Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Балашов, Е. С. Половинкин, M -сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 1, 27–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:18:05

УДК 517.977

М. В. Балашов, Е. С. Половинкин

***M*-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества**

В работе для множеств из банахова пространства вводится понятие порождающего множества M и понятие M -сильно выпуклого множества, представимого в виде пересечения множеств вида $M + x$, являющихся сдвигами порождающего множества M . Порождающее множество должно удовлетворять некоторому условию, которое обеспечивает, как показано в работе, специальный опорный принцип. На основании опорного принципа построен новый раздел выпуклого анализа, позволяющий усиливать классические результаты типа теоремы Каратеодори или теоремы Крейна–Мильмана. Описаны различные классы порождающих множеств, изучены свойства M -сильно выпуклых множеств.

Библиография: 27 названий.

Введение и основные обозначения

Понятие выпуклости играет важную роль в различных областях фундаментальной и прикладной математики. Развитие математики и расширение ее приложений привели к созданию различных аналогов и обобщений понятия выпуклости. Аксиоматический подход к понятию выпуклости заключается в следующем. В произвольном множестве X выбирается некоторое семейство подмножеств Φ , называемое *базой выпуклости*. Множество A называется Φ -выпуклым, если оно представимо в виде пересечения некоторых множеств из данного семейства Φ (см., например, [1]–[4]). Аналогично вводятся F -выпуклые функции, которые через надграфик можно свести к Φ -выпуклым множествам (см., например, [5], [6]). Большое количество работ было посвящено исследованиям указанных классов множеств и функций (ссылки можно найти, например, в [4]).

Используя приведенное обобщение понятия выпуклости, можно не только ослаблять классическое понятие выпуклости, но и усиливать его, получая при этом новые результаты выпуклого анализа. В работах [7]–[13] исследованы специальные классы Φ -выпуклых множеств, у которых каждое семейство Φ состоит из замкнутых шаров в $\mathbb{R}^n$ произвольного, но фиксированного для данного семейства радиуса $R > 0$ с произвольными центрами. То есть каждое семейство Φ порождено сдвигами одного множества – шара заданного радиуса $R > 0$ с центром в нуле. Как оказалось, этот специальный класс Φ -выпуклых множеств, названный *сильно выпуклыми множествами радиуса R* , удовлетворяет (см. [8]–[11]) особому опорному принципу и обладает целым рядом новых алгебраических и топологических

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00645) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (грант № 97-0-1.9-26).

свойств для класса сильно выпуклых множеств. Установлено специальное свойство этих классов множеств, состоящее в том, что для всякого сильно выпуклого множества радиуса R найдется другое сильно выпуклое множество такое, что сумма Минковского этих двух множеств в точности равняется шару того же радиуса R с центром в нуле. Естественно было бы шар с центром в нуле радиуса $R > 0$ называть *порождающим множеством* для данного класса Φ -выпуклых множеств.

Настоящая статья является развитием работы [9] и посвящена исследованию таких классов Φ -выпуклых множеств, у которых каждое семейство Φ образовано множествами, получаемыми в результате всевозможных сдвигов некоторого одного фиксированного выпуклого множества, которое обязано удовлетворять специальному свойству полного выметания.

В 1995 году в С.-Петербурге на Международной конференции “Set-valued calculus and nonsmooth analysis” после доклада Е. С. Половинкина о сильно выпуклых множествах профессор R. T. Rockafellar указал автору на то, что ему известен другой пример порождающего множества – надграфик параболы. Этот факт послужил дополнительным стимулом для проведения дальнейших поисков новых порождающих множеств и исследований свойств сильно выпуклых множеств.

В статье предпринята попытка описать новые классы порождающих множеств, исследовать их общие свойства и свойства соответствующих им сильно выпуклых множеств; сформулирован опорный принцип, характеризующий как порождающие множества, так и сильно выпуклые множества. В работе показано, что не только шар из конечномерного евклидова пространства, но и всякий шар из гильбертова пространства также является порождающим. Установлено, что прямая сумма любых порождающих множеств является порождающим множеством. Получены условия, при которых сохраняется свойство быть порождающим множеством для результирующего множества при взятии пределов от последовательности порождающих множеств или после линейных операций с порождающими множествами. Показано, что на плоскости любое выпуклое компактное множество является порождающим множеством, однако в пространствах большей размерности это уже неверно.

Введено и исследовано понятие M -сильно выпуклой оболочки множества. Показано, что когда порождающее множество $M \subset \mathbb{R}^n$ компактно и строго выпукло, справедлив аналог теоремы Каратеодори о том, что всякая точка из M -сильно выпуклой оболочки компактного множества A содержится в M -сильно выпуклой оболочке некоторого подмножества этого множества A , состоящего не более чем из $n + 1$ точек.

Нами доказано, что надграфик квадрата нормы в гильбертовом пространстве является порождающим множеством. При этом были получены новые свойства известного класса κ -сильно выпуклых функций, введенного Б. Т. Поляком в [14].

В случае, когда M является шаром $B_R(0)$ из гильбертова пространства, для произвольного компактного множества введены понятия множеств M -сильно крайних точек и M -сильно выступающих точек, являющихся соответственно подмножествами крайних точек и выступающих точек этого множества. Нами получен аналог теоремы Крейна–Мильмана, в котором крайние точки заменены на M -сильно крайние точки, а выпуклая оболочка – на M -сильно выпуклую оболочку.

В $\mathbb{R}^n$ на основе центра Штейнера и $B_R(0)$ -сильно выпуклой оболочки множества построен новый класс непрерывных по Липшицу однозначных селекторов выпуклозначных и компактнозначных многозначных отображений.

В конце работы приведены примеры и контрпримеры, показывающие, что свойство быть порождающим множеством является достаточно капризным, в простых случаях (например для выпуклых многогранников) может не выполняться и легко нарушаться при алгебраических операциях с порождающими множествами.

В работе через E будем обозначать рефлексивное банахово (полное линейное нормированное) пространство над вещественным полем скаляров, через $\|\cdot\|$ – норму в E . Через $\mathcal{H}$ будем обозначать гильбертово (полное бесконечномерное) пространство со скалярным произведением $\langle a, b \rangle$ векторов a и b и согласованной с ним нормой $\|\cdot\|$. Через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать n -мерное евклидово пространство.

Напомним, что *суммой Минковского* множеств A и B из пространства E называется множество вида $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$; *разностью Минковского–Понтрягина* множеств A и B из E называется множество $A \dot{-} B = \{x : x + B \subset A\}$; *произведением скаляра* $\lambda \in \mathbb{R}$ *на множество* A называется множество $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. В пространстве E через $B_R(a)$ будем обозначать замкнутый шар $\{x : \|x - a\| \leq R\}$ радиуса $R > 0$ с центром в точке a . Замыкание множества A будем обозначать через $\bar{A}$, внутренность (относительную внутренность) – через $\text{int } A$ ($\text{ri } A$), границу – через ∂A . Через E^* обозначим сопряженное пространство к пространству E , $B_R^*(p) = \{q \in E^* : \|q - p\|_* \leq R\}$. *Диаметром* ограниченного множества A называется величина $\text{diam } A = \sup\{\|x - y\| : x, y \in A\}$. Для $p \in E^*$ через $\langle p, x \rangle$ будем обозначать значение функционала p в точке $x \in E$. Через $s(p, A)$, $p \in E^*$, будем обозначать *опорную функцию множества* A , т.е. $s(p, A) = \sup\{\langle p, x \rangle : x \in A\}$. *Метрика Хаусдорфа* в пространстве непустых замкнутых выпуклых множеств из банахова пространства E определяется по формуле $h(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset B + B_r(0), B \subset A + B_r(0)\}$.

Для выпуклого множества $A \subset E$ *барьерный конус* $b(A) \subset E^*$ и *рецессивный конус* $b(A)^- \subset E$ определяются по формулам $b(A) = \{p \in E^* : s(p, A) < +\infty\}$ и $b(A)^- = \{x \in E : \langle p, x \rangle \leq 0 \ \forall p \in b(A)\}$.

Для выпуклого замкнутого множества A и для вектора $p \in b(A)$, $p \neq 0$, через $A(p)$ будем обозначать *опорное множество* $A(p) = \{x \in A : \langle p, x \rangle = s(p, A)\}$. Если $A(p)$ непусто, то через x_p^A будем обозначать элемент множества $A(p)$.

Пусть банахово пространство E представлено в виде прямой суммы Минковского своих подпространств E_1 и E_2 (т.е. $E = E_1 + E_2$ и $E_1 \cap E_2 = 0$). Тогда множество $M = M_1 + M_2$, где $M_1 \subset E_1$ и $M_2 \subset E_2$, будем называть *прямой суммой множеств* M_1 и M_2 и обозначать $M_1 \oplus M_2$.

§ 1. Опорный принцип

Прежде всего дадим определения основных понятий: порождающего множества и сильно выпуклого множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Выпуклое замкнутое множество M в банаховом пространстве E назовем *порождающим множеством*, если для любого множества $A \neq \emptyset$ вида

$$A = \bigcap_{x \in X} (M + x) \quad (1.1)$$

найдется выпуклое замкнутое множество $B \subset E$ такое, что

$$\overline{A+B} = M. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Для всякого порождающего множества M непустое множество вида (1.1) будем называть *M -сильно выпуклым множеством*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. При определенных ограничениях на M замыкание в формуле (1.2) можно убрать. Именно такого типа условия фигурируют во многих полученных далее результатах. При этом для простоты изложения мы не всегда приводим соответствующие условия в максимальной общности. Главным образом мы пользуемся леммой 1.1, хотя в конкретных случаях возможны ослабления условий этой леммы.

ЛЕММА 1.1. Пусть A и B — замкнутые выпуклые множества из рефлексивного банахова пространства E , удовлетворяющие условию $0 \in \text{int}(b(A) - b(B))$. Тогда множество $A + B$ также замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{c_k\} \subset A + B$ такова, что $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c$ в E . Тогда существуют $\{a_k\} \subset A$ и $\{b_k\} \subset B$ такие, что $c_k = a_k + b_k$ для всех k . В силу условия леммы для любого $p \in E^*$, $p \neq 0$, существуют $\lambda > 0$, $p_1 \in b(A)$ и $p_2 \in b(B)$ такие, что $p = \lambda(p_1 - p_2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle p, a_k \rangle &= \lambda \langle p_1 - p_2, a_k \rangle = \lambda \langle p_1, a_k \rangle + \lambda \langle p_2, b_k \rangle - \lambda \langle p_2, c_k \rangle \\ &\leq \lambda(s(p_1, A) + s(p_2, B)) + \lambda(\|c\| + 1)\|p_2\|_*, \end{aligned}$$

т.е. $\sup_k \langle p, a_k \rangle < +\infty$ для любого $p \in E^*$.

По теореме Банаха–Штейнгауза последовательность $\{a_k\}$ ограничена. Поэтому она относительно слабо компактна в E , т.е. существует подпоследовательность $\{a_{k_m}\}$, которая слабо сходится к a , при этом подпоследовательность $b_{k_m} \subset B$ слабо сходится к $c - a$. Так как A и B выпуклы и замкнуты, то они слабо замкнуты, т.е. $a \in A$, $c - a \in B$, значит, $c \in A + B$.

Отметим некоторые свойства барьерных конусов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (см. [15; гл. 1, 5]).

- 1) Если $A, B \subset E$, $A \subset B$, то $b(A) \supset b(B)$, $b(A) = b(\overline{A})$;
- 2) если $A, B \subset E$, то $b(A + B) = b(A) \cap b(B)$;
- 3) если $A, B \subset E$ замкнуты и выпуклы, причем $0 \in \text{int}(A - B)$, то $b(A \cap B) = b(A) + b(B)$.

ЛЕММА 1.2. Пусть A — замкнутое выпуклое множество из рефлексивного банахова пространства E . Тогда для любого $p \in \text{int } b(A)$ опорное множество $A(p) = \{x \in A : \langle p, x \rangle = s(p, A)\}$ есть непустое замкнутое выпуклое подмножество множества A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $p \in \text{int } b(A)$. Определим множество $A_1 = \{x \in A : \langle p, x \rangle \geq s(p, A) - 1\}$. В силу определения опорной функции множество A_1 непусто, выпукло и замкнуто, причем $s(p, A_1) = s(p, A)$. Покажем, что $s(p, A_1) < +\infty$ для всех $p \in E^*$, т.е. $b(A_1) = E^*$. В самом деле, $A_1 = A \cap H$, где $H = \{x \in E : \langle -p, x \rangle \leq 1 - s(p, A)\}$. Следовательно, $-p \in b(H)$, $\text{int } H \neq \emptyset$ и $0 \in \text{int}(H - A)$. По свойству 3) предложения 1.1 $b(A_1) = b(A \cap H) = b(A) + b(H)$.

Так как для некоторого $\delta > 0$ верно $p + B_\delta^*(0) \subset b(A)$, то $B_\delta^*(0) \subset b(A) + b(H)$, т.е. $b(A) + b(H) = E^*$.

Следовательно, можем считать, что минимизирующая последовательность $\{a_k\} \subset A_1$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle p, a_k \rangle = s(p, A)$, сходится слабо к некоторой точке a , а так как A_1 замкнуто и выпукло, т.е. слабо замкнуто, то $a \in A(p)$.

Простым следствием теорем об отделимости (см., например, [16; теорема 3.1.2]) является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть A – выпуклое замкнутое подмножество из банахова пространства E и $\text{int } b(A) \neq \emptyset$. Тогда

$$A = \bigcap_{\substack{\|p\|_* = 1 \\ p \in \text{int } b(A)}} H_p, \quad (1.3)$$

где

$$H_p = \{x \in E : \langle p, x \rangle \leq s(p, A)\}. \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В случае, когда $E = \mathbb{R}^n$, формулу (1.3) можно усилить, заменив в ней $\text{int } b(A)$ на $\text{ri } b(A)$, при этом отказавшись в предложении 1.2 от условия, что $\text{int } b(A)$ непусто.

Уточним некоторые свойства барьерного и рецессивного конусов неограниченного выпуклого множества $A \subset E$.

Как показано в [15; предложение 1.5.3], для любого замкнутого выпуклого множества $A \subset E$ и для любого $a \in A$ справедливо равенство

$$b(A)^- = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda(A - a). \quad (1.5)$$

ЛЕММА 1.3. Пусть A и M – непустые выпуклые замкнутые множества из E , причем $A = \bigcap_{x \in X} (M + x)$ при некотором X . Тогда справедливы формулы

$$b(M)^- = M * M, \quad (1.6)$$

$$b(A)^- = b(M)^-, \quad (1.7)$$

$$\overline{b(A)} = \overline{b(M)}, \quad \text{int } b(A) = \text{int } b(M). \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (1.6). Из формулы (1.5) следует, что $b(M)^- \subset M - x \ \forall x \in M$, т.е. $b(M)^- \subset M \overset{*}{=} M$. Аналогично случаю $\mathbb{R}^n$ легко показать, что множество $M \overset{*}{=} M$ есть выпуклый конус (см. [17; теорема 2.8.1]). Допустим, что найдется точка $x_0 \in M \overset{*}{=} M$ такая, что $x_0 \notin b(M)^-$. Тогда по теореме об отделимости существует функционал $p_0 \in E^*$, $p_0 \neq 0$, такой, что $\langle p_0, x_0 \rangle > s(p_0, b(M)^-)$. Это означает, что $\langle p_0, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in b(M)^-$, т.е. $p_0 \in \overline{b(M)}$. С другой стороны, это означает, что $\langle p_0, x_0 \rangle > 0$, и так как x_0 принадлежит конусу $M \overset{*}{=} M$, то $p_0 \in \text{int}(E^* \setminus b(M))$. Противоречие приводит к (1.6).

