x, y) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение F называется *2-нормальным* по переменной x в точке (x_0, y_0) , если конус $\text{con } \mathcal{F}_2(x_0, y_0)^2$ является острым, т.е. не содержит ненулевых подпространств (случай $\mathcal{F}_2(x_0, y_0) = \emptyset$ не исключается, так как пустой конус является острым по определению).

Положим

$$Z_1 = \text{Im } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0); \quad Z_2 = \left(\text{Im } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^\perp.$$

Через $P_1: Z \rightarrow Z_1$, $P_2: Z \rightarrow Z_2$ обозначим операторы проектирования Z на подпространства Z_1 и Z_2 соответственно.

²Через con обозначается выпуклая оболочка множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что *отображение F в точке (x_0, y_0) удовлетворяет условию разрешимости*, если существуют конечномерное подпространство $\tilde{X} \subseteq X$, содержащее точку x_0 , и положительные константы $\varkappa_1, \varkappa_2$ такие, что

$$\begin{aligned} \forall y, z: \|y - y_0\| + |z - z_0| < \varkappa_1 \quad \exists x = x(y, z) \in \tilde{X}: \\ F(x(y, z), y) = z; \\ \|x(y, z) - x_0\|_{\tilde{X}} \leq \varkappa_2 (|P_1(F(x_0, y_0) - z)| + \|y - y_0\| + |P_2(F(x_0, y_0) - z)|^{1/2}). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1 (о неявной функции). *Предположим, что отображение F 2-нормально по переменной x в точке (x_0, y_0) . Тогда для того чтобы F в точке (x_0, y_0) удовлетворяло условию разрешимости, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists h \in X: \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h = 0; \quad \left\langle z, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)[h, h] \right\rangle < 0 \quad \forall z \in \mathcal{F}_2(x_0, y_0). \quad (3)$$

(Если $\mathcal{F}_2(x_0, y_0) = \emptyset$, то условие (3) считается выполненным автоматически.)

Сформулируем теперь теорему об обратной функции, естественно вытекающую из приведенной теоремы о неявной функции. Предположим теперь, что отображение F не зависит от переменной y , т.е. $F(x, y) \equiv F(x)$. Для такого отображения условие разрешимости принимает следующий вид

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что *отображение $F: X \rightarrow Z$ в точке x_0 удовлетворяет условию разрешимости*, если существуют конечномерное подпространство $\tilde{X} \subseteq X$, содержащее x_0 , и положительные константы $\varkappa_1, \varkappa_2$ такие, что

$$\begin{aligned} \forall z: |z - z_0| < \varkappa_1 \quad \exists x = x(z) \in \tilde{X}: \\ F(x(z)) = z; \\ \|x(z) - x_0\|_{\tilde{X}} \leq \varkappa_2 (|P_1(F(x_0) - z)| + |P_2(F(x_0) - z)|^{1/2}). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Отображение $F: X \rightarrow Z$ называется *2-нормальным* в точке x_0 , если конус $\text{con } \mathcal{F}_2(x_0)$ ³ является острым.

ТЕОРЕМА 2 (об обратной функции). *Предположим, что отображение F 2-нормально в точке x_0 . Тогда для того чтобы F в точке x_0 удовлетворяло условию разрешимости (в смысле определения 3), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists h \in X: \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)h = 0; \quad \left\langle z, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[h, h] \right\rangle < 0 \quad \forall z \in \mathcal{F}_2(x_0). \quad (4)$$

³Этот конус определяется теми же соотношениями, что и $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$, лишь опущена зависимость от y .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы 2 остается справедливым и в случае, когда X, Z – банаховы пространства, отображение F дважды непрерывно дифференцируемо, образ оператора $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$ замкнут и имеет конечную коразмерность, а $\text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$ имеет конечную коразмерность.

Доказательства сформулированных утверждений приведены в § 4. Основные результаты этой статьи анонсированы в [13].

§ 3. Обсуждение и вспомогательные результаты

Настоящий параграф содержит обсуждение сформулированных теорем и определений. При этом доказываются некоторые важные для дальнейшего вспомогательные утверждения.

3.1. Впервые понятие 2-нормальности отображения $F: X \rightarrow Z$ в точке было введено в [6]. Очевидно, что если точка (x_0, y_0) нормальна, то отображение F в ней 2-нормально (так как в предположении нормальности конус $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ пуст), но, естественно, не наоборот. В [4], [6] были получены критерии 2-нормальности и доказано следующее важное свойство.

Согласно [4], [6] отображение $F: X \rightarrow Z$ будем называть 2-нормальным, если оно 2-нормально в каждой точке $x \in X$. Пусть $X = \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим линейное топологическое пространство $C_s^3(E^n, E^k)$ трижды непрерывно дифференцируемых отображений $F: E^n \rightarrow E^k$, наделенное топологией Уитни [7; гл. 2, § 1]. Тогда в силу теоремы 9.2 из [4] если

$$n > 2(k - 2), \quad (n - k - 1)(n - k) > 2(k - 1), \quad (5)$$

то множество 2-нормальных отображений массивно (т.е. содержит пересечение счетного числа всюду плотных открытых множеств) и, следовательно, всюду плотно в $C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ (в [4] во втором неравенстве (5) имеется описка). Иными словами, если $n \gg k$, то 2-нормальность является условием общего положения. Введенное же определение 1 2-нормальности отображения $F(x, y)$ по переменной x является естественным обобщением понятия 2-нормальности отображения, не зависящего от второй переменной y . Наконец, условие (3) гарантирует 2-нормальность отображения F по переменной x в точке (x_0, y_0) .

3.2. На самом деле условие 2-нормальности отображения в точке является конечномерным. А именно справедлива следующая

ЛЕММА 1. Пусть отображение $F: X \rightarrow Z$ 2-нормально в точке x_0 . Тогда существует конечномерное подпространство $\tilde{X} \subseteq X$, содержащее x_0 , такое, что сужение F на $\tilde{X}$ также 2-нормально в точке x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$Z_2 = \left(\text{Im } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0) \right)^\perp, \quad r = \dim Z_2.$$

Пусть S_0 – единичная сфера в Z_2 , а $S = S_0^r$ – r -кратное произведение S_0 на себя. Положим

$$A = \left\{ \alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^r) \in E^r : \alpha^i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^r \alpha^i = 1 \right\}.$$

Напомним, что индекс скалярной квадратичной формы на подпространстве M – это минимальная из коразмерностей тех подпространств $\widetilde{M} \subseteq M$, на которых эта форма неотрицательно определена (коразмерность $\widetilde{M}$ понимается относительно M). В то же время в силу леммы 3.1 из [4] индекс квадратичной формы на M равен максимальной из размерностей подпространств $\widetilde{M} \subseteq M$, на которых она отрицательно определена. Индекс формы q на подпространстве $\text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$ обозначим через $\text{ind } q$. Положим $Q = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)$.

В силу определения конуса $\mathcal{F}_2(x_0)$ и теоремы Каратеодори о выпуклой оболочке множества в конечномерном пространстве [2] получаем, что 2-нормальность отображения F в точке x_0 равносильна тому, что для любых $(z_1, \dots, z_r) \in S$, для которых $\text{ind}(z_i Q) \leq r \ \forall i \leq r$, имеет место

$$\text{ind} \left(- \sum_{i=1}^r \alpha^i z_i Q \right) > r \quad \forall \alpha \in A. \quad (6)$$

Здесь и далее для произвольного вектора $z \in Z$ использовано обозначение

$$zQ = \sum_{i=1}^k z^i Q^i, \quad (7)$$

где z^i – координаты вектора z , а Q^i – координаты отображения Q . Ясно, что zQ – это скалярная квадратичная форма.

