Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Конягин, О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 1, 103–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:13:50

УДК 517.518.45

С. В. Конягин

О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье

Доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ и последовательность $\{\psi(m)\}$ удовлетворяют следующим условиям: функция $\varphi(u)$ и является неубывающей на $(0, +\infty)$, $\psi(m) \geq 1$ ($m = 1, 2, \dots$) и $\varphi(m)\psi(m) = o(m\sqrt{\ln m}/\sqrt{\ln \ln m})$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда найдется функция $f \in L[-\pi, \pi]$ такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|f(x)|) dx < \infty$$

и $\limsup_{m \rightarrow \infty} S_m(f, x)/\psi(m) = \infty$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$, где $S_m(f)$ — m -я частная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f .

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ — одномерный тор. Для определенной на $\mathbb{T}$ конечной меры μ , область определения которой содержит все борелевские подмножества $\mathbb{T}$, обозначим

$$\hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{T}} \exp(-ikx) d\mu(x), \quad S_m(\mu, x) = \sum_{k=-m}^m \hat{\mu}(k) \exp(ikx).$$

Аналогично, если $f \in L(\mathbb{T})$, т.е. функция f интегрируема на $\mathbb{T}$, то

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \exp(-ikx) dx, \quad S_m(f, x) = \sum_{k=-m}^m \hat{f}(k) \exp(ikx).$$

Таким образом, $S_m(\mu, x)$ ($S_m(f, x)$) есть частная сумма тригонометрического ряда Фурье меры μ (соответственно функции f).

Знаменитая теорема Л. Карлесона [1] утверждает, что если $f \in L^2(\mathbb{T})$, то $S_m(f, x) \rightarrow f(x)$ при $m \rightarrow \infty$ для почти всех $x \in \mathbb{T}$. Вопрос о максимально возможном ослаблении условия на функцию f , гарантирующего сходимость ряда Фурье функции f к f почти всюду, является одним из центральных в теории тригонометрических рядов. Наиболее сильный результат в этом направлении

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00357) и Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 96-15-96072).

принадлежит Н. Ю. Антонову [2], который, усилив теорему П. Шёлина [3], показал, что если $f \in L(\mathbb{T})$ и

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)| \ln(1 + |f(x)|) \ln \ln \ln(20 + |f(x)|) dx < \infty,$$

то $S_m(f, x) \rightarrow f(x)$ при $m \rightarrow \infty$ для почти всех $x \in \mathbb{T}$.

С другой стороны, А. Н. Колмогоров [4] построил классический пример тригонометрического ряда Фурье интегрируемой на $\mathbb{T}$ функции, расходящегося почти всюду. Затем им была показана возможность расходимости ряда Фурье всюду ([5], см. также [6; гл. 5, § 20]). Т. В. Кёрнер [7] доказал, что если неубывающая функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ удовлетворяет условию $\varphi(u) = o(u \ln \ln u)$ при $u \rightarrow \infty$, то найдется функция $f \in L(\mathbb{T})$ такая, что

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(x)|) dx < \infty$$

и $\limsup_{m \rightarrow \infty} |S_m(f, x)| = \infty$ для всех $x \in \mathbb{T}$.

Значительный интерес представляет также вопрос о мажорантах частных сумм Фурье $S_m(f, x)$ интегрируемой функции f почти всюду. По теореме Дж. Х. Харди [8] $S_m(f, x) = o(\ln m)$ при $m \rightarrow \infty$ почти всюду. С другой стороны, Ю. Чен [9] доказал, что для любой последовательности $\psi(m) = o(\ln \ln m)$ ($m \rightarrow \infty$) найдется функция $f \in L(\mathbb{T})$ такая, что для всех $x \in \mathbb{T}$ неравенство $S_m(f, x) > \psi(m)$ выполнено для бесконечно многих значений m . В работе К. И. Осколкова [10] показана связь оценок мажорант частных сумм Фурье почти всюду с константами Лебега последовательностей целых чисел, т. е. с величинами вида

$$L_N(K) = \sup \left\{ \max_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \sum_{k=1}^m \widehat{f}(n_k) \exp(in_k x) \right| \right\},$$

где $K = \{n_1, n_2, \dots\}$ — последовательность различных целых чисел, а $\sup$ берется по всем непрерывным на $\mathbb{T}$ функциям f таким, что $\max_x |f(x)| \leq 1$ и $\widehat{f}(n) = 0$ для всех $n \notin K$. Отметим также работу Осколкова [11], в которой оцениваются мажоранты подпоследовательностей частных сумм Фурье почти всюду.

Целью настоящей работы является построение функций $f \in L(\mathbb{T})$ со всюду расходящимся рядом Фурье из более узких функциональных классов, чем в известных к настоящему времени примерах, а также построение функций $f \in L(\mathbb{T})$ с быстро растущими мажорантами частных сумм ряда Фурье всюду. Будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ и последовательность $\{\psi(m)\}$ удовлетворяют следующим условиям: функция $\varphi(u)/u$ не убывает на $(0, +\infty)$, $\psi(m) \geq 1$ ($m = 1, 2, \dots$) и $\varphi(m)\psi(m) = o(m\sqrt{\ln m}/\sqrt{\ln \ln m})$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда найдется функция $f \in L(\mathbb{T})$ такая, что

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(x)|) dx < \infty$$

и $\limsup_{m \rightarrow \infty} S_m(f, x)/\psi(m) = \infty$ для всех $x \in \mathbb{T}$.

Из теоремы легко вытекают следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть неубывающая функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ удовлетворяет условию $\varphi(u) = o(u\sqrt{\ln u}/\sqrt{\ln \ln u})$ при $u \rightarrow \infty$. Тогда найдется функция $f \in L(\mathbb{T})$ такая, что

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(x)|) dx < \infty$$

и $\limsup_{m \rightarrow \infty} S_m(f, x) = \infty$ для всех $x \in \mathbb{T}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть последовательность $\{\psi(m)\}$ положительных чисел удовлетворяет условию $\psi(m) = o(\sqrt{\ln m}/\sqrt{\ln \ln m})$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда найдется функция $f \in L(\mathbb{T})$ такая, что $\limsup_{m \rightarrow \infty} S_m(f, x)/\psi(m) = \infty$ для всех $x \in \mathbb{T}$.

Связь между сходимостью рядов Фурье на функциональных классах и мажорантой частных сумм Фурье почти всюду изучалась К. Тандори [12]. В работе В. Тотика [13] для многих функциональных классов установлена равносильность задач существования функций со всюду и почти всюду расходящимся рядом Фурье.

Чтобы доказать теорему, мы строим для бесконечно многих натуральных N меру

$$\mu = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{x_k}, \quad (1.1)$$

где δ_x — функция Дирака, сосредоточенная в точке x , такую, что для всех $x \in \mathbb{T}$, за исключением множества малой меры, найдется достаточно большая частная сумма Фурье $S_m(f, x)$ с не слишком большим номером m . При этом точки x_k ($k = 0, \dots, N-1$) близки к $2\pi k/N$. С помощью меры μ известным образом строятся тригонометрические полиномы с большими мажорантами частных сумм Фурье, после чего доказательство теоремы не представляет труда. Идея использования мер вида (1.1) для построения всюду расходящихся рядов Фурье является развитием конструкции Колмогорова, разработанным Е. М. Стейном [14], Т. В. Кёрнером [7] и Ж.-П. Каханом [15]. Однако меры (1.1) при “лакунарном” убывании $x_k - 2\pi k/N$ (например, $x_k - 2\pi k/N = 2\pi/100^k$, см. [7]) или при случайном выборе x_k [15] не позволяют преодолеть рубеж $\ln \ln u$ в задачах расходимости рядов Фурье, т.е. дают вышеупомянутые результаты [7] и [9]. Чтобы усилить $\ln \ln u$ до $\sqrt{\ln u}/\sqrt{\ln \ln u}$, мы берем точки x_k таким образом, что множество $\{x_k - 2\pi k/N\}$ близко к фрактальному множеству канторова типа. Точнее, мы полагаем $N = 2^n$,

$$x_k = \frac{2\pi k}{N} + 2\pi \sum_{\nu=1}^n (2\kappa_\nu - 1)\varepsilon_\nu, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad \varepsilon_\nu = N^{-1}n^{-2\nu},$$

где κ_ν — цифры двоичного разложения числа k :

$$k = \sum_{\nu=1}^n \kappa_\nu 2^{n-\nu}, \quad \kappa_\nu \in \{0, 1\}, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Оценка частных сумм Фурье меры μ сводится к оценке дискретного преобразования Гильберта специального вида для чисел $z_\nu = \exp(2\pi i t \varepsilon_\nu)$. При этом быстрое убывание ε_ν обеспечивает то, что числа z_ν “почти независимы”.