Докажем (1.7). Из включения $A \subset M + x$ следует, что $b(A) \supset b(M)$, откуда, в свою очередь, следует включение $b(A)^- \subset b(M)^-$. Пусть $x \in b(M)^-$, тогда по (1.6) $x + M \subset M$, т.е. $x + M + y \subset M + y$ для каждого $y \in X$, следовательно $\bigcap_{y \in X} (x + M + y) \subset \bigcap_{y \in X} (M + y)$, т.е. $x + A \subset A$, откуда $x \in b(A)^-$ в силу (1.6).

Первое равенство в (1.8) следует из (1.7) в силу определения рецессивного конуса как поляры к барьерному конусу, второе равенство вытекает из первого в силу свойств выпуклых множеств.

ЛЕММА 1.4. Пусть A , B и M – такие выпуклые замкнутые множества из рефлексивного банахова пространства E , что $\text{int } b(M) \neq \emptyset$ и $A + B = M$. Тогда $A(p) + B(p) = M(p)$ для любого $p \in \text{int } b(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 1.2, 1.3 и свойства 2) из предложения 1.1 для любого $p \in \text{int } b(M)$ множества $A(p)$, $B(p)$, $M(p)$ непусты.

1. Пусть $a \in A(p)$, $b \in B(p)$. Тогда $a + b \in M$ и

$$\langle p, a + b \rangle = s(p, A) + s(p, B) = s(p, M),$$

т.е. $a + b \in M(p)$, откуда следует $A(p) + B(p) \subset M(p)$.

2. Пусть $z \in M(p)$ и $a \in A$, $b \in B$ такие, что $z = a + b$. Допустим, что $a \notin A(p)$. Тогда

$$s(p, M) = \langle p, z \rangle = \langle p, a + b \rangle < s(p, A) + s(p, B) = s(p, M),$$

получили противоречие. Следовательно, справедливо включение $A(p) + B(p) \supset M(p)$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $M \subset E$ – порождающее множество и $\text{int } b(M) \neq \emptyset$. Тогда для любого M -сильно выпуклого множества A , для любого $p \in \text{int } b(M)$, $\|p\|_* = 1$, и любого $x_p^A \in A(p)$ существуют $x_p^M \in M(p)$ такие, что

$$A = \bigcap_{\substack{\|p\|_* = 1 \\ p \in \text{int } b(M)}} (M + x_p^A - x_p^M). \quad (1.9)$$

Обратно, если выпуклое замкнутое множество M таково, что $\text{int } b(M) \neq \emptyset$ и любое множество A вида (1.1) представимо по формуле (1.9), то множество M – порождающее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого A вида (1.1) $\text{int } b(A) = \text{int } b(M)$ в силу леммы 1.3.

1. Пусть M – порождающее множество и A имеет вид (1.1). По определению 1.1 существует выпуклое замкнутое множество B такое, что $\overline{A+B} = M$. Так как $b(B) \supset b(M)$, то по лемме 1.1 получаем, что $A+B = M$. Фиксируем произвольный вектор $p \in \text{int } b(M)$, $\|p\|_* = 1$, и произвольный $x_p^A \in A(p)$. Фиксируем любой $x_p^B \in B(p)$. Для любых x_p^A и x_p^B в силу леммы 1.4 сумма $x_p^A + x_p^B \in M(p)$, поэтому обозначим через x_p^M выражение

$$x_p^A + x_p^B = x_p^M = x_p^M(x_p^A) \in M(p). \quad (1.10)$$

Из равенства $A+B = M$ и включения $x_p^B \in B$ следует включение $A+x_p^B \subset M$, отсюда и из (1.10) получаем $A \subset M+x_p^A-x_p^M(x_p^A)$. Так как последнее включение верно для любых $p \in \text{int } b(A)$, $\|p\|_* = 1$, и любых $x_p^A \in A$, то

$$A \subset \bigcap_{\substack{\|p\|_*=1 \\ p \in \text{int } b(M)}} (M+x_p^A-x_p^M(x_p^A)).$$

Пусть $H_p = \{x \in E : \langle p, x \rangle \leq s(p, A)\}$. Ясно, что $M+x_p^A-x_p^M(x_p^A) \subset H_p$ для всех $p \in \text{int } b(M)$. В силу выпуклости и замкнутости A имеем по предложению 1.2

$$\bigcap_{\substack{\|p\|_*=1 \\ p \in \text{int } b(M)}} (M+x_p^A-x_p^M(x_p^A)) \subset \bigcap_{\substack{\|p\|_*=1 \\ p \in \text{int } b(M)}} H_p = A.$$

Равенство (1.9) доказано.

2. Пусть для любого A вида (1.1) имеет место формула (1.9). Покажем, что множество M – порождающее.

Фиксируем $q \in \partial B_1^*(0) \cap \text{int } b(M)$. Тогда

$$s(q, A) \leq \inf_{\substack{\|p\|_*=1 \\ p \in \text{int } b(M)}} s(q, M+x_p^A-x_p^M) \leq s(q, M+x_q^A-x_q^M) = s(q, A),$$

откуда следует, что все неравенства здесь надо заменить на равенства, т.е.

$$s(q, A) = \inf_{\substack{\|p\|_*=1 \\ p \in \text{int } b(M)}} s(q, M+x_p^A-x_p^M) = s(q, M) - \sup_{\substack{\|p\|_*=1 \\ p \in \text{int } b(M)}} \langle q, x_p^M - x_p^A \rangle. \quad (1.11)$$

Определим множество

$$B = \overline{\text{co}} \bigcup_{\substack{\|p\|_*=1 \\ p \in \text{int } b(M)}} (x_p^M(x_p^A) - x_p^A).$$

Тогда в силу (1.11) для любого $q \in \partial B_1^*(0) \cap \text{int } b(M)$ выполнено равенство $s(q, A) + s(q, B) = s(q, M)$. Отсюда $A+B = M$ в силу предложения 1.2 и леммы 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 1.1 (опорный принцип). Пусть M есть выпуклое замкнутое множество в E , причем $\text{int } b(M) \neq \emptyset$. Множество M является порождающим тогда и только тогда, когда для любого множества $A \neq \emptyset$ вида (1.1), для любого $p \in \partial B_1^*(0) \cap \text{int } b(M)$ и любого $x_p^A \in A(p)$ найдутся $x_p^M \in M(p)$ такие, что

$$A \subset M+x_p^A-x_p^M. \quad (1.12)$$

Доказательство непосредственно следует из равенства (1.9).

§ 2. О некоторых классах порождающих множеств

Приступим к исследованию задачи нахождения классов порождающих множеств и к изучению операций с порождающими множествами, не выводящих из класса порождающих множеств.

Мы знаем, что класс порождающих множеств непуст. Так, например, в работе [9] впервые показано, что всякий шар $B_R(a)$ из $\mathbb{R}^n$ является порождающим множеством. Легко убедиться в том, что всякий k -мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$ также является порождающим множеством (см. пример 9.3).

В то же время нам известны примеры, показывающие, что даже в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$ достаточно простые множества типа пирамиды (см. пример 9.1) или веретена (см. пример 9.2) не являются порождающими множествами.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $M \subset E$ – выпуклое замкнутое множество с непустой внутренностью такое, что $\text{int } b(M) \neq \emptyset$. Пусть для любого множества X такого, что $\text{int}(M \dot{+} X) \neq \emptyset$, найдется выпуклое множество B_X , для которого $(M \dot{+} X) + B_X = M$. Тогда множество M является порождающим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – такое множество, что $\text{int}(M \dot{+} X) = \emptyset$, но $M \dot{+} X \neq \emptyset$. Покажем, что найдется множество B такое, что $(M \dot{+} X) + B = M$. Без ограничения общности можем считать, что $0 \in X \subset M$. Поскольку $M \dot{+} X = M \dot{+} \overline{\text{co}} X$, то без ограничения общности полагаем множество X выпуклым и замкнутым.

Так как $0 \in X \subset M$ и множество X выпукло, то $\forall \lambda \in (0, 1) \quad \lambda X \subset X$ и $M \dot{+} \lambda X \supset (1 - \lambda)M$, т.е. $\text{int}(M \dot{+} \lambda X) \neq \emptyset \quad \forall \lambda \in (0, 1)$. Пусть $\lambda_n = (n - 1)/n$, $A_n = M \dot{+} \lambda_n X$. Очевидно, $A_n \supset A_{n+1} \supset M \dot{+} X$. Пусть $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $M \dot{+} X \subset A$. В свою очередь, если $z \in A$, то $z + \lambda_n X \subset M$, т.е. $\forall x \in X \quad z + \lambda_n x \in M$ для всех n , следовательно, $z + x \in M$ для всех x , т.е. $z \in M \dot{+} X$. Итак, $A = M \dot{+} X$. По условию леммы найдутся выпуклые замкнутые множества B_n такие, что $A_n + B_n = M$. При этом $A + B_n \subset M$; $B_n \subset B_{n+1}$ для всех натуральных n .

Рассмотрим $B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}$. Тогда $A + B \subset M$. Докажем обратное включение. Пусть $t \in M$, тогда найдутся $a_n \in A_n$ и $b_n \in B_n$ такие, что $t = a_n + b_n$. Так как $\overline{b(A_n)} = \overline{b(M)} \subset \overline{b(B_n)}$, то, рассуждая, как в доказательстве леммы 1.1, получаем, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с точностью до подпоследовательности слабо сходятся к a и $t - a$ соответственно; так как $\{b_n\} \subset B$ и множество B выпукло и замкнуто, то $t - a \in B$. Поскольку для любого натурального N верно $\{a_n\} \subset A_N$ при всех $n > N$, то $a \in A_N$, т.е. $a \in A$. В итоге, $t \in A + B$, т.е. $A + B = M$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть в сепарабельном банаховом пространстве E даны ограниченные замкнутые выпуклые множества M и M_k , $k = 1, 2, \dots$, причем M_k суть порождающие множества, для которых выполнено одно из двух условий:*

- 1) $h(M_k, M) \rightarrow 0$, $\text{int } M \neq \emptyset$;
- 2) $M_k \supset M \quad \forall k$ и $M_k \rightarrow M$ в слабой топологии.

Тогда M также будет порождающим множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $\text{int } M \neq \emptyset$ и $h(M_k, M) \rightarrow 0$. По лемме 2.1 достаточно проверить, что для любого множества X такого, что $\text{int } (M \dot{+} X) \neq \emptyset$, найдется B такое, что $(M \dot{+} X) + B = M$.

Так как $\text{int } (M \dot{+} X) \neq \emptyset$, то существует шар $B_\alpha(z) \subset M \dot{+} X$, $\alpha > 0$. Будем рассматривать такие большие k , что $h = h(M_k, M) \leq \alpha$. Следовательно, $M \dot{+} B_h(0) \subset M_k$, откуда

$$M \dot{+} X \dot{+} B_h(0) \subset M_k \dot{+} X.$$

Пусть $G = M \dot{+} X$. Введем $D = \text{diam } G$. Рассмотрим $x \in \partial G$. Выберем $g \in [x, z]$ так, чтобы $\|x - g\|/\|x - z\| = h/\alpha$. В силу выпуклости G получаем $(1 - h/\alpha)x + h/\alpha B_\alpha(z) \subset G$, т.е. $B_h(g) \subset G$. Отсюда $g \in G \dot{+} B_h(0)$ и $\|x - g\| \leq Dh/\alpha$, т.е.

$$h(G, G \dot{+} B_h(0)) = \sup_{x \in \partial G} \varrho(x, G \dot{+} B_h(0)) \leq \frac{D}{\alpha} h.$$

Взяв $l = D/\alpha$, получим

$$M \dot{+} X \subset (M \dot{+} X) \dot{+} B_h(0) + lB_h(0) \subset M_k \dot{+} X + lB_h(0).$$

Последняя формула означает ε -полунепрерывность снизу $M_k \dot{+} X$, откуда следует полунепрерывность снизу в слабой топологии E . Отсюда же вытекает, что при всех достаточно больших k (когда $lh < \alpha$) $\text{int } (M_k \dot{+} X) \neq \emptyset$.

Поскольку $M_k \rightarrow M$ в слабой топологии E , то $M_k \dot{+} X$ слабо полунепрерывно сверху.

В итоге, $M_k \dot{+} X \rightarrow M \dot{+} X$ в слабой топологии E .

Для каждого k найдется B_k такое, что $(M_k \dot{+} X) + B_k = M_k$. Отсюда следует, что

$$s(p, M_k) \rightarrow s(p, M), \quad s(p, M_k \dot{+} X) \rightarrow s(p, M \dot{+} X),$$

тогда $s(p, B_k) \rightarrow g(p) = s(p, M) - s(p, M \dot{+} X)$ — выпуклая непрерывная функция. Для $B = \{x : \langle p, x \rangle \leq g(p) \ \forall p \in \partial B_1^*(0)\}$ получаем $(M \dot{+} X) + B = M$.

2. Пусть $M_k \supset M \ \forall k$ и $M_k \rightarrow M$ в слабой топологии. Тогда $M_k \dot{+} X \rightarrow M \dot{+} X$ в слабой топологии E . Далее доказательство повторяет п. 1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны компакт M и последовательность порождающих множеств M_k , причем $M_k \subset M$ для всех k и $h(M_k, M) \rightarrow 0$. Тогда M также будет порождающим множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя в несущее подпространство M , можем без ограничения общности считать, что $\text{int } M \neq \emptyset$ и все M_k целиком содержатся в этом несущем подпространстве. Утверждение следует из теоремы 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В конце работы приведен пример 9.4, показывающий, что условия теоремы 2.1 существенны.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть M — порождающее множество из E . Тогда для любого $p \in \text{int } b(M)$ опорное множество $M(p)$ будет порождающим в многообразии $H_p^\circ = \{x : \langle p, x \rangle = s(p, M)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $p \in \text{int } b(M)$. Сдвигая при необходимости M , можем считать, что H_p° – подпространство пространства E . По лемме 1.2 множество $M(p)$ есть непустое замкнутое выпуклое множество. Пусть X – замкнутое множество из H_p° и пусть

$$A = \bigcap_{x \in X} (M(p) + x) \neq \emptyset.$$

Очевидно, что $A(p) = A$. Определим $A_1 = \bigcap_{x \in X} (M + x)$. Из справедливости для каждого $x \in X$ включения $A_1(p) \subset (M + x)(p) = M(p) + x$ следует включение

$$A_1(p) \subset \bigcap_{x \in X} (M(p) + x) = A \subset A_1,$$

т.е. $A_1(p) = A$ и $A_1 \neq \emptyset$.

Так как M порождающее, то найдется выпуклое замкнутое множество C_1 такое, что $A_1 + C_1 = M$. По лемме 1.4 получаем, что

$$A_1(p) + C_1(p) = M(p),$$

т.е. $A + B = M(p)$, где в качестве B возьмем $C_1(p)$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $M \subset E_1$ – порождающее множество и T – непрерывный линейный оператор из E_1 на E_2 , имеющий обратный. Тогда TM является порождающим множеством в E_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_2 = \bigcap_{x \in X} (TM + x)$. Отметим, что для любых замкнутых множеств $P \subset E_1$ и $Q \subset E_2$ образы TP и $T^{-1}Q$ являются замкнутыми множествами в E_2 и E_1 соответственно в силу непрерывности операторов T и T^{-1} (см. [18; следствие 2.2]). Поэтому

$$A_2 = \bigcap_{x \in X} (TM + x) = \bigcap_{x \in X} T(M + T^{-1}x) = \bigcap_{y \in Y} T(M + y),$$

где через Y обозначили $T^{-1}X$. Обозначим $A_1 = \bigcap_{y \in Y} (M + y)$. Покажем, что $A_2 = TA_1$. Так как включение $A_2 \supset TA_1$ очевидно, то докажем включение $A_2 \subset TA_1$. Пусть $z \in A_2$. Тогда $z \in T(M + y) \ \forall y \in Y$, что равносильно включению $T^{-1}z \in M + y \ \forall y \in Y$. Поэтому $T^{-1}z \in A_1$, т.е. $z \in TA_1$. Равенство доказано.