Возьмем произвольные $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r) \in S$, $\bar{\alpha} \in A$ и положим $\bar{z}_{r+1} = -\sum_{i=1}^r \bar{\alpha}^i \bar{z}_i$. Тогда в силу (6) существует такой индекс $i \leq r+1$, что $\text{ind}(\bar{z}_i Q) > r$. Поэтому в $\text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$ существует $(r+1)$ -мерное подпространство $M(\bar{z}, \bar{\alpha})$, зависящее от $(\bar{z}, \bar{\alpha})$, на котором форма $\bar{z}_i Q$ отрицательно определена. Следовательно, у точки $(\bar{z}, \bar{\alpha}) \in S \times A$ существует такая окрестность $O(\bar{z}, \bar{\alpha})$, что для всех $(z, \alpha) \in O(\bar{z}, \bar{\alpha})$ форма $z_i Q$ отрицательно определена на $M(\bar{z}, \bar{\alpha})$. Здесь $z_{r+1} = -\sum_{i=1}^r \alpha^i z_i$.

Покроем компакт $S \times A$ окрестностями описанного типа. Используя компактность $S \times A$, выберем из построенного открытого покрытия конечное подпокрытие, например $O_1, \dots, O_l$. Отвечающие этим окрестностям $(r+1)$ -мерные подпространства обозначим через $M_i, i = \overline{1, l}$.

Выберем, наконец, в X такое конечномерное подпространство M_0 , что

$$x_0 \in M_0; \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)(M_0) = \text{Im } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0).$$

Положим

$$\widetilde{X} = M_0 + M_1 + \dots + M_l.$$

Тогда подпространство $\tilde{X}$ будет искомым, так как оно конечномерно и в силу проведенного построения сужение F на него 2-нормально в точке x_0 . Лемма доказана.

Отметим, что доказанная лемма является естественным обобщением леммы 9.2 из [8].

3.3. Что касается условия разрешимости из определения 3, то непосредственно проверяется, что оно равносильно следующему *условию накрывания* в точке z_0 : существуют конечномерное подпространство $\tilde{X} \subseteq X$ и положительные константы $\varkappa, \varepsilon_0$ такие, что

$$\begin{aligned} \forall z: |z - z_0| < \varkappa, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \quad \exists x = x(\varepsilon, z) \in \tilde{X}: \\ F(x(\varepsilon, z)) = z_0 + \varepsilon P_1(z - z_0) + \varepsilon^2 P_2(z - z_0); \quad \|x(\varepsilon, z) - x_0\|_{\tilde{X}} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Ниже при доказательстве теоремы 2 мы еще воспользуемся эквивалентностью условий разрешимости и накрывания.

3.4. Из теоремы о неявной функции очевидно вытекает теорема об обратной функции. На самом деле, те части в сформулированных теоремах о неявной и об обратной функциях, которые относятся к достаточности, эквивалентны. Действительно, покажем, как достаточность в теореме 1 выводится из теоремы 2. Это делается следующим стандартным способом. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F(x, y) = z, \\ y = \mu \end{cases}$$

относительно неизвестных (x, y) в окрестности точки $x_0, y_0, z_0, \mu_0 = y_0$. К отображению $\varphi(x, y) = (F(x, y), y)$ в указанной точке применима теорема 2, из которой с учетом замечания 1 непосредственно следует достаточность в теореме 1.

3.5. Из приведенных теорем о неявной и об обратной функциях очевидно вытекают соответствующие классические теоремы. Действительно, если точка (x_0, y_0) нормальна, то конус $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ пуст, следовательно, условия (3) и (4) выполняются автоматически, и утверждения теорем 1 и 2 превращаются в классические, так как в предположении нормальности $P_2 = 0$, а оператор P_1 является тождественным.

Для понимания формулировки теоремы 2 полезна следующая ее трактовка. Для экстремальной задачи с ограничениями $F(x) = 0$ надо выписать в точке x_0 необходимые условия экстремума в лагранжевой форме, полагая множитель Лагранжа, отвечающий минимизируемому функционалу, равным нулю (сам функционал при этом можно брать любым). Отрицанием этих необходимых условий экстремума и являются условия (4). При этом, естественно, в формулировках теорем присутствует информация только о $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)$.

3.6. Впервые теорему о неявной функции, справедливую для аномальных точек, доказал Е. Р. Аваков [9]. Сформулируем ее применительно к рассматриваемому нами случаю. (В [9] исследовалась несколько более общая ситуация. В частности, там предполагалось, что Y — просто топологическое пространство, а Z может

быть бесконечномерным.) В [9] доказано, что если

$$\exists h \in X: \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h = 0; \quad P_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)[h, h] = 0; \quad (9)$$

$$\text{Im} \left(P_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) \left[h, \text{Ker} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \right] \right) = Z_2, \quad (10)$$

а также выполнено некоторое весьма обременительное предположение квадратичной аппроксимации (оно естественным образом выполняется лишь для отображений F , не зависящих от переменной y), то отображение F в точке (x_0, y_0) удовлетворяет условию разрешимости.

Вектор h , для которого выполняются условия (9), (10), будем называть *регулярным нулем* квадратичного отображения $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.

Сформулированная теорема Авакова применима во многих интересных случаях, в которых конус $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ не является острым и, значит, нарушены предположения теоремы 1. Однако при использовании теоремы Авакова возникает одно принципиальное затруднение. Оно заключается в отсутствии (пока) удовлетворительных критериев существования регулярного нуля у квадратичного отображения $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)$. Среди известных укажем предложение 9.4 из [9], в котором доказано, что если конус $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ пуст, то (9), (10) выполняются. Еще один такой критерий получен в §6 ниже, а в [14] установлен критерий существования регулярного нуля у квадратичного отображения специального вида.

3.7. Сформулируем необходимые условия экстремума первого и второго порядка в форме Лагранжа, на которых основано доказательство теорем 1 и 2.

Пусть наряду с введенным выше отображением $F: X \rightarrow Z = E^k$ на пространстве X заданы скалярная функция f_0 и отображение f со значениями в E^r , удовлетворяющими тем же предположениям гладкости, что и отображение F . Пусть в E^r заданы векторы e_i , $i = \overline{1, s}$. Положим $f_i(x) = \langle f(x), e_i \rangle$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

Введем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^s \lambda^i f_i(x) + \langle z, F(x) \rangle; \quad \lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^s, z), \quad \lambda^i \in E^1, \quad z \in Z'.$$

Возьмем точку x_0 и обозначим через $\Lambda = \Lambda(x_0)$ множество множителей Лагранжа λ , которые отвечают ей в силу правила множителей Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda) = 0, \quad \lambda^0 \geq 0, \quad \lambda^i \geq 0, \quad \lambda^i f_i(x_0) = 0 \quad \forall i \geq 1, \quad \lambda \neq 0.$$

Обозначим через I множество активных в точке x_0 индексов, отвечающих ограничениям типа неравенств, т.е. $I = \{i : i \geq 1, f_i(x_0) = 0\}$. Количество элементов

множества I обозначим через $\bar{s}$.⁴ Через $\bar{F}: X \rightarrow Z \times E^{\bar{s}}$ обозначим отображение, полученное из F за счет “дописывания” к нему функций $f_i, i \in I$.

Введем в рассмотрение множество, состоящее из тех множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda$, для которых существует (зависящее от λ) подпространство $\Pi \subseteq X$ такое, что

$$\begin{aligned} \text{codim } \Pi &\leq k + \min(\bar{s}, r); \quad \Pi \subseteq \text{Ker } \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}(x_0); \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] &\geq 0 \quad \forall x \in \Pi. \end{aligned}$$

Это множество множителей Лагранжа будем обозначать через $\Lambda_a = \Lambda_a(x_0)$.

Введем в рассмотрение конус

$$\mathcal{K} = \left\{ h \in X : \left\langle \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_0), h \right\rangle \leq 0 \quad \forall i \in I \cup \{0\}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)h = 0 \right\},$$

называемый *конусом критических направлений*.

