Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Федченко, А. А. Шлапунов, О задаче Коши для многомерного оператора Коши–Римана в пространстве Лебега L^2 в области, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 11, 141–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:10:00

УДК 517.55

Д. П. Федченко, А. А. Шлапунов

О задаче Коши для многомерного оператора Коши–Римана в пространстве Лебега L^2 в области

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, имеющая бесконечно гладкую границу ∂D . В работе описаны необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши в пространстве Лебега $L^2(D)$ в области D для многомерного оператора Коши–Римана $\bar{\partial}$. В качестве примера рассмотрена ситуация, когда область D есть часть шарового слоя $\Omega(r, R) = B(R) \setminus \bar{B}(r)$, $0 < r < R < \infty$, в $\mathbb{C}^n$, где $B(R)$ – шар с центром в нуле и радиуса R , отсекаемая гладкой гиперповерхностью Γ , ориентированной как ∂D . В этом случае, используя разложение Лорана для гармонических функций в шаровом слое $\Omega(r, R)$, мы строим формулу Карлемана, восстанавливающую функцию из класса Лебега $L^2(D)$ по ее значениям на Γ и значениям $\bar{\partial}u$ в области D , если последние принадлежат $L^2(\Gamma)$ и $L^2(D)$ соответственно.

Библиография: 16 названий.

Введение

Задача Коши для голоморфных функций одного комплексного переменного является одним из классических примеров некорректной по Адамару задачи. Она естественно возникает в многочисленных приложениях – гидродинамике, теории передачи сигнала и т.д. (см., например, [1], [2] и указанную там библиографию). Эта задача активно изучалась в течение XX века и стала одним из стимулов для построения теории условно корректных задач.

В 80–90 годы XX века в связи с развитием многомерного комплексного анализа и его приложений во многих научных центрах, в том числе и в Красноярской школе комплексного анализа, были проведены серьезные исследования задачи Коши для голоморфных функций многих комплексных переменных в различных функциональных пространствах (см., например, [3], [4], а также [5] и указанную там библиографию).

Как оказалось, полученные для системы Коши–Римана результаты могут быть естественным образом обобщены в контексте общих линейных переопределенных эллиптических систем (см., например, [5]). Это в свою очередь позволило по-новому взглянуть на задачу Коши для голоморфных функций. А именно, стало ясно, что требует изучения более общая задача – задача Коши для многомерной (неоднородной!) системы Коши–Римана. Конечно, в случае одного

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00844) и Сибирского федерального университета (грант научно-методических проектов).

комплексного переменного эти задачи, как легко видеть, эквивалентны. Однако в многомерной ситуации доказательство эквивалентности задач требует информации о разрешимости $\bar{\partial}$ -уравнения (см., например, [6]), или, другими словами, о когомологиях комплекса Дольбо в степени 1 в различных классах функций, а значит, такая эквивалентность не имеет места для областей, не обладающих некоторыми свойствами выпуклости относительно оператора Коши–Римана.

В настоящей работе мы рассматриваем следующую (обобщенную) постановку задачи Коши для оператора Коши–Римана в классах Лебега и не налагаем никаких условий на “выпуклость” области, где ищется решение.

ЗАДАЧА 1. Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, с гладкой границей ∂D , а Γ – измеримое подмножество ∂D . По заданным функции u_0 из класса Лебега $L^2(\Gamma)$ и дифференциальной форме f бистепени $(0, 1)$ с коэффициентами из класса $L^2(D)$ найти такую функцию $u \in L^2_{\text{loc}}(D \cup \Gamma)$, что

$$\int_D u \bar{\partial} \varphi = \int_{\Gamma} u_0 \varphi - \int_D f \wedge \varphi \quad (1)$$

для всех дифференциальных форм φ бистепени $(n, n-1)$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в $\bar{D}$, носители которых компактны в $(D \cup \Gamma)$.

Мы покажем, что эта задача имеет не более одного решения, и сведем ее к задаче гармонического продолжения из меньшей области в большую, обобщая тем самым теорему Айзенберга–Кытманова (см. [3; теорема 4]) о задаче Коши для голоморфных функций (ср. также [4; теорема 4.1]). В случае, когда D есть часть шарового слоя в $\mathbb{C}^n$, отсеченная гладкой гиперповерхностью Γ , мы строим точные и приближенные решения задачи Коши 1 с помощью разложения Лорана для гармонических функций. Для функций одной комплексной переменной на этом пути получается известная формула Голузина–Крылова (см. [2; теорема 1.1]).

§ 1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство, а $\mathbb{C}^n$ – n -мерное комплексное пространство, точками которого являются упорядоченные наборы n комплексных чисел $z = (z_1, \dots, z_n)$, где $z_j = x_j + \sqrt{-1} x_{j+n}$, $j = 1, \dots, n$, $\sqrt{-1}$ – мнимая единица, $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Мы предполагаем, что $n > 1$, хотя основные теоремы справедливы и для $n = 1$.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^{2n}$, т.е. открытое связное множество, а $\bar{D}$ – ее замыкание. Всюду далее для простоты предполагается, что граница ∂D области D является бесконечно гладкой. Ограничения на гладкость границы используются прежде всего для работы со слабыми граничными значениями гармонических функций конечного порядка роста. Однако поскольку мы работаем с распределениями конечного порядка (порядка не более 1 на открытых подмножествах $\mathbb{C}^n$ и порядка не более $3/2$ на гиперповерхностях),

то все утверждения работы справедливы для областей с границами некоторой (возможно, достаточно высокой) конечной гладкости.

Кроме того, пусть Γ – связное открытое (в топологии ∂D) подмножество границы области D . Мы предполагаем, что граница $\partial\Gamma$ поверхности Γ является кусочно гладкой.

Для открытого множества $D \subset \mathbb{C}^n$ обозначим через $C^\infty(D)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций в D , а через $C^\infty(\bar{D})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в D , (любые) производные которых непрерывно продолжаются на $\bar{D}$. Также обозначим через $C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma)$ множество функций из $C^\infty(\bar{D})$, имеющих компактный носитель в $D \cup \Gamma$.

Далее, пусть $L^2(D)$ – пространство Лебега, т.е. множество (комплекснозначных) функций в области D , квадрат которых интегрируем по Лебегу в D . Как известно, это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{L^2(D)} = \int_D u(z) \bar{v}(z) \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(2\pi\sqrt{-1})^n}.$$

Как обычно, пространство Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{N}$, состоит из измеримых функций, чьи частные производные до порядка s включительно принадлежат пространству Лебега $L^2(D)$, а пространство Соболева $H_{\text{loc}}^s(D \cup \Gamma)$ состоит из измеримых функций, принадлежащих $H^s(\sigma)$ для каждого измеримого множества σ в D с $\bar{\sigma} \subset D \cup \Gamma$. Пространства Соболева $H^s(D)$ с $s \in \mathbb{R}_+$, иногда упоминающиеся в работе, определяются стандартным образом, например с помощью подходящей процедуры интерполяции (см. [7]).

Обозначим через $\bar{\partial}$ оператор Коши–Римана в $\mathbb{C}^n$. Как известно, оператор Коши–Римана индуцирует дифференциальный комплекс совместности

$$0 \longrightarrow \Lambda^{(0,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{(0,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \Lambda^{(0,2)} \xrightarrow{\bar{\partial}_2} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-1}} \Lambda^{(0,n)} \longrightarrow 0,$$

который называется *комплексом Дольбо* (см., например, [6] или [8]). Здесь $\Lambda^{(q,r)}$ – множество дифференциальных форм бистепени (q, r) , а $\bar{\partial}_j$ суть операторы комплексного дифференцирования дифференциальных форм; как обычно, если это не приводит к недоразумениям, мы будем писать просто $\bar{\partial}$ вместо $\bar{\partial}_j$. Пространство дифференциальных форм бистепени (q, r) с коэффициентами из какого-нибудь пространства $\mathfrak{S}(D)$ обозначим через $\mathfrak{S}(D, \Lambda^{(q,r)})$.