Так как A_1 есть M -сильно выпуклое множество, то найдется выпуклое множество B_1 такое, что $A_1 + B_1 = M$. Действуя линейным оператором T на обе части последнего равенства, получаем $A_2 + TB_1 = TM$, где TB_1 – выпуклое замкнутое множество; т.е. TM – порождающее множество.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Любой эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ есть порождающее множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой эллипсоид есть образ шара при невырожденном линейном преобразовании. Утверждение следует из теоремы 2.3 и того, что любой шар из $\mathbb{R}^n$ – порождающее множество (см. [9; теоремы 1, 2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В конце работы приведен пример 9.5, показывающий, что если в условии теоремы 2.3 оператор T вырожден, то утверждение этой теоремы может не выполняться.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $M_1 \subset E_1$ и $M_2 \subset E_2$ – порождающие множества. Тогда их прямая сумма $M_1 \oplus M_2$ также будет порождающим множеством в прямой сумме пространств $E_1 \oplus E_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = M_1 \oplus M_2$, $X \subset E_1 \times E_2$: $M \overset{*}{\neq} X \neq \emptyset$. Пусть π_1 – проектор на E_1 , а π_2 – проектор на E_2 . Докажем равенство

$$M \overset{*}{\neq} X = M \overset{*}{\neq} (\pi_1 X \oplus \pi_2 X). \quad (2.1)$$

Правое множество в формуле (2.1) очевидно содержится в левом, поскольку $X \subset \pi_1 X \oplus \pi_2 X$. Покажем справедливость обратного включения. Пусть $z \in M \overset{*}{\neq} X$. Это равносильно включению $z + X \subset M$, действуя на которое проекторами π_1 и π_2 , получаем

$$\pi_i z + \pi_i X \subset M_i, \quad i = 1, 2.$$

Взяв прямую сумму двух последних включений, имеем

$$(\pi_1 z \oplus \pi_2 z) + (\pi_1 X \oplus \pi_2 X) \subset M,$$

а так как $z = \pi_1 z \oplus \pi_2 z$, то $z \in M \overset{*}{\neq} (\pi_1 X \oplus \pi_2 X)$. Аналогично равенству (2.1) легко показать, что

$$M \overset{*}{\neq} (\pi_1 X \oplus \pi_2 X) = (M_1 \overset{*}{\neq} \pi_1 X) \oplus (M_2 \overset{*}{\neq} \pi_2 X). \quad (2.2)$$

Пусть B_i – такие множества, что $(M_i \overset{*}{\neq} \pi_i X) + B_i = M_i$, $i = 1, 2$. Взяв прямую сумму двух последних равенств и учитывая равенство (2.1) и формулу (2.2), получаем, что

$$M = (M \overset{*}{\neq} X) + (B_1 \oplus B_2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В примере 9.6 показано, что в общем случае сумма Минковского двух порождающих множеств может не быть порождающим множеством.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Теорема 2.4 справедлива и для множеств, представимых в виде прямой суммы произвольного числа (конечного или бесконечного) порождающих множеств в соответствующей прямой сумме (конечной или бесконечной) пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обобщения теоремы 2.4 в случае бесконечного числа прямых слагаемых достаточно повторить рассуждения и воспользоваться очевидным равенством

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} (A_i + B_i) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i + \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i, \quad (2.3)$$

где $A_i \subset E_i$ и $B_i \subset E_i$ для всех i и $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ есть набор соответствующих векторных пространств.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Гильбертов кирпич из пространства l_p , где $p \in (1, +\infty)$, является порождающим множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого $x \in l_p$ через $\pi_i x = x_i$ обозначается i -й элемент последовательности x . *Гильбертовым кирпичом*, как известно, называется множество $M = \{x \in l_p : |x_i| \leq 1/i\}$. Отметим, что $l_p \subset \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i$, где $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}$ для всех i .

Рассмотрим произвольное непустое множество $X \subset l_p$ такое, что $M \overset{*}{\neq} X \neq \emptyset$. Без ограничения общности считаем, что $X \subset M$.

Поскольку для любого i множества $\pi_i M$ суть отрезки в $\mathbb{R}_i$ и $\pi_i X \subset \pi_i M \subset [-1/i, 1/i]$, то очевидно, что найдутся отрезки $B_i \subset \mathbb{R}_i$, для которых $(\pi_i M \overset{*}{\neq} \pi_i X) + B_i = \pi_i M$ и $B_i \subset [-3/i, 3/i]$. Введем множество

$$B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i. \quad (2.4)$$

По следствию 2.3 справедливо равенство

$$M \overset{*}{\neq} X + B = M. \quad (2.5)$$

Осталось показать, что $B \subset l_p$. В самом деле, если $b = (\dots, b_i, \dots) \in B \subset \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i$, то $-3/i \leq b_i \leq 3/i$, откуда следует, что

$$\|b\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^p}{i^p} < +\infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Единичный шар в l_{∞} является порождающим множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что единичным шаром в пространстве $l_{\infty} \subset \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i$ является множество $M = \{x \in l_{\infty} : |x_i| \leq 1\}$.

Повторяя рассуждения из доказательства следствия 2.4, получаем, что если $X \subset M$, то существует множество вида (2.4), для которого в силу теоремы 2.4 справедливо равенство (2.5). При этом $B_i \subset [-3, 3]$, откуда $\|b\|_{\infty} \leq 3$ для любого $b \in B$, т.е. $B \subset l_{\infty}$.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть M – выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$. Пусть для каждого $p \in \partial B_1(0)$, для любых наборов векторов $\{p_i\}_{i=1}^k$ и чисел $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ таких, что $\|p_i\| = 1$, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i = p$, $2 \leq k \leq n$, и для любых $x_{p_i}^M \in M(p_i)$ найдутся $x_p^M \in M(p)$ такие, что*

$$\bigcap_{i=1}^k (M - x_{p_i}^M) \subset M - x_p^M. \quad (2.6)$$

Тогда множество M является порождающим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $\text{int } M \neq \emptyset$. Мы покажем, что для любого множества вида $A = \bigcap_{x \in X} (M + x)$, где X такой компакт, что $\text{int } A \neq \emptyset$, выполнена формула (1.9). Тогда по теореме 1.1 и лемме 2.1 множество M будет порождающим.

Известно, что опорная функция множества A имеет вид $s(p, A) = \text{co } f(p)$, где $f(p) = \min_{x \in X} (s(p, M) + \langle p, x \rangle)$. Из условия непустоты внутренности A следует (см. [19; гл. 1, §5, предложение 14]), что инфимум в операции овыпукления f достигается, т.е.

$$\text{co } f(p) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(p_i), \quad \lambda_i > 0, \quad \|p_i\| = 1, \quad \sum \lambda_i p_i = p, \quad k \leq n.$$

Фиксируем $x_i \in \text{Arg } \min_{x \in X} \langle p_i, x \rangle$, $1 \leq i \leq k$. Для любого $p \in \partial B_1(0)$ и любого $x_p^A \in A \subset M + x_i$ (при всех i) получаем $\langle p_i, x_p^A \rangle \leq s(p_i, M) + \langle p_i, x_i \rangle$. Тогда

$$s(p, A) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (s(p_i, M) + \langle p_i, x_i \rangle) \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle p_i, x_p^A \rangle = \langle p, x_p^A \rangle = s(p, A).$$

Таким образом, последние неравенства нужно заменить на равенства и $\langle p_i, x_p^A \rangle = s(p_i, M) + \langle p_i, x_i \rangle$ для всех i , а в силу включения $x_p^A \in M + x_i$ найдутся $x_{p_i}^M \in M$, зависящие от x_p^A , такие, что $x_p^A = x_{p_i}^M + x_i$.

Имеем $A \subset \bigcap_{i=1}^k (M + x_p^A - x_{p_i}^M)$. По условию теоремы существует элемент $x_p^M \in M$ такой, что правое множество содержится в $M + x_p^A - x_p^M$. Отсюда

$$A \subset \bigcap_{\|p\|=1} (M + x_p^A - x_p^M).$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ есть выпуклый компакт. Пусть для всякого вектора $p \in \partial B_1(0)$ выбраны произвольные конечные наборы векторов $\{p_i\}_{i=1}^k$ и положительных чисел $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ такие, что $k \geq 2$, $\|p_i\| = 1$, $p_i \neq p$ для всех i и $\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i = p$. Пусть также фиксированы произвольные $x_p^M \in M(p)$ и $x_{p_i}^M \in M(p_i)$. Тогда справедливо включение

$$\bigcap_{i=1}^k (M - x_{p_i}^M) \subset M - x_p^M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для некоторого номера i верно равенство $x_{p_i}^M = x_p^M$, то включение очевидно. Поэтому далее будем считать, что $x_{p_i}^M \neq x_p^M$ для всех i . Для простоты сдвинем начало координат в точку x_p^M , т.е. $x_p^M = 0$ и $s(p, M) = 0$.

Легко показать, что найдутся два вектора из набора $\{p_i\}_{i=1}^k$ (без ограничения общности это p_1 и p_2) такие, что

$$p = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2, \quad \mu_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Фиксируем $q \in \partial B_1(0)$. Для q имеется по крайней мере одна из трех возможностей:

- 1) q лежит в конической оболочке пары векторов p_1 и p_2 ;
- 2) q лежит в конической оболочке пары векторов p_i и $x_{p_i}^M$, где $i = 1, 2$;
- 3) q лежит в конической оболочке векторов $x_{p_1}^M$ и $x_{p_2}^M$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай 1. Имеем $q = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$, где $\alpha_i > 0$. Пользуясь выпуклостью и положительной однородностью опорной функции, получаем

$$\begin{aligned} s\left(q, \bigcap_{i=1}^k (M - x_{p_i}^M)\right) &\leq \sum_{i=1}^2 \alpha_i s\left(p_i, \bigcap_{j=1}^k (M - x_{p_j}^M)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \alpha_i s(p_i, M - x_{p_i}^M) = 0 \leq s(q, M). \end{aligned}$$

Случай 2. Пусть, для определенности, $i = 1$. Тогда $\langle p_1, x_{p_1}^M \rangle = s(p_1, M) \geq 0$, $0 \in M$. Отсюда следует, что угол между векторами p_1 и $x_{p_1}^M$ не больше $\pi/2$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что угол между векторами q и $x_{p_1}^M$ также не превосходит $\pi/2$. Следовательно,

$$s\left(q, \bigcap_{i=1}^k (M - x_{p_i}^M)\right) \leq s(q, M) - \langle q, x_{p_1}^M \rangle \leq s(q, M).$$

Случай 3. Так как $s(p, M) = 0$, то векторы $x_{p_i}^M$ лежат в полуплоскости $\{x : \langle p, x \rangle \leq 0\}$, поэтому угол между $x_{p_1}^M$ и $x_{p_2}^M$ не больше π . Следовательно, угол между q и одним из векторов $x_{p_i}^M$, $i = 1, 2$, не превосходит $\pi/2$. Пусть, для определенности, угол между $x_{p_1}^M$ и q не более $\pi/2$. Имеем

$$s\left(q, \bigcap_{i=1}^k (M - x_{p_i}^M)\right) \leq s(q, M) - \langle q, x_{p_1}^M \rangle \leq s(q, M).$$

Итак, поскольку для любого $q \in \partial B_1(0)$ реализуется один из случаев 1–3, то

$$s\left(q, \bigcap_{i=1}^k (M - x_{p_i}^M)\right) \leq s(q, M) \quad \forall q \in \partial B_1(0).$$

Отсюда вытекает требуемое включение.

Из теоремы 2.5 и леммы 2.2 непосредственно получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Любой выпуклый компакт из $\mathbb{R}^2$ является порождающим множеством.*

ЛЕММА 2.3. *Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, L – замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$ и π – ортогональный проектор $\mathcal{H}$ на L . Тогда если $L \cap B_R(x) \neq \emptyset$, то*

$$L \cap B_R(x) = \{y \in L : \|y - \pi x\| \leq \sqrt{R^2 - \|x - \pi x\|^2}\}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка $y \in L \cap B_R(x)$ тогда и только тогда, когда $y \in L$ и $\|y - x\|^2 \leq R^2$. Это эквивалентно

$$\|y - \pi x - (x - \pi x)\|^2 \leq R^2, \quad \langle y - \pi x, x - \pi x \rangle = 0,$$

откуда получаем (2.7).

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $R > 0$. Тогда шар $B_R(0)$ в $\mathcal{H}$ является порождающим множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \bigcap_{x \in X} B_R(x)$, $X \subset \mathcal{H}$. Допустим противное, тогда по теореме 1.1 существует такое $p \in \partial B_1^*(0)$, для которого

$$z \in A \setminus B_R(x_p - pR), \quad \text{где } x_p \in A, \quad \langle p, x_p \rangle = s(p, A). \quad (2.8)$$

Пусть $L = \text{aff}\{x_p, z, x_p - pR\}$. Покажем, что L – двумерное линейное многообразие в $\mathcal{H}$. Действительно, $z \notin \{x_p + \lambda p : \lambda > 0\}$, $\langle p, z \rangle \leq \langle p, x_p \rangle = s(p, A)$; $z \notin \{x_p - 2pR - \lambda p : \lambda > 0\}$, иначе $\|x_p - z\| > 2R$, что противоречит определению A ; $z \notin \{x_p - \lambda p : \lambda \in [0, 2R]\}$, так как $\|z - (x_p - pR)\| > R$. Итак, z не лежит на прямой $\text{aff}\{x_p, x_p - pR\}$, т.е. L двумерно.

Без ограничения общности будем считать, что $x_p - pR = 0$ и $L = \text{lin}\{e_1, e_2\}$, где $\{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис в L . Пусть π – ортогональный проектор на L .

Подпространство L с базисом $\{e_1, e_2\}$ изоморфно $\mathbb{R}^2$. По лемме 2.3

$$B_L = B_R(0) \cap L = \{(\xi_1, \xi_2) \in L : \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq R^2\},$$

$$A_L = A \cap L = \bigcap_{x \in X} \{(\xi_1, \xi_2) \in L : (\xi_1 - \pi_1(x))^2 + (\xi_2 - \pi_2(x))^2 \leq r_x^2\},$$

где $(\pi_1(x), \pi_2(x)) = \pi x$, а $r_x = \sqrt{R^2 - \|x - \pi x\|^2}$. Отметим, что $z \in A_L \setminus B_L$.

Так как $x_p \in A_L$, то $\langle p, x_p \rangle \leq s(p, A_L) \leq s(p, A) = \langle p, x_p \rangle$, т.е. $x_p \in A_L(p)$. Аналогично $x_p \in B_L(p)$.

Итак, в базисе $\{e_1, e_2\}$ B_L изоморфно кругу радиуса R в $\mathbb{R}^2$, A_L изоморфно пересечению кругов радиусов не более R , x_p – опорный элемент A_L и B_L в направлении p . По теоремам 2.6 и 1.1 это влечет $A_L \subset B_L$. Но это противоречит тому, что $z \in A_L \setminus B_L$. Противоречие показывает, что $B_R(0)$ – порождающее множество.