ТЕОРЕМА 3 (принцип Лагранжа). *Пусть в рассматриваемой задаче точка x_0 является локальным относительно конечной топологии минимумом. Тогда множество $\Lambda_a(x_0)$ непусто и, более того,*

$$\max_{\substack{\lambda \in \Lambda_a \\ |\lambda|=1}} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{K}. \quad (11)$$

Доказательство этой теоремы приведено в [4; гл. 1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в рассматриваемой задаче минимизации ограничения типа неравенств отсутствуют (т.е. $r = 0$), то утверждение теоремы 3 можно усилить (см. [15]). А именно если точка минимума x_0 аномальна, то можно дополнительно гарантировать непустоту конуса $\tilde{\Lambda}_a$, состоящего из тех множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda$, для которых существует такое подпространство $\Pi \subseteq X$, что

$$\text{codim } \Pi \leq k - 1; \quad \Pi \subseteq \text{Ker } \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}(x_0); \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \Pi.$$

Если же, кроме того, функция f_0 и отображение F являются квадратичными и $x_0 = 0$, то в формулировке теоремы 3 можно конус Λ_a заменить меньшим конусом $\tilde{\Lambda}_a$. Справедливость этих утверждений вытекает из [15; теоремы 3 и 2].

3.8. Сформулируем и докажем критерий сюръективности квадратичного отображения (он нам потребуется ниже при доказательстве теоремы 2).

Пусть $Q: X \rightarrow E^k$ – заданное квадратичное отображение. Следуя [15], для натурального числа r через Λ_r обозначим множество таких $\lambda \in Z'$, $\lambda \neq 0$, что $\text{ind}(\lambda Q) \leq r$, где ind – индекс скалярной квадратичной формы и использовано обозначение (7). Отметим, что $\Lambda_k = \mathcal{F}_2(0) = \{\lambda : (0, \lambda) \in \Lambda_a(0)\}$ (см. п. 3.7) при $F = Q$; $f_0(x) \equiv -|x|^2$.

⁴Если I пусто, то полагаем $\bar{s} = 0$.

ЛЕММА 2. *Предположим, что*

$$\exists h \in X: \langle \lambda, Q(h) \rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}. \quad (12)$$

Тогда оператор Q является сюръективным (т.е. $Q(X) = Z$). Если же оператор Q сюръективен, а конус $\text{conv } \Lambda_{k-1}$ является острым, то имеет место (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первой части проведем от противного. Пусть выполняется (12), однако отображение Q сюръективным не является. Последнее означает, что

$$\exists z_0 \in Z: Q(x) \neq z_0 \quad \forall x \in X,$$

откуда в силу положительной однородности отображения Q

$$Q(x) \neq \tau^2 z_0 \quad \forall x \in X, \quad \forall \tau \neq 0.$$

Поэтому в квадратичной задаче минимизации

$$-\tau^2 \rightarrow \min, \quad Q(x) - \tau^2 z_0 = 0$$

точка $\tau = 0, x = 0$ является решением. Применяя в этой точке необходимые условия экстремума, содержащиеся во второй части замечания 2, легко получаем противоречие с (12), которое завершает доказательство первой части леммы.

Пусть теперь конус $\text{conv } \Lambda_{k-1}$ является острым. Предположим, что условие (12) нарушается. Тогда

$$\langle \lambda, Q(x) \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}, \quad \forall x \in X \Rightarrow Q(X) \cap \text{int } \Lambda_{k-1}^0 = \emptyset. \quad (13)$$

(Здесь $\Lambda_r^0 = \{z : \langle z, \lambda \rangle \leq 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_r\}$ — это конус, полярный к Λ_r .) Но в силу остроты конуса $\text{conv } \Lambda_{k-1}$ внутренность полярного к нему конуса непуста и содержит некоторый вектор z_0 . Но тогда в силу (13) $z_0 \notin Q(X)$ и, значит, отображение Q сюръективным не является. Лемма доказана.

Поясним суть доказанной леммы. Рассмотрим систему квадратичных уравнений, записанную в векторном виде

$$Q(x) = z, \quad (14)$$

относительно неизвестного x . Спрашивается, когда (14) будет иметь решение для произвольного $z \in Z$? Лемма 2 на этот вопрос дает такой ответ. Вначале нужно вычислить конус Λ_{k-1} или хотя бы какой-нибудь содержащий его конус $D \supseteq \Lambda_{k-1}$. Затем надо выбрать вектор $\hat{z}$ из внутренней полярного к D конуса, т.е. $\hat{z} \in \text{int } D^0$. После этого следует рассмотреть уравнение $Q(x) = \hat{z}$; если решение существует, то оно существует и у (14) для любого $z \in Z$. Таким образом, проблема существования решения уравнения (14) для произвольной правой части сводится к проверке существования решения этого же уравнения лишь для единственного специально выбранного $\hat{z} \in \text{int } D^0$.

Указанный алгоритм применим и для исследования существования решения уравнения (1) для произвольного z , близкого к z_0 , так как алгоритм, по существу, состоит в проверке условия (3).

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ЛЕММЫ 2. *Предположим, что конус $\text{con} \Lambda_{k-1}$ является острым. Тогда если квадратичное отображение сюръективно, то оно существенно сюръективно, т.е. любое близкое к нему квадратичное отображение также сюръективно.*

Справедливость этого утверждения вытекает из леммы 2 и того, что конус Λ_r полунепрерывным сверху образом зависит от квадратичного отображения, по которому он строится.

Существенно сюръективные квадратичные отображения были введены и исследованы А. А. Аграчевым в [10]. Им же в беседе с автором была сформулирована следующая проблема: всякое ли сюръективное квадратичное отображение существенно сюръективно? Приведенное следствие дает положительный ответ на этот вопрос при дополнительном предположении остроты конуса $\text{con} \Lambda_{k-1}$. В общем же случае, насколько мне известно, пока вопрос остается открытым.

3.9. Для 2-нормального в точке x_0 отображения $F: X \rightarrow Z$ из условия разрешимости в точке x_0 вытекает, что для множества $M = \{x \in X : F(x) = F(x_0)\}$ точка x_0 изолированной не является. А именно верна следующая

ЛЕММА 3. *Предположим, что имеет место (4). Тогда точка x_0 не является изолированной (относительно конечной топологии) для множества M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2. В силу леммы 1 будем, не теряя общности, предполагать, что пространство X конечномерно (иначе от X следовало бы перейти к его конечномерному подпространству $\tilde{X} + \text{Lin}\{h\}$, где подпространство $\tilde{X}$ определено в лемме 1). Поэтому для удобства будем считать, что $X = E^n$ для некоторого n .

Предположим противное, т.е. что точка x_0 является изолированной для множества M . Тогда x_0 является локальным минимумом в задаче

$$-|x|^2 \rightarrow \min, \quad F(x) - F(x_0) = 0.$$

Применяя к этой задаче необходимые условия экстремума из теоремы 3, получаем противоречие с предположением (4), что и доказывает лемму.

Если отображение F 2-нормально в точке x_0 и удовлетворяет условию разрешимости, то из теоремы 2 (необходимость) вытекает (4), откуда, в свою очередь, в силу леммы 3 получаем, что точка x_0 не является изолированной для множества M . В то же время, в [3; теорема 6.6.4 и следствие к ней] получены достаточные условия сюръективности отображения (последнее означает разрешимость, но без соответствующей оценки). Однако эти результаты носят весьма специальный характер, так как получены, в частности, в предположении изолированности в множестве M точки x_0 , а также требуют анализа поведения $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x)$ не только в исследуемой точке x_0 , но и в целой ее окрестности.

3.10. Как известно, из классической теоремы о неявной функции выводится оценка расстояния от точек из окрестности нормальной точки x_0 до множества $M = \{x : F(x) = F(x_0)\}$, а также родственная ей теорема Люстерника о касательном конусе [2]. В [9] для конечномерного пространства X доказано, что если в

анормальной точке x_0 для каждого ненулевого вектора h , удовлетворяющего (9), имеет место (10) (это условие называется условием 2-регулярности), то в окрестности x_0 справедлива оценка

$$\rho(x, M) \leq \text{const} \cdot (\|P_1(F(x_0) - F(x))\| + |P_2(F(x_0) - F(x))|^{1/2}),$$

где ρ – расстояние от точки до множества. Если же X – банахово пространство, то эта оценка остается в силе, если предположение о 2-регулярности заменить предположением о сильной 2-регулярности (см. [9; теорема 3]).