Строгое определение нужного нам дискретного преобразования Гильберта специального вида дается в § 2; там же находятся оценки дискретного преобразования Гильберта, составляющие наиболее технически сложную часть настоящей работы. В § 3 строятся тригонометрические полиномы с большими частными суммами, а в § 4 доказываются теорема и следствия.

Отметим, что использование “фрактальных” множеств оказалось более эффективным (чем “лакунарных” или случайных) и в некоторых задачах, связанных с равномерным распределением последовательностей [16; теорема 6.1].

Можно было бы надеяться на основании идей [10] вывести теорему настоящей работы из оценок констант Лебега последовательностей целых чисел фрактального типа, но нетривиально оценить последние нам не удалось.

Автор выражает глубокую благодарность К. И. Осколкову за плодотворные научные дискуссии во время визита автора в Университет Южной Каролины, стимулировавшие результаты настоящей статьи, и М. И. Дьяченко за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

§ 2. Оценка дискретного преобразования Гильберта

Пусть n – натуральное число, $N = 2^n$. Числам $k = 0, \dots, N-1$ и $l = 0, \dots, N-1$ сопоставим их двоичные разложения:

$$k = \sum_{\nu=1}^n \kappa_{\nu} 2^{n-\nu}, \quad \kappa_{\nu} \in \{0, 1\}, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

$$l = \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} 2^{n-\nu}, \quad \lambda_{\nu} \in \{0, 1\}, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Через $(k-l)_n$ мы будем обозначать наименьший по абсолютной величине вычет числа $k-l$ по модулю 2^n , т.е. $(k-l)_n = k-l$, если $|k-l| \leq N/2$, $(k-l)_n = k-l-N$, если $k-l > N/2$, и $(k-l)_n = k-l+N$, если $k-l < -N/2$.

Для комплексных чисел $z_1, \dots, z_n$ таких, что $|z_1| = \dots = |z_n| = 1$, обозначим $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$. Пусть $P(\mathbf{z}, k) = \prod_{\nu=1}^n z_{\nu}^{2^{\kappa_{\nu}}-1}$. Мы будем рассматривать дискретные преобразования Гильберта специального вида

$$H(\mathbf{z}, l) = \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{P(\mathbf{z}, k)}{(k-l)_n}, \quad 0 \leq l < N.$$

Имея двоичное разложение числа l , рассмотрим все числа $\nu \in \{1, \dots, n-1\}$, удовлетворяющие условию $\lambda_{\nu} \neq \lambda_{\nu+1}$, и расположим их в порядке возрастания: $\nu_1 < \dots < \nu_S$. (При этом $S = 0$, если $l = 0$ или $l = N-1$.) Выберем $\varphi \in (0, \pi/2)$ и положим $z_0 = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Нас будут интересовать векторы $\mathbf{z} = \mathbf{z}(l, z_0)$, заданные следующими условиями: $z_{\nu} = z_0$, если ν равно одному из чисел $\nu_1, \dots, \nu_S$, и $z_{\nu} = 1$ в противном случае. Цель этого параграфа – показать, что при удачном выборе $\mathbf{z}$ величина $|H(\mathbf{z}, l)|$ будет достаточно большой. Оказывается, что если l не слишком близко к 0 и N , то этим свойством обладает $\mathbf{z} = \mathbf{z}(l, z_0)$ при некотором z_0 .

Прежде чем оценивать дискретное преобразование Гильберта, рассмотрим функцию $s(k, l)$, определенную для чисел $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $l \in \{0, \dots, N-1\}$ и равную наибольшему целому $s \in \{0, \dots, S\}$ такому, что $\varkappa_\nu = \lambda_\nu$ при всех $\nu = 1, \dots, \nu_s$. Мы считаем, что $s(k, l) = 0$, если $S = 0$ или $\varkappa_\nu \neq \lambda_\nu$ при некотором $\nu \leq \nu_1$.

Определим число $w = \sqrt{z_0} = \cos(\varphi/2) + i \sin(\varphi/2)$.

ЛЕММА 2.1. Для $\mathbf{z} = \mathbf{z}(l, z_0)$ и натурального числа $m \leq n$ справедливо соотношение

$$w^{1-2\lambda_1} \prod_{\nu=1}^{m-1} z_\nu^{2\lambda_\nu-1} = w^{1-2\lambda_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное $\nu \in \{1, \dots, n-1\}$. Если $\lambda_\nu = \lambda_{\nu+1}$, то $z_\nu = 1$ и

$$z_\nu^{2\lambda_\nu-1} = 1 = w^{2(\lambda_\nu-\lambda_{\nu+1})}.$$

Если же $\lambda_\nu \neq \lambda_{\nu+1}$, то $z_\nu = z_0$ и

$$z_\nu^{2\lambda_\nu-1} = z_\nu^{\lambda_\nu-\lambda_{\nu+1}} = w^{2(\lambda_\nu-\lambda_{\nu+1})}.$$

Таким образом, в обоих случаях справедливо равенство

$$z_\nu^{2\lambda_\nu-1} = w^{2(\lambda_\nu-\lambda_{\nu+1})},$$

из которого вытекает, что

$$w^{1-2\lambda_1} \prod_{\nu=1}^{m-1} z_\nu^{2\lambda_\nu-1} = w^\lambda,$$

где

$$\lambda = 1 - 2\lambda_1 + \sum_{\nu=1}^{m-1} 2(\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}) = 1 - 2\lambda_m.$$

Тем самым лемма доказана.

Нам потребуются оценки дискретного преобразования Гильберта специальных последовательностей, связанных с функциями Радемахера. Пусть $[u]$ и $\{u\}$ обозначают целую и дробную части числа u соответственно. Для $t \in \mathbb{N}$ определим функции Радемахера $r_{-t}(x) = (-1)^{[x/2^t]}$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $t \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$, $1/4 \leq \{l/2^{t+1}\} < 1/2$. Пусть также $r(k) = -r_{-t}(k)$, $f(k)$ — ограниченная функция целочисленного аргумента, зависящая только от $[k/2^{t+1}]$, и при этом $f(l) = \max_k f(k) \geq 0$. Тогда

$$\sum_{k: [k/2^t] \neq [l/2^t]} \frac{r(k)f(k)}{k-l} \geq 0. \quad (2.1)$$

(Сумма ряда (2.1) понимается как

$$\lim_{K_1, K_2 \rightarrow \infty} \sum_{\substack{k: [k/2^t] \neq [l/2^t] \\ -K_1 \leq k \leq K_2}} \frac{r(k)f(k)}{k-l},$$

и мы утверждаем, что ряд сходится.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $l_0 = [l/2^t]$. Тогда неравенства $1/4 \leq \{l/2^{t+1}\} < 1/2$ дают

$$l_0 \equiv 0 \pmod{2}, \quad l - 2^t l_0 \geq 2^{t-1}. \quad (2.2)$$

Сначала мы оценим сумму (2.1) в случае, когда $f(k) = 1$ для всех k . Множество $\mathcal{K} = \{k : [k/2^t] \neq [l/2^t]\}$ можно разбить на четверки $(k^+, k^{++}, k^-, k^{--})$, где $k^+ = (l_0 + 2j - 1)2^t + u$, $k^{++} = (l_0 + 2j)2^t + u$, $k^- = (l_0 - 2j + 1)2^t + 2^t - 1 - u$, $k^{--} = (l_0 - 2j)2^t + 2^t - 1 - u$, $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq u < 2^t$. Для каждой четверки мы имеем

$$\begin{aligned} r(k^+) &= r(k^-) = 1, & r(k^{++}) &= r(k^{--}) = -1, \\ (l - k^-) - (k^+ - l) &= 2l - k^+ - k^- = 2(l - 2^t l_0) - 2^t + 1 > 0 \end{aligned}$$

вследствие (2.2) и, значит,

$$\begin{aligned} \sum_{k=k^+, k^{++}, k^-, k^{--}} \frac{r(k)}{k-l} &= \frac{1}{k^+ - l} - \frac{1}{k^{++} - l} - \frac{1}{l - k^-} + \frac{1}{l - k^{--}} \\ &= \frac{2^t}{(k^+ - l)(2^t + (k^+ - l))} - \frac{2^t}{(l - k^-)(2^t + (l - k^-))} > 0. \end{aligned}$$

Суммируя по всем четверкам, мы получаем

$$\sum_{k:[k/2^t] \neq [l/2^t]} \frac{r(k)}{k-l} \geq 0. \quad (2.3)$$

Таким образом, лемма 2.2 доказана в случае $f(k) \equiv 1$.