§ 3. Надграфик параболы – порождающее множество

Покажем, что надграфик параболы является порождающим множеством в пространстве $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. При этом изучим некоторые свойства сильно выпуклых функций. Следуя [14], напомним определение сильно выпуклой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функция $f: \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *сильно выпуклой с константой $\varkappa > 0$* , если существует собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция $g: \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $f(x) = g(x) + \frac{1}{2}\varkappa\|x\|^2$, $x \in \mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $\varkappa > 0$; $\varkappa$ -сильно выпуклым преобразованием функции $f: \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ назовем функцию $f_{\varkappa}^{\#}: \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ вида

$$f_{\varkappa}^{\#}(x^*) = \sup_{x \in \mathcal{H}} \left(\frac{\varkappa}{2} \|x + x^*\|^2 - f(x) \right). \quad (3.1)$$

Из определений 3.1 и 3.2 следует, что

$$f_{\varkappa}^{\#}(x^*) = \frac{\varkappa}{2} \|x^*\|^2 + g^*(\varkappa x^*), \quad (3.2)$$

где $g^*(x^*)$ есть преобразование Юнга–Фенхеля (см., например, [16], [17]) функции $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\varkappa\|x\|^2$.

Применяя (3.1) к функции $f_{\varkappa}^{\#}(x^*)$, получаем второе $\varkappa$ -сильно выпуклое преобразование $f_{\varkappa\#}^{\#}(x)$. Используя формулу (3.2) и свойства преобразования Юнга–Фенхеля [16], [17], получаем, что если f есть собственная сильно выпуклая функция с константой $\varkappa > 0$, то $f_{\varkappa}^{\#}(x^*)$ является собственной полунепрерывной снизу сильно выпуклой функцией с той же константой $\varkappa$, при этом справедливы неравенства:

$$f(x) + f_{\varkappa}^{\#}(x^*) \geq \frac{\varkappa}{2} \|x + x^*\|^2 \quad \forall x, x^* \in \mathcal{H}, \quad (3.3)$$

$$f_{\varkappa\#}^{\#}(x) \leq f(x), \quad x \in \mathcal{H}. \quad (3.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $f: \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – собственная функция. Тогда f является полунепрерывной снизу сильно выпуклой функцией с константой $\varkappa > 0$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$f_{\varkappa\#}^{\#} = f. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если верно равенство (3.5), то f сильно выпукла и полунепрерывна снизу. Если f – сильно выпуклая функция, то в силу определения 3.1 получим

$$f_{\varkappa\#}^{\#}(x) = \frac{\varkappa}{2} \|x\|^2 + g^{**}(x), \quad (3.6)$$

где g^{**} – вторая сопряженная Юнга–Фенхеля функции g . Так как g – собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, то по теореме Фенхеля–Моро справедливо равенство $g = g^{**}$, откуда следует равенство (3.5).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Всякая собственная полунепрерывная снизу сильно выпуклая функция $f: \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ с константой $\varkappa > 0$ совпадает с верхней гранью семейства всех не превосходящих ее парабол вида $\varphi_{a,b}(x) = \frac{1}{2}\varkappa\|x + a\|^2 + b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, в силу (3.5) получаем равенство

$$f(x) = \sup_{x^* \in \text{dom } f_{\varkappa}^{\#}} \left(\frac{\varkappa}{2} \|x + x^*\|^2 - f_{\varkappa}^{\#}(x^*) \right). \quad (3.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Функцию вида $f_{\varkappa\#}^{\#}(x)$ назовем $\varkappa$ -сильно выпуклой оболочкой функции $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, т.е.

$$\text{strco}_{\varkappa} f(x) = \frac{\varkappa}{2} \|x\|^2 + \left(f(x) - \frac{\varkappa}{2} \|x\|^2 \right)^{**}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\varkappa > 0$. Тогда в пространстве $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$ надграфик параболы $M_{\varkappa} = \{(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R} : y \geq \frac{1}{2}\varkappa\|x\|^2\}$ является порождающим множеством. При этом надграфики сильно выпуклых с данной константой $\varkappa$ функций и только они являются $M_{\varkappa}$ -сильно выпуклыми множествами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой сильно выпуклой функции f с данной константой $\varkappa$ в силу следствия 3.1 получаем равенство

$$\text{epi } f = \bigcap_{x^* \in X} \text{epi } \varphi_{x^*, \alpha}, \quad (3.8)$$

где $\varphi_{x^*, \alpha}(x) = \frac{1}{2}\varkappa\|x + x^*\|^2 - \alpha$, $\alpha = f_{\varkappa}^{\#}(x^*)$, $X = \text{dom } f_{\varkappa}^{\#}$.

Справедливо и обратное. Если для функции $f \neq +\infty$ верно равенство (3.8), где $\varphi_{x^*, \alpha}(x)$ – некоторое семейство парабол с коэффициентом $\varkappa$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup_{(x^*, \alpha) \in Y} \left(\frac{\varkappa}{2} \|x + x^*\|^2 - \alpha \right) \\ &= \frac{\varkappa}{2} \|x\|^2 + \sup_{(x^*, \alpha) \in Y} \left(\langle \varkappa x, x^* \rangle - \left(\alpha - \frac{\varkappa}{2} \|x^*\|^2 \right) \right) = \frac{\varkappa}{2} \|x\|^2 + h^*(\varkappa x), \end{aligned}$$

где h^* есть собственная (по условию) функция, причем она выпукла и полунепрерывна снизу как сопряженная Юнга–Фенхеля функция к некоторой функции h , легко определяемой множеством Y . В итоге показали, что f есть собственная полунепрерывная снизу сильно выпуклая функция.

Поэтому чтобы доказать, что $M_{\varkappa}$ является порождающим множеством в $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, достаточно проверить, что для любой собственной полунепрерывной снизу сильно выпуклой функции f найдется функция h такая, что

$$\text{epi } f + \text{epi } h = \text{epi } \left(\frac{\varkappa}{2} \|\cdot\|^2 \right). \quad (3.9)$$

Покажем, что (3.9) верно при $h = f_{\varkappa}^{\#}$. Легко проверить, что при этом равенство (3.9) эквивалентно равенству функций

$$\inf_{y \in \mathcal{H}} \{f(x - y) + f_{\varkappa}^{\#}(y)\} = \frac{\varkappa}{2} \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (3.10)$$

В силу неравенства (3.3) достаточно доказать, что для любого $x \in \mathcal{H}$ найдутся x_1 и x_2 из $\mathcal{H}$ такие, что

$$f(x_1) + f_{\varkappa}^{\#}(x_2) = \frac{\varkappa}{2} \|x\|^2, \quad x_1 + x_2 = x. \quad (3.11)$$

Ввиду определений 3.1 и 3.2 равенство (3.11) эквивалентно равенству

$$g(x_1) + g^*(\tilde{x}_2) = \langle x_1, \tilde{x}_2 \rangle, \quad (3.12)$$

где $\tilde{x}_2 = \varkappa x_2$, т.е. $x_1 + \varkappa^{-1}x_2 = x$.

В силу [16; § 4.2, предложение 1] равенство (3.12) эквивалентно включению $\tilde{x}_2 \in \partial g(x_1)$. В итоге, (3.9) эквивалентно тому, что для всякой собственной полунепрерывной снизу выпуклой функции $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ для любого $x \in \mathcal{H}$ и для любого $\varkappa > 0$ найдется $x_1 \in \mathcal{H}$ такой, что $x \in x_1 + \varkappa^{-1}\partial g(x_1)$. Последнее утверждение доказано в [15; теорема 4.3.11].

§4. Простейшие свойства M -сильно выпуклых множеств

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.

1. Пусть $A \subset E$ есть M_1 -сильно выпуклое множество, а M_1 является M_2 -сильно выпуклым множеством. Тогда A будет M_2 -сильно выпуклым множеством.
2. Пусть $A_1, A_2 \subset E$, причем A_1 является M -сильно выпуклым. Тогда если множество $A_1 \dot{*} A_2$ непусто, то M -сильно выпукло.
3. Пусть даны два порождающие множества M_1 и M_2 такие, что множество $M = M_1 + M_2$ замкнуто, и два множества A_1 и A_2 , являющиеся соответственно M_1 - и M_2 -сильно выпуклыми. Тогда для множества $A = A_1 + A_2$ найдется выпуклое замкнутое множество B такое, что справедливо равенство $A + B = M$.
4. Выпуклое замкнутое множество A является M -сильно выпуклым тогда и только тогда, когда разность опорных функций $s(p, M) - s(p, A)$ есть выпуклая собственная полунепрерывная снизу функция.
5. Пусть $f: E^* \rightarrow \mathbb{R}$ – собственная положительно однородная полунепрерывная снизу функция такая, что $\overline{\text{co}}f > -\infty$, а $M \subset E$ есть порождающее множество. Пусть разность опорных функций $s(p, M) - f(p)$ является собственной выпуклой и полунепрерывной снизу функцией, тогда и разность $s(p, M) - \overline{\text{co}}f(p)$ также является собственной выпуклой и полунепрерывной снизу функцией.
6. Пусть дана последовательность ограниченных порождающих множеств M_k , для которой существует выпуклое замкнутое ограниченное множество M такое, что для всех k справедливы равенства $M_k + (M \dot{*} M_k) = M$. Пусть $\{A_k\}$ – последовательность M_k -сильно выпуклых множеств, сходящаяся к A в метрике Хаусдорфа. Тогда существует выпуклое замкнутое множество B такое, что справедливо равенство $A + B = M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость пп. 1 и 2 легко следует из определений 1.1 и 1.2; п. 4 вытекает из теоремы 1.1.

3. Имеем $A_i + B_i = M_i$, $i = 1, 2$. Складывая равенства, получаем, что $A + (B_1 + B_2) = M$.

5. Из условия следует, что найдется выпуклое замкнутое множество X из E такое, что $s(p, X) = s(p, M) - f(p)$ (см. [20; гл. 1]). Так как $\overline{\text{co}}f \leq f$ и $\overline{\text{co}}f > -\infty$, то $\overline{\text{co}}f$ есть опорная функция некоторого множества $Y \subset E$, т.е. $\overline{\text{co}}f(p) = s(p, Y)$. Итак,

$$s(p, Y) = \overline{\text{co}}(s(p, M) - s(p, X)),$$

т.е. $Y = M \dot{*} X$ является M -сильно выпуклым множеством, причем

$$s(p, M) - \overline{\text{co}}f(p) = s(p, M) - s(p, Y),$$

следовательно, по п. 4 последняя функция является собственной выпуклой и полунепрерывной снизу.

6. Для любого k найдется выпуклое множество B_k такое, что $A_k + B_k = M_k$. Отсюда $A_k + B_k + (M \dot{*} M_k) = M$. Определим $C_k = B_k + (M \dot{*} M_k)$ для всех k .

Имеем $A_k + C_k = M$ для всех k . Из сходимости A_k к A в метрике Хаусдорфа следует сходимость C_k к C в метрике Хаусдорфа, причем $A + C = M$ по лемме 1.1.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $R > 0$ и ограниченное выпуклое замкнутое множество A является $B_R(0)$ -сильно выпуклым множеством в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда градиент опорной функции множества A существует и удовлетворяет условию Липшица на $\partial B_1(0)$ с константой R , т.е.

$$\|x_p^A - x_q^A\| \leq R\|p - q\| \quad \forall p, q \in \partial B_1(0). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $p \in \partial B_1(0)$ по лемме 1.2 опорное множество $A(p)$ непусто. Из определений субдифференциала и опорной функции следует, что $A(p) = \partial s(p, A) \quad \forall p \in \partial B_1(0)$. Так как в силу строгой выпуклости A множество $A(p)$ состоит из одной точки x_p^A , то это означает существование градиента опорной функции. Таким образом, остается доказать неравенство (4.1). Отметим, что для $M = B_R(0)$ каждое множество $M(p)$, где $p \in \partial B_1(0)$, очевидно, состоит из одной точки pR . По опорному принципу (см. следствие 1.1) для любых $p, q \in \partial B_1(0)$ получаем $x_p^A \in A \subset B_R(x_q^A - qR)$, $x_q^A \in A \subset B_R(x_p^A - pR)$. Отсюда следует, что

$$\|x_p^A - x_q^A\|^2 \leq 2R\langle q, x_q^A - x_p^A \rangle, \quad \|x_p^A - x_q^A\|^2 \leq 2R\langle p, x_p^A - x_q^A \rangle.$$

Складывая два последних неравенства, получаем, что $2\|x_p^A - x_q^A\|^2 \leq 2R\langle p - q, x_p^A - x_q^A \rangle$, откуда следует неравенство (4.1).

§ 5. М-СИЛЬНО ВЫПУКЛАЯ ОБОЛОЧКА МНОЖЕСТВ

Введем понятие M -сильно выпуклой оболочки множества, обобщающее классическое понятие выпуклой оболочки множества и понятие r -сильно выпуклой оболочки множества, рассмотренной в работе [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $M \subset E$ — выпуклое замкнутое множество. Для всякого множества A такого, что $M \overset{*}{\neq} A \neq \emptyset$, M -сильно выпуклой оболочкой множества A назовем множество вида

$$\text{strco}_M A = M \overset{*}{\neq} (M \overset{*}{\neq} A).$$

Очевидно, что опорная функция M -сильно выпуклой оболочки множества A имеет вид

$$s(p, \text{strco}_M A) = \overline{\text{co}}(s(p, M) - \overline{\text{co}}(s(p, M) - s(p, A))). \quad (5.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В случае, когда множество M ограничено, операцию замыкания выпуклых оболочек в формуле (5.1) можно опустить.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Операция взятия M -сильно выпуклой оболочки множества наследует многие полезные в приложениях свойства r -сильно выпуклой оболочки, описанные в [9].

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть M – порождающее множество и A – такое множество из E , что $M \stackrel{*}{=} A \neq \emptyset$. Тогда множество $\text{strco}_M A$ является наименьшим по включению M -сильно выпуклым множеством, содержащим A . Опорная функция этого множества задается формулой

$$s(p, \text{strco}_M A) = s(p, M) - \overline{\text{co}}(s(p, M) - s(p, A)), \quad p \in b(M), \quad (5.2)$$

$$s(p, \text{strco}_M A) = +\infty, \quad p \notin b(M). \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из включения $A + (M \stackrel{*}{=} A) \subset M$, которое справедливо всегда (см., например, [19; гл. 1, § 1, формула (3)]), имеем $A \subset \text{strco}_M A$. Так как $\text{strco}_M A = M \stackrel{*}{=} X$, где $X = M \stackrel{*}{=} A$, то $\text{strco}_M A$ является M -сильно выпуклым множеством.

Пусть дано произвольное M -сильно выпуклое множество C , содержащее A . Имеем $M \stackrel{*}{=} C \subset M \stackrel{*}{=} A$, отсюда в силу того, что C есть M -сильно выпуклое множество, получаем $C = M \stackrel{*}{=} (M \stackrel{*}{=} C) \supset \text{strco}_M A$. Итак, $\text{strco}_M A$ есть наименьшее по включению M -сильно выпуклое множество, содержащее A .

В силу определения порождающего множества $M \text{ strco}_M A + (M \stackrel{*}{=} A) = M$. Отсюда следует формула для опорной функции $\text{strco}_M A$.

Приведем некоторые свойства M -сильно выпуклой оболочки множеств.

ТЕОРЕМА 5.2.