В связи со сказанным возникает естественный вопрос. Пусть точка x_0 анормальна. Можно ли тогда из сформулированной теоремы 1 о неявной функции и в ее предположениях вывести выписанную выше оценку расстояния от точек из окрестности точки x_0 до множества M (или хотя бы ее следствие типа теоремы Люстерника об описании касательного конуса к M)?

Следующий пример дает отрицательный ответ на поставленные вопросы. А именно в нем построено такое отображение F , что

$$F(0) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0) = 0; \quad \exists l: \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0)[l, l] = 0$$

и в нуле выполнены все предположения теоремы 2. Однако вектор l касательным к множеству M не является.

ПРИМЕР. Пусть

$$X = E^{11}, \quad Z = E^2, \quad x = (x_1, x_2, u, v, w) \in E^{11}, \quad u, v, w \in E^3.$$

Определим на E^{11} две квадратичные формы

$$Q_1(x) = -x_2^2 + |u|^2 + |v|^2 + |w|^2, \quad Q_2(x) = x_1 x_2 + |u|^2 - |v|^2$$

и положим

$$F_1(x) = Q_1(x) + x_1^4; \quad F_2(x) = Q_2(x).$$

Непосредственно проверяется, что если $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{F}_2(0)$, то $z_1 > 0$. Поэтому конус $\text{con} \mathcal{F}_2(0)$ является острым и $d = (-1, 0) \in \text{int } \mathcal{F}_2(0)^0$. Кроме того, $Q(h) = d$, где $Q = (Q_1, Q_2)$; $h = (0, 1, 0, \dots, 0)$ и, следовательно, предположения теоремы 2 в нуле выполнены.

Положим $l = (1, 0, \dots, 0)$ и покажем, что вектор l касательным к M не является. Действительно, предположим противное. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{x}(\varepsilon): \quad x(\varepsilon) = \varepsilon l + \overline{x}(\varepsilon) \in M; \quad |\overline{x}(\varepsilon)| = o(\varepsilon); \quad \overline{x}(\varepsilon) = (\overline{x}_1(\varepsilon), \dots, \overline{w}(\varepsilon)).$$

Из $F_1(x(\varepsilon)) \equiv 0$ имеем

$$\overline{x}_2^2(\varepsilon) \geq |\overline{u}(\varepsilon)|^2 + |\overline{v}(\varepsilon)|^2. \quad (15)$$

Из $F_2(x(\varepsilon)) \equiv 0$ при малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\varepsilon |\overline{x}_2(\varepsilon)| \leq 2(|\overline{u}(\varepsilon)|^2 + |\overline{v}(\varepsilon)|^2),$$

откуда в силу (15) $\overline{x}_2(\varepsilon) \equiv 0$, $\overline{u}(\varepsilon) \equiv 0$, $\overline{v}(\varepsilon) \equiv 0$ при малых $\varepsilon > 0$, а из $F_1(x(\varepsilon)) \equiv 0$ имеем $\overline{w}(\varepsilon) \equiv 0$, $\overline{x}_1(\varepsilon) \equiv 0$, чего не может быть. Полученное противоречие показывает, что вектор l касательным к M не является. Следовательно,

$$\exists \kappa, \varepsilon_0 > 0: \quad \rho(\varepsilon l, M) \leq \kappa |F(\varepsilon l)|^{1/2} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

так как $\rho(\varepsilon l, M) \geq \text{const} \cdot \varepsilon$ и $|F(\varepsilon l)| = \varepsilon^4$.

§ 4. Доказательство теорем 1 и 2

Достаточность. В силу рассуждений, проведенных в п. 3.4, для доказательства достаточности в теоремах 1, 2 нас вполне устроит установить достаточность в теореме 2, что мы и сделаем. Итак, будем предполагать, что отображение F действует из X в Z и от переменной y не зависит. Кроме того, в силу леммы 1 можно, не теряя общности, предполагать, что пространство X конечномерно. Поэтому для удобства будем считать, что $X = E^n$ для некоторого n .

Далее, в силу рассуждений из п. 3.3 вместо условия разрешимости (см. определение 3) мы докажем условие накрывания (8). Наконец, для удобства будем считать, что $x_0 = 0, z_0 = 0$.

По условию конус $\mathcal{F}_2(0)$ лежит в подпространстве Z_2 и его выпуклая оболочка является острым конусом. Поэтому полярный к нему конус $\mathcal{F}_2^0(0)$ имеет непустую внутренность, пересекающуюся с Z_2 . Возьмем произвольный вектор

$$d \in \text{int } \mathcal{F}_2^0(0), \quad d \in Z_2. \quad (16)$$

Для $z \in Z$ положим

$$z_1 = P_1 z, \quad z_2 = P_2 z.$$

Для фиксированных $x \in X, \delta \geq 0$ определим конус $\Psi(x; \delta)$. Он состоит из $z \in Z, z \neq 0$, для которых $|z_1| \leq \delta |z_2|$ и существует (зависящее от z) подпространство $\Pi \subseteq \text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(x)$ такое, что

$$\text{codim } \Pi \leq k; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle z_2, F(x) \rangle [\xi, \xi] + \delta |\xi|^2 \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi.$$

С помощью теоремы 4.3 из [4] несложно получаем, что конус Ψ (точнее, его пересечение с единичной сферой) полунепрерывно сверху зависит от x, δ . Кроме того, $\Psi(0, 0) = \mathcal{F}_2(0)$. Поэтому в силу (16) существует такое $\delta > 0$, что

$$\langle z_2, d \rangle \leq -\delta \quad \forall z \in \Psi(x, \delta): |z_2| = 1 \quad \forall x: |x| \leq \delta. \quad (17)$$

В силу леммы 2

$$\exists h \in \text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(0): \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0)[h, h] = d. \quad (18)$$

Возьмем положительные числа $\varkappa < \varkappa_0 \leq 1: \varkappa_0 |h| < 1; \varepsilon_0 \in (0, \delta)$, которые по ходу изложения будем уменьшать, оставляя их все время положительными.

Для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ положим

$$\varphi(\varepsilon) = F(\varkappa_0 \varepsilon h); \quad \varphi_l(\varepsilon) = P_l F(\varkappa_0 \varepsilon h), \quad l = 1, 2.$$

Сразу же отметим, что в силу (18) справедливы оценки

$$|\varphi(\varepsilon)| = o(\varepsilon); \quad |\varphi_1(\varepsilon)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^2; \quad |\varphi_2(\varepsilon)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^2 \varkappa_0^2. \quad (19)$$

Здесь и ниже const означает положительные константы, не зависящие ни от ε , ни от $\varepsilon_0, \varkappa_0, \varkappa$.

Возьмем произвольные $\tau \geq 0$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$:

$$|z_1| \leq \varkappa, \quad |z_2| \leq \varkappa, \quad \tau \in [0, 2], \quad (20)$$

и рассмотрим уравнение

$$F(x) = \varphi(\varepsilon) + \tau(-\varphi(\varepsilon) + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2), \quad x \in B(\varepsilon), \quad (21)$$

относительно неизвестного x . Здесь $B(\varepsilon) = \{x \in X : |x| = \varepsilon\}$ (число ε , по-прежнему, фиксировано).

Докажем, что числа $\varepsilon_0 > 0$, $\varkappa_0 > 0$, $\varkappa > 0$ можно выбрать настолько малыми, что уравнение (21) имеет решение $x \in B(\varepsilon)$ для любых $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, z_1, z_2, τ , удовлетворяющих (20).