Рассмотрим теперь общий случай. Обозначим $\mathcal{K}_j = \{k : [k/2^{t+1}] = [l/2^{t+1}] + j\}$, где $j \in \mathbb{Z}$. Положим $f(k) = f_j$ для $k \in \mathcal{K}_j$. Мы имеем

$$\sum_{k:[k/2^t] \neq [l/2^t]} \frac{r(k)f(k)}{k-l} = f_0 \sum_{k:[k/2^t] \neq [l/2^t]} \frac{r(k)}{k-l} - \sum_{j \neq 0} (f_0 - f_j) \sum_{k \in \mathcal{K}_j} \frac{r(k)}{k-l}. \quad (2.4)$$

Далее, для любого $j \neq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{K}_j} \frac{r(k)}{k-l} &= \sum_{u=0}^{2^t-1} \left(\frac{-1}{(l_0 + 2j)2^t + u - l} + \frac{1}{(l_0 + 2j + 1)2^t + u - l} \right) \\ &= \sum_{u=0}^{2^t-1} \frac{-2^t}{((l_0 + 2j)2^t + u - l)((l_0 + 2j + 1)2^t + u - l)}. \end{aligned}$$

Поскольку $1 - 2^t \leq l_0 2^t - l + u \leq 2^t - 1$, то при любом $j \neq 0$ оба множителя $(l_0 + 2j)2^t + u - l$, $(l_0 + 2j + 1)2^t + u - l$ имеют тот же знак, что и j . Следовательно,

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_j} \frac{r(k)}{k-l} < 0. \quad (2.5)$$

Учитывая, что $f_0 \geq 0$ и $f_0 \geq f_j$ для всех j , мы подставляем (2.3) и (2.5) в (2.4) и получаем требуемое неравенство (2.1). Лемма 2.2 доказана.

Теперь мы готовы доказать ключевую лемму настоящей работы.

ЛЕММА 2.3. Для любого натурального n , $N = 2^n$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, $2\pi/\varphi \in \mathbb{N}$, $z_0 = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $w = \cos(\varphi/2) + i \sin(\varphi/2)$ и $\mathbf{z} = \mathbf{z}(l, z_0)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Im} \left(w^{1-2\lambda_1} \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{P(\mathbf{z}, k)}{k-l} \right) > \sin \frac{\varphi}{2} \cos^n \varphi \ln N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \neq l$. Обозначим $\mu(\sigma) = 2\kappa_{\nu_\sigma} - 1$. Положим $A_s = (\cos \varphi)^{S-s} \prod_{\sigma=1}^s z_0^{\mu(\sigma)}$, $s = 0, \dots, S$. Имеет место следующее тождество:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{z}, k) &= A_S = A_{s(k,l)} + \sum_{s=s(k,l)+1}^S (A_s - A_{s-1}) = (\cos \varphi)^{S-s(k,l)} \prod_{\sigma=1}^{s(k,l)} z_0^{\mu(\sigma)} \\ &+ \sum_{s=s(k,l)+1}^S (\cos \varphi)^{S-s} (z_0^{\mu(s)} - \cos \varphi) \prod_{\sigma=1}^{s(k,l)} z_0^{\mu(\sigma)} \prod_{\sigma=s(k,l)+1}^{s-1} z_0^{\mu(\sigma)} \\ &= (\cos \varphi)^{S-s(k,l)} \prod_{\sigma=1}^{s(k,l)} z_0^{\mu(\sigma)} \\ &+ \sum_{s=s(k,l)+1}^S (\cos \varphi)^{S-s} \mu(s) (\sin \varphi) i \prod_{\sigma=1}^{s(k,l)} z_0^{\mu(\sigma)} \prod_{\sigma=s(k,l)+1}^{s-1} z_0^{\mu(\sigma)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$w^{1-2\lambda_1} P(\mathbf{z}, k) = (J_1(k) + J_2(k)) w^{1-2\lambda_1} \prod_{\sigma=1}^{s(k,l)} z_0^{\mu(\sigma)}, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} J_1(k) &= (\cos \varphi)^{S-s(k,l)}, \\ J_2(k) &= (\sin \varphi) i \sum_{s=s(k,l)+1}^S (\cos \varphi)^{S-s} \mu(s) \prod_{\sigma=s(k,l)+1}^{s-1} z_0^{\mu(\sigma)}. \end{aligned}$$

Пусть $m = \min\{\nu : \kappa_\nu \neq \lambda_\nu\}$. Учитывая, что $\kappa_{\nu_\sigma} = \lambda_{\nu_\sigma}$ при $\sigma \leq s(k,l)$ и что $z_\nu = 1$ при всех $\nu < m$, кроме значений $\nu = \nu_1, \dots, \nu_{s(k,l)}$, при которых $z_\nu = z_0$, мы получаем

$$w^{1-2\lambda_1} \prod_{\sigma=1}^{s(k,l)} z_0^{\mu(\sigma)} = w^{1-2\lambda_1} \prod_{\sigma=1}^{s(k,l)} z_0^{2\lambda_{\nu_\sigma}-1} = w^{1-2\lambda_1} \prod_{\nu=1}^{m-1} z_\nu^{2\lambda_\nu-1},$$

и по лемме 2.1

$$w^{1-2\lambda_1} \prod_{\sigma=1}^{s(k,l)} z_0^{\mu(\sigma)} = w^{1-2\lambda_m}.$$

Заметим, что в силу выбора m мы имеем $1 - 2\lambda_m = \operatorname{sgn}(k - l)$, поэтому с учетом последнего соотношения равенство (2.6) можно переписать в виде

$$w^{1-2\lambda_1} P(\mathbf{z}, k) = (J_1(k) + J_2(k)) w^{\operatorname{sgn}(k-l)}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Im} \left(w^{1-2\lambda_1} \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{P(\mathbf{z}, k)}{k-l} \right) = I_1 + I_2, \quad (2.7)$$

где

$$I_1 = \operatorname{Im} \left(\sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{J_1(k) w^{\operatorname{sgn}(k-l)}}{k-l} \right), \quad I_2 = \operatorname{Im} \left(\sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{J_2(k) w^{\operatorname{sgn}(k-l)}}{k-l} \right).$$

Мы будем оценивать отдельно I_1 и I_2 .

Преобразуем I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{J_1(k)}{k-l} \operatorname{Im} w^{\operatorname{sgn}(k-l)} \\ &= \sin \frac{\varphi}{2} \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{J_1(k) \operatorname{sgn}(k-l)}{k-l} = \sin \frac{\varphi}{2} \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{J_1(k)}{|k-l|}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_1 &> \sin \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi)^n \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{1}{|k-l|} = \sin \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi)^n \left(\sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{l-k} + \sum_{k=l+1}^{N-1} \frac{1}{k-l} \right) \\ &= \sin \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi)^n \left(\sum_{j=1}^l \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{N-1-l} \frac{1}{j} \right) \geq \sin \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi)^n \left(\sum_{j=1}^l \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{N-1-l} \frac{1}{l+j} \right) \\ &= \sin \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi)^n \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j} > \sin \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi)^n \ln N. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Преобразуем I_2 , поменяв порядок суммирования:

$$\begin{aligned} I_2 &= \operatorname{Im} \left((\sin \varphi) i \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{w^{\operatorname{sgn}(k-l)}}{k-l} \right. \\ &\quad \times \sum_{s=s(k,l)+1}^S (\cos \varphi)^{S-s} (2\kappa_{\nu_s} - 1) \prod_{\sigma=s(k,l)+1}^{s-1} z_0^{2\kappa_{\nu_\sigma}-1} \left. \right) \\ &= \sin \varphi \sum_{s=1}^S (\cos \varphi)^{S-s} \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ s(k,l) < s}} \frac{2\kappa_{\nu_s} - 1}{k-l} \operatorname{Re} U(s, k), \end{aligned}$$

где

$$U(s, k) = w^{\operatorname{sgn}(k-l)} \prod_{\sigma=s(k,l)+1}^{s-1} z_0^{2\kappa_{\nu\sigma}-1}.$$

Будем теперь обозначать

$$I_2(s) = \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ s(k,l) < s}} \frac{2\kappa_{\nu_s} - 1}{k-l} \operatorname{Re} U(s, k).$$