1. Пусть $A_1 \subset A_2$ и $M \stackrel{*}{=} A_2 \neq \emptyset$. Тогда $\text{strco}_M A_1 \subset \text{strco}_M A_2$.
2. Пусть $M \stackrel{*}{=} A \neq \emptyset$. Тогда для любого $\alpha > 0$ имеем $\text{strco}_{\alpha M}(\alpha A) = \alpha \text{strco}_M A$.
3. Пусть выпуклые замкнутые множества M_1 и M_2 таковы, что $M_1 + (M_2 \stackrel{*}{=} M_1) = M_2$. Пусть A – такое множество, что $M_1 \stackrel{*}{=} A \neq \emptyset$. Тогда $\overline{\text{co}} A \subset \text{strco}_{M_2} A \subset \text{strco}_{M_1} A$.
4. Пусть M_1 и M_2 – порождающие множества, причем $M_1 + M_2$ – замкнутое множество. Пусть A_1 и A_2 – такие множества, что $M_i \stackrel{*}{=} A_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Тогда $\text{strco}_{M_1+M_2}(A_1 + A_2) \subset \text{strco}_{M_1} A_1 + \text{strco}_{M_2} A_2$. Если $A_2 = M_2$, то в последнем включении имеет место равенство.
5. Пусть M – выпуклое замкнутое множество, A и B – такие множества, что $M \stackrel{*}{=} A \neq \emptyset$ и $A \stackrel{*}{=} B \neq \emptyset$. Тогда $\text{strco}_M(A \stackrel{*}{=} B) \subset \text{strco}_M A \stackrel{*}{=} B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1 и 2 очевидно следуют из определения 5.1.

3. Первое включение вытекает из определения 5.1 и из того, что $M_2 \stackrel{*}{=} A = M_2 \stackrel{*}{=} \overline{\text{co}} A$ и $A \subset \text{strco}_{M_2} A$.

По определению 5.1 имеем $\text{co}_{M_2} A + M_2 \stackrel{*}{=} A = M_2$, по условию теоремы

$$M_2 \stackrel{*}{=} A = (M_1 + (M_2 \stackrel{*}{=} M_1)) \stackrel{*}{=} A \supset M_1 \stackrel{*}{=} A + M_2 \stackrel{*}{=} M_1.$$

Поэтому

$$\text{strco}_{M_2} A + M_1 \stackrel{*}{=} A + M_2 \stackrel{*}{=} M_1 \subset M_1 + M_2 \stackrel{*}{=} M_1,$$

откуда

$$\text{strco}_{M_2} A + M_1 \stackrel{*}{=} A \subset M_1 = \text{strco}_{M_1} A + M_1 \stackrel{*}{=} A,$$

следовательно, $\text{strco}_{M_2} A \subset \text{strco}_{M_1} A$.

4. По определению 5.1 имеем

$$\begin{aligned}
 \text{strco}_{M_1+M_2}(A_1 + A_2) &= (M_1 + M_2) \dot{*} ((M_1 + M_2) \dot{*} (A_1 + A_2)) \\
 &\subset (M_1 + M_2) \dot{*} ((M_1 \dot{*} A_1) + (M_2 \dot{*} A_2)) \\
 &= ((M_1 + M_2) \dot{*} (M_1 \dot{*} A_1)) \dot{*} (M_2 \dot{*} A_2) \\
 &= (M_1 \dot{*} A_1 + \text{strco}_{M_1} A_1 + M_2) \dot{*} (M_1 \dot{*} A_1) \dot{*} (M_2 \dot{*} A_2) \\
 &= (\text{strco}_{M_1} A_1 + M_2) \dot{*} (M_2 \dot{*} A_2) = \text{strco}_{M_1} A_1 + \text{strco}_{M_2} A_2.
 \end{aligned}$$

Если $A_2 = M_2$, то

$$\begin{aligned}
 \text{strco}_{M_1+M_2}(A_1 + M_2) &= (M_1 + M_2) \dot{*} (((M_1 + M_2) \dot{*} M_2) \dot{*} A_1) \\
 &= M_2 + (M_1 \dot{*} (M_1 \dot{*} A_1)) = \text{strco}_{M_2} M_2 + \text{strco}_{M_1} A_1.
 \end{aligned}$$

5. Воспользовавшись очевидно верным для любых множеств M, A, B соотношением $M \dot{*} (A \dot{*} B) \supset M \dot{*} A + B$, получим

$$\text{strco}_M(A \dot{*} B) \subset M \dot{*} ((M \dot{*} A) + B) = \text{strco}_M A \dot{*} B.$$

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $M \subset E$ — ограниченное порождающее множество, A_1 и A_2 — множества из E . Пусть существуют $\alpha = \alpha(M, A_1, A_2) > 0$ и $x_i \in E$ такие, что $B_\alpha(x_i) \subset M \dot{*} A_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$h(\text{strco}_M A_1, \text{strco}_M A_2) \leq \frac{\text{diam } M + \alpha}{\alpha} h(A_1, A_2). \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $h = h(A_1, A_2) \leq \alpha$. По формуле представления расстояния по Хаусдорфу через опорные функции и по теореме 5.1 получаем

$$\begin{aligned}
 h(\text{strco}_M A_1, \text{strco}_M A_2) &= \sup_{\|p\|_* = 1} |s(p, M) - s(p, M \dot{*} A_1) - s(p, M) + s(p, M \dot{*} A_2)| \\
 &= h(M \dot{*} A_1, M \dot{*} A_2).
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Обозначим $\text{diam } M$ через $D(M)$, $(D(M) - \alpha)h/\alpha$ через k , $M \dot{*} A_i$ через D_i , $i = 1, 2$, границу D_i через ∂D_i .

Фиксируем $x \in \partial D_i$. Рассмотрим $\text{co}(\{x\} \cup B_\alpha(x_i)) \subset D_i$. Выберем на отрезке $[x_i, x]$ точку g так, чтобы $\|x - g\|/\|x - x_i\| = h/\alpha$. В силу соображений подобия

$$g + B_h(0) \subset \text{co}(\{x\} \cup B_\alpha(x_i)) \subset D_i,$$

откуда $\varrho(x, D_i \dot{*} B_h(0)) \leq \|x - g\| \leq (D(M) - \alpha)h/\alpha \leq k$. В итоге,

$$h(D_i, D_i \dot{*} B_h(0)) = \sup_{x \in \partial D_i} \varrho(x, D_i \dot{*} B_h(0)) \leq k. \quad (5.6)$$

Так как из включения $A_2 \subset A_1 + B_h(0)$ следует $D_1 \dot{*} B_h(0) \subset D_2$, то, используя (5.6), получаем

$$D_1 \subset D_1 \dot{*} B_h(0) + kB_1(0) \subset D_2 + kB_1(0).$$

Очевидно, что аналогичное включение будет справедливо при перестановке A_1 и A_2 . Отсюда получаем, что $h(D_1, D_2) \leq k$. В силу (5.5) это влечет (5.4).

2. Пусть $h = h(A_1, A_2) > \alpha$. По теореме 5.2 для любого множества A такого, что $M \overset{*}{\neq} A \neq \emptyset$, справедливо включение $\overline{\text{co}}A \subset \text{strco}_M A$, т.е. $h(\overline{\text{co}}A, \text{strco}_M A) \leq \text{diam}(\text{strco}_M A) \leq D(M)$. Отсюда, используя известное свойство липшицевости операции взятия выпуклой оболочки ограниченных множеств (см., например, [21; гл. 5, §2, лемма 4]), получаем

$$\begin{aligned} \text{strco}_M A_1 &\subset \overline{\text{co}}A_1 + D(M)B_1(0) \subset \overline{\text{co}}A_2 + D(M)B_1(0) + hB_1(0) \\ &\subset \text{strco}_M A_2 + (D(M) + h)B_1(0) \\ &\subset \text{strco}_M A_2 + h(A_1, A_2) \left(\frac{D(M)}{\alpha} + 1 \right) B_1(0). \end{aligned}$$

Аналогичное включение будет также справедливо при перестановке A_1 и A_2 , откуда и следует оценка (5.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. У оператора M -сильно выпуклой оболочки константа Липшица больше единицы по существу, в отличие от оператора выпуклой оболочки, у которого, как известно, константа Липшица равна единице. Этот факт проиллюстрирован в примере 9.7.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. В случае, когда порождающее множество M является шаром $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, константу Липшица операции R -сильного овыпукления strco_R удастся уточнить. Как показано в работах [9] и [13], если числа $r, R, 0 < r < R$, и компакты A_1, A_2 таковы, что $B_r(0) \overset{*}{\neq} A_k \neq \emptyset, k = 1, 2$, то справедлива оценка

$$h(\text{strco}_R A_1, \text{strco}_R A_2) \leq L(R, r)h(A_1, A_2), \quad (5.7)$$

где константа Липшица $L(R, r)$ имеет вид

$$L(R, r) = \max \left\{ \sqrt{\frac{R+r}{R-r}}, 1 + \frac{r^2}{R(R-r)} \right\}. \quad (5.8)$$

Следуя [9], обозначим через $\text{strco}_R A$ множество $\text{strco}_{B_R(0)} A$.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ дано выпуклое замкнутое множество A , содержащееся в некотором шаре $B_r(a)$. Пусть $R > r > 0$. Тогда справедлива оценка

$$h(A, \text{strco}_R A) \leq \frac{r^2}{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно включение $A \subset \text{strco}_R A$. Фиксируем произвольную граничную точку $x \in \partial(\text{strco}_R A)$, $x \notin A$. Обозначим через P_A оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество A . Пусть $P_A x = y$. Без ограничения общности полагаем, что $y = 0$.

Пусть $p = x/\|x\|$, $H_p^- = \{z \in \mathcal{H} : \langle p, z \rangle \leq 0\}$, $H_p^\circ = \{z \in \mathcal{H} : \langle p, z \rangle = 0\}$, $H_p^+ = \{z \in \mathcal{H} : \langle p, z \rangle \geq 0\}$. Легко видеть, что $A \subset B_r(a) \cap H_p^-$. По лемме 2.3

$B_r(a) \cap H_p^\circ$ есть шар в подпространстве H_p° радиуса $\rho = \sqrt{r^2 - |\langle p, a \rangle|^2}$ с центром в точке $b = P_{H_p^\circ} a$. Пусть $S = B_r(a) \cap B_R(b - p\sqrt{R^2 - \rho^2})$. Отметим, что $H_p^\circ \cap B_R(b - p\sqrt{R^2 - \rho^2}) = H_p^\circ \cap B_r(a)$.

Покажем, что $A \subset S$. Для этого достаточно доказать, что $B_r(a) \cap H_p^- \subset S$. Фиксируем $z \in B_r(a) \cap H_p^-$. Последнее означает, что $\langle p, z \rangle \leq 0$ и $\|z - a\| \leq r$. Легко видеть, что $a = b \pm p\sqrt{r^2 - \rho^2}$. Пусть, для определенности, $a = b - p\sqrt{r^2 - \rho^2}$ (другой случай рассматривается аналогично). Подставляя значение a , получаем, что $\|z - b + p\sqrt{r^2 - \rho^2}\| \leq r$.

Возводя последнее неравенство в квадрат и учитывая, что $\langle p, b \rangle = 0$, получаем $\|z - b\|^2 + 2\sqrt{r^2 - \rho^2} \langle p, z \rangle \leq \rho^2$. Так как $\langle p, z \rangle \leq 0$, то мы лишь усилим последнее неравенство, заменив коэффициент $\sqrt{r^2 - \rho^2}$ на больший $\sqrt{R^2 - \rho^2}$. В итоге получим $\|z - b\|^2 + 2\sqrt{R^2 - \rho^2} \langle p, z \rangle \leq \rho^2$, откуда следует $z \in S$.

Итак, $A \subset S$, следовательно, и $\text{strco}_R A \subset S$, так как S является $B_R(0)$ -сильно выпуклым множеством.

Убедимся в том, что

$$S \cap H_p^+ = H_p^+ \cap B_R(b - p\sqrt{R^2 - \rho^2}). \quad (5.9)$$

Для этого достаточно показать, что

$$H_p^+ \cap B_r(a) \supset H_p^+ \cap B_R(b - p\sqrt{R^2 - \rho^2}).$$

Как и выше, считаем, что $a = b - p\sqrt{R^2 - \rho^2}$ (случай $a = b + p\sqrt{R^2 - \rho^2}$ рассматривается аналогично). Фиксируем z из правой части последнего включения. Это значит, что $\|z - b + p\sqrt{R^2 - \rho^2}\| \leq R$, т.е. $\|z - b\|^2 + 2\sqrt{R^2 - \rho^2} \langle p, z \rangle \leq R^2$, откуда, учитывая, что $\langle p, z \rangle \geq 0$, получаем $\|z - b\|^2 + 2\sqrt{r^2 - \rho^2} \langle p, z \rangle \leq \rho^2$, т.е. $z \in B_r(b - p\sqrt{r^2 - \rho^2}) = B_r(a)$.

Из включения $\text{strco}_R A \subset S$ и формулы (5.9) получаем, что

$$\varrho(x, A) = \|x - 0\| \leq \sup\{\varrho(z, H_p^\circ) : z \in \partial B_R(b - p\sqrt{R^2 - \rho^2}), \langle p, z \rangle \geq 0\}.$$

Покажем, что последний супремум, который обозначим через I , равен $R^2 - \sqrt{R^2 - \rho^2}$.

Взяв $z_0 = b - p\sqrt{R^2 - \rho^2} + pR$, получим

$$\varrho(z_0, H_p^\circ) = R - \sqrt{R^2 - \rho^2} \leq I.$$

Выбрав произвольную точку $q \in \partial B_1(0)$ и соответствующую точку $z = b - p\sqrt{R^2 - \rho^2} + qR$, из условия $\langle p, z \rangle \geq 0$ получим, что $\langle p, q \rangle \geq \sqrt{R^2 - \rho^2}/R$. Отсюда в силу того, что $\varrho(z, H_p^\circ) = |\langle p, z \rangle|$, имеем

$$|\langle p, z \rangle| = \langle p, z \rangle = \langle p, q \rangle R - \sqrt{R^2 - \rho^2} < R - \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Итак, $I = R - \sqrt{R^2 - \rho^2}$, откуда получаем, что $I \leq r^2/R$. Так как точка $x \in \partial(\text{strco}_R A)$ выбрана произвольно, то

$$h(A, \text{strco}_R A) = \sup\{\varrho(x, A) : x \in \partial(\text{strco}_R A)\} \leq \frac{r^2}{R}.$$

§6. Обобщение теоремы Каратеодори

Докажем теорему, являющуюся аналогом теоремы Каратеодори (см., например, [16], [17]) в случае, когда вместо обычной выпуклой оболочки множества из $\mathbb{R}^n$ рассматривается M -сильно выпуклая оболочка множества, причем выбранное порождающее множество M является строго выпуклым компактом из $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ есть компактное строго выпуклое порождающее множество. Пусть A — компактное подмножество из $\mathbb{R}^n$ такое, что $M \stackrel{*}{\neq} A \neq \emptyset$. Тогда любая точка множества $\text{strco}_M A$ принадлежит M -сильно выпуклой оболочке некоторого подмножества из A , состоящего не более чем из $n + 1$ точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Предположим, что $\text{int}(M \stackrel{*}{\neq} A) \neq \emptyset$. Фиксируем произвольную точку $u \in \partial(\text{strco}_M A)$. Так как множество M строго выпукло, то и множество $\text{strco}_M A$ также является строго выпуклым, т.е. все его граничные точки являются выступающими.