Нашей ближайшей целью будет “оправдание” такой постановки задачи, да и самого названия “задача Коши” для задачи 1.

Мы выбрали в качестве пространства данных Коши в области D пространство Лебега, потому что пространство Лебега $L^2(D)$ является достаточно широким и в то же время не выходит за рамки “обычных” функций. Кроме того, такая постановка позволяет в дальнейшем привлекать методы теории гильбертовых пространств, при этом немаловажно, что пространство Лебега $L^2(D)$ имеет очень простое скалярное произведение.

Заметим теперь, что $C_{\text{comp}}^\infty(D, \Lambda^{(n,n-1)}) \subset C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-1)})$. Поэтому условие (1), в частности, означает, что если решение задачи существует, то

$$\bar{\partial}u = f \quad \text{в смысле распределений в области } D. \quad (2)$$

Для $n = 1$ уравнение (2) с правой частью из $L^2(D)$ всегда разрешимо в пространстве Соболева $H^1(D)$; при этом “хорошее” решение для непрерывных функций задается (несобственным) интегралом Коши–Грина (ср., например, [8; § 1]):

$$u(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_D \frac{f(\zeta) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z},$$

а для произвольных функций из $L^2(D)$ это решение задается с помощью сингулярного интегрального оператора, индуцированного интегралом Коши–Грина. Конечно, существуют и менее регулярные решения.

Ситуация при $n > 1$ более сложна. Во-первых, как видно из (1), необходимым условием разрешимости задачи 1 является равенство

$$\bar{\partial}f = 0 \quad \text{в смысле распределений в области } D. \quad (3)$$

Во-вторых, как стало ясно еще в 60-х годах прошлого столетия, $\bar{\partial}$ -задача в многомерном случае субэллиптическая. Например, не для всех дифференциальных форм $f \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$, удовлетворяющих (3), найдется решение уравнения (2) в пространстве Соболева $H^s(D)$ для $s > 1/2$, даже если D – шар (ср. [9]). По этой причине решение задачи Коши 1 мы ищем в пространстве $L^2_{\text{loc}}(D \cup \Gamma)$, т.е. предполагаем некоторую потерю регулярности (ср. [10]).

Напомним теперь определение слабых предельных значений на Γ (см. [11], а также [8; § 11], [4; формула (2.1)]). Зафиксируем какую-нибудь определяющую функцию $\rho \in C^\infty$ для области D , т.е. вещественнозначную бесконечно гладкую функцию с $|d\rho| \neq 0$ на ∂D и такую, что

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}.$$

Положим $D_\varepsilon = \{x \in D : \rho(x) < -\varepsilon\}$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ множества $D_\varepsilon \Subset D \Subset D_{-\varepsilon}$ суть области с бесконечно гладкими границами $\partial D_{\pm\varepsilon}$ класса C^∞ , а векторы $x + \nu_\varepsilon^\mp(x)$ принадлежат $\partial D_{\pm\varepsilon}$ для каждой точки $x \in \partial D$ (здесь $\nu_\varepsilon^\mp(x)$ – суть внешняя и внутренняя нормали к поверхности ∂D в точке x длины ε). Всюду далее ds_ε – форма объема на ∂D_ε , индуцированная из $\mathbb{C}^n$, $ds = ds_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $u \in H^1_{\text{loc}}(D)$, а $u_0 \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ – распределение на Γ . Будем говорить, что $u = u_0$ в смысле *слабых граничных значений на Γ* , если

$$\langle u_0, v \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} v(y) u(y + \nu_\varepsilon^+(y)) ds(y) \quad \text{для всех } v \in C^\infty_{\text{comp}}(\Gamma).$$

ЛЕММА 1. Если $u \in H^1_{\text{loc}}(D)$, а $u_0 \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, то $u = u_0$ в смысле *слабых граничных значений на Γ* тогда и только тогда, когда

$$\langle u_0, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u \varphi \quad \text{для всех } \varphi \in C^\infty_{\text{comp}}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n, n-1)}). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно (см., например, [8; лемма 3.5]),

$$d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta = 2^{n-1} \sqrt{-1}^n (-1)^{k-1} \bar{\rho}_k(\zeta) ds \quad \text{на } \partial D, \quad (5)$$

где

$$\rho_k(\zeta) = \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_j} \right|^2 \right)^{1/2}}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Так как $\rho_\varepsilon = \rho + \varepsilon$ является определяющей функцией области D_ε , то

$$d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta = 2^{n-1} \sqrt{-1}^n (-1)^{k-1} \bar{\rho}_k(\zeta) ds_\varepsilon \quad \text{на } \partial D_\varepsilon.$$

Поэтому если $u = u_0$ в смысле слабых граничных значений на Γ , то справедливо также и (4).

Обратно, так как $|d\rho| \neq 0$ в окрестности ∂D , то для каждой точки $\zeta_0 \in \partial D$ найдется номер k такой, что $\rho_k \neq 0$ в некоторой окрестности ζ_0 . Поэтому с помощью разбиения единицы для всякой $v \in C_{\text{comp}}^\infty(\Gamma)$ легко построить форму $\varphi \in C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n, n-1)})$, сужение которой на ∂D совпадает с $v ds$. Значит, из теоремы Банаха–Штейнгауза и (4) следует, что $u = u_0$ в смысле слабых граничных значений на Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если V – какая-нибудь относительно компактная подобласть D , то из теоремы Банаха–Штейнгауза и леммы 1 следует, что $u = u_0$ в смысле слабых граничных значений на Γ тогда и только тогда, когда

$$\langle u_0, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u \varphi \quad \text{для всех } \varphi \in C_{\text{comp}}^\infty((D \cup \Gamma) \setminus V, \Lambda^{(n, n-1)}). \quad (6)$$

Заметим, что для однородной задачи Коши естественным пространством граничных значений в задаче Коши 1 является одна из разновидностей пространства Соболева $H^{-1/2}(\Gamma)$ (ср. [11], [4; § 2]). Это пространство понимается как двойственное к пространству $H^{1/2}(\Gamma)$ относительно спаривания в $L^2(\Gamma)$. Вопрос о том, какие функции класса $L^2(D \cup \Gamma)$ имеют следы (в каком-нибудь смысле) на Γ в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma)$, требует отдельного обстоятельного исследования. В нашей ситуации все упрощается, поскольку не только решение u задачи 1 принадлежит $L_{\text{loc}}^2(D \cup \Gamma)$, но и $\bar{\partial}u \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$.

ЛЕММА 2. *Всякая функция v класса Лебега $L^2(D)$ такая, что $\bar{\partial}v \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$, принадлежит $H_{\text{loc}}^1(D)$ и имеет в смысле слабых граничных значений следы на ∂D в классе $H^{-1/2}(\partial D)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $H_0^1(D)$ замыкание линейного подмножества $C_{\text{comp}}^\infty(D)$ в пространстве $H^1(D)$. Зафиксируем какую-нибудь функцию $v \in L^2(D)$ такую, что $\bar{\partial}v \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$. Ясно, что выражение

$$4(\bar{\partial}w, \bar{\partial}v)_{L^2(D)}, \quad w \in H_0^1(D),$$

определяет непрерывный линейный функционал на пространстве $H_0^1(D)$. Поэтому из [12; гл. 3, § 5, теорема 6] и теоремы Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на пространствах Гильберта следует, что существует единственная функция $V \in H_0^1(D)$, для которой

$$\Delta V = \Delta v \quad \text{в смысле распределений в } D.$$

В частности, функция $v - V \in L^2(D)$ гармонична в области D , а v есть сумма функции $V \in H_0^1(D)$ и $v - V$. Поэтому $v \in H_{\text{loc}}^1(D)$.

Кроме того, гармоническая функция $v - V \in L^2(D)$ имеет конечный порядок роста, а значит, имеет слабые предельные значения на ∂D , принадлежащие пространству $H^{-1/2}(\partial D)$ (см. [11]).