Таким образом, мы имеем

$$I_2 = \sin \varphi \sum_{s=1}^S (\cos \varphi)^{S-s} I_2(s). \quad (2.9)$$

Покажем, что $I_2(s) \geq 0$ для каждого $s = 1, \dots, S$. Для определенности будем считать, что $\lambda_{\nu_s} = 0$. Случай $\lambda_{\nu_s} = 1$ сводится к случаю $\lambda_{\nu_s} = 0$ путем замены l на $N-1-l$ и k на $N-1-k$, так как $s(N-1-k, N-1-l) = s(k, l)$. Мы будем пользоваться тем, что

$$\lambda_{\nu_s+1} = 1 - \lambda_{\nu_s} = 1. \quad (2.10)$$

Для оценки $I_2(s)$ применим лемму 3. Обозначим $t = n - \nu_s$, $f(k) = \operatorname{Re} U(s, k)$ для $0 \leq k < N$, $[k/2^{t+1}] \neq [l/2^{t+1}]$, $f(k) = \operatorname{Re} w$ для $[k/2^{t+1}] = [l/2^{t+1}]$, $f(k) = 0$ для $k < 0$ или $k \geq N$. Если $0 \leq k < N$, то

$$\left[\frac{k}{2^t} \right] = \sum_{\nu=1}^{\nu_s} \kappa_{\nu} 2^{\nu_s - \nu}$$

и $2\kappa_{\nu_s} - 1 = -r_{-t}(k) = r(k)$. Кроме того,

$$\left[\frac{l}{2^t} \right] = \sum_{\nu=1}^{\nu_s} \lambda_{\nu} 2^{\nu_s - \nu},$$

и условие $s(k, l) < s$ означает, что не все цифры κ_{ν} при $\nu < \nu_s$ равны соответствующим цифрам λ_{ν} , а это равносильно тому, что $[k/2^t] \neq [l/2^t]$. Если, кроме того, $[k/2^{t+1}] = [l/2^{t+1}]$, то $\kappa_{\nu} = \lambda_{\nu}$ для $\nu < \nu_s$, $\operatorname{Re} U(s, k) = \operatorname{Re} w^{\operatorname{sgn}(k-l)} = \operatorname{Re} w = f(l)$. Значит,

$$I_2(s) = \sum_{k: [k/2^t] \neq [l/2^t]} \frac{r(k)f(k)}{k-l}. \quad (2.11)$$

Далее, если $0 \leq k < N$, $0 \leq k' < N$, $[k/2^{t+1}] = [k'/2^{t+1}]$ и

$$k' = \sum_{\nu=1}^n \kappa'_{\nu} 2^{n-\nu}, \quad \kappa'_{\nu} \in \{0, 1\}, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

то $\kappa_{\nu} = \kappa'_{\nu}$ для всех $\nu < \nu_s$, и в случае $s(k, l) < s$ мы имеем $s(k, l) = s(k', l)$ и, кроме того, $\kappa_{\nu_{\sigma}} = \kappa'_{\nu_{\sigma}}$ для $\sigma < s$. Таким образом, $U(s, k) = U(s', k)$, т.е. $f(k)$ есть

функция от $[k/2^{t+1}]$. Мы имеем $f(l) = \operatorname{Re} w = \cos(\varphi/2) > 0 = f(k)$ для $k < 0$ или $k \geq N$. Если $0 \leq k < N$, то $f(k) = \cos(j\varphi + (\varphi/2)) \leq \cos(\varphi/2) = f(l)$ в силу выбора $U(s, k)$, ибо $2\pi/\varphi \in \mathbb{N}$. Наконец,

$$\left\{ \frac{l}{2^{t+1}} \right\} = \sum_{\nu=\nu_s}^n \frac{\lambda_\nu}{2^{\nu-\nu_s+1}}.$$

Вследствие (2.10) $1/4 \leq \{l/2^{t+1}\} < 1/2$. Таким образом, все условия леммы 2.2 выполнены, и, используя (2.11), мы получаем $I_2(s) \geq 0$. Отсюда и из (2.9) $I_2 \geq 0$. Подставляя последнее неравенство и (2.8) в (2.7), мы завершаем доказательство леммы 2.3.

ЛЕММА 2.4. *Для достаточно большого натурального n , $N = 2^n$ и $l \in \{0, \dots, N-1\}$ найдется такой вектор $\mathbf{z}$, что*

$$|H(\mathbf{z}, l)| > 0.08\sqrt{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы выберем $\varphi = \varphi_n$ так, что $\varphi \in (0, \pi/2)$, $2\pi/\varphi \in \mathbb{N}$ и выполнено асимптотическое соотношение $\varphi \sim \sqrt{2/n}$ при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n/\sqrt{2/n} = 1$), которое влечет

$$\sin \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi)^n \ln N \sim \frac{\ln 2}{\sqrt{2}e} \sqrt{n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Следовательно, по лемме 2.3 для достаточно большого натурального n имеет место неравенство

$$\operatorname{Im} \left| \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq l}} \frac{P(\mathbf{z}, k)}{k-l} \right| - 2 \ln 2 - \frac{2}{N} > 0.16\sqrt{n}. \quad (2.12)$$

Будем считать, что $l < N/2$; случай $l \geq N/2$ рассматривается аналогично. Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \left| H(\mathbf{z}, l) - \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq l}} \frac{P(\mathbf{z}, k)}{k-l} \right| &= \left| \sum_{k=l+N/2+1}^{N-1} \left(\frac{-1}{l+N-k} + \frac{-1}{k-l} \right) P(\mathbf{z}, k) \right| \\ &\leq \sum_{k=l+N/2+1}^{N-1} \left(\frac{1}{l+N-k} + \frac{1}{k-l} \right) \\ &= \sum_{j=l+1}^{N/2-1} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{N-j} \right) \leq 2 \sum_{j=l+1}^{N/2-1} \frac{1}{j}, \end{aligned}$$

откуда

$$|H(\mathbf{z}, l)| \geq \left| \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq l}} \frac{P(\mathbf{z}, k)}{k-l} \right| - 2 \sum_{j=l+1}^{N/2-1} \frac{1}{j}. \quad (2.13)$$

Заметим, что

$$\sum_{j=N/4+1}^{N/2-1} \frac{1}{j} \leq \sum_{j=N/4+1}^{N/2-1} \int_{j-1}^j \frac{du}{u} = \int_{N/4}^{N/2-1} \frac{du}{u} < \ln 2. \quad (2.14)$$

Следовательно, для $N/4 \leq l < N/2$ мы получаем из (2.12) и (2.13), что $|H(\mathbf{z}, l)| > 0.16\sqrt{n}$, и в этом случае утверждение леммы выполнено.

Аналогичным образом, если $l < N/4$, но при этом имеет место неравенство

$$\sum_{j=l+1}^{N/4} \frac{1}{j} \leq 0.04\sqrt{n} + \frac{1}{N}, \quad (2.15)$$

то в силу (2.12) и (2.13)

$$|H(\mathbf{z}, l)| \geq \left| \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{P(\mathbf{z}, k)}{k-l} \right| - 2 \sum_{j=l+1}^{N/4} \frac{1}{j} - 2 \sum_{j=N/4+1}^{N/2-1} \frac{1}{j} > 0.08\sqrt{n}$$

и утверждение леммы вновь справедливо.

Рассмотрим теперь случай, когда неравенство (2.15) не выполнено, т.е.

$$\sum_{j=l+1}^{N/4} \frac{1}{j} > 0.04\sqrt{n} + \frac{1}{N}. \quad (2.16)$$

В качестве $\mathbf{z}$ возьмем вектор с $z_1 = -i$, $z_\nu = 1$ при $\nu > 1$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} H(\mathbf{z}, l) &= \sum_{k=0}^{l-1} \frac{-1}{l-k} + \sum_{k=l+1}^{N/2-1} \frac{1}{k-l} + \sum_{k=N/2}^{l+N/2} \frac{-1}{k-l} + \sum_{k=l+N/2+1}^{N-1} \frac{1}{l-k+N} \\ &= \sum_{j=1}^l \frac{-1}{j} + \sum_{j=1}^{N/2-l-1} \frac{1}{j} + \sum_{j=N/2-l}^{N/2} \frac{-1}{j} + \sum_{j=l+1}^{N/2-1} \frac{1}{j} \\ &= 2 \sum_{j=l+1}^{N/2-l-1} \frac{1}{j} - \frac{2}{N} \geq 2 \sum_{j=l+1}^{N/4} \frac{1}{j} - \frac{2}{N}, \end{aligned}$$

и в силу (2.16) $|H(\mathbf{z}, l)| > 0.08\sqrt{n}$. Лемма 2.4 доказана.