По построению $\text{Im} \frac{\partial F}{\partial x}(0) = Z_1$ и, следовательно, сужение оператора $\frac{\partial F}{\partial x}(0)^*$ на Z_1 невырождено. Поэтому, уменьшая ε_0 , добьемся того, чтобы выполнялось

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x)^* P_1 z \right| \geq \text{const} \cdot |P_1 z| \quad \forall z \in Z, \quad \forall x \in X : |x| \leq \varepsilon_0. \quad (22)$$

Итак, возьмем $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Предположим, что найдутся $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{\tau}$, удовлетворяющие (20), для которых уравнение (21) не имеет решения $x \in B(\varepsilon)$.

Зафиксируем $z_1 = \bar{z}_1$, $z_2 = \bar{z}_2$ и рассмотрим множество T , состоящее из тех $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, при которых (21) имеет решение $x \in B(\varepsilon)$. Перечислим некоторые свойства множества T . Во-первых, оно непусто, так как при $\tau = 0$ (21), очевидно, имеет решение $x = \varkappa_0 \varepsilon h \in B(\varepsilon)$ (поскольку $|\varkappa_0 h| \leq 1$) и, значит, $0 \in T \Rightarrow \bar{\tau} > 0$. Во-вторых, T замкнуто, так как образ конечномерного шара $B(\varepsilon)$ при непрерывном отображении компактен. Наконец, по построению $\bar{\tau} \notin T$.

Учитывая сказанное, положим

$$\tau_\varepsilon = \max_{\tau \in T} \tau.$$

Тогда $\tau_\varepsilon < \bar{\tau}$, так как $\bar{\tau} \notin T$.

Рассмотрим задачу минимизации

$$\begin{cases} F(x) = \varphi(\varepsilon) + \tau(-\varphi(\varepsilon) + \varepsilon \bar{z}_1 + \varepsilon^2 \bar{z}_2), \\ |x|^2 - \varepsilon^2 \leq 0, \quad 0 \leq \tau \leq \bar{\tau}, \\ (-\tau) \rightarrow \min, \end{cases} \quad (23)$$

где минимум ищется по (x, τ) . Эту задачу будем называть задачей (3).

В силу проведенного построения минимум в задаче (3) равен $(-\tau_\varepsilon)$. Обозначим через x_ε значение переменной x , на котором этот минимум достигается. При этом если $\tau_\varepsilon = 0$, то возьмем $x_\varepsilon = \varkappa_0 \varepsilon h$.

Выпишем для задачи (3) необходимые условия минимума второго порядка в точке $(x_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$. Учитывая то, что $\tau_\varepsilon < \bar{\tau}$, выпишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \tau, \lambda) = -\lambda^0 \tau - \lambda^1 \tau + \langle \mu, F(x) - \varphi(\varepsilon) + \tau(\varphi(\varepsilon) - \varepsilon \bar{z}_1 - \varepsilon^2 \bar{z}_2) \rangle + \lambda^2 (|x|^2 - \varepsilon^2).$$

Здесь $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \mu)$, $\lambda^0 \geq 0$, $\lambda^1 \geq 0$, $\mu \in Z'$.

Применяя теорему 3⁵, если $\tau_\varepsilon > 0$ и точка $(x_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$ является нормальной, или первую часть замечания 2 в противном случае, получаем, что существуют множители Лагранжа $\lambda \neq 0$, для которых

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_\varepsilon, \tau_\varepsilon, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau}(x_\varepsilon, \tau_\varepsilon, \lambda) = 0, \quad (24)$$

$$\lambda^2(|x_\varepsilon|^2 - \varepsilon^2) = 0 \quad (25)$$

и существует подпространство

$$\Pi \subseteq \text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(x_\varepsilon): \quad \text{codim } \Pi \leq k, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_\varepsilon, \tau_\varepsilon, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \Pi. \quad (26)$$

Из (24) имеем

$$\lambda^0 + \lambda^1 = \langle \mu, \varphi(\varepsilon) - \varepsilon \bar{z}_1 - \varepsilon^2 \bar{z}_2 \rangle \geq 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_\varepsilon)^* \mu + 2\lambda^2 x_\varepsilon = 0. \quad (28)$$

Определим отображения

$$F_1(x) = P_1 F(x); \quad F_2(x) = P_2 F(x).$$

Тогда $F(x) \equiv F_1(x) + F_2(x)$, так как по построению оператор $P_1 + P_2$ является тождественным.

Для отображения F_1 справедливо представление

$$F_1(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(0)x + o(|x|).$$

Из этого представления и оценки $|x_\varepsilon| \leq \varepsilon$ имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_\varepsilon)x_\varepsilon = F_1(x_\varepsilon) + o(\varepsilon),$$

а в силу (19) и ограничений типа равенств из (23) $|F_1(x_\varepsilon)| \leq \text{const} \cdot (o(\varepsilon) + \varepsilon \varkappa) \Rightarrow$

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_\varepsilon)x_\varepsilon \right| \leq \text{const} \cdot (o(\varepsilon) + \varepsilon \varkappa). \quad (29)$$

Далее, по построению $\frac{\partial F_2}{\partial x}(0) = 0$. Поэтому справедливы представления

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(0)[x, x] + o(|x|^2), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(0)x + o(|x|),$$

из которых имеем

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x_\varepsilon)x_\varepsilon = 2F_2(x_\varepsilon) + o(\varepsilon^2). \quad (30)$$

⁵ При этом учитываем, что если квадратичная форма неотрицательна на подпространстве, то она неотрицательна на всем пространстве.

Учитывая, что $P_2\varphi(\varepsilon) = \varphi_2(\varepsilon)$, в силу (19) и ограничений типа равенств из (23) получаем $|F_2(x_\varepsilon)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^2 \varkappa_0^2 \Rightarrow$

$$\left| \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_\varepsilon)x_\varepsilon \right| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^2 \varkappa_0^2 + o(\varepsilon^2). \quad (31)$$

Положим $\mu_1 = P_1\mu$, $\mu_2 = P_2\mu$. Тогда $\mu = \mu_1 + \mu_2$, откуда в силу (28), учитывая, что $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_\varepsilon)^* \mu_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_\varepsilon)^* \mu_2 + 2\lambda^2 x_\varepsilon = 0. \quad (32)$$

Скалярно умножая обе части (32) на вектор x_ε , используя оценки (29), (31) и то, что в силу (25) $|x_\varepsilon| = \varepsilon$, если $\lambda^2 \neq 0$, получаем

$$|\lambda^2| \varepsilon^2 \leq \text{const} \cdot (|\mu_1|(o(\varepsilon) + \varepsilon \varkappa) + |\mu_2|(o(\varepsilon^2) + \varepsilon^2 \varkappa_0^2)). \quad (33)$$

Теперь из (32), используя (22), (33) и оценку $\left\| \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_\varepsilon) \right\| \leq \text{const} \cdot \varepsilon$, получаем

$$\text{const} \cdot |\mu_1| \leq \left| \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_\varepsilon)^* \mu_1 \right| \leq \text{const} \cdot |\mu_2| \varepsilon + 2|\lambda^2| \varepsilon \leq \text{const} \cdot (|\mu_2| \varepsilon + |\mu_1|(1(\varepsilon) + \varkappa_0)),$$

где $1(\varepsilon)$ обозначает семейства, сходящиеся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из полученных неравенств вытекает существование достаточно малых положительных ε_0 , $\varkappa \leq \varkappa_0 < 1$ таких, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеет место:

$$|\mu_1| \leq \text{const} \cdot |\mu_2| \varepsilon. \quad (34)$$

Отсюда в силу (33) также получаем

$$|\lambda^2| \leq \text{const} \cdot |\mu_2|(1(\varepsilon) + \varkappa_0). \quad (35)$$

Пусть $Z_2 = \{0\}$. Тогда $\mu_2 = 0$, откуда $\lambda = 0$ в силу (27), (34), (35). Но $\lambda \neq 0$ в силу условия нетривиальности используемого принципа Лагранжа. Полученное противоречие доказывает, что для построенных ε_0 , $\varkappa_0$ при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ экстремальная задача (3) решений не имеет. Следовательно, при $Z_2 = \{0\}$ построенные ε_0 , $\varkappa_0$, $\varkappa$ являются искомыми, т.е. уравнение (21) имеет решение $x \in B(\varepsilon)$ для любых $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и z_1, z_2, τ , удовлетворяющих (20).