Наконец, поскольку функция $V \in H_0^1(D)$ имеет следы на ∂D в обычном смысле, то она имеет и (нулевые) слабые предельные значения на ∂D . Поэтому функция $v = v - V + V$ также имеет слабые предельные значения на ∂D , принадлежащие классу $H^{-1/2}(\partial D)$. В частности, это означает, что решение u задачи 1 имеет слабые предельные значения на Γ , принадлежащие классу $H_{\text{loc}}^{-1/2}(\Gamma)$.

Однако работать в пространствах Соболева с отрицательной гладкостью не очень удобно на практике, поэтому мы рассматривать задачу Коши с граничными данными из пространства $H^{-1/2}(\Gamma)$ не будем.

ЛЕММА 3. *Тождество (1) выполнено для всех дифференциальных форм φ бистепени $(n, n-1)$ с коэффициентами из пространства $C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma)$ в том и только том случае, когда выполнено (2) и*

$$u = u_0 \quad \text{в смысле слабых граничных значений на } \Gamma. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана форма $f \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$. Как мы уже отмечали выше, условие (1) означает, что $\bar{\partial}u = f$ в смысле распределений в области D . Таким образом, из леммы 2 следует, что решение задачи 1, когда существует, принадлежит еще и пространству Соболева $H_{\text{loc}}^1(D)$.

Кроме того, для $\varphi \in C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-1)})$ по формуле Стокса мы имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{D_\varepsilon} f \wedge \varphi + \int_{D_\varepsilon} u \bar{\partial} \varphi \right) = \int_D f \wedge \varphi + \int_D u \bar{\partial} \varphi,$$

поскольку $u \in L^2(D)$, $f \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$. Наконец, применяя (1), мы видим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u \varphi = \int_\Gamma u_0 \varphi \quad \text{для всех } \varphi \in C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-1)}).$$

Обратно, из (2) и леммы 2 следует, что $u \in H_{\text{loc}}^1(D)$, а значит, интегралы в определении 1 имеют смысл для u . Более того, снова применяя формулу Стокса, мы имеем для всех $\varphi \in C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-1)})$

$$\int_\Gamma u_0 \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u \varphi = \int_D f \wedge \varphi + \int_D u \bar{\partial} \varphi,$$

т.е. выполнено (1).

Итак, лемма 3 означает, что для достаточно гладких данных f и u_0 задача 1 превращается в классическую задачу Коши для оператора Коши–Римана.

Продолжим обсуждение необходимых условий разрешимости задачи Коши. При $n > 1$ оператор $\bar{\partial}$ индуцирует еще и касательный оператор $\bar{\partial}_\tau$ на ∂D (см., например, [6] или [8; § 18]), а значит, данные Коши u_0 и f должны быть согласованы. Именно, поскольку $\bar{\partial}^2 = 0$, то для разрешимости задачи 1 необходимо, чтобы

$$\int_{\Gamma} u_0 \wedge \bar{\partial}\psi - \int_D f \wedge \bar{\partial}\psi = 0 \quad \text{для всех } \psi \in C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n, n-2)}). \quad (8)$$

Ясно, что для $n = 1$ условие (8) всегда выполнено. При $n > 1$ и $f = 0$ условие (8) означает, что u_0 есть CR -функция на Γ (см., например, [6], [8; § 18]).

ЛЕММА 4. Если $f \in H^1(D, \Lambda^{(0,1)})$, то условие (8) выполнено в том и только том случае, когда $\bar{\partial}f = 0$ в смысле распределений в области D и

$$\int_{\Gamma} f \wedge \psi + \int_{\Gamma} u_0 \wedge \bar{\partial}\psi = 0 \quad \text{для всех } \psi \in C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n, n-2)}). \quad (9)$$

Доказательство немедленно следует из формулы Стокса и того факта, что $C_{\text{comp}}^\infty(D) \subset C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma)$.

Поскольку первый интеграл в (9) зависит только от касательной части формы f , а второй индуцирует касательный оператор Коши–Римана $\bar{\partial}_\tau$ на Γ , то условие (9) можно интерпретировать как “ $\bar{\partial}_\tau u_0 = \tau(f)$ в смысле слабых граничных значений на Γ ”.

§ 2. Теорема единственности

Обозначим через $\mathfrak{U}(\zeta, z)$ ядро Мартинелли–Бохнера в $\mathbb{C}^n$:

$$\mathfrak{U}(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta, \quad \zeta \neq z.$$

В силу (5) ядро Мартинелли–Бохнера может быть записано в следующем виде:

$$\mathfrak{U}(\zeta, z) = \Re_z(\zeta) ds(\zeta), \quad z \notin \partial D, \quad \zeta \in \partial D.$$

Теперь через $M_{\partial D}v(z)$, $z \notin \partial D$, обозначим преобразование Мартинелли–Бохнера с плотностью $v \in \mathscr{D}'(\partial D)$, т.е. результат действия распределения $v \in \mathscr{D}'(\partial D)$ на функцию $\Re_z(\zeta)$. Как известно, $M_{\partial D}v(z)$ является гармонической функцией относительно переменной z всюду в $\mathbb{C}^n$ вне носителя распределения v (см., например, [3; § 2]).

В частности, для $v \in L^2(\Gamma)$ определен интеграл типа Мартинелли–Бохнера $M_\Gamma v$:

$$M_\Gamma v(z) = \int_{\Gamma} v(\zeta) \mathfrak{U}(\zeta, z), \quad z \notin \Gamma.$$

Если $\partial D \in C^2$, то интеграл типа Мартинелли–Бохнера индуцирует ограниченный линейный оператор

$$M_\Gamma: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(D)$$

(см., например, [4; следствие 1.3]).

Далее, для дифференциальной формы $f \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$ обозначим через $T_D f$ сингулярный интеграл:

$$T_D f(z) = - \int_D f(\zeta) \wedge \mathfrak{U}(\zeta, z).$$

Как хорошо известно, T_D индуцирует ограниченный линейный оператор

$$T_D: L^2(D, \Lambda^{(0,1)}) \rightarrow H^1(\tilde{D})$$

для всякой ограниченной области $\tilde{D} \supset D$ с достаточно гладкой границей $\partial\tilde{D}$ (см., например, [8; § 16.1]).

Уместно отметить, что потенциал $T_D f$ совпадает с интегралом Коши–Грина при $n = 1$, однако он не является, вообще говоря, решением уравнения (2), даже если $\bar{\partial}f = 0$ в D .

ЛЕММА 5. *Для любой функции $v \in L^2(D)$ такой, что $\bar{\partial}v \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$, справедлива формула Мартинелли–Бохнера–Грина*

$$M_{\partial D} v + T_D \bar{\partial}v = \chi_D v \quad \text{в } \mathbb{C}^n, \quad (10)$$

где χ_D – характеристическая функция области D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже отмечали, что в условиях леммы $v \in H^1_{\text{loc}}(D)$. Как хорошо известно, для всякой функции класса $H^1(D)$ формула Мартинелли–Бохнера справедлива (см., например, [8; теорема 1.3]). Поскольку для каждого $\varepsilon > 0$ функция v принадлежит $H^1(D_\varepsilon)$, то

$$M_{\partial D_\varepsilon} v + T_{D_\varepsilon} \bar{\partial}v = \chi_{D_\varepsilon} v. \quad (11)$$

Переходя в (11) к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, с учетом замечания 1 и леммы 2 заключаем, что формула (10) справедлива в $\mathbb{C}^n \setminus \partial D$. Наконец, так как ∂D есть множество меры нуль, то формула верна в $\mathbb{C}^n$.

Приведем еще один довод в пользу задачи 1: из обобщенной формулировки мы легко получаем, что задача 1 не может иметь более одного решения.