§ 3. Построение тригонометрических полиномов с большими частными суммами

Прежде чем переходить к основной конструкции настоящего параграфа, приведем два вспомогательных утверждения. Пусть $[u]$ — целая часть действительного числа u , $\{u\} = u - [u]$ — его дробная часть, $\|u\|$ — расстояние от u до ближайшего целого числа.

ЛЕММА 3.1. *Для действительных чисел α , u , v , удовлетворяющих условиям $0 < \alpha < 1/4$, $\alpha < \|u\| < 1/2 - \alpha$, найдется такое целое неотрицательное число $s \leq 2/\alpha + 2$, что $1/12 \leq \{v + su\} \leq 5/12$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\|u\| = \{u\}$ лемма фактически доказана в [6; гл. V, §20]. Пусть $\|u\| = 1 - \{u\}$, $u' = -u$, $v' = 1/2 - v$. Мы имеем $\|u'\| = \{u'\}$. Следовательно, найдется такое $s \leq 2/\alpha + 2$, что $1/12 \leq \{v' + su'\} \leq 5/12$. Последнее неравенство означает, что для некоторого целого l имеют место неравенства $1/12 \leq v' + su' - l \leq 5/12$, из которых вытекает, что $1/12 \leq v + su + l \leq 5/12$, т.е. и в этом случае $1/12 \leq \{v + su\} \leq 5/12$.

Через C мы обозначаем положительные константы, значения которых будут меняться на протяжении параграфа.

ЛЕММА 3.2. Для $0 < |u| \leq \pi$ и натурального m справедливо неравенство

$$\left| \frac{\sin(m + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} - \frac{2 \sin mu}{u} \right| \leq C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\frac{1}{\sin \frac{u}{2}} - \frac{2}{u} = \frac{O(u^3)}{u \sin \frac{u}{2}} = O(u)$$

при $u \in (0, \pi)$, то

$$\left| \frac{\sin(m + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} - 2 \frac{\sin(m + \frac{1}{2})u}{u} \right| \leq C. \quad (3.1)$$

Далее,

$$\left| \frac{\sin(m + \frac{1}{2})u}{u} - \frac{\sin mu}{u} \right| \leq 1.$$

Отсюда и из (3.1) вытекает, что

$$\left| \frac{\sin(m + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} - \frac{2 \sin mu}{u} \right| \leq C + 2.$$

Лемма доказана.

Следуя [7], мы возьмем большое натуральное число N и будем подбирать точки x_k ($k = 0, \dots, N-1$), близкие к $2\pi k/N$, так, чтобы мажоранты частных сумм Фурье меры

$$\mu = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{x_k}, \quad (3.2)$$

где δ_x — функция Дирака, сосредоточенная в точке x , были велики на большом множестве. Как и в §2, мы будем считать, что $N = 2^n$. Следующая техническая лемма сводит оценку частных сумм Фурье $S_m(\mu, x)$ меры μ в точке x к изучению дискретного преобразования Гильберта.

ЛЕММА 3.3. Пусть $n \geq 2$, $N = 2^n$, мера μ задана соотношением (3.2),

$$\max_{k=0, \dots, N-1} \left| x_k - \frac{2\pi k}{N} \right| \leq \delta < \frac{\pi}{N},$$

$0 \leq l < N$, $2\pi l/N + \Delta \leq x \leq 2\pi(l+1)/N - \Delta$, $\Delta > \delta$. Тогда для любого натурального m справедливо неравенство

$$\left| S_m(\mu, x) - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{\sin m(x_k - x)}{(k-l)_n} \right| \leq C + \frac{4}{N(\Delta - \delta)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем предполагать, что $l \leq N/2$; случай $l > N/2$ рассматривается аналогично. Хорошо известно, что частные суммы ряда Фурье меры μ в точке x выражаются формулой

$$S_m(\mu, x) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin(m + \frac{1}{2})(x_k - x)}{\sin \frac{x_k - x}{2}}.$$

(При этом $(\sin(m + \frac{1}{2})y) / \sin(\frac{1}{2}y)$ полагается равным $2m+1$ в случае $\sin(\frac{1}{2}y) = 0$.) Следовательно,

$$S_m(\mu, x) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= N^{-1} \frac{\sin(m + \frac{1}{2})(x_l - x)}{\sin \frac{x_l - x}{2}}, \\ I_2 &= N^{-1} \frac{\sin(m + \frac{1}{2})(x_{l+1} - x)}{\sin \frac{x_{l+1} - x}{2}}, \\ I_3 &= N^{-1} \sum_{\substack{0 \leq k \leq l+N/2 \\ k \neq l, k \neq l+1}} \frac{\sin(m + \frac{1}{2})(x_k - x)}{\sin \frac{x_k - x}{2}}, \\ I_4 &= N^{-1} \sum_{k=l+N/2+1}^{N-1} \frac{\sin(m + \frac{1}{2})(x_k - x)}{\sin \frac{x_k - x}{2}}. \end{aligned}$$

Фигурирующую в условии леммы разность можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_m(\mu, x) - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{\sin m(x_k - x)}{(k-l)_n} \\ = I_1 + \left(I_2 - \frac{1}{\pi} \frac{\sin m(x_{l+1} - x)}{((l+1) - l)_n} \right) \\ + \left(I_3 - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{0 \leq k \leq l+N/2 \\ k \neq l, k \neq l+1}} \frac{\sin m(x_k - x)}{(k-l)_n} \right) \\ + \left(I_4 - \frac{1}{\pi} \sum_{k=l+N/2+1}^{N-1} \frac{\sin m(x_k - x)}{(k-l)_n} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

По лемме 3.2

$$|I_1| \leq N^{-1} \left| \frac{2 \sin m(x_l - x)}{x_l - x} \right| + \frac{C}{N} \leq N^{-1} \frac{2}{\Delta - \delta} + C. \quad (3.4)$$

Аналогично

$$|I_2| \leq N^{-1} \frac{2}{\Delta - \delta} + C,$$

откуда легко следует, что

$$\left| I_2 - \frac{1}{\pi} \frac{\sin m(x_{l+1} - x)}{((l+1) - l)_n} \right| \leq N^{-1} \frac{2}{\Delta - \delta} + C. \quad (3.5)$$

Для оценки сумм I_3 и I_4 мы воспользуемся тем, что для любого k

$$x_k - x \leq \frac{2\pi k}{N} + \delta - \frac{2\pi l}{N} - \Delta < \frac{2\pi(k-l)}{N}, \quad (3.6)$$

а с другой стороны,

$$x_k - x \geq \frac{2\pi k}{N} - \delta - \frac{2\pi(l+1)}{N} + \Delta > \frac{2\pi(k-l-1)}{N}. \quad (3.7)$$

Пользуясь леммой 3.2, мы получаем

$$\left| I_3 - N^{-1} \sum_{\substack{0 \leq k \leq l+N/2 \\ k \neq l, k \neq l+1}} \frac{2 \sin m(x_k - x)}{x_k - x} \right| \leq C. \quad (3.8)$$

При этом требуемые в лемме 3.2 неравенства $0 < |x_k - x| \leq \pi$ выполнены в силу (3.6) и (3.7). Далее, из (3.6) и (3.7) следует, что для любого $k \neq l, l+1$

$$\left| \frac{N^{-1}}{x_k - x} - \frac{1}{2\pi(k-l)} \right| \leq \frac{1}{2\pi(k-l)(k-l-1)}.$$

Из последнего неравенства и (3.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \left| I_3 - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{0 \leq k \leq l+N/2 \\ k \neq l, k \neq l+1}} \frac{\sin m(x_k - x)}{(k-l)_n} \right| \\ & \leq C + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{0 \leq k \leq l+N/2 \\ k \neq l, k \neq l+1}} \frac{1}{(k-l)(k-l-1)} \\ & < C + \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{\pi j(j-1)} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\pi j(j-1)} = C + \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для оценки последней разности в (3.3) применим лемму 3.2 к $u = x_k - x - 2\pi$; неравенство $0 < |u| \leq \pi$ является следствием (3.6) и (3.7). Мы имеем

$$\left| I_4 - N^{-1} \sum_{k=l+N/2+1}^{N-1} \frac{2 \sin m(x_k - x)}{x_k - x - 2\pi} \right| \leq C.$$

Из последнего неравенства по аналогии с (3.9) получается оценка

$$\left| I_4 - \frac{1}{\pi} \sum_{k=l+N/2+1}^{N-1} \frac{\sin m(x_k - x)}{(k-l)_n} \right| < C + \frac{1}{\pi}. \quad (3.10)$$

Подставляя оценки (3.4), (3.5), (3.8)–(3.10) в (3.3), мы получаем утверждение леммы.