Рассмотрим теперь случай $Z_2 \neq \{0\}$ и продолжим наши рассуждения. Из (27), (34), (35) и условия нетривиальности $\lambda \neq 0$ имеем $\mu_2 \neq 0$. Поэтому в силу положительной однородности соотношений принципа Лагранжа по переменной λ будем считать, что $|\mu_2| = 1$.

Из (34), (19) и (20) вытекает, что

$$|\langle \mu_1, \varphi_1(\varepsilon) + \varepsilon \bar{z}_1 \rangle| \leq o(\varepsilon^2) + \text{const} \cdot \varepsilon^2 \varkappa.$$

Кроме того, из определения функции φ_2 в силу (18) имеем

$$\varphi_2(\varepsilon) = d\varkappa_0^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Отсюда в силу (27), используя (16), (19), (20) и (34), получаем

$$\varepsilon^2 \varkappa_0^2 \langle \mu_2, d \rangle \geq o(\varepsilon^2) - \text{const} \cdot \varepsilon^2 \varkappa \Rightarrow \langle \mu, d \rangle \geq \varkappa_0^{-2} (1(\varepsilon) - \text{const} \cdot \varkappa).$$

Поэтому, согласованно уменьшив числа $\varepsilon_0, \varkappa, \varkappa_0 > 0$, добьемся того, чтобы $\varkappa_0^{-2} \varkappa$ также оказалось достаточно малым и, следовательно, для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнялось

$$\langle \mu, d \rangle \geq -\frac{1}{2} \delta, \quad (36)$$

где число $\delta > 0$ было выбрано раньше.

Обратимся к исследованию квадратичной формы $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_\varepsilon, \tau_\varepsilon, \lambda)$. В силу (34), (35) для нее справедлива оценка

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_\varepsilon, \tau_\varepsilon, \lambda) \leq \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \mu_2, F_2(x) \rangle(x_\varepsilon) + E \cdot \text{const} \cdot |1(\varepsilon) + \varkappa_0|,$$

где E — единичная $(n \times n)$ -матрица. Отсюда с помощью (26) получаем, что квадратичная форма

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \mu_2, F_2(x) \rangle(x_\varepsilon) + E \cdot \text{const} \cdot |1(\varepsilon) + \varkappa_0|$$

неотрицательно определена на построенном выше подпространстве Π :

$$\Pi \subseteq \text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(x_\varepsilon); \quad \text{codim } \Pi \leq k.$$

Поэтому, снова уменьшая числа $\varepsilon_0, \varkappa, \varkappa_0 > 0$ и не увеличивая при этом выражения $\varkappa_0^{-2} \varkappa$, добьемся того, чтобы $\mu \in \Psi(x_\varepsilon; \delta)$. Последнее в силу (36) противоречит (17). Следовательно, задача (3) не может иметь решения $x_\varepsilon, \tau_\varepsilon$, для которого $\tau_\varepsilon < 2$, и, значит, мы получили противоречие со сделанным предположением о существовании удовлетворяющих (20) $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{\tau}$, для которых (21) не имеет решения $x \in B(\varepsilon)$.

Таким образом, доказано, что числа $\varepsilon_0, \varkappa_0, \varkappa > 0$ можно выбрать так, что для любых $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и любых z_1, z_2, τ , удовлетворяющих (20), уравнение (21) имеет решение $x \in B(\varepsilon)$. Значит, оно имеет решение и при $\tau = 1$. То есть для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $z_1, z_2, |z_1| \leq \varkappa, |z_2| \leq \varkappa$, уравнение

$$F(x) = \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2$$

имеет решение $x \in B(\varepsilon)$, что, в свою очередь, означает выполнение условия накрывания в нуле. Достаточность доказана.

Необходимость также докажем лишь для теоремы 2, поскольку для теоремы 1 она доказывается аналогично. Не теряя общности, будем считать, что $X = E^n$, $x_\varepsilon = 0, z_0 = F(0) = 0$. Итак, пусть отображение F в нуле удовлетворяет условию разрешимости. Возьмем вектор d , для которого выполняется (16). В силу условия разрешимости в нуле для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует такое $x(\varepsilon) \in X$, что

$$|x(\varepsilon)| \leq \text{const} \cdot \sqrt{\varepsilon}, \quad F(x(\varepsilon)) = \varepsilon d.$$

Отсюда, разлагая F до членов второго порядка по x , имеем:

$$F(x(\varepsilon)) = \frac{\partial F}{\partial x}(0)x(\varepsilon) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0)[x(\varepsilon), x(\varepsilon)] + o(\varepsilon) = \varepsilon d. \quad (37)$$

Кроме того, в силу (16) вектор d ортогонален подпространству $\text{Im } \frac{\partial F}{\partial x}(0)$. Поэтому в силу (37) $\left| \frac{\partial F}{\partial x}(0)x(\varepsilon) \right| = o|x(\varepsilon)|$. Следовательно, по лемме Хоффмана [2] существуют такие $\tilde{x}(\varepsilon)$, зависящие от ε , что

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0)\tilde{x}(\varepsilon) = 0, \quad x(\varepsilon) = \tilde{x}(\varepsilon) + o(\sqrt{\varepsilon}).$$

Применяя теперь к обеим частям равенства (37) оператор P_2 и используя то, что $P_2 d = d$, получаем

$$\frac{1}{2} P_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0)[\tilde{x}(\varepsilon), \tilde{x}(\varepsilon)] = \varepsilon d + o(\varepsilon).$$

Отсюда, учитывая, что $d \in \text{int } \mathcal{F}_2^0(0)$ (см. (16)) и $P_2 z = z \ \forall z \in \mathcal{F}_2(0)$, получаем, что при малых $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\left\langle z, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0)[\tilde{x}(\varepsilon), \tilde{x}(\varepsilon)] \right\rangle < 0 \quad \forall z \in \mathcal{F}_2(0).$$

Поэтому при достаточно малом ε вектор $h = \tilde{x}(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (4). Теорема доказана.

Обратимся к замечанию 1. Для его обоснования достаточно в рассуждениях, проведенных при доказательстве достаточности в теореме 2, заменить ссылку на необходимые условия экстремума для задачи (3) (см. теорему 3) ссылкой на соответствующие необходимые условия экстремума для случая, когда Y – бесконечномерное банахово пространство. В свою очередь, эти необходимые условия экстремума для бесконечномерного Y непосредственно получаются из результатов теоремы 3, что было аккуратно проделано в [11; с. 377–385].

§ 5. Одно обобщение

В приложениях нередко приходится искать решения x , удовлетворяющие системе, состоящей не только из равенств (1), а также и из неравенств. Это приводит к следующей постановке задачи.

Пусть наряду с введенным выше отображением F задано отображение $f: X \times Y \rightarrow E^r$, которое удовлетворяет тем же предположениям гладкости, что и отображение F . Пусть в E^r заданы векторы e_i , $i = \overline{1, s}$. Положим $f_i(x, y) = \langle f(x, y), e_i \rangle$.

Пусть для точек x_0, y_0, z_0 выполняется

$$F(x_0, y_0) = z_0, \quad f_i(x_0, y_0) = 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

Нас будет интересовать следующий вопрос: когда для всех (y, z) , лежащих в некоторой окрестности (y_0, z_0) , существует $x = x(y, z)$, принадлежащее заданной окрестности x_0 и удовлетворяющее условиям:

$$F(x, y) = z, \quad f_i(x, y) \leq 0, \quad i = \overline{1, s}. \quad (38)$$

Здесь окрестности берутся в конечной топологии.