ЛЕММА 6. *Задача 1 имеет не более одного решения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, полагая $u_0 = 0$, $f = 0$ и используя лемму 3, мы видим, что решение задачи Коши 1 в этом случае есть голоморфная функция класса $L^2_{\text{loc}}(D \cup \Gamma)$, у которой $u|_\Gamma = u_0 \in L^2(D)$ в смысле слабых предельных значений. Возьмем какую-нибудь область $G \subset D$ с бесконечно гладкой границей ∂G такую, что $\partial G \cap \partial D = \Gamma_1 \Subset \Gamma$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку. Для этой области справедлива формула Мартинелли–Бохнера (10):

$$M_{\partial G} v(z) = (\chi_D v)(z), \quad z \notin \partial G. \quad (12)$$

Так как преобразование Мартинелли–Бохнера $M_{\partial G} v$ гармонично всюду в $D^+ \cup \Gamma_1 \cup G$ и зануляется в D^+ , то по теореме единственности для гармонических функций оно равно нулю тождественно. В силу (12) функция v также исчезает в G , а значит, и в D (по теореме единственности для голоморфных функций).

§ 3. Критерий разрешимости задачи

Ясно, что интегралы $M_\Gamma u_0$ и $T_D f$ являются гармоническими всюду вне $\bar{D}$ как интегралы, зависящие от параметров. Поэтому и функция

$$F = M_\Gamma u_0 + T_D f$$

является гармонической всюду вне $\bar{D}$. С учетом формулы Мартинелли–Бохнера (10) функция F может содержать достаточно много информации о решении задачи Коши 1, если оно существует.

Нашей дальнейшей целью будет получение критерия разрешимости задачи Коши 1 с помощью функции F . Для этого выберем область D^+ так, чтобы множество $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ было областью с кусочно гладкой границей. Пусть $D^- = D$. Обозначим через $F^\pm$ сужение F на $D^\pm$. В силу вышесказанного F^+ гармонична в D^+ . Кроме того, если $\partial D \in C^\infty$, то интеграл типа Мартинелли–Бохнера индуцирует ограниченный линейный оператор

$$M_\Gamma^+ : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(B(0, R) \setminus D)$$

(см., например, [4; следствие 1.3]).

Итак, по построению $F^\pm \in L^2(D^\pm)$.

ТЕОРЕМА 1. *Задача Коши 1 разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (8) и функция F^+ гармонически продолжается из D^+ на Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задача 1 разрешима, а u – ее решение. Необходимость условия (8) нами уже отмечена выше.

Положим

$$\mathcal{F} = F - \chi_D u. \quad (13)$$

По определению функция $\mathcal{F}$ гармонична в D^+ и принадлежит $L^2(D^+)$ и $L^2_{\text{loc}}(D \cup \Gamma)$.

Возьмем какую-нибудь область $G \subset D$ с кусочно гладкой границей, для которой $\bar{G} \cap \partial D = \Gamma_1 \Subset \Gamma$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку $x_0 \in \Gamma$. Тогда по формуле Мартинелли–Бохнера (10) для области G мы имеем в $D^+ \cup G \cup \Gamma_1$

$$\mathcal{F} = M_\Gamma u_0 + T_D f - \chi_D u = M_\Gamma u + T_G \bar{\partial} u + T_{D \setminus G} f - M_{\partial G} u - T_G \bar{\partial} u.$$

Поэтому для всякой функции $\beta \in C^\infty_{\text{comp}}(D \cup \Gamma_1)$, равной единице в некоторой окрестности $\Gamma_2 \subset \Gamma$ точки x_0 , мы получаем в $D^+ \cup \Gamma_2 \cup G$

$$\mathcal{F} = M_{\Gamma \setminus \Gamma_1} (1 - \beta) u - M_{\partial G \setminus \Gamma_1} (1 - \beta) u + T_{D \setminus G} f.$$

Из этого равенства следует, что $\mathcal{F}$ гармонически продолжается из D^+ в $D^+ \cup G \cup \Gamma_1$, поскольку интеграл $T_{D \setminus G} f$ гармоничен всюду вне множества интегрирования как интеграл, зависящий от параметра z , а преобразования $M_{\Gamma \setminus \Gamma_1} (1 - \beta) u$ и $M_{\partial G \setminus \Gamma_1} (1 - \beta) u$ гармоничны всюду вне $(\Gamma \setminus \Gamma_1) \cup (\partial G \setminus \Gamma_1)$.

Наконец, в силу произвольности области G с описанными выше свойствами $\mathcal{F}$ на самом деле гармонична в Ω и на D^+ совпадает с F^+ .

Обратно, пусть существует функция $\mathcal{F}$, гармоничная в Ω и совпадающая с F^+ на D^+ . Положим

$$u(z) = F^- - \mathcal{F}^-. \quad (14)$$

По построению функция u принадлежит $L^2_{\text{loc}}(D \cup \Gamma) \cap H^1_{\text{loc}}(D)$. Теперь из теоремы о слабом скачке интеграла типа Мартинелли–Бохнера (см. [13]) и того факта, что $T_D f$ и функция $\mathcal{F}$ принадлежат $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u \varphi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} F^- \varphi - \int_{\partial D_{-\varepsilon}} F^+ \varphi \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} (M^-_\Gamma u_0) \varphi - \int_{\partial D_{-\varepsilon}} (M^+_\Gamma u_0) \varphi \right) = \int_\Gamma u_0 \varphi \end{aligned}$$

для всех $\varphi \in C^\infty(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n, n-1)})$, т.е. $u = u_0$ в смысле слабых предельных значений на Γ (см. лемму 1).

Для завершения доказательства нам осталось убедиться, что выполнено равенство (1). Для этого рассмотрим $(0, 1)$ -форму $g = (f - \bar{\partial}u)$, принадлежащую $\mathcal{D}'(D, \Lambda^{(0, 1)})$.

Если $\Phi \in C^\infty_{\text{comp}}(\Omega, \Lambda^{(n, n-1)})$, то $\Phi^- \in C^\infty_{\text{comp}}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n, n-1)})$. Значит, по формуле Стокса имеем

$$\int_{D_\varepsilon} (f - \bar{\partial}u) \wedge \Phi = \int_{D_\varepsilon} f \wedge \Phi - \int_{\partial D_\varepsilon} u \Phi + \int_{D_\varepsilon} u \bar{\partial} \Phi. \quad (15)$$

Поэтому с учетом того, что $u = u_0$ в смысле слабых предельных значений на Γ , для каждого $\Phi \in C^\infty_{\text{comp}}(\Omega, \Lambda^{(n, n-1)})$ существует предел

$$A(\Phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{D_\varepsilon} (f - \bar{\partial}u) \wedge \Phi = \int_D f \wedge \Phi - \int_\Gamma u_0 \Phi + \int_D u \bar{\partial} \Phi. \quad (16)$$

Кроме того, ясно, что

$$|A(\Phi)| \leq C \|\Phi\|_{C^1(\bar{\Omega}, \Lambda^{(n, n-1)})}$$

с некоторой неотрицательной постоянной C , не зависящей от Φ . Следовательно, предел $A(\Phi)$ определяет некоторое распределение, скажем $\hat{g}$, из $\mathcal{D}'(\Omega, \Lambda^{(0, 1)})$ с носителем в $D \cup \Gamma$, сужение которого на D совпадает с g .

Далее, мы уже показали, что $u = u_0$ в смысле слабых предельных значений на Γ . Поэтому из условия (8) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{D_\varepsilon} \bar{\partial}u \wedge \bar{\partial}\Psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u \bar{\partial}\Psi = \int_\Gamma u_0 \bar{\partial}\Psi = \int_D f \wedge \bar{\partial}\Psi$$

для всех $\Psi \in C^\infty_{\text{comp}}(\Omega, \Lambda^{(n, n-2)})$. Или, другими словами,

$$A(\bar{\partial}\Psi) = 0 \quad \text{для всех } \Psi \in C^\infty_{\text{comp}}(\Omega, \Lambda^{(n, n-2)}). \quad (17)$$

В частности, форма g $\bar{\partial}$ -замкнута в D . Кроме того, форма g является ко-замкнутой, т.е. $\bar{\partial}^* g = 0$ в смысле распределений в D .