Следующая лемма является основным утверждением настоящего параграфа.

ЛЕММА 3.4. Пусть n – достаточно большое натуральное число, $N = 2^n$, мера μ задана соотношением (3.2), где

$$x_k = \frac{2\pi k}{N} + 2\pi \sum_{\nu=1}^n (2\kappa_\nu - 1)\varepsilon_\nu, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad \varepsilon_\nu = N^{-1}n^{-2\nu}.$$

Пусть, кроме того, $\Delta = N^{-1}n^{-1/2}/0.003$,

$$E_l = \left[\frac{2\pi l}{N} + \Delta, \frac{2\pi l + \pi}{N} - \Delta \right] \cup \left[\frac{2\pi l + \pi}{N} + \Delta, \frac{2\pi(l+1)}{N} - \Delta \right]$$

для $0 \leq l < N$, $E = \bigcup_{l=0}^{N-1} E_l$, $M = 2Nn^{2n}$. Тогда для любого $x \in E$ найдется такое m , что $Nn \leq m \leq M$ и

$$S_m(\mu, x) \geq 0.0006\sqrt{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in E_l$. Выберем вектор $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ в соответствии с леммой 2.4. Для $\nu = 1, \dots, n$ возьмем $\theta_\nu \in [0, 1)$ такое, что $z_\nu = e^{2\pi i \theta_\nu}$, и пусть $u_\nu = [n^2 \theta_\nu]$. Положим

$$m_0 = N \sum_{j=1}^n u_j n^{2j-2}$$

и покажем, что при подходящем $s \in \{0, \dots, n\}$ число $m = m_0 + Nn + Ns$ будет обладать требуемым свойством.

Проверим сначала, что $m_0 \varepsilon_\nu - \theta_\nu$ близко к целому числу, т.е. $\|m_0 \varepsilon_\nu - \theta_\nu\|$ мало. Мы имеем

$$m_0 \varepsilon_\nu = \sum_{j=1}^n u_j n^{2(j-\nu-1)},$$

откуда, пользуясь неравенством $u_j \leq n^2 - 1$ ($j = 1, \dots, n$), получаем

$$\begin{aligned} \|m_0\varepsilon_\nu - \theta_\nu\| &\leq \left| m_0\varepsilon_\nu - \theta_\nu - \sum_{j=\nu+1}^n u_j n^{2(j-\nu-1)} \right| \\ &\leq \left| m_0\varepsilon_\nu - u_\nu n^{-2} - \sum_{j=\nu+1}^n u_j n^{2(j-\nu-1)} \right| + n^{-2} \\ &= \left| \sum_{j=1}^{\nu-1} u_j n^{2(j-\nu-1)} \right| + n^{-2} < 2n^{-2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Пусть m удовлетворяет условию

$$m_0 + Nn \leq m \leq m_0 + 2Nn. \quad (3.12)$$

Тогда выполнены требуемые неравенства

$$Nn \leq m \leq N \sum_{j=1}^n (n^2 - 1)n^{2j-2} + 2Nn = Nn^{2n} + 2Nn < 2Nn^{2n}.$$

В силу (3.11) для любого ν

$$\|m\varepsilon_\nu - \theta_\nu\| \leq \|m_0\varepsilon_\nu - \theta_\nu\| + |m\varepsilon_\nu - m_0\varepsilon_\nu| \leq 2n^{-2} + 2n^{1-2\nu}. \quad (3.13)$$

Положим $\delta = 2\pi N^{-1}(n^2 - 1)^{-1}$, тогда $\Delta > \delta$ и при любом $k = 0, \dots, N - 1$ справедливы неравенства $|x_k - 2\pi k/N| < \delta$, и для оценки $S_m(\mu, x)$ мы можем воспользоваться леммой 3.3, согласно которой

$$\begin{aligned} S_m(\mu, x) &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{\sin m(x_k - x)}{(k - l)_n} - C - \frac{4}{N(\Delta - \delta)} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \operatorname{Im} \left(e^{-imx} \frac{e^{imx_k}}{(k - l)_n} \right) - C - \frac{4}{N(\Delta - \delta)} \\ &> \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-imx}}{\pi} \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{e^{imx_k}}{(k - l)_n} \right) - C - 0.01205\sqrt{n}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

По определению чисел x_k мы имеем

$$\frac{mx_k}{2\pi} = \frac{mk}{N} + \sum_{\nu=1}^n (2\kappa_\nu - 1)m\varepsilon_\nu.$$

Будем считать, что m не только удовлетворяет неравенствам (3.12), но и, кроме того, делится на N . Тогда число mk/N является целым и из неравенств (3.13) мы получаем

$$\left\| \frac{mx_k}{2\pi} - \sum_{\nu=1}^n (2\kappa_\nu - 1)\theta_\nu \right\| \leq \sum_{\nu=1}^n \|m\varepsilon_\nu - \theta_\nu\| < 5n^{-1}.$$

Отсюда и из равенства

$$P(\mathbf{z}, k) = e^{2\pi i \sum_{\nu=1}^n (2\kappa_{\nu}-1)\theta_{\nu}}$$

следует, что

$$|e^{imx_k} - P(\mathbf{z}, k)| < 10\pi n^{-1}.$$

Последнее неравенство позволяет оценить сумму в (3.14):

$$\left| \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{e^{imx_k}}{(k-l)_n} - H(\mathbf{z}, l) \right| \leq \sum_{\substack{0 \leq k < N \\ k \neq l}} \frac{10\pi n^{-1}}{|(k-l)_n|} \leq C.$$

Отсюда и из (3.14) следует, что

$$S_m(\mu, x) > \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-imx}}{\pi} H(\mathbf{z}, l) \right) - 0.0121\sqrt{n} \quad (3.15)$$

для достаточно большого n . Выберем $v \in [0, 1)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$e^{-i(m_0 + Nn)x} H(\mathbf{z}, l) = e^{2\pi i v} |H(\mathbf{z}, l)|,$$

и пусть $u = -Nx/(2\pi)$. Неравенство (3.15) для $m = m_0 + Nn + Ns$ можно переписать в виде

$$S_m(x) > \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}(e^{2\pi i(v+su)} |H(\mathbf{z}, l)|) - 0.0121\sqrt{n}.$$

Заметим, что по определению множества E_l выполнено неравенство $\alpha < \|u\| < 1/2 - \alpha$, где $\alpha = 1/(0.006\pi\sqrt{n})$, и согласно лемме 3.1 для некоторого целого s , $0 \leq s \leq 2/\alpha + 2 < n$, имеет место неравенство $1/12 \leq \{v + su\} \leq 5/12$, т.е. $\operatorname{Im} e^{2\pi i(v+su)} \geq 1/2$. Отсюда

$$S_m(x) > \frac{1}{2\pi} |H(\mathbf{z}, l)| - 0.0121\sqrt{n}.$$

Наконец, подставляя оценку для $|H(\mathbf{z}, l)|$ из леммы 2.4, мы получаем

$$S_m(x) > \frac{0.08\sqrt{n}}{2\pi} - 0.0121\sqrt{n} > 0.0006\sqrt{n},$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь классической схемой Колмогорова (см., например, [6; гл. 5, §20]), мы можем перейти от оценок частных сумм ряда Фурье на множестве большой меры к оценкам на всем $\mathbb{T}$.