Через $\overline{F}: X \times Y \rightarrow \overline{Z} = Z \times E^s$ обозначим отображение, полученное из F за счет “дописывания” к нему функций $f_i, i = \overline{1, s}$.

Обозначим через $\overline{\mathcal{F}}_2(x_0, y_0)$ конус, состоящий из таких $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^s, z)$, $\lambda^i \geq 0, z \in Z', \lambda \neq 0$, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^s \lambda^i f_i + \langle z, F \rangle \right) (x_0, y_0) = 0$$

и в X существует подпространство $\Pi \subseteq \text{Ker } \frac{\partial \overline{F}}{\partial x}(x_0, y_0)$, для которого

$$\text{codim } \Pi \leq k + \min(s, r);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{i=1}^s \lambda^i f_i + \langle z, F \rangle \right) (x_0, y_0) [\xi, \xi] \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi.$$

Положим

$$Z_1 = \text{Im } \frac{\partial \overline{F}}{\partial x}(x_0, y_0); \quad Z_2 = \left(\text{Im } \frac{\partial \overline{F}}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^\perp.$$

Через $P_1: \overline{Z} \rightarrow Z_1, P_2: \overline{Z} \rightarrow Z_2$ обозначим операторы ортогонального проектирования $\overline{Z}$ на ортогональные подпространства Z_1 и Z_2 соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что *отображение $(F, f_1, \dots, f_s)$ в точке (x_0, y_0) удовлетворяет условию разрешимости* для (38), если существуют конечномерное подпространство $\tilde{X} \subseteq X$, содержащее точку x_0 , и положительные константы $\varkappa_1, \varkappa_2$ такие, что

$$\begin{aligned} \forall y, z: \|y - y_0\| + |z - z_0| < \varkappa_1 \quad \exists x = x(y, z) \in \tilde{X}: \\ F(x(y, z), y) = z, \quad f_i(x, y) \leq 0, \quad i = \overline{1, s}; \\ \|x(y, z) - x_0\|_{\tilde{X}} \leq \varkappa_2 (|P_1(\overline{F}(x_0, y_0) - z)| + \|y - y_0\| + |P_2(\overline{F}(x_0, y_0) - z)|^{1/2}). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4 (о неявной функции). *Предположим, что отображение F 2-нормально по переменной x в точке (x_0, y_0) . Тогда для того чтобы $(F, f_1, \dots, f_s)$ в точке (x_0, y_0) удовлетворяло условию разрешимости для (38), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{aligned} \exists h \in X: \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h = 0; \quad \left\langle \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_0, y_0), h \right\rangle \leq 0, \quad i = \overline{1, s}; \\ \left\langle \lambda, \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial x^2}(x_0, y_0)[h, h] \right\rangle < 0 \quad \forall \lambda \in \overline{\mathcal{F}}_2(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Аналогично формулируется и теорема об обратной функции, обобщающая теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 повторяет с естественными изменениями доказательство теоремы 1. Так же как и выше при доказательстве достаточности, будем считать, что отображение F не зависит от переменной y . Далее, заменив F на $\bar{F}$, определим, как и выше, отображение $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_s, \varphi)$. Вместо уравнения (21) рассмотрим систему равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} F(x) &= \varphi(\varepsilon) + \tau(-\varphi(\varepsilon) + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2), \quad x \in B(\varepsilon); \\ f_i(x) &\leq \varphi_i(\varepsilon) + \tau(-\varphi_i(\varepsilon) + \varepsilon z_1^i + \varepsilon^2 z_2^i), \quad i = \overline{1, s}, \end{aligned} \quad (39)$$

где индекс i обозначает соответствующую координату вектора.

Для доказательства существования решения выписанной системы рассматривается экстремальная задача, отличающаяся от сформулированной выше задачи (3) дополнительными ограничениями (39). Далее, пусть $(\tau_\varepsilon, x_\varepsilon)$ является решением этой задачи. Обозначим через I множество активных индексов, т.е.

$$I = \{i : f_i(x_0) = \varphi_i(\varepsilon) + \tau_\varepsilon(-\varphi_i(\varepsilon) + \varepsilon z_1^i + \varepsilon^2 z_2^i)\}.$$

Рассмотрим задачу (3'), полученную из предыдущей удалением из (39) всех тех ограничений, для которых $i \notin I$. Естественно, $(\tau_\varepsilon, x_\varepsilon)$ является также и локальным минимумом задачи (3'). Теперь, как и при доказательстве теоремы 1, применим к задаче (3') необходимые условия экстремума из теоремы 3. При этом лишь надо взять $\lambda^i = 0 \quad \forall i \notin I$. Дальнейшие рассуждения практически дословно повторяют проведенные в предыдущем параграфе.

§6. О существовании регулярных нулей у квадратичного отображения

Вернемся к проблеме, поднятой в п. 3.6. А именно когда у заданного квадратичного отображения Q существует регулярный нуль? Важность ответа на этот вопрос для доказательства разрешимости заданного отображения в аномальной точке отмечена в п. 3.6.

Положим $r = \frac{1}{2}k(k+3)$.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что конус $\text{con } \Lambda_r$ является острым. Тогда для того чтобы у квадратичного отображения Q существовал регулярный нуль, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\exists h \in X : \quad \langle z, Q[h, h] \rangle < 0 \quad \forall z \in \Lambda_k. \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Используя лемму 1, не теряя общности, будем считать, что $X = E^n$. В силу леммы 2 из (40) заключаем, что отображение Q сюръективно. Кроме того, $\text{int } \Lambda_r^0 \neq \emptyset$ в силу остроты конуса $\text{con } \Lambda_r$. Следовательно,

$$\exists \tilde{h} \in X : \quad Q(\tilde{h}) \in \text{int } \Lambda_r^0. \quad (41)$$

При этом, используя теорему Морса–Сарда, “шевелия” вектор $\tilde{h}$, добьемся того, чтобы кроме (41) для него выполнялось условие $\min_{y \in S} |yQ\tilde{h}| \neq 0$.

Дальнейшие рассуждения проведем методом от противного. Предположим, что у Q регулярных нулей нет. Тогда

$$\forall x: Q(x) = 0 \quad \exists y \in S: yQx = 0,$$

где S — единичная сфера из E^k . Следовательно, точка $x_0 = 0$ является единственным решением следующей минимаксной задачи:

$$|x|^4 + \max_{y \in S} (-|yQx|^2) \rightarrow \min, \quad Q(x) = 0.$$

Рассмотрим зависящее от числового параметра $\varepsilon \geq 0$ семейство возмущений исходной задачи:

$$\varphi_\varepsilon(x, \chi) \rightarrow \min; \quad Q(x) - \varepsilon^2 \chi Q(\tilde{h}) = 0, \quad |x| \leq 1, \quad 0 \leq \chi \leq 1.$$

Здесь

$$\varphi_\varepsilon(x, \chi) = \varphi(x) - \chi \varphi(\varepsilon \tilde{h}) + \varepsilon^4 |x - \varepsilon \tilde{h}|^4; \quad \varphi(x) = |x|^4 + \max_{y \in S} (-|yQx|^2).$$

Минимум в этих задачах ищется по всем парам (x, χ) , где $\chi \in E^1$ — скаляр. Каждую из задач этого семейства назовем ε -задачей.

Обозначим через $(x_\varepsilon, \chi_\varepsilon)$ решение ε -задачи. При $\varepsilon = 0$ ε -задача превращается в исходную и, как легко доказывается (аналогичные рассуждения см. в [4; с. 33–34]), $x_\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому при малых ε , которые только и будут рассматриваться, имеет место

$$|x_\varepsilon| < 1, \quad \varphi(\varepsilon \tilde{h}) < 0$$

(последнего можно добиться в силу того, что $\min_{y \in S} |yQ\tilde{h}| > 0$).