В самом деле, обозначим через Δ_{2n} обычный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{2n}$. Очевидно, что $\bar{\partial}^* \bar{\partial} = -(1/4)\Delta_{2n}$. Пусть $\mathfrak{G}(\zeta - z)$ – фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^{2n}$. Как хорошо известно (см. [8; § 1]),

$$\mathfrak{U}(\zeta, z) = -4 \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z_j} (\zeta - z) d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta,$$

$$T_D f = -4 \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial z_j} \int_D \mathfrak{G}(\zeta - z) f(\zeta) \wedge d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta.$$

Поэтому из свойств фундаментального решения немедленно следует, что

$$4\bar{\partial}^* \bar{\partial} T_D f = \Delta_{2n} T_D f = 4\bar{\partial}^* \chi_D f \quad \text{в смысле распределений в } \mathbb{C}^n. \quad (18)$$

Теперь из гармоничности функции $\mathcal{F}$ и потенциала $M_\Gamma u_0$ вытекает, что в смысле распределений в D

$$\bar{\partial}^* g = \bar{\partial}^* (f - \bar{\partial}(M_\Gamma u_0 + T_D f - \mathcal{F})) = \bar{\partial}^* (f - \bar{\partial} T_D f) = 0. \quad (19)$$

Итак, из (19) и (18) следует, что $(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)g = 0$ в смысле распределений в D . В частности, это означает, что коэффициенты g_j , $j = 1, 2, \dots, n$, формы g гармоничны в D , а поэтому вещественно аналитичны там.

Обозначим через $*$ оператор Ходжа для дифференциальных форм. Положив $\bar{*}h = \overline{*h}$ для дифференциальной формы $h \in C^\infty(\Lambda^{(0,1)})$, нетрудно видеть, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{D_\varepsilon} g \wedge \bar{*}\bar{\partial}V = 0 \quad \text{для всех } V \in C_{\text{comp}}^\infty(\Omega). \quad (20)$$

В самом деле, согласно (18)

$$\int_D f \wedge \bar{*}\bar{\partial}V = \int_\Omega \chi_D f \wedge \bar{*}\bar{\partial}V = \int_\Omega \bar{\partial} T_D f \wedge \bar{*}\bar{\partial}V. \quad (21)$$

С учетом того, что $\mathcal{F}$ гармонична в Ω , а $T_D f \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{C}^n)$ и, кроме того, $\bar{*}\bar{\partial}V = c(n)\partial(\bar{V} \sum_{j=1}^n dz[j] \wedge d\bar{z}[j])$, имеем $(M_\Gamma u_0)^+ \in H_{\text{loc}}^1(D^+ \cup \Gamma)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_D \bar{\partial}\mathcal{F} \wedge \bar{*}\bar{\partial}V &= \int_\Omega \bar{\partial}\mathcal{F} \wedge \bar{*}\bar{\partial}V - \int_{\Omega \setminus D} \bar{\partial}\mathcal{F} \wedge \bar{*}\bar{\partial}V \\ &= - \int_{\Omega \setminus D} \bar{\partial}\mathcal{F} \wedge \bar{*}\bar{\partial}V = - \int_{\Omega \setminus D} \bar{\partial}(M_\Gamma u_0 + T_D f)^+ \wedge \bar{*}\bar{\partial}V \\ &= - \int_{\Omega \setminus D} \bar{\partial} T_D f \wedge \bar{*}\bar{\partial}V + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D - \varepsilon} \bar{\partial}(M_\Gamma u_0)^+ \wedge \left(\bar{V} \sum_{j=1}^n dz[j] \wedge d\bar{z}[j] \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Кроме того, так как интеграл типа Мартинелли–Бохнера определяет гармонические функции конечного порядка роста вблизи поверхности интегрирования, то на ∂D определены следы (в классе распределений) $\bar{\partial}$ -нормальных производных интеграла типа Мартинелли–Бохнера $\bar{\partial}_\nu(M_\Gamma u_0)^+|_{\partial D}$ и $\bar{\partial}_\nu(M_\Gamma u_0)^-|_{\partial D}$

(см. [3; § 2]), и для интегрантов класса $L^2(\Gamma)$ эти следы совпадают (см. [3; лемма 1]).

Поэтому из (21) и (22) получаем

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{D_\varepsilon} g \wedge \bar{*}\bar{\partial}V \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\partial D_{-\varepsilon}} \bar{\partial}(M_\Gamma u_0)^+ \wedge \left(\bar{V} \sum_{j=1}^n dz[j] \wedge d\bar{z}[j] \right) - \int_{D_\varepsilon} \bar{\partial}(M_\Gamma u_0) \wedge \bar{*}\bar{\partial}V \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\partial D_{-\varepsilon}} \bar{\partial}(M_\Gamma u_0)^+ \wedge \left(\bar{V} \sum_{j=1}^n dz[j] \wedge d\bar{z}[j] \right) \right) \\
 &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} (\bar{\partial}M_\Gamma u_0)^- \wedge \left(\bar{V} \sum_{j=1}^n dz[j] \wedge d\bar{z}[j] \right) \right) \\
 &= \langle \bar{\partial}_\nu(M_\Gamma u_0)^+|_{\partial D} - \bar{\partial}_\nu(M_\Gamma u_0)^-|_{\partial D}, \bar{v}|_{\partial D} \rangle = 0,
 \end{aligned}$$

т.е. формула (20) справедлива.

Формула (20), в частности, означает, что

$$A(\bar{*}\bar{\partial}V) = 0 \quad \text{для всех } V \in C_{\text{comp}}^\infty(\Omega),$$

или, другими словами, с учетом (17)

$$\bar{\partial}\hat{g} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \bar{\partial}^*\hat{g} = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (23)$$

А поскольку из равенств (23) следует, что распределение $\hat{g}$ с носителем в $D \cup \Gamma$ гармонично в Ω , то $\hat{g} \equiv 0$, т.е. $A(\Phi) = 0$ для любой $\Phi \in C_{\text{comp}}^\infty(\Omega, \Lambda^{(n, n-1)})$.

Наконец, если $\varphi \in C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n, n-1)})$, то по теореме Уитни найдется форма $\Phi \in C_{\text{comp}}^\infty(\Omega, \Lambda^{(n, n-1)})$, совпадающая с φ на D . Следовательно, из (15) и (16) получаем

$$\int_D u \bar{\partial}\varphi = \int_\Gamma u_0 \varphi - \int_D f \wedge \varphi + A(\Phi) = \int_\Gamma u_0 \varphi - \int_D f \wedge \varphi$$

для всякой $\varphi \in C_{\text{comp}}^\infty(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n, n-1)})$, т.е. u есть решение задачи 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 1 легко извлечь условия локальной разрешимости задачи Коши. В самом деле, зафиксируем точку $x_0 \in \Gamma$. Пусть V — какая-нибудь (односторонняя) окрестность точки x_0 в D , а $\hat{\Gamma} = \partial V \cap \Gamma$. Положим $\hat{F} = M_{\hat{\Gamma}}(u_0) + T_V f$. Так как

$$F = \hat{F} + M_{\Gamma \setminus \hat{\Gamma}}(u_0) + T_{D \setminus V} f,$$

то F^+ гармонически продолжается в $\hat{\Omega} = V \cup \hat{\Gamma} \cup D^+$ тогда и только тогда, когда этим свойством обладает потенциал $\hat{F}^+$. Поэтому при условии (8) решение задачи Коши существует в той окрестности V , в которую продолжается потенциал F^+ .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Задача Коши 1 разрешима в пространстве $L^2(D)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (8) и функция F^+ гармонически продолжается из D^+ на Ω в классе Лебега $L^2(\Omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если задача Коши 1 разрешима в пространстве $L^2(D)$, то из теоремы 1 вытекает, что функция F^+ гармонически продолжается из D^+ на Ω , а ее продолжение $\mathcal{F}$ задается формулой (13). Поэтому $\mathcal{F} \in L^2(D^\pm) \cap C_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$. Следовательно, $\mathcal{F} \in L^2(\Omega)$.