ЛЕММА 3.5. Пусть n — достаточно большое натуральное число, $N = 2^n$, $M = 2Nn^{2n}$. Тогда существует такой неотрицательный тригонометрический полином T_n степени не выше M^2 , что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} T_n(x) dx = 1$$

и для любого $x \in \mathbb{T}$ найдется такое $m \geq Nn$, что

$$S_m(T_n, x) \geq 0.0002\sqrt{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Под полиномом мы будем всюду понимать тригонометрический полином. Для натурального числа m через F_m обозначим полином Фейера порядка m :

$$F_m(x) = \sum_{j=-m}^m \left(1 - \frac{|j|}{m+1}\right) e^{ijx}.$$

Мы будем пользоваться следующими известными свойствами полиномов F_m :

$$F_m(x) = \frac{1}{m+1} \left| \sum_{j=0}^m e^{ijx} \right|^2 \geq 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_m(x) dx = 1, \quad (3.16)$$

$$F_m(0) = m+1, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{T}} |F'_m(x)| &\leq \sum_{1 \leq |j| \leq m} \left(1 - \frac{|j|}{m+1}\right) |j| \\ &\leq m \sum_{1 \leq |j| \leq m} \left(1 - \frac{|j|}{m+1}\right) = m(F_m(0) - 1) = m^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из (3.17) и (3.18) следует, что для любого x

$$F_m(x) \geq m+1 - m^2|x|. \quad (3.19)$$

Покажем, что утверждение леммы выполнено для полинома $T_n = 0.4f_1 + 0.6f_2$, где

$$\begin{aligned} f_1 &= N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} F_{M^2}(x - x_k), \\ f_2 &= F_{M_1}(2Nx), \end{aligned}$$

x_k выбраны в соответствии с леммой 3.4, а $M_1 = [0.00075\sqrt{n}]$. Таким образом, f_1 является полиномом степени не выше M^2 , а f_2 — полиномом степени $2M_1N < M^2$. Значит, и степень T_n не выше M^2 . В силу (3.16)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} T_n(x) dx = 0.4N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\mathbb{T}} F_{M^2}(x - x_k) dx + 0.6 \int_{\mathbb{T}} F_{M_1}(2Nx) dx = 1.$$

Для доказательства леммы нам остается оценить частные суммы ряда Фурье полинома T_n .

Частные суммы ряда Фурье меры δ_{x_k} имеют вид

$$S_m(\delta_{x_k}) = \sum_{j=-m}^m e^{ij(x-x_k)}.$$

Поэтому при $m \leq M$ и любом $x \in \mathbb{T}$

$$|S_m(F_{M^2}, x - x_k) - S_m(\delta_{x_k}, x)| = \left| \sum_{j=-m}^m \frac{|j|}{M^2 + 1} e^{ij(x-x_k)} \right| \leq \sum_{j=-M}^M \frac{|j|}{M^2 + 1} < 2.$$

Следовательно, частные суммы ряда Фурье полинома f_1 близки к соответствующим суммам меры μ , определенной в лемме 3.4: при $m \leq M$ и любом $x \in \mathbb{T}$

$$|S_m(f_1, x) - S_m(\mu, x)| < 2.$$

Последнее неравенство позволяет построить требуемые в лемме большие частные суммы для x из множества E , определенного в лемме 3.4. Выбирая m в соответствии с леммой 3.4 и пользуясь тем, что $m \geq Nn \geq 2NM_1 = \deg f_2$, мы имеем

$$\begin{aligned} S_m(f, x) &= 0.4S_m(f_1, x) + 0.6S_m(f_2, x) = 0.4S_m(f_1, x) + 0.6f_2(x) \\ &\geq 0.4S_m(f_1, x) > 0.4(S_m(\mu, x) - 2) > 0.0002\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $x \notin E$, тогда при некотором $l = 0, \dots, 2N$ справедливо неравенство $|x - \pi l/N| < \Delta$, где $\Delta = N^{-1}n^{-1/2}/0.003$, откуда $M_1N\Delta \leq 1/4$. Взяв $m = M^2$ и пользуясь (3.19), мы получаем

$$\begin{aligned} S_{M^2}(f, x) &= f(x) \geq 0.6f_2(x) \geq 0.6(M_1 + 1 - 2M_1^2N\Delta) \\ &\geq 0.6\left(1 + \frac{M_1}{2}\right) > 0.0002\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теоремы и следствий

Заметим, что из условий теоремы $\psi(m) \geq 1$ и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\varphi(m)\psi(m)}{m\sqrt{\ln m}/\sqrt{\ln \ln m}} = 0 \quad (4.1)$$

вытекает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\varphi(m)}{m\sqrt{\ln m}/\sqrt{\ln \ln m}} = 0. \quad (4.2)$$

Будем строить искомую функцию в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_{n_k}(x), \quad (4.3)$$

где T_{n_k} — полиномы, построенные в лемме 3.5, а последовательности $\{n_k\}$ и $\{a_k\}$ будут выбираться индуктивно. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим $L(n) = 8(2n^2)^{2n} + 1$. Возьмем произвольное n , удовлетворяющее лемме 3.5, такое, что

$$\varphi(n) \geq 1, \quad (4.4)$$

и положим $n_1 = n$, $a_1 = 1/2$. Допустим, что n_l и a_l построены при всех $l < k$. Выберем n_k так, чтобы выполнялись условия

$$2^{n_k} n_k \geq L(n_{k-1}), \quad (4.5)$$

$$\frac{\varphi(L(n_k))}{L(n_k) \sqrt{\ln L(n_k)}/\sqrt{\ln \ln L(n_k)}} = \min_{n \leq n_k} \frac{\varphi(L(n))}{L(n) \sqrt{\ln L(n)}/\sqrt{\ln \ln L(n)}}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\varphi(m)\psi(m)}{m\sqrt{\ln m}/\sqrt{\ln \ln m}} \leq \frac{8^{-k}}{L(n_{k-1})} \quad \forall m \geq 2^{n_k}. \quad (4.7)$$

Условия (4.6) и (4.7) могут быть обеспечены в силу (4.1) и (4.2). Возьмем

$$a_k = \frac{L(n_k)}{4^k L(n_{k-1}) \varphi(L(n_k))} \quad (4.8)$$

и проверим, что функция (4.3) корректно определена и удовлетворяет теореме.

Прежде всего, последовательность $\{n_k\}$ возрастает в силу условия (4.5), а неравенство (4.4) с учетом неубывания функции $f(u)/u$ влечет

$$a_k \leq \frac{L(n_1)}{4^k L(n_1) \varphi(L(n_1))} \leq \frac{1}{4^k}, \quad (4.9)$$

и вследствие свойств полиномов T_{n_k} ряд (4.3) сходится к интегрируемой функции f . Далее, представим полином T_n , построенный в лемме 3.5, в виде

$$T_n(x) = \sum_{j=-M^2}^{M^2} \widehat{T}_n(j) \exp(ijx),$$

при этом

$$|\widehat{T}_n(j)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} T_n(x) \exp(-ijx) dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |T_n(x)| dx \leq 1, \quad (4.10)$$

откуда

$$\max_{x \in \mathbb{T}} T_n(x) \leq \sum_{j=-M^2}^{M^2} |\widehat{T}_n(j)| \leq 2M^2 + 1 = L(n). \quad (4.11)$$

(Напомним, что полином T_n неотрицательный.) Для любых положительных чисел $u_1, u_2, \dots$ справедливо неравенство $\sum_k u_k \leq \sup_k 2^k u_k$. Следовательно,

$$\varphi\left(\sum_k u_k\right) \leq \sum_k \varphi(2^k u_k),$$

откуда

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(x)|) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \varphi(2^k a_k T_{n_k}(x)) dx. \quad (4.12)$$

Используя неравенства (4.9) и (4.11) и возрастание функции $\varphi(u)/u$, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \varphi(2^k a_k T_{n_k}(x)) dx &\leq 2^k a_k \int_{\mathbb{T}} \varphi(T_{n_k}(x)) dx \\ &\leq 2^k a_k \int_{\mathbb{T}} \frac{T_{n_k}(x)}{L(n_k)} \varphi(L(n_k)) dx \leq \frac{(2\pi)2^k a_k \varphi(L(n_k))}{L(n_k)} \end{aligned}$$

и в силу (4.8)

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(2^k a_k T_{n_k}(x)) dx \leq \frac{2\pi}{2^k}.$$

Подставляя полученное неравенство в (4.12), мы находим, что

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(x)|) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi}{2^k} < \infty.$$

Теперь мы должны оценить частные суммы Фурье функции f . Фиксируем $k > 1$ и пусть $n = n_k$, $N = 2^{n_k}$, $M = 2Nn_k^{2^{n_k}}$, $x \in \mathbb{T}$. В соответствии с леммой 3.5 возьмем такое m , что

$$Nn_k \leq m \leq M^2 < L(n_k) \quad (4.13)$$

и

$$S_m(T_{n_k}, x) \geq 0.0002\sqrt{n_k}. \quad (4.14)$$

Мы имеем

$$S_m(f, x) = \sum_{l=1}^{k-1} a_l S_m(T_{n_l}, x) + a_k S_m(T_{n_k}, x) + \sum_{l=k+1}^{\infty} a_l S_m(T_{n_l}, x). \quad (4.15)$$