По определению выступающей точки найдется вектор $p \in \partial B_1(0)$ такой, что $\langle p, u \rangle = s(p, \text{strco}_M A)$ и

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \langle p, u \rangle\} \cap \text{strco}_M A = \{u\}. \quad (6.1)$$

По теореме 5.1 и по [17; следствие 17.1.6] получаем

$$s(p, \text{strco}_M A) = s(p, M) - \inf \left\{ \sum_{i=1}^n (s(p_i, M) - s(p_i, A)) : \sum_{i=1}^n p_i = p \right\},$$

а в силу непустоты внутренности множества $M \stackrel{*}{\neq} A$ по [19; гл. 1, §5, предложение 14] инфимум в операции вычисления выпуклой оболочки разности опорных функций $s(p, M) - s(p, A)$ достигается. Поэтому найдется набор векторов $\{p_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\sum_{i=1}^n p_i = p$ и

$$s(p, \text{strco}_M A) = s(p, M) - \sum_{i=1}^n (s(p_i, M) - s(p_i, A)).$$

При $p_i \neq 0$ выберем $x_i \in A$ так, чтобы $\langle p_i, x_i \rangle = s(p_i, A)$. При $p_i = 0$ выберем $x_i \in A$ произвольно. Обозначим множество точек $\{x_i\}_{i=1}^n \subset A$ через S . Тогда $\text{strco}_M S \subset \text{strco}_M A$ по теореме 5.2, откуда $s(p, \text{strco}_M S) \leq s(p, \text{strco}_M A)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} s(p, \text{strco}_M S) &= s(p, M) - \inf \left\{ \sum_{i=1}^n (s(q_i, M) - s(q_i, S)) : \sum_{i=1}^n q_i = p \right\} \\ &\geq s(p, M) - \sum_{i=1}^n (s(p_i, M) - s(p_i, S)) = s(p, \text{strco}_M A). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство $s(p, \text{strco}_M S) = s(p, \text{strco}_M A)$, которое вместе с равенством (6.1) доказывает включение $u \in \text{strco}_M S$.

Итак, любая точка границы множества $\text{strco}_M A$ содержится в M -сильно выпуклой оболочке подмножества из A , содержащего не более чем n точек.

Пусть $x \in \text{strco}_M A \setminus \partial(\text{strco}_M A)$. Существуют точки $u_0 \in \partial(\text{strco}_M A)$ и $w_0 \in A$ такие, что $x \in [u_0, w_0]$. Как показано выше, для граничной точки u_0 найдется множество S_0 , состоящее не более чем из n точек компакта A и такое, что точка u_0 принадлежит $\text{strco}_M S_0$. Из теоремы 5.2 получаем

$$x \in \text{co}\{(\text{strco}_M S_0) \cup \{w_0\}\} \subset \text{strco}_M\{(\text{strco}_M S_0) \cup \{w_0\}\} \subset \text{strco}_M\{S_0 \cup \{w_0\}\}.$$

2. Пусть $\text{int}(M \# A) = \emptyset$. Без ограничения общности будем считать, что $0 \in \text{ri}(\text{co } A) \subset M$ и $0 \in \text{int } M$. Пусть число $\lambda \in (0, 1)$. Тогда $\text{co}(\lambda A) \subset \text{co } A$, откуда следует, что $M \# A \subset M \# \lambda A$. С другой стороны, поскольку разность Минковского–Понтрягина является полунепрерывным сверху многозначным отображением (см., например, [19; гл. 1, § 4, теорема 3]), то получаем, что $h(M \# \lambda A, M \# A) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 1 - 0$. Отсюда, воспользовавшись формулой для опорной функции M -сильно выпуклой оболочки (см. теорему 5.1), получим, что при $\lambda \rightarrow 1$

$$h(\text{strco}_M(\lambda A), \text{strco}_M A) \rightarrow 0. \quad (6.2)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\text{int}(M \# \lambda A) \neq \emptyset, \quad \lambda \in (0, 1). \quad (6.3)$$

Фиксируем $x \in \text{strco}_M A$, $x \notin A$, и последовательность $\lambda_k \in (0, 1)$, сходящуюся к числу 1. В силу (6.2) существует последовательность $x_k \in \text{strco}_M(\lambda_k A)$, сходящаяся к x . В силу (6.3) и п. 1 доказательства теоремы для каждого $k = 1, 2, \dots$ найдутся $\{u_{ik}\}_{i=1}^{n+1} \subset \lambda_k A$ такие, что $x_k \in \text{strco}_M[\bigcup_{i=1}^{n+1} \{u_{ik}\}]$. Без ограничения общности найдутся $u_i \in A$, $i = 1, \dots, n+1$, такие, что для каждого i последовательность $u_{ik} \rightarrow u_i$ при $k \rightarrow \infty$.

Как показано в [19; гл. 1, § 7, теорема 3], операция непустого пересечения фиксированного числа строго выпуклых множеств непрерывна, откуда следует, что $h(M \# \bigcup_{i=1}^{n+1} \{u_{ik}\}, M \# \bigcup_{i=1}^{n+1} \{u_i\}) \rightarrow 0$. Так как, кроме того, по определению сильно выпуклой оболочки для каждого номера k справедливо равенство

$$\text{strco}_M\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \{u_{ik}\}\right] + \left(M \# \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \{u_{ik}\}\right]\right) = M, \quad (6.4)$$

то в итоге получаем, что $h(\text{strco}_M[\bigcup_{i=1}^{n+1} \{u_{ik}\}], \text{strco}_M[\bigcup_{i=1}^{n+1} \{u_i\}]) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Последнее эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся достаточно большие k , при которых

$$x \in x_k + B_\varepsilon(0) \subset \text{strco}_M\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \{u_{ik}\}\right] + B_\varepsilon(0) \subset \text{strco}_M\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \{u_i\}\right] + B_{2\varepsilon}(0).$$

Отсюда следует, что $x \in \text{strco}_M[\bigcup_{i=1}^{n+1} \{u_i\}]$.

§ 7. Обобщение теоремы Крейна–Мильмана

Напомним некоторые нужные нам свойства шаров и проекций в гильбертовом пространстве (см., например, [18], [21], [22]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть $R > r > 0$, $z \in \mathcal{H}$, $\|z\| = R - r$. Тогда $B_r(z) \subset B_R(0)$, $\partial B_R(0) \cap B_r(z) = \{zR/\|z\|\}$ и $(B_R(0))(p) = pR$ для любого $p \in \partial B_1(0)$.

Для любого начального вектора $z \in \mathcal{H}$ и произвольного направления $q \in \partial B_1(0)$ определим луч по формуле $l(z, q) = \{z + \lambda q : \lambda \geq 0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть $B \subset \mathcal{H}$ – выпуклое замкнутое множество, $x \notin B$. Пусть y – проекция точки x на B , определим $p = (x - y)/\|x - y\|$. Тогда p будет нормальным вектором к множеству B в точке y . Обратно, если $p \in \partial B_1(0)$ – нормальный вектор к множеству B в точке y , то для любой точки $x \in l(y, p)$ проекцией точки x на B будет y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть замкнутое множество A из $\mathcal{H}$ таково, что $A \subset B_\rho(a)$, где $a \in \mathcal{H}$ и $0 < \rho < R$. Тогда точка $x \in A$ называется R -сильно выступающей точкой множества A , если существует точка $z \in \mathcal{H}$ такая, что $A \subset B_R(z)$ и $\partial B_R(z) \cap A = \{x\}$. Множество всех R -сильно выступающих точек множества A будем обозначать через $\text{exp}_R A$.

Введем еще одно полезное обозначение:

$$\partial B_R(z, q, \lambda) = \{x : \|x - (z - \lambda q)\| = R, \langle x - (z - \lambda q), q \rangle \geq 0\}.$$

ЛЕММА 7.1. Пусть $A \subset \mathcal{H}$ – компакт, $A \subset B_r(z)$, где $0 < r < R$. Тогда множество $\text{exp}_R A \neq \emptyset$, причем

$$\forall q \in \partial B_1(0) \exists \lambda \geq 0 : \text{exp}_R A \cap \partial B_r(z, q, \lambda) \neq \emptyset \text{ и } A \subset B_r(z - \lambda q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $q \in \partial B_1(0)$. Пусть

$$\lambda = \sup\{\mu : A \subset B_r(z - \mu q)\}.$$

Легко видеть, что $\lambda \in [0, +\infty)$.

Пусть λ_i – максимизирующая последовательность для супремума в определении λ , тогда

$$\|x - z + \lambda_i q\| \leq r \quad \forall x \in A,$$

откуда в пределе

$$\|x - z + \lambda q\| \leq r \quad \forall x \in A.$$

Итак, супремум в определении λ достигается.

Считаем без ограничения общности, что $z - \lambda q = 0$.

Допустим, что $\partial B_r(z, q, \lambda) \cap A = \emptyset$. По теореме о топологической отделимости компакта и замкнутого множества (см. [18; теорема 1.10]) получаем, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$(A + B_\varepsilon(0)) \cap (\partial B_r(z, q, \lambda) + B_\varepsilon(0)) = \emptyset. \quad (7.1)$$

Покажем, что

$$A \subset B_r(-\varepsilon q). \quad (7.2)$$

Пусть $x \in A \subset B_r(0)$ и $\mu = \mu(x) \geq 0$:

$$x + \mu q \in \partial B_r(0).$$

Тогда $\langle x + \mu q, q \rangle \geq 0$. Если это не так, то $\langle x, q \rangle < -\mu \leq 0$. Отсюда

$$\mu^2 + 2\mu\langle x, q \rangle = r^2 - \|x\|^2 \geq 0,$$

что влечет $-\mu^2 > 0$. Последнее неравенство явно неверно, откуда $\langle x + \mu q, q \rangle \geq 0$. Поэтому $x + \mu q \in \partial B_r(0, q, 0)$. Так как из формулы (7.1) следует, что $\mu \geq \varepsilon$ для любого $x \in A$, то $A + \varepsilon q \subset B_r(0)$, откуда следует (7.2). Но формула (7.2) противоречит максимальнойности λ , следовательно, допущение $\partial B_r(z, q, \lambda) \cap A = \emptyset$ неверно.

Итак, найдется $x \in \partial B_r(z, q, \lambda) \cap A$. Пусть p — единичный нормальный вектор к множеству $B_r(0)$ в точке $x \in \partial B_r(0)$; легко видеть, что $p = x/\|x\|$. По предложению 7.1 получаем:

$$\{x\} \in \partial B_R(x - pR) \cap A \subset \partial B_R(x - pR) \cap B_r(0) = \{x\}.$$

Кроме того,

$$A \subset B_r(0) \subset B_R(x - pR).$$

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — компакт, $A \subset B_\rho(z_1)$, $\rho < R$. Тогда $A \subset \text{strco}_R(\exp_R A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = \text{strco}_R(\exp_R A)$. Через P_M обозначим проектор на выпуклое замкнутое множество M .

Допустим, что существует $x \in A \setminus B$. Пусть $y = P_B x \neq x$, $\varepsilon = \|x - y\| > 0$; по предложению 7.2 $p = (x - y)/\varepsilon$ — нормальный вектор к множеству B в точке y . В силу опорного принципа для шаров $B \subset B_R(z)$, где $z = y - pR$; $A \subset B_\rho(z_1) \subset B_r(z_1)$, где число $r > 0$ определим из условий

$$r = \max \left\{ \rho, \frac{R + \varepsilon + \sqrt{(R - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2}}{2} \right\} \text{ при } R \geq 2\varepsilon; \quad r = \rho \text{ при } R < 2\varepsilon.$$

Отметим, что $r < R$, $z \neq z_1$. Так как $A \subset \text{strco}_R A \subset B_r(z_1)$, то $[x, y] \subset B_r(z_1)$.

1. Пусть $q = (z_1 - z)/\|z_1 - z\|$. Отметим, что $\|x - z_1\| \leq r$. Введем $a = z_1 + \|z_1 - x\|q \in B_r(z_1)$,

$$\|a - z\| = \|z - z_1\| + \|x - z_1\| \geq \|x - z\| > R,$$

откуда $a \notin B_R(z)$. Кроме того, $P_{B_R(z)} a = z + qR$. Так как $\|x - y\| = \|x - z\| - R$, а $\|a - (z + qR)\| = \|a - z\| - R$, то

$$\|a - (z + qR)\| \geq \|x - y\| = \varepsilon.$$

Поскольку $\langle q, z + qR \rangle = s(q, B_R(z))$, то $P_{B_R(z)}l(z + qR, q) = \{z + qR\}$ по лемме 7.2. Так как $B_R(z) \cap B_r(z_1) \neq \emptyset$ и $\|z - z_1\| \geq R - r$, то $\|z - z_1\| \in [R - r, R + r]$, откуда $\|z - z_1 + qR\| \leq r$, т.е. $z + qR \in B_r(z_1)$.

В итоге, для любого шара $B_r(z_2)$, для которого справедливо включение $A \subset B_r(z_2)$ и $z_2 \in l(z, q)$, отрезок $[z + qR, z + q(R + \varepsilon)]$ лежит в $B_r(z_2)$.

2. По лемме 7.1 найдется $\lambda \geq 0$ такое, что $\partial B_r(z_1, q, \lambda) \cap \exp_R A \neq \emptyset$ и $A \subset B_r(z - \lambda q)$. Пусть без ограничения общности $z - \lambda q = 0$. В силу п. 1 доказательства $[z + qR, z + q(R + \delta)] \subset B_r(0)$, $z + q(R + \delta) \in \partial B_r(0)$ и $\delta \geq \varepsilon$. Пусть $u \in \partial B_r(0, q, 0)$. Это значит, что $\|u\| = r$ и $\langle u, q \rangle \geq 0$. Так как $z + (R + \delta)q = rq$, то $z = -(R - r + \delta)q$. Следовательно,

$$\|u - z\|^2 - R^2 \geq 2r^2 - 2r(R + \varepsilon) + 2\varepsilon R + \varepsilon^2 > 0.$$

Таким образом, $\partial B_r(0, q, 0) \cap B_R(z) = \emptyset$. Итак, существует u такое, что

$$u \in (\partial B_r(0, q, 0) \cap \exp_R A) \setminus B_R(z) \quad \text{и} \quad \exp_R A \subset B_R(z).$$

Полученное противоречие показывает, что $A \subset \text{strco}_R(\exp_R A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Пусть замкнутое множество $A \subset \mathcal{H}$ и числа $r > 0$, $R > 0$ таковы, что $B_r(0) \stackrel{*}{\subset} A \neq \emptyset$ и $R \geq r$. Непустое подмножество $V \subset A$ назовем $B_R(0)$ -*сильно крайним* (или просто R -*сильно крайним*) множеством множества A , если ни одна точка x из V не содержится в R -сильно выпуклой оболочке любой пары точек y_1, y_2 из A , которые отличны от x и удовлетворяют условию $\{y_1, y_2\} \not\subset V$.

Точку x назовем R -*сильно крайней точкой* множества A , если одноточечное множество $\{x\}$ является R -сильно крайним подмножеством множества A .

Множество всех R -сильно крайних точек множества A будем обозначать через $\text{extr}_R A$.

ЛЕММА 7.2. Для любого множества $A \subset \mathcal{H}$ справедливо включение $\exp_R A \subset \text{extr}_R A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\exp_R A = \emptyset$, то утверждение очевидно.

Пусть $x \in \exp_R A$. Тогда существует шар $B_R(z_0)$ такой, что

$$A \subset B_R(z_0) \quad \text{и} \quad \partial B_R(z_0) \cap A = \{x\}. \quad (7.3)$$

Фиксируем произвольные y и z из A , отличные от x . Из формулы (7.3) следует, что $\{y, z\} \subset \text{int } B_R(z_0)$. Пусть $p \in \partial B_1(0)$ — нормальный вектор к $B_R(z_0)$ в точке x . Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\{y, z\} \subset B_R(z_0 - \varepsilon p), \quad x \notin B_R(z_0 - \varepsilon p).$$

Так как по определению сильно выпуклой оболочки $\text{strco}_R\{y, z\} \subset B_R(z_0 - \varepsilon p)$, то

$$x \notin \text{strco}_R\{y, z\}.$$

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть компакт $A \subset \mathcal{H}$ таков, что $A \subset B_\rho(z_1)$, и пусть $R > \rho$. Тогда справедливо включение $A \subset \text{strco}_R(\text{extr}_R A)$.

Доказательство очевидно следует из леммы 7.2 и теоремы 7.1.