Обратно, пусть существует функция $\mathcal{F} \in L^2(\Omega)$, гармоничная в Ω и совпадающая с F^+ на D^+ . Тогда из теоремы 1 следует, что задача Коши 1 разрешима, а ее решение u задается формулой (14). Так как $\mathcal{F}^- \in L^2(D)$, то и u принадлежит $L^2(D)$.

Для $f = 0$ теорема 1 получена в [3] (см. также [4]).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть Γ – гладкая гиперповерхность в области Ω , разбивающая Ω на две связанные компоненты, D^+ и $D = \Omega \setminus D^+$. Тогда CR-функция $u_0 \in L^2(\Gamma)$ голоморфно продолжается в D в том и только том случае, когда ее интеграл типа Мартинелли–Бохнера $M_\Gamma u_0$ гармонически продолжается из D^+ в Ω .*

§ 4. Базисы с двойной ортогональностью

В работе [3] было предложено применить базисы с двойной ортогональностью для изучения задачи Коши для голоморфных функций (см. также [4]). Мы коротко изложим этот метод применительно к задаче 1. С этой целью обозначим через $h(\Omega)$ пространство гармонических функций в Ω , принадлежащих $L^2(\Omega)$.

ЛЕММА 7. *Если $\omega \in \Omega$ – область с кусочно гладкой границей и $\Omega \setminus \omega$ не имеет компактных (связных) компонент, то существует ортонормированный базис $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ в $h(\Omega)$ такой, что $\{b_{\nu|_\omega}\}_{\nu=1}^\infty$ есть ортогональный базис в $h(\omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На самом деле эти функции $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ суть собственные векторы компактного самосопряженного оператора $R(\Omega, \omega)^* R(\Omega, \omega)$, где

$$R(\Omega, \omega): h(\Omega) \rightarrow h(\omega)$$

есть оператор естественного вложения (см. [4; теорема 3.1] или [3; замечание 8], а также [14]).

Воспользуемся базисом $\{b_\nu\}$ для того, чтобы упростить следствие 1. С этой целью зафиксируем области $\omega \in D^+$ и Ω , как в лемме 7, и обозначим через

$$c_\nu(F^+) = \frac{(F^+, b_\nu)_{L^2(\omega)}}{\|b_\nu\|_{L^2(\omega)}^2}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

коэффициенты Фурье функции F^+ относительно ортогонального базиса $\{b_{\nu|_\omega}\}$ в $h(\omega)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Задача Коши 1 разрешима в классе $L^2(D)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (8) и сходится ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_{\nu}(F^+)|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если задача 1 разрешима в классе $L^2(D)$, то согласно следствию 1 выполнено условие (8) и найдется функция $\mathcal{F} \in h(\Omega)$, совпадающая с F^+ в ω .

По лемме 7

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu}(\mathcal{F}) b_{\nu}(z), \quad z \in \Omega, \quad (25)$$

где

$$k_{\nu}(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}, b_{\nu})_{L^2(\Omega)}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

– коэффициенты Фурье $\mathcal{F}$ по ортогональному базису $\{b_{\nu}\}$ в $h(\Omega)$.

Теперь из неравенства Бесселя следует, что ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} |k_{\nu}(\mathcal{F})|^2$ сходится.

Наконец,

$$c_{\nu}(F^+) = \frac{(R(\Omega, \omega)\mathcal{F}, R(\Omega, \omega)b_{\nu})_{L^2(\omega)}}{(R(\Omega, \omega)b_{\nu}, R(\Omega, \omega)b_{\nu})_{L^2(\omega)}} = \frac{(\mathcal{F}, R(\Omega, \omega)^* R(\Omega, \omega)b_{\nu})_{L^2(\Omega)}}{(b_{\nu}, R(\Omega, \omega)^* R(\Omega, \omega)b_{\nu})_{L^2(\Omega)}} = k_{\nu}(\mathcal{F}),$$

т.е. необходимость условий следствия доказана.

Обратно, если выполнены условия следствия, то согласно теореме Рисса–Фишера мы имеем

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu}(F^+) b_{\nu}(z), \quad z \in \Omega, \quad (26)$$

в пространстве $h(\Omega)$.

По построению $\mathcal{F}$ совпадает с F^+ в ω . Значит, из следствия 1 вытекает, что задача 1 разрешима в классе $L^2(D)$.

Примеры базисов со свойством двойной ортогональности можно найти в [4], [5; гл. 12], [14].

Получим формулу Карлемана для решений задачи 1. С этой целью для $z \in \Omega$, $\zeta \notin \bar{\omega}$, $z \neq \zeta$, рассмотрим ядра Карлемана

$$\mathfrak{E}_N(\zeta, z) = \mathfrak{U}(\zeta, z) - \sum_{\nu=1}^N c_{\nu}(\mathfrak{U}(\zeta, \cdot)) b_{\nu}(z), \quad N \in \mathbb{N}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Для всякой функции $v \in L^2(D)$, которая имеет на Γ слабые предельные значения класса $L^2(\Gamma)$ и для которой $\bar{\partial}v \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$, справедлива формула Карлемана

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|v - v_N\|_{L^2(D)} = 0, \quad (27)$$

где

$$v_N = \int_{\Gamma} v(\zeta) \mathfrak{E}_N(\zeta, \cdot) - \int_D \bar{\partial}v(\zeta) \wedge \mathfrak{E}_N(\zeta, \cdot).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, для данных Коши $f = \bar{\partial}v$ и $u_0 = v|_{\Gamma}$ задача Коши 1 разрешима в классе $L^2(D)$. Значит, из следствия 1 вытекает, что решение u этой задачи Коши задается формулой (14). Теперь из леммы 6 следует, что $u = v$ в D .

Так как $\bar{\omega} \cap \bar{D} = \emptyset$, то можно воспользоваться теоремой Фубини и заключить, что для всех $\nu \in \mathbb{N}$

$$k_{\nu}(F^+) = \int_{\Gamma} v_0(\zeta) c_{\nu}(\mathfrak{U}(\zeta, \cdot)) - \int_D f(\zeta) \wedge c_{\nu}(\mathfrak{U}(\zeta, \cdot)). \quad (28)$$

Более того (см. доказательство следствия 3), мы знаем, что функция $\mathcal{F}$ задается формулой (25) с коэффициентами (24). Частичные суммы ряда $\mathcal{F}$ в $L^2(\Omega)$, а значит, суженные на D^- , сходятся к $\mathcal{F}^-$ в $L^2(D)$, т.е. имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| v - M_{\Gamma} v_0 - T_D \bar{\partial} v - \sum_{\nu=1}^N \left(\int_{\Gamma} v_0(\zeta) c_{\nu}(\mathfrak{U}(\zeta, \cdot)) - \int_D f(\zeta) \wedge c_{\nu}(\mathfrak{U}(\zeta, \cdot)) \right) b_{\nu} \right\|_{L^2(D)} = 0.$$

Это и дает равенство (27) после перегруппировки слагаемых.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Формула (14) означает, что $v = M_{\Gamma} v + T_D \bar{\partial} v - \mathcal{F}$. Так как $\mathcal{F}$ и b_{ν} гармоничны, то из теоремы Стилтеса–Витали следует, что ряд (26) сходится в $C_{\text{loc}}^{\infty}(\Omega)$. Значит, если $v|_{\Gamma} \in H^{s-1/2}(\Gamma)$, $\bar{\partial} v \in H^p(D, \Lambda^{(0,1)})$, то $v \in H_{\text{loc}}^s(D \cup \Gamma) \cap H_{\text{loc}}^{p+1}(D)$, и мы дополнительно имеем:

- 1) $\bar{\partial} v_N$ сходится к $\bar{\partial} v$ в $H_{\text{loc}}^p(D \cup \Gamma, \Lambda^{(0,1)})$;
- 2) v_N сходится к v в $H_{\text{loc}}^s(D \cup \Gamma) \cap H_{\text{loc}}^{p+1}(D)$, $s \in \mathbb{N}$.