Степень каждого полинома $T_{n_l}(x)$ при $l < k$ не превосходит $2(2n_l^2)^{n_l} < L(n_l) \leq L(n_{k-1})$. Поскольку $L(n_{k-1}) \leq m$ в силу (4.5) и (4.13), то $S_m(T_{n_l}, x) = T_{n_l}(x) \geq 0$ и

$$\sum_{l=1}^{k-1} a_l S_m(T_{n_l}, x) \geq 0. \quad (4.16)$$

Через $C_1, C_2, \dots$ будем обозначать абсолютные положительные константы. Из определения функции $L(n)$ следует, что для любых n и $u \in [L(n), L(n+1))$ справедливо неравенство

$$C_1 \sqrt{n} \leq \frac{\sqrt{\ln u}}{\sqrt{\ln \ln u}} \leq C_2 \sqrt{n}. \quad (4.17)$$

В частности, выбирая в (4.17) $n = n_k$, $u = L(n_k)$ и учитывая (4.8) и (4.14), мы получаем

$$a_k S_m(T_{n_k}, x) \geq C_3 \alpha_k \frac{L(n_k) \sqrt{\ln L(n_k)}}{\varphi(L(n_k)) \sqrt{\ln \ln L(n_k)}}, \quad (4.18)$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{4^k L(n_{k-1})}. \quad (4.19)$$

Возьмем такое n , что $L(n) \leq m < L(n+1)$. Из неравенства (4.18), условия (4.6) и неубывания функции $\varphi(u)/u$ следует, что

$$a_k S_m(T_{n_k}, x) \geq C_3 \alpha_k \frac{m \sqrt{\ln L(n)}}{\varphi(m) \sqrt{\ln \ln L(n)}}.$$

Далее, учитывая (4.17), получаем

$$a_k S_m(T_{n_k}, x) \geq C_4 \alpha_k \frac{m \sqrt{\ln m}}{\varphi(m) \sqrt{\ln \ln m}}.$$

Наконец, вспоминая (4.7) и (4.19), мы выводим оценку

$$a_k S_m(T_{n_k}, x) \geq C_4 2^k \psi(m). \quad (4.20)$$

Если $l > k$, то мы воспользуемся неравенством (4.10) для коэффициентов Фурье полиномов $T_{n_l}(x)$ и оценим частные суммы $S_m(T_{n_l}, x)$ по аналогии с (4.11), учитывая ограничения (4.13):

$$|S_m(T_{n_l}, x)| \leq 2m + 1 \leq 2M^2 + 1 = L(n_k),$$

откуда

$$\left| \sum_{l=k+1}^{\infty} a_l S_m(T_{n_l}, x) \right| \leq L(n_k) \sum_{l=k+1}^{\infty} a_l. \quad (4.21)$$

В силу (4.8) при $l > k$

$$a_l \leq \frac{C_5}{4^l L(n_{l-1})} \leq \frac{C_5}{4^l L(n_k)}.$$

Подставляя последнее неравенство в (4.21), мы получаем

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} a_l S_m(T_{n_l}, x) > -C_5. \quad (4.22)$$

Теперь мы можем подставить оценки (4.16), (4.20) и (4.22) в (4.15):

$$S_m(f, x) > C_4 2^k \psi(m) - C_5,$$

откуда вытекает требуемое равенство $\limsup_{m \rightarrow \infty} S_m(f, x)/\psi(m) = \infty$. Теорема доказана.

Следствие 2 сразу вытекает из теоремы: достаточно взять $\varphi(u) = u$. Аналогично, положив $\psi(m) = 1$, мы получаем следствие 1, если $\varphi(u)/u$ не убывает. В общем случае возьмем

$$\tilde{\varphi}(u) = \begin{cases} \frac{\varphi(u_0)}{u_0} u, & 0 \leq u < u_0, \\ \sup_{u_0 \leq v \leq u} \frac{\varphi(v)}{v} u, & u \geq u_0, \end{cases}$$

где $u_0 = e^e$. Мы будем пользоваться тем, что функция $\sqrt{\log u}/\sqrt{\log \log u}$ возрастает на $[u_0, +\infty)$.

Из определения $\tilde{\varphi}$ следует, что

$$\tilde{\varphi}(u) \geq \varphi(u) \quad (u \geq u_0). \quad (4.23)$$

Ниже мы покажем, что в условиях следствия 1

$$\tilde{\varphi}(u) = o\left(\frac{u\sqrt{\ln u}}{\sqrt{\ln \ln u}}\right) \quad (u \rightarrow \infty). \quad (4.24)$$

Функция $\tilde{\varphi}(u)/u$ не убывает на $(0, +\infty)$, и по доказанному оценка (4.24) влечет существование функции $f \in L(\mathbb{T})$ такой, что

$$\int_{\mathbb{T}} \tilde{\varphi}(|f(x)|) dx < \infty \quad (4.25)$$

и $\limsup_{m \rightarrow \infty} S_m(f, x) = \infty$ для всех $x \in \mathbb{T}$. Но в силу неравенства (4.23) условие (4.25) влечет требуемое

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(x)|) dx < \infty.$$

Таким образом, для доказательства следствия 1 остается проверить (4.24).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу условия на φ найдется такое $u(\varepsilon)$, что $\varphi(v) \leq \varepsilon v \sqrt{\ln v}/\sqrt{\ln \ln v}$ при $v \geq u(\varepsilon)$. Отсюда при $u > u(\varepsilon)$

$$\sup_{u(\varepsilon) \leq v \leq u} \frac{\varphi(v)}{v} u \leq \sup_{u(\varepsilon) \leq v \leq u} \frac{\varepsilon u \sqrt{\ln v}}{\sqrt{\ln \ln v}} \leq \frac{\varepsilon u \sqrt{\ln u}}{\sqrt{\ln \ln u}}. \quad (4.26)$$

В то же время

$$\sup_{u_0 \leq v \leq u(\varepsilon)} \frac{\varphi(v)}{v} u = o\left(\frac{u\sqrt{\ln u}}{\sqrt{\ln \ln u}}\right) \quad (u \rightarrow \infty).$$

Отсюда и из (4.26) следует, что при достаточно большом u

$$\sup_{u_0 \leq v \leq u} \frac{\varphi(v)}{v} u \leq \frac{\varepsilon u \sqrt{\ln u}}{\sqrt{\ln \ln u}}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то (4.24) выполнено и следствие 1 доказано.

Список литературы

1. *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series // *Acta Math.* 1966. V. 116. P. 133–157.
2. *Antonov N. Yu.* Convergence of Fourier series // *East J. Approx.* 1996. V. 2. P. 187–196.
3. *Sjölin P.* An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh–Fourier series // *Ark. Mat.* 1969. V. 7. P. 551–570.
4. *Kolmogoroff A. N.* Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque partout // *Fund. Math.* 1923. V. 4. P. 324–328.
5. *Kolmogoroff A. N.* Une série de Fourier–Lebesgue divergente partout // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1926. V. 183. P. 1327–1329.
6. *Бару Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
7. *Körner T. W.* Everywhere divergent Fourier series // *Colloq. Math.* 1981. V. 45. P. 103–118.
8. *Hardy G. H.* On the summability of Fourier's series // *Proc. London Math. Soc.* 1913. V. 12. P. 365–372.
9. *Chen Y. M.* An almost everywhere divergent Fourier series of the class $L(\log^+ \log^+ L)^{1-\varepsilon}$ // *J. London Math. Soc.* 1969. V. 44. P. 643–654.
10. *Oskolkov K. I.* A class of I. M. Vinogradov's series and its applications in harmonic analysis // *Progress in approximation theory. An international perspective. Proceedings of the international conference on approximation theory, Tampa, South Florida, USA, March 19–22, 1990* / ed. A. A. Gonchar et al. New York: Springer-Verlag, 1992. P. 353–402.
11. *Осколков К. И.* Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // *Труды МИАН.* 1985. Т. 167. С. 239–260.
12. *Tandori K.* Ein Divergenzsatz für Fourierreihen // *Acta Sci. Math.* 1969. V. 30. P. 43–48.
13. *Totik V.* On the divergence of Fourier series // *Publ. Math. Debrecen.* 1982. V. 29. P. 251–264.
14. *Stein E. M.* On limits of sequences of operators // *Ann. Math.* 1961. V. 74. P. 140–170.
15. *Казан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.
16. *Konyagin S. V., Ruzsa I. Z., Schlag W.* On uniformly distributed dilates of finite integer sequences // *J. Number Theory* (to appear).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
11.06.1999