§ 8. О новых липшицевых селекторах

Одним из наиболее известных классов непрерывных по Липшицу однозначных селекторов многозначных отображений с выпуклыми и компактными значениями из $\mathbb{R}^n$ является класс селекторов, получаемых выбором центра Штейнера [23] в каждом значении многозначного отображения. В этом параграфе показано, как можно получить другие непрерывные по Липшицу селекторы многозначного отображения, используя центр Штейнера и $B_R(0)$ -сильно выпуклую оболочку значений данного многозначного отображения.

Скажем, что функция f , действующая из множества выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, называется *селектором выпуклых компактов*, если для любого выпуклого компакта A справедливо включение $f(A) \in A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. *Центром Штейнера* выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ (см. [23] и библиографию в [24], [25]) называется точка $s(A) \in \mathbb{R}^n$, определяемая по формуле

$$s(A) = \frac{n}{S_1} \int_{\partial B_1(0)} s(q, A) q dq, \quad \text{где } S_1 = \int_{\partial B_1(0)} dq. \quad (8.1)$$

Известно (см. [24; § 3]), что центр Штейнера $s(A)$ выпуклого компакта A принадлежит этому компакт, т.е. является селектором выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$, при этом данный селектор удовлетворяет условию Липшица (иначе говорят: является непрерывным по Липшицу), если компакты рассматривать как элементы метрического пространства с метрикой Хаусдорфа $h(\cdot, \cdot)$. Это означает, что для любых выпуклых компактов A_1 и A_2 выполнено неравенство

$$\|s(A_1) - s(A_2)\| \leq L(n)h(A_1, A_2), \quad \text{где } L(n) = \frac{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})}. \quad (8.2)$$

Известно, что константа Липшица в (8.2), имеющая порядок $\sqrt{n}$, в общем случае является неумлучшаемой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. Скажем, что Ω_r есть *семейство выпуклых компактов* из $\mathbb{R}^n$, *равномерно ограниченных константой* $r > 0$, если для любого компакта $A \in \Omega_r$ найдется точка $x \in \mathbb{R}^n$ такая, что $A \subset B_r(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. Пусть числа $r > 0$, $R > 0$ таковы, что $r < R$. Для всякого компакта $A \in \Omega_r$ определим точку $p_R(A) \in \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$p_R(A) = -\frac{n}{S_1} \int_{\partial B_1(0)} \cos(R\|q\| - s(q, A)) q dq. \quad (8.3)$$

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть фиксированы числа r, R , $0 < r < R$, и пусть Ω_r есть семейство выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$, равномерно ограниченных константой $r > 0$. Тогда справедливо включение

$$p_R(A) \in A \quad \forall A \in \Omega_r \quad (8.4)$$

и функция $A \rightarrow p_R(A)$ является непрерывной по Липшицу функцией на Ω_r , т.е. для любых компактов $A_1, A_2 \in \Omega_r$ выполнено неравенство

$$\|p_R(A_1) - p_R(A_2)\| \leq L(n, R, r)h(A_1, A_2), \quad (8.5)$$

где $L(n, R, r) = L(n)L(R, r)$, причем $L(n)$ определена в (8.2), а $L(R, r)$ — в (5.8).

Для доказательства этой основной теоремы нам потребуются некоторые специальные обозначения и результаты.

Фиксируем числа $r, R, 0 < r < R$, и некоторое R -сильно выпуклое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $B_r(0) \overset{*}{\cap} A \neq \emptyset$.

Фиксируем произвольный вектор p из множества $\partial B_1(0)$.

Дугу окружности радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$ длины меньше πR и концами в точках y_1, y_2 будем обозначать через $D_R(a)[y_1, y_2]$.

Обозначим

$$H_p^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = s(p, \overline{\text{co}(\text{extr}_R A)})\}, \quad (8.6)$$

$$H_p^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \leq s(p, \text{co}(\text{extr}_R A))\}, \quad H_p^+ = \overline{\mathbb{R}^n \setminus H_p^-}, \quad (8.7)$$

$$A_p^\circ = A \cap H_p^\circ, \quad A_p^+ = A \cap H_p^+, \quad A_p^- = A \cap H_p^-. \quad (8.8)$$

Ясно, что A_p° непусто. Без ограничения общности будем считать, что $0 \in A_p^\circ$.

Введем отображение $g_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, обеспечивающее отражение пространства относительно гиперплоскости H_p° , т.е.

$$g_p(x) = x - 2p\langle p, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.9)$$

ЛЕММА 8.1. В обозначениях (8.6)–(8.8) справедливо равенство

$$H_p^+ \cap \text{strco}_R A_p^\circ = A_p^+. \quad (8.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из включения $A_p^\circ \subset A$ следует включение $H_p^+ \cap \text{strco}_R A_p^\circ \subset H_p^+ \cap A = A_p^+$. Докажем обратное включение.

Пусть вначале $z \in \partial A_p^+ \setminus H_p^\circ$. Найдется нормальный вектор $\bar{p} \in \partial B_1(0)$ такой, что выполняется равенство $\langle \bar{p}, z \rangle = s(\bar{p}, A)$.

Определим точку $a = z - \bar{p}R$ и множество $C = A \cap \partial B_R(a)$. Отметим, что в силу леммы 2 из [9] это множество C является R -сильно крайним подмножеством множества A . Это значит, что любая дуга окружности радиуса R длины не более πR , проходящая через $z \in C$, с концами в множестве A , отличными от z , лежит на поверхности сферы $\partial B_R(a)$. С другой стороны, так как $z \in A_p^+$, а $\text{extr}_R A \subset A_p^-$, т.е. z не является R -сильно крайней точкой множества A , то такая дуга существует. Пусть дуга $D_R(a)[y_1, y_2] \subset C$ такова, что $z \in D_R(a)[y_1, y_2]$ и $y_1 \neq z, y_2 \neq z$, причем эта дуга максимальной длины, т.е. она не может быть продолжена в C .

Рассмотрим конус

$$K_C = \{a + \lambda(x - a) : x \in C, \lambda \geq 0\}.$$

Нетрудно показать, что K_C является выпуклым конусом. Так как для точки z дуга $D_R(a)[y_1, y_2]$ выбрана максимально допустимой длины, то $y_1, y_2 \in \partial K_C$. Для каждой из концевых точек проведем аналогичные исследования. Сделаем это на примере точки y_1 .

Если точка y_1 является R -сильно крайней точкой множества A , то останавливаемся. Допустим, что это не так. По теореме об отделимости существует вектор $p_1 \in \partial B_1(0)$, отделяющий y_1 от K_C , т.е.

$$\langle p_1, y_1 \rangle = \langle p_1, a \rangle \geq \langle p_1, x \rangle \quad \forall x \in K_C.$$

Пусть $\Pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p_1, x - a \rangle = 0\}$. Рассмотрим множество $C_1 = C \cap \Pi_1$ и покажем, что C_1 также является R -сильно крайним подмножеством A .

Допустим противное, т.е. пусть существуют точки $x \in C_1$ и $e_1, e_2 \in C$ такие, что e_1 не принадлежит C_1 , а $x \in D_R(a)[e_1, e_2]$ и $x \neq e_2$. Тогда существуют числа $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ такие, что $x = a + \lambda_1(e_1 - a) + \lambda_2(e_2 - a)$. Так как $\langle p_1, e_1 - a \rangle < 0$, а $\langle p_1, e_2 - a \rangle \leq 0$, то в итоге имеем

$$\langle p_1, x \rangle = \langle p_1, a \rangle + \lambda_1 \langle p_1, e_1 - a \rangle + \lambda_2 \langle p_1, e_2 - a \rangle < \langle p_1, a \rangle. \quad (8.11)$$

Отсюда следует, что $x \notin C_1$, т.е. получаем противоречие. Итак, C_1 также является R -сильно крайним подмножеством A , причем его размерность как минимум на единицу меньше размерности C .

В итоге, так как y_1 не является R -сильно крайней точкой множества A , существует другая дуга $D_R(a)[y_1^1, y_2^1]$ в C_1 максимальной длины такая, что $y_1 \in D_R(a)[y_1^1, y_2^1]$ и $y_i^1 \neq y_1, i = 1, 2$.

Опять исследуем оба конца дуги на примере одного из них, а именно y_1^1 . Для этой точки y_1^1 получили задачу построения дуги максимальной длины, аналогичную задаче для y_1 , но в аффинном многообразии Π_1 , которое имеет размерность $n - 1$.

Таким образом мы получаем каскад дуг, лежащих на сфере $\partial B_R(a)$, заканчивающийся дугами, концы которых являются R -сильно крайними точками множества A .

Поскольку $\text{extr}_R A \subset A_p^-$, то точки, соответствующие концам дуг, лежат в A_p^- . Пусть множество $\{x_i\}_{i=1}^m$ — это точки, в которых дуги каскада пересекают множество A_p° . Как показано в [7], все дуги окружностей радиуса R длины не более πR с концами в точках $\{x_i\}_{i=1}^m$ целиком лежат в $\text{strco}_R A_p^\circ$, кроме того, любая дуга окружности радиуса R длины не более πR с концами в $\text{strco}_R A_p^\circ$ целиком лежит в $\text{strco}_R A_p^\circ$. Но отсюда следует, что $z \in \text{strco}_R A_p^\circ$.

Учитывая очевидное равенство $(\text{strco}_R A_p^\circ) \cap H_p^\circ = A_p^+ \cap H_p^\circ$, получаем, что граничные точки множеств $H_p^+ \cap \text{strco}_R A_p^\circ$ и A_p^+ совпадают, а так как эти множества выпуклы, то сами они тоже совпадают. Итак, (8.10) доказано.

ЛЕММА 8.2. *Для отображения (8.9) справедливо включение*

$$g_p(A_p^+) \subset A_p^-. \quad (8.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из включения $A_p^\circ \subset B_R(x)$ и определения g_p по (8.9) очевидно следует включение $A_p^\circ \subset B_R(g_p(x))$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Поэтому $g_p(\text{strco}_R A_p^\circ) = \text{strco}_R A_p^\circ$. Кроме того, $g_p(H_p^+) = H_p^-$. В силу включения $\text{strco}_R A_p^\circ \subset A$ и по лемме 8.1 получаем

$$g_p(A_p^+) = (\text{strco}_R A_p^\circ) \cap H_p^- \subset A \cap H_p^- = A_p^-.$$

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть числа $r, R, 0 < r < R$, и R -сильно выпуклое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что $B_r(0) \overset{*}{\neq} A \neq \emptyset$. Тогда центр Штейнера $s(A)$ удовлетворяет включению

$$s(A) \in \overline{\text{co}}(\text{extr}_R A). \quad (8.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего для произвольного фиксированного $p \in \partial B_1(0)$ в обозначениях (8.6)–(8.9) докажем включение

$$s(A) \in H_p^-. \quad (8.14)$$

Обозначим

$$B_{1,p}^+(0) = \{q \in B_1(0) : 0 \leq \langle p, q \rangle\}, \quad B_{1,p}^-(0) = \{q \in B_1(0) : \langle p, q \rangle \leq 0\}.$$

Покажем, что

$$s(q, A) \leq s(g_p(q), A) \quad \forall q \in \partial B_{1,p}^+(0). \quad (8.15)$$

Фиксируем $q \in B_{1,p}^+(0)$, причем $\|q\| = 1$. Рассмотрим точку $x_q \in A(q)$, т.е. такую точку из A , для которой справедливо равенство $\langle q, x_q \rangle = s(q, A)$. Разложим точки q и x_q в прямые суммы точек вида

$$q = q^\perp + \lambda_q p, \quad x_q = x_q^\perp + \mu_{x_q} p,$$

где $\langle p, q^\perp \rangle = 0$ и $\langle p, x_q^\perp \rangle = 0$, а $\lambda_q, \mu_{x_q} \in \mathbb{R}$.

Так как $q \in B_{1,p}^+(0)$, а $\langle p, q \rangle = \lambda_q$, то $\lambda_q \geq 0$. Заметим, что в силу определения симметрии (8.9) получаем $g_p(q) = q^\perp - \lambda_q p$ и $g_p(x_q) = x_q^\perp - \mu_{x_q} p$. Для x_q возможна одна из двух ситуаций: либо $x_q \in \partial A_p^+$, либо $x_q \in \partial A_p^-$.

Допустим, что $x_q \in \partial A_p^+$. Тогда по лемме 8.2 $g_p(x_q) \in A_p^-$ и

$$\begin{aligned} s(q, A) &= \langle q, x_q \rangle = \langle q^\perp + \lambda_q p, x_q^\perp + \mu_{x_q} p \rangle \\ &= \langle q^\perp, x_q^\perp \rangle + \lambda_q \mu_{x_q} = \langle q^\perp - \lambda_q p, x_q^\perp - \mu_{x_q} p \rangle \leq s(g_p(q), A). \end{aligned}$$

Допустим, что $x_q \in \partial A_p^-$. Это означает, что $\mu_{x_q} \leq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} s(q, A) &= \langle q, x_q \rangle = \langle q^\perp + \lambda_q p, x_q^\perp + \mu_{x_q} p \rangle \\ &= \langle q^\perp, x_q^\perp \rangle + \lambda_q \mu_{x_q} \leq \langle q^\perp - \lambda_q p, x_q^\perp + \mu_{x_q} p \rangle \leq s(g_p(q), A). \end{aligned}$$

Итак, неравенство (8.15) доказано. Из него получаем

$$\begin{aligned} \langle p, s(A) \rangle &= \frac{n}{S_1} \int_{\partial B_1(0)} s(q, A) \langle q, p \rangle dq \\ &= \frac{n}{S_1} \int_{\partial B_{1,p}^+(0)} s(q, A) \langle q, p \rangle dq - \frac{n}{S_1} \int_{\partial B_{1,p}^+(0)} s(g_p(q), A) \langle q, p \rangle dq \leq 0, \end{aligned}$$

т.е. справедливо включение (8.14). Так как (8.14) доказано для произвольного вектора p из $\partial B_1(0)$, то

$$s(A) \in \bigcap_{|p|=1} H_p^- = \overline{\text{co}}(\text{extr}_R A),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 8.3. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является R -сильно выпуклым, причем $B_r(0) \not\subset A \neq \emptyset$, где $r < R$. Выберем точку $z \in \text{extr}_R A$ и компакт $B \subset A \setminus \{z\}$. Тогда $z \notin \text{strco}_R B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $z \in \text{strco}_R B$. Существует нормальный вектор $p \in \partial B_1(0)$ такой, что $\langle p, z \rangle = s(p, A)$. Обозначим $a = z - pR$ и $C = \partial B_R(a) \cap A$ и для простоты далее в доказательстве будем полагать, что $a = 0$. Определим конус $K_C = \{\lambda x : x \in C, \lambda \geq 0\}$. Легко показать, что множество K_C является выпуклым острым конусом.

Убедимся в том, что луч $L = \{\lambda z : \lambda \geq 0\}$ является крайним лучом (см. [26], [17]) для конуса K_C .

Допустим противное, тогда существуют точки $e_1, e_2 \in C \setminus \{z\}$ и числа $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, такие, что выполнено равенство $z = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, т.е. $z \in D_R(0)[e_1, e_2]$. Но это противоречит тому, что z является R -сильно крайней точкой множества A . Итак, луч L является крайним лучом для K_C .

Так как по допущению $z \in \text{strco}_R B$, то по теореме 6.1 найдется набор точек $\{x_i\}_{i=1}^m$, $m \leq n+1$, из множества B таких, что z содержится в R -сильно выпуклой оболочке этого набора. Из включения $B \subset A$ следует, что $\{x_i\}_{i=1}^m \subset A$.

Пусть $\{x_{i_k}\}_{k=1}^l$ суть все точки набора $\{x_i\}_{i=1}^m$, которые принадлежат $C = \partial B_R(0) \cap A$. Определим множество индексов $I = \{1, \dots, m\} \setminus \{i_k\}_{k=1}^l$. Тогда для каждого $j \in I$ существует число $\varepsilon_j > 0$ такое, что $x_j + \varepsilon_j B_1(0) \subset B_R(0)$.