Уместно отметить, что на самом деле мы получили те же самые ядра Карлемана, что и для случая $f = 0$ (см. [4; § 5]).

§ 5. Пример построения формулы Карлемана

В этом параграфе мы построим формулу Карлемана задачи без применения базисов с двойной ортогональностью. В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $B(R)$ – шар с центром в нуле и радиуса R , а $\Omega = \Omega(r, R) = B(R) \setminus \bar{B}(r)$, $0 < r < R < \infty$, есть шаровой слой в $\mathbb{C}^n$. Пусть гладкая связная гиперповерхность $\Gamma \subset \Omega(r, R)$ разбивает $\Omega(r, R)$ на две связные компоненты, D^+ и $D = D^-$, так, чтобы

$$\max(\text{dist}(\bar{D}, \partial B(R)), \text{dist}(\bar{D}, \partial B(r))) > 0.$$

Далее, пусть $\{h_{\nu}^{(i)}\}$ – система однородных гармонических многочленов, образующих ортонормированный базис в $L^2(\partial B_1)$; здесь ν – степень однородности, а

$$J(\nu) = (2n + 2\nu - 2) \frac{(2n + \nu - 3)!}{\nu! (2n - 2)!}$$

– количество линейно независимых многочленов степени ν в этом базисе (см. [15; гл. XI]).

СЛЕДСТВИЕ 5. Если $\text{dist}(\overline{D}, \partial B(R)) > 0$, то функция F^+ гармонически продолжается из D^+ на $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt{\max_{1 \leq i \leq J(\nu)} |\widehat{k}_\nu^{(i)}|} \leq r, \quad (29)$$

где

$$\widehat{k}_\nu^{(i)} = \int_\Gamma u_0(\zeta) \frac{* \overline{\partial h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{n + \nu - 1} + \int_D f(\zeta) \wedge \frac{* \overline{\partial h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{n + \nu - 1}. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При сформулированных условиях найдется шаровой слой $\widehat{\Omega} = \Omega(\widehat{r}, \widehat{R}) \Subset D^+$ с некоторыми радиусами $r < \widehat{r} < \widehat{R} < R$.

Очевидно, $F^+ \in C^\infty(\overline{\Omega}(\widehat{r}, \widehat{R}))$ гармонична в этом слое. Поэтому мы можем разложить функцию F^+ в ряд Лорана по однородным гармоническим функциям в $\widehat{\Omega}$ (см., например, [16; § 8]). Именно,

$$F^+(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} k_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z) + \widehat{k}_0 \mathfrak{G}(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \widehat{k}_\nu^{(i)} \frac{h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}}, \quad z \in \widehat{\Omega}, \quad (31)$$

где ряд сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из $\widehat{\Omega}$, а коэффициенты $k_\nu^{(i)}$, $\widehat{k}_\nu^{(i)}$ определены однозначно.

Если $\text{dist}(\overline{D}, \partial B(R)) > 0$, то

$$|z| > |\zeta| \quad \text{для всех } z \in \widehat{\Omega}, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Для того чтобы получить коэффициенты $k_\nu^{(i)}$, $\widehat{k}_\nu^{(i)}$, воспользуемся следующим разложением ядра Мартинелли–Бохнера, полученным в [3; лемма 2]:

$$\mathfrak{U}(\zeta, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{* \partial_\zeta \overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta) h_\nu^{(i)}(z)}{(n + \nu - 1) |z|^{2n+2\nu-2}},$$

где ряд также сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из конуса $\{z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in \mathbb{C}^n : |z| > |\zeta|\}$.

Подставляя данное разложение в интегралы $M_\Gamma u_0$ и $T_D f$, мы получим, что $k_\nu^{(i)} = 0$, $\widehat{k}_0 = 0$, а $\widehat{k}_\nu^{(i)}$, $\nu \in \mathbb{N}$, заданы формулой (30) для всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq J(\nu)$.

Пусть теперь найдется функция $\mathscr{F}$, гармоническая в шаровом слое Ω и совпадающая с F^+ в D^+ . Разлагая ее в шаровом слое Ω в ряд Лорана по однородным гармоническим функциям, получаем

$$\mathscr{F}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} c_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z) + \widehat{c}_0 \mathfrak{G}(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \widehat{c}_\nu^{(i)} \frac{h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}}, \quad z \in \widehat{\Omega}, \quad (32)$$

где ряд сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из Ω , а коэффициенты $c_\nu^{(i)}$, $\widehat{c}_\nu^{(i)}$ определены однозначно. Поскольку $\widehat{\Omega} \subset \Omega$, то разложение справедливо и для $z \in \widehat{\Omega}$. Однако коэффициенты разложения Лорана определены однозначно, поэтому, сравнивая (31) и (32), мы видим, что

$c_\nu^{(i)} = k_\nu^{(i)}$, $\widehat{c}_\nu^{(i)} = \widehat{k}_\nu^{(i)}$. Следовательно, для гармонического продолжения $\mathcal{F}$ функции F^+ справедлива формула

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{|z|^{2n-2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{J(\nu)} \widehat{k}_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)} \left(\frac{z}{|z|} \right) \right) |z|^{-\nu}, \quad z \in \Omega. \quad (33)$$

Теперь, проинтегрировав $|\mathcal{F}|^2$ по произвольной сфере радиуса $r < \gamma < R$ и учтя (33), мы получим

$$\frac{1}{\gamma^{2n-2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\max_{1 \leq i \leq J(\nu)} |\widehat{k}_\nu^{(i)}|^2 \right) |\gamma|^{-2\nu} \leq \frac{1}{\gamma^{2n-2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{J(\nu)} |\widehat{k}_\nu^{(i)}|^2 \right) |\gamma|^{-2\nu} < \infty. \quad (34)$$

В силу произвольности $r < \gamma < R$ и формулы Коши–Адамара мы заключаем, что выполнено условие (29).

Обратно, как известно (см. [15; гл. XI]),

$$1 \leq J(\nu) \leq c\nu^{2n-2}, \quad (35)$$

$$\max_{|z|=1} |h_\nu^{(i)}(z)| \leq c(n)\nu^{n-1}. \quad (36)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{J(\nu)} \widehat{k}_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)} \left(\frac{z}{|z|} \right) \leq J(\nu) \max_{1 \leq i \leq J(\nu)} |\widehat{k}_\nu^{(i)}| \max_{|z|=1} |h_\nu^{(i)}(z)|.$$

Поэтому из формулы Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда и формул (35), (36) немедленно следует, что при выполнении условия (29) ряд (33) сходится в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{B}(r)$, а значит, и в Ω . Этот ряд и дает гармоническое продолжение функции F^+ на Ω .

Получим теперь формулу Карлемана задачи 1.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\text{dist}(\overline{D}, \partial B(R)) > 0$. Тогда для любой функции $v \in L_{\text{loc}}^2(D \cup \Gamma)$ такой, что $\bar{\partial}v \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$, справедлива формула Карлемана

$$v(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} v_N(z), \quad \bar{\partial}v(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\partial}v_N(z), \quad z \in D, \quad (37)$$

где первый предел достигается в $L_{\text{loc}}^2(D \cup \Gamma)$ (и даже в $H_{\text{loc}}^1(D)$), второй – в $L_{\text{loc}}^2(D \cup \Gamma, \Lambda^{(0,1)})$,

$$v_N(z) = \int_{\Gamma} v(\zeta) \mathfrak{C}_N(\zeta, z) + \int_D \bar{\partial}v(\zeta) \wedge \mathfrak{C}_N(\zeta, z),$$

а

$$\mathfrak{C}_N(\zeta, z) = \mathfrak{U}(\zeta, z) - \sum_{\nu=0}^N \sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{* \partial_\zeta \overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta) h_\nu^{(i)}(z)}{(n + \nu - 1) |z|^{2n+2\nu-2}}$$

– ядра Карлемана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, для данных Коши $f = \bar{\partial}u$ и $u_0 = u|_{\Gamma}$ задача Коши 1 разрешима. Поэтому согласно теореме 1 и следствию 5 выполнены условия (8) и (29), а решение u этой задачи задается формулой (14). В силу единственности решения задачи Коши мы заключаем, что $u = v$ в D .