Ясно, что $\chi_\varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$, так как при $\varepsilon > 0$ точка $x = \varepsilon \tilde{h}, \chi = 1$ удовлетворяет всем ограничениям ε -задачи и $\varphi_\varepsilon(\varepsilon \tilde{h}, 1) = 0$, и в то же время $\varphi_\varepsilon(x, 0) > 0$ для всех x , удовлетворяющих ограничениям ε -задачи.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Получим необходимые условия экстремума в ε -задаче. Однако для этого непосредственно воспользоваться теоремой 3 нельзя, так как функционал φ_ε является негладким. Чтобы его сгладить, воспользуемся методом штрафов (см. [12; гл. 1]). Для этого при $i = 1, 2, \dots$ рассмотрим последовательность задач

$$\varphi_i(x, \chi, u) \rightarrow \min; \quad Q(x) - \varepsilon^2 \chi Q(\tilde{h}) = 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad |x| \leq 1.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, \chi, u) = & -u + i \int_S (\min(0, |yQx|^2 - u))^4 dy - \chi \varphi(\varepsilon \tilde{h}) \\ & + \varepsilon^4 |x - \varepsilon \tilde{h}|^4 + |x - x_\varepsilon|^4 + |\chi - \chi_\varepsilon|^4, \end{aligned}$$

а минимум ищется на множестве троек (x, χ, u) , где $u \in E^1$ — скаляр. Каждую из этих задач назовем i -задачей.

Легко проверяется, что решение каждой из i -задач существует. Обозначим его через (x_i, χ_i, u_i) . Стандартным образом доказывается [12; гл. 1], что

$$x_i \rightarrow x_\varepsilon, \quad \chi_i \rightarrow \chi_\varepsilon, \quad i \rightarrow \infty.$$

Поэтому при больших i , которые только и будем рассматривать, $|x_i| < 1, \chi_i > 0$.

Выпишем для i -задачи необходимые условия экстремума. В силу теоремы 3 существуют $\lambda_i^0 \geq 0, \lambda_i \in E^k$ и подпространство $\Pi_i \subseteq X$ такие, что

$$\begin{aligned} \lambda_i^0 + |\lambda_i| &= 1, \quad \text{codim } \Pi_i \leq k, \\ \lambda_i^0 4i \int_S (\min(0, |yQx|^2 - u))^3 dy &= -\lambda_i^0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\lambda_i^0 (\varphi(\varepsilon \tilde{h}) + 1(i)) + \varepsilon^2 \langle \lambda_i, Q(\tilde{h}) \rangle \geq 0, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_i^0 4i \int_S 12 (\min(0, |yQx|^2 - u))^2 \langle (yQ)^2 x_i, \xi \rangle^2 dy \\ &+ \lambda_i^0 4i \int_S 2 (\min(0, |yQx|^2 - u))^3 \langle (yQ)^2 \xi, \xi \rangle dy \\ &+ (o(\varepsilon^2) + 1(i)) |\xi|^2 + 2 \langle \lambda_i, Q(\xi) \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi_i, \end{aligned}$$

где $1(i) \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. Но в последнем неравенстве квадратичная форма, стоящая в первом интеграле, обращается в нуль на подпространстве

$$\tilde{N}_i = \{ \xi \in X : \langle (Q_l Q_j + Q_j Q_l) x_i, \xi \rangle = 0 \quad \forall l, j \leq k \}.$$

Очевидно, что $\text{codim } \tilde{N}_i \leq \frac{1}{2}k(k+1)$.

Положим $N_i = \tilde{N}_i \cap \Pi_i$. Тогда $\text{codim } N_i \leq r$. Поэтому, осуществляя предельный переход при $i \rightarrow \infty$ и используя при этом теорему 4.3 из [4] и теорему Хелли о слабой секвенциальной компактности ограниченного множества неположительных борелевских мер, получаем существование $\lambda_\varepsilon \in E^k$, неположительной борелевской меры μ_ε , определенной на S , и подпространства $N_\varepsilon \subseteq X$ таких, что

$$\begin{aligned} |\mu_\varepsilon(S)| + |\lambda_\varepsilon| &= 1, \quad \text{codim } N_\varepsilon \leq r, \quad \langle \lambda_\varepsilon, Q(\tilde{h}) \rangle \geq 0, \\ \int_S \langle (yQ)^2 \xi, \xi \rangle \mu_\varepsilon(dy) + o(\varepsilon^2) |\xi|^2 + \langle \lambda_\varepsilon, Q(\xi) \rangle &\geq 0 \quad \forall \xi \in N_\varepsilon. \end{aligned}$$

При этом, осуществляя предельный переход в (43), мы учитывали, что $\varphi(\varepsilon \tilde{h}) < 0$ и, значит, $\varphi(\varepsilon \tilde{h}) + 1(i) < 0$ при всех больших i .

Аналогично, осуществляя еще один предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем не равные одновременно нулю $\lambda \in E^k$, неположительную борелевскую меру μ и подпространство N такие, что

$$\text{codim } N \leq r, \quad \langle \lambda, Q(\tilde{h}) \rangle \geq 0, \quad (44)$$

$$\int_S \langle (yQ)^2 \xi, \xi \rangle \mu(dy) + \langle \lambda, Q(\xi) \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in N. \quad (45)$$

Покажем, что $\lambda \neq 0$. Действительно, если $\lambda = 0$, то $\mu \neq 0$ и, следовательно, в силу (45) $\exists y \in S: yQ[\xi, \xi] = 0 \quad \forall \xi \in N$, значит, векторы y и $(-y)$ одновременно принадлежат конусу Λ_r , что противоречит остроте конуса $\text{con} \Lambda_r$. Полученное противоречие доказывает, что $\lambda \neq 0$.

Из (45) вытекает, что $\lambda \in \Lambda_r$, так как мера μ неположительна. Но тогда в силу (41) условие (44) нарушается. Полученное противоречие завершает доказательство достаточности.

Необходимость. Предположим, что у Q есть регулярный нуль. Тогда из классической теоремы о неявной функции вытекает сюръективность отображения Q , откуда в силу леммы 2 получаем (40). При этом использовалось то, что в силу остроты конуса $\text{con} \Lambda_r$ и условия $r \geq k \Rightarrow \Lambda_r \supseteq \Lambda_k$ конус $\text{con} \Lambda_k$ является острым. Теорема доказана.

В заключение сформулируем одно утверждение в виде гипотезы: утверждение теоремы 5 остается в силе, если вместо остроты конуса $\text{con} \Lambda_r$ предположить всего лишь остроту конуса $\text{con} \Lambda_k$. Однако я этого доказать не смог. Если же такое усиление теоремы 5 доказать удастся, то отсюда с помощью теоремы Авакова [9] можно будет вывести достаточность в теореме 2.

Список литературы

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
4. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Аномальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
5. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
6. Арутюнов А. В. Условия второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом. 2-нормальные отображения // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 1. С. 37–62.
7. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
8. Agrachev A. A., Sarychev A. V. Abnormal sub-Riemannian geodesics: Morse index and rigidity // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Linéaire. 1996. V. 13. № 6. P. 635–690.
9. Аваков Е. Р. Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 5. С. 3–13.
10. Аграчев А. А. Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений // Итоги науки и техн. Алгебра. Геометрия. Топология. Т. 26. М.: ВИНТИ, 1988. С. 85–124.
11. Матвеев А. С. Критерии выпуклости образов квадратичных отображений в теории оптимального управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. С.-Петербург, 1998.
12. Федоров В. В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
13. Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции и аномальные точки // Докл. АН. 1999. Т. 368. № 5. С. 586–589.
14. Арутюнов А. В., Розова В. Н. Регулярные нули квадратичного отображения и локальная управляемость нелинейных систем // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 6. С. 723–728.
15. Арутюнов А. В., Ячимович В. К теории экстремума для аномальных задач // Вестник МГУ. Сер. ВМК. 2000. № 1.