Рассмотрим конус

$$K = \text{coneco} \left(\left(\bigcup_{k=1}^l \{x_{i_k}\} \right) \cup \{z\} \right).$$

Это многогранный выпуклый конус, причем из включения $\{z, x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\} \subset C$ следует, что $K \subset K_C$. Отсюда получаем, что конус K также является острым конусом, а луч $L \subset K$ является крайним лучом для K .

Так как для многогранного конуса любой крайний луч является выступающим (см., например, [27; гл. 1, теоремы 4.2 и 4.7]), то найдется вектор $q \in \partial B_1(0)$ такой, что $K \cap \Pi_q = L$, где Π_q есть гиперплоскость вида $\Pi_q = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle q, x \rangle = 0\}$.

Определим числа

$$\alpha = \min_{1 \leq k \leq l} \varrho(x_{i_k}, \Pi_q), \quad \beta = \min_{j \in I} \varepsilon_j \quad \text{и} \quad \gamma = \min\{\alpha, \beta\}.$$

Очевидно, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Легко проверить, что все точки $\{x_i\}_{i=1}^m$ принадлежат шару $B_R(-\gamma q)$. С другой стороны, $\|z + \gamma q\|^2 = \|z\|^2 + \gamma^2 > R^2$, т.е. z не принадлежит $B_R(-\gamma q)$. По определению сильно выпуклой оболочки это значит, что $z \notin \text{strco}_R\{\bigcup_{i=1}^m x_i\}$. Полученное противоречие показывает, что допущение о включении $z \in \text{strco}_R B$ неверно.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть числа r, R , $0 < r < R$, и компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что $B_r(0) \overset{*}{\neq} A \neq \emptyset$. Тогда справедливо включение

$$\text{extr}_R A \supset \text{extr}_R(\text{strco}_R A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как из включения $A \subset B_r(a)$ (при некотором a) следует, что $\text{strco}_R A \subset B_r(a)$, и так как $r < R$, то легко убедиться, что множества $\text{extr}_R A$ и $\text{extr}_R(\text{strco}_R A)$ непусты.

Заметим, что если некоторая точка $z \in \text{extr}_R(\text{strco}_R A)$ и $z \in A$, то в силу определения 7.2 эта точка z является R -сильно крайней точкой множества A . Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что из включения $z \in \text{extr}_R(\text{strco}_R A)$ всегда следует включение $z \in A$.

Пусть $z \in \text{extr}_R(\text{strco}_R A)$. По теореме 6.1 существует конечное множество точек $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, m$, из A , где $m \leq n + 1$, таких, что $z \in \text{strco}_R(\bigcup_{i=1}^m \{x_i\})$.

Допустим, что $z \notin A$. Тогда $z \neq x_i$ при всех $i = 1, \dots, m$. Так как компакт $\bigcup_{i=1}^m \{x_i\}$ содержится в $\text{strco}_R A$ и не содержит z , то по лемме 8.3 получаем, что $z \notin \text{strco}_R(\bigcup_{i=1}^m \{x_i\})$, что неверно. Следовательно, $z \in A$.

ТЕОРЕМА 8.4. Пусть числа r, R , $0 < r < R$, и выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что $B_r(0) \overset{*}{\neq} A \neq \emptyset$. Тогда

$$s(\text{strco}_R A) \in A. \tag{8.16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 8.2, а затем теорему 8.3, получаем, что

$$s(\text{strco}_R A) \in \overline{\text{co}}(\text{extr}_R(\text{strco}_R A)) \subset \overline{\text{co}}(\text{extr}_R A) \subset A.$$

Приведем теперь

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.1. Легко проверить в силу (8.3) и (5.2), (5.3) справедливость равенства $p_R(A) = s(\text{strco}_R A)$. Тогда по теореме 8.4 получаем включение (8.4).

Поскольку операция взятия R -сильно выпуклой оболочки является непрерывной по Липшицу функцией множеств из Ω_r в метрике Хаусдорфа (см. [9], [13] и замечание 5.4) с константой Липшица $L(R, r)$ из (5.8), а центр Штейнера является непрерывным по Липшицу (с константой Липшица $L(n)$ из (8.2)) селектором выпуклых компактных множеств, то $p_R(A)$ как суперпозиция указанных выше отображений является непрерывным по Липшицу селектором выпуклых равномерно ограниченных компактов Ω_r в метрике Хаусдорфа.

§ 9. Примеры и контрпримеры

ПРИМЕР 9.1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ правильную пирамиду с квадратным основанием вида

$$M = \text{co}\{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, -1, 0)\}.$$

Пусть $A = (M + a) \cap (M - a)$, где $a = (1/2, 0, 0)$. Легко проверить, что

$$A = \text{co}\{(1/2, 1, 0), (1/2, -1, 0), (-1/2, 1, 0), (-1/2, -1, 0), (0, -1/2, 1/2), (0, 1/2, 1/2)\}.$$

Пусть $p = (0, 0, 1)$. Тогда опорное множество $A(p)$ есть отрезок вида

$$[(0, -1/2, 1/2), (0, 1/2, 1/2)],$$

а опорное множество $M(p)$ состоит из одной точки, т.е. $M(p) = x_p^M = (0, 0, 1)$. Выберем точку $x_p^A = (0, 0, 1/2) \in A(p)$. Легко убедиться в том, что отрезок $A(p) - x_p^A$ не содержится в множестве $M - x_p^M$, т.е. не выполнен опорный принцип (следствие 1.1) для данного множества A , следовательно, множество M не является порождающим.

ПРИМЕР 9.2. Через $D_r(a)[b, c]$ будем обозначать дугу окружности радиуса r длины не более πr с концами в точках b и c и центром кривизны в точке a . Пусть M есть множество, образованное вращением вокруг оси абсцисс дуги

$$D_5((3, -4, 0))[(0, 0, 0), (6, 0, 0)].$$

Пусть $A = (M + a) \cap (M - a)$, где $a = (0, 1/2, 0)$. Легко видеть, что $A = C_1 \cup C_2$, где

$$C_1 = M \cap \{(x, y, z) : y \geq 1/2\} - (0, 1/2, 0),$$

а C_2 симметрично C_1 относительно плоскости xOz . Плоская кривая в плоскости xOz , ограничивающая множество, полученное пересечением A и плоскости xOz , гладкая, так как ее сдвиг на вектор $(0, 1/2, 0)$ совпадает с гладкой кривой $\partial M \cap \{(x, y, z) : y = 1/2\}$. Пусть $p = (-1, 0, 0)$. Тогда $x_p^A = (3 - \sqrt{19}/2, 0, 0)$. Касательный конус к множеству A в точке x_p^A содержит полуплоскость $\{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0\}$, так как A содержит двумерное подмножество $A \cap \{(x, y, z) : y = 0\}$, ограниченное гладкой кривой. Касательный конус к множеству M в точке $x_p^M = (0, 0, 0)$ состоит из таких векторов $q \in \mathbb{R}^3$, для которых угол между q и вектором $(1, 0, 0)$ не больше, чем угол между прямой $y = 0, z = 0$ и $D_5((3, -4, 0))[(0, 0, 0), (6, 0, 0)]$ в точке $(0, 0, 0)$, т.е. $\arcsin(3/5)$. Итак, касательный конус к M в точке x_p^M является острым. Отсюда следует, что включение $A \subset M + x_p^A - x_p^M$ не выполнено и по следствию 1.1 данное множество M не является порождающим.

ПРИМЕР 9.3. Пусть M есть симплекс полной размерности в $\mathbb{R}^n$, т.е. выпуклая оболочка $n + 1$ точки общего положения. Легко убедиться в том, что M является порождающим множеством, так как всякое множество A , полученное как пересечение сдвигов симплекса M , есть либо симплекс полной размерности с $(n - 1)$ -мерными гранями, параллельными $(n - 1)$ -мерным граням симплекса M (а значит, подобный симплексу M), либо точка. В обоих случаях легко указать другой симплекс B , подобный симплексу M , такой, что $A + B = M$.

ПРИМЕР 9.4. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^4$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^4$, $e_0 = 0 \in \mathbb{R}^4$. Пусть $\lambda_k = 1/k$. Рассмотрим последовательность симплексов полной размерности из $\mathbb{R}^4$ вида

$$M_k = \text{co}\{e_1 + e_2 + \lambda_k e_4, e_1 - e_2, -e_1 - e_2, -e_1 + e_2, e_3\}.$$

Пусть $M_0 = \text{co}\{e_1 + e_2, e_1 - e_2, -e_1 - e_2, -e_1 + e_2, e_3\}$. Легко видеть, что $M_k \rightarrow M_0$ при $k \rightarrow \infty$, внутренность M_0 пуста и нет включения $M_k \supset M_0$ для всех k ; $M_0 = M \times \{0\}$, где M — трехмерная правильная четырехугольная пирамида, описанная в примере 9.1, следовательно, M_0 не является порождающим множеством.

ПРИМЕР 9.5. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^4$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathbb{R}^4$ и $e_0 = 0$. Определим в $\mathbb{R}^4$ симплекс полной размерности вида $\Sigma = \text{co}\{e_i\}_{i=0}^4$. Как показано в примере 9.3, множество Σ является порождающим множеством. Пусть линейный оператор T задается матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда легко показать, что $T\Sigma = M \times \{0\} + (1, 1, 0, 0)$, где M — трехмерная правильная четырехугольная пирамида, которая, как показано в примере 9.1, не является порождающим множеством. Поэтому и $T\Sigma$ также не является порождающим множеством.

ПРИМЕР 9.6. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^3$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$ и $e_0 = 0$. Рассмотрим тетраэдры, являющиеся порождающими множествами в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \text{co}\left\{e_0, -e_1, e_2, \frac{1}{2}(e_2 - e_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3\right\}, \\ \Sigma_2 &= \text{co}\left\{e_0, -e_1, e_2, \frac{1}{2}(e_2 - e_1) - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3\right\}. \end{aligned}$$

Определим многогранник $M = \Sigma_1 + \Sigma_2$. Точка 0 — вершина многогранника M , из которой исходят четыре ребра $[0, -2e_1]$, $[0, 2e_2]$, $[0, \frac{1}{2}(e_2 - e_1) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e_3]$. Таким образом, точка 0 является вершиной правильной четырехугольной пирамиды

$$S = \text{co}\left\{0, -e_1, e_2, \frac{1}{2}(e_2 - e_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3, \frac{1}{2}(e_2 - e_1) - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3\right\}$$

такой, что $B_{1/2}(0) \cap S = B_{1/2}(0) \cap M$. Выберем $p = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Тогда $M(p) = \{x_p^M\} = \{0\}$. Пусть $X = [a, b]$, где

$$a = \frac{1}{3}\left(-\frac{3e_1}{2} + \frac{e_2}{2} + \frac{e_3}{\sqrt{2}}\right), \quad b = \frac{1}{3}\left(-\frac{3e_1}{2} + \frac{e_2}{2} - \frac{e_3}{\sqrt{2}}\right).$$

Определим $Y = M * X$, для которого получим

$$Y(p) = (S * X)(p) = \text{co} \left\{ \left(\frac{e_1}{6} + \frac{e_2}{6} + \frac{e_3}{3\sqrt{2}} \right), - \left(\frac{e_1}{6} + \frac{e_2}{6} + \frac{e_3}{3\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Выберем $x_p^Y = 0 \in Y(p)$. Легко убедиться в том, что $Y(p) \not\subset M(p) + x_p^Y - x_p^M$, т.е. не выполнен опорный принцип (следствие 1.1), и поэтому M не является порождающим множеством.

ПРИМЕР 9.7. Покажем, что константа Липшица оператора $B_R(0)$ -сильно выпуклой оболочки может оказаться строго больше единицы. Рассмотрим случай, когда шар $B_R(0)$ взят на плоскости $\mathbb{R}^2$. Фиксируем число $d \in (0, R)$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ два множества A_1 и A_2 , где

$$A_1 = \{(x, y) : x^2 + (y + \sqrt{R^2 - d^2})^2 \leq R^2, y \geq 0\},$$

а множество A_2 симметрично множеству A_1 относительно прямой

$$\left\{ (x, y) : y = \frac{R - \sqrt{R^2 - d^2}}{2} \right\}.$$

Отметим, что $A_1 \subset B_d(0)$, а $A_2 \subset B_d(b)$, где точка $b \in \mathbb{R}^2$, $b = (0, R - \sqrt{R^2 - d^2})$. С помощью элементарной планиметрии можно получить, что расстояние по Хаусдорфу между A_1 и A_2 равняется $h_1 = \sqrt{R^2 + d^2} - R$. Легко убедиться в том, что $B_R(0)$ -сильно выпуклые оболочки множеств A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$\text{strco}_R A_1 = A_1 \cup (-A_1), \quad \text{strco}_R A_2 = A_2 \cup (A_1 + b).$$

Отсюда легко получаем, что расстояние между $B_R(0)$ -сильно выпуклыми оболочками множеств A_1 и A_2 равняется $h_2 = R - \sqrt{R^2 - d^2}$. Очевидно, что $h_2 > h_1$, т.е. доказано требуемое утверждение.

Список литературы

1. *Levi F. W.* On Helly's theorem and the axioms of convexity // J. Indian Math. Soc. (N.S.). 1951. V. 15. P. 65–76.
2. *Klee V. L.* (ed.) Convexity. Proceedings of symposia in pure mathematics. Vol. VIII. Held at the University of Washington Scattle, Washington June 13–15, 1961. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1963.
3. *Dolecki S., Kurcyusz S.* On Φ -convexity in extremal problems // SIAM J. Control Optim. 1978. V. 16. P. 277–300.
4. *Солтан В. П.* Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984.
5. *Ben-Tal A., Ben-Israel A.* F -convex functions: properties and applications // Generalized concavity in optimization and economics. Proc. NATO Adv. Study Inst., Vancouver/Can., 1980. Academic Press, 1981. P. 301–334.
6. *Singer I.* Surrogate conjugate functions and surrogate convexity // Appl. Anal. 1983. V. 16. P. 291–327.
7. *Frankowska H., Olech C.* R -convexity of the integral of the set-valued functions // Contributions to analysis and geometry. Baltimore, MD: Johns Hopkins Univ. Press, 1981. P. 117–129.

8. *Половинкин Е. С.* О свойствах сильно выпуклых множеств // Моделирование процессов управления и обработки информации. М.: Изд-во МФТИ, 1994. С. 182–189.
9. *Половинкин Е. С.* Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 103–130.
10. *Половинкин Е. С.* О выпуклых и сильно выпуклых аппроксимациях множеств // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 3. С. 308–311.
11. *Polovinkin E. S.* On strongly convex sets // Phystech J. 1996. V. 2. № 1. P. 43–59.
12. *Половинкин Е. С.* Обобщение теорем Каратеодори и Крейна–Мильмана для сильно выпуклых множеств // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 2. С. 164–166.
13. *Балашов М. В., Половинкин Е. С.* Сильно выпуклая оболочка и ее свойства // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики. М.: Изд-во МФТИ, 1995. С. 27–36.
14. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
15. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1984.
16. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
17. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
18. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
19. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений. М.: Изд-во МФТИ, 1982.
20. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Наука, 1979.
21. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
22. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
23. *Steiner J.* Von dem Krümmungsschwerpunkte ebener Curven // J. Reine Angew. Math.; 21, 33–63, 101–122, (1840) ou Ges. Werke, Bd. 2 Berlin, G. Reiner (1882), 99–159.
24. *Saint Pierre J.* Point de Steiner et sections lipschitziennes // Sémin. Anal. Convexe. 1985. V. 15. № 7.
25. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука, 1971.
26. *Лейтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
27. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.