Более того, теперь (см. доказательство следствия 5) мы знаем, что функция $\mathcal{F}$ задана формулой (33) с коэффициентами (30), т.е. для всех $z \in D \cup \Gamma$ имеем

$$v(z) = \int_{\Gamma} u_0(\zeta) \mathfrak{U}(\zeta, z) + \int_D f(\zeta) \mathfrak{U}(\zeta, z) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^N \sum_{i=1}^{J(\nu)} \left(\int_{\Gamma} u_0(\zeta) \frac{* \partial \overline{h_{\nu}^{(i)}}(\zeta)}{n + \nu - 1} + \int_D f(\zeta) \wedge \frac{* \partial \overline{h_{\nu}^{(i)}}(\zeta)}{n + \nu - 1} \right) \frac{h_{\nu}^{(i)}(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}},$$

что после перегруппировки слагаемых и дает тождество (37).

Что касается характера сходимости, то нужно отметить следующее: функция $\mathcal{F}$ гармонична в Ω , а ряд (32) состоит из гармонических слагаемых. По этой причине в силу теоремы Стильтеса–Витали ряд (32) сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из Ω к гармонической функции $v - F^-$.

Подобным же образом доказываются следующие утверждения (ср. [3; теорема 5] для $f \equiv 0$).

СЛЕДСТВИЕ 7. Если $\text{dist}(\bar{D}, \partial B(r)) > 0$, то функция F^+ гармонически продолжается из D^+ на $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq J(\nu)} \sqrt[nu]{|k_{\nu}^{(i)}|} \leq \frac{1}{R},$$

где

$$k_{\nu}^{(i)} = \int_{\Gamma} u_0(\zeta) \frac{* \partial \overline{h_{\nu}^{(i)}}(\zeta)}{(n + \nu - 1)|\zeta|^{2n+2\nu-2}} + \int_D f(\zeta) \wedge \frac{* \partial \overline{h_{\nu}^{(i)}}(\zeta)}{(n + \nu - 1)|\zeta|^{2n+2\nu-2}}. \quad (38)$$

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $\text{dist}(\bar{\Gamma}, \partial B(r)) > 0$. Тогда для всякой функции $u \in L_{\text{loc}}^2(D \cup \Gamma)$ такой, что $\bar{\partial}u \in L^2(\bar{D}, \Lambda^{(0,1)})$, справедлива формула Карлемана

$$v(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} v_N(z), \quad \bar{\partial}v(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\partial}v_N(z), \quad z \in D, \quad (39)$$

где первый предел достигается в $L_{\text{loc}}^2(D \cup \Gamma)$ (и даже в $H_{\text{loc}}^1(D)$), второй – в $L_{\text{loc}}^2(D \cup \Gamma, \Lambda^{(0,1)})$,

$$v_N(z) = \int_{\Gamma} v(\zeta) \mathfrak{C}_N(\zeta, z) + \int_D \bar{\partial}v(\zeta) \wedge \mathfrak{C}_N(\zeta, z),$$

а

$$\mathfrak{C}_N(\zeta, z) = \mathfrak{U}(\zeta, z) - \mathfrak{U}(\zeta, 0) + * \partial_{\zeta} \sum_{\nu=1}^N \sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{\overline{h_{\nu}^{(i)}}(\zeta) h_{\nu}^{(i)}(z)}{(n + \nu - 1)|\zeta|^{2n+2\nu-2}}$$

– ядра Карлемана.

Уместно отметить, что при $n = 1$ и $f \equiv 0$ соотношения (37) и (39) суть хорошо известные формулы Голузина–Крылова (см., например, [2; теорема 1.1]).

Список литературы

- [1] Т. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [2] Л. А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения*, Наука, Новосибирск, 1990; англ. пер.: L. Aizenberg, *Carleman's formulas in complex analysis. Theory and applications*, Math. Appl., **224**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [3] Л. А. Айзенберг, А. М. Кытманов, “О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы”, *Матем. сб.*, **182**:4 (1991), 490–507; англ. пер.: L. A. Aizenberg, A. M. Kytmanov, “On the possibility of holomorphic extension into a domain of functions defined on a connected piece of its boundary”, *Math. USSR-Sb.*, **72**:2 (1992), 467–483.
- [4] А. А. Шлапунов, Н. Н. Тарханов, “О задаче Коши для голоморфных функций класса Лебега L^2 в области”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:5 (1992), 186–195; англ. пер.: A. A. Shlapunov, N. N. Tarkhanov, “On the Cauchy problem for holomorphic functions of Lebesgue class L^2 in domains”, *Siberian Math. J.*, **33**:5 (1992), 914–922.
- [5] N. N. Tarkhanov, *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, Math. Top., **7**, Akademie-Verlag, Berlin, 1995.
- [6] Г. М. Хенкин, “Метод интегральных представлений в комплексном анализе”, *Комплексный анализ – многие переменные – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **7**, ВИНТИ, М., 1985, 23–124; англ. пер.: G. M. Khenkin, “The method of integral representations in complex analysis”, *Several complex analysis. I. Introduction to complex analysis*, Encyclopaedia Math. Sci., **7**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 19–116.
- [7] Ю. В. Егоров, М. А. Шубин, “Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории”, *Дифференциальные уравнения с частными производными – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **30**, ВИНТИ, М., 1988, 5–255; англ. пер.: Yu. V. Egorov, M. A. Shubin, “Linear partial differential equations. Foundations of the classical theory”, *Partial differential equations, I*, Encyclopaedia Math. Sci., **30**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, 1–259.
- [8] А. М. Кытманов, *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения*, Наука, Новосибирск, 1992; англ. пер.: A. M. Kytmanov, *The Bochner–Martinelli integral and its applications*, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [9] N. Kerzman, “Hölder and L^p estimates for solutions of $\bar{\partial}u = f$ in strongly pseudoconvex domains”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **24**:3 (1971), 301–379.
- [10] L. Hörmander, “ L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator”, *Acta Math.*, **113**:1 (1965), 89–152.
- [11] E. J. Straube, “Harmonic and analytic functions admitting a distribution boundary value”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **11**:4 (1984), 559–591.
- [12] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1976; англ. пер.: V. P. Mikhajlov, *Partial differential equations*, Mir, Moscow, 1978.
- [13] Е. М. Чирка, “Аналитическое представление CR -функций”, *Матем. сб.*, **98**(140):4(12) (1975), 591–623; англ. пер.: E. M. Čirka, “Analytic representation of CR -functions”, *Math. USSR-Sb.*, **27**:4 (1975), 526–553.
- [14] H. S. Shapiro, “Stefan Bergman’s theory of doubly-orthogonal functions. An operator-theoretic approach”, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **79**:6 (1979), 49–58.

- [15] С. Л. Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, М., 1974; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Cubature formulas and modern analysis: An introduction*, Gordon and Breach, Montreux, 1992.
- [16] Н. Н. Тарханов, *Ряд Лорана для решений эллиптических систем*, Наука, Новосибирск, 1991.

Д. П. Федченко (D. P. Fedchenko)

Институт математики

Сибирского федерального университета, г. Красноярск

E-mail: fdp@bk.ru

Поступила в редакцию

05.12.2007 и 17.07.2008

А. А. Шлапунов (A. A. Shlapunov)

Институт математики

Сибирского федерального университета, г. Красноярск

E-mail: shlapuno@lan.krasu.ru