Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Панов, К теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для одного класса нестрого гиперболических систем законов сохранения, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 1, 127–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm450>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:09:48

УДК 517.95

Е. Ю. Панов

К теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для одного класса нестрого гиперболических систем законов сохранения

Рассмотрены многомерные нестрогие гиперболические системы законов сохранения с радиально вырожденным потоком. Для таких систем определено и описано множество энтропий, введено понятие обобщенного энтропийного решения (о.э.р.) задачи Коши, исследованы свойства о.э.р. Выделен класс сильных о.э.р., в котором рассматриваемая задача Коши однозначно разрешима. Приведено условие на начальные данные, при котором о.э.р. всегда является сильным и, тем самым, единственным. При этом условии установлена сходимость метода “исчезающей вязкости”. Примером показано, что в общем случае о.э.р. может быть неединственным.

Библиография: 18 названий.

Введение

В полуплоскости $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, рассмотрим задачу Коши для системы

$$u_t + (\varphi(|u|)u)_x = 0, \quad (1)$$

$$u = u(t, x) \in \mathbb{R}^n, \quad |u| = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{1/2},$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Предполагается, что функция $\varphi(r) \in C(\mathbb{R}_+)$ и

$$r\varphi(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0+} 0. \quad (3)$$

Системы вида (1) возникают в магнитогидродинамике при рассмотрении изотропной модели Кейфиша–Кранзера.

В настоящей работе исследуются обобщенные энтропийные решения (о.э.р.) задачи Коши (1), (2). В § 1 описывается множество допустимых энтропий. В § 2 определяется понятие о.э.р. и исследуются свойства устойчивости о.э.р. В § 3 выделяется класс сильных о.э.р., доказывается существование и единственность сильного о.э.р., приводится условие, при котором любое о.э.р. является сильным и, тем самым, единственным. При этом условии доказывается также сходимость метода “исчезающей вязкости”, чему посвящен § 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00671).

Изложение будет следовать, в основном, схеме работ [1], [2], в которых аналогичные результаты получены для систем вида

$$U_t + \tilde{f}(U)_x = 0, \quad (4)$$

$U = U(t, x) \in X$, где X – пространство симметричных (или эрмитовых) матриц, $\tilde{f}(U)$ – функция от матрицы U , определенная в соответствии с функциональным исчислением по некоторой скалярной вещественной функции $f(u) \in C(\mathbb{R})$. В определенном смысле (см. замечание 3 ниже) система (1) представляет собой частный случай системы (4).

Для исследования (1) предположим сначала, что функция

$$f(z) = \varphi(|z|)z \in C^1(\mathbb{R}), \quad (5)$$

здесь $f(0) = 0$ в соответствии с условием (3).

Тогда отображение $F(u) = \varphi(|u|)u$ C^1 -гладко на $\mathbb{R}^n$ и система (1) может быть переписана в виде

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad (1')$$

где $A(u) = dF(u)$ – матрица с компонентами

$$A_{ij}(u) = \varphi(|u|)\delta_{ij} + \varphi'(|u|)\frac{u_i u_j}{|u|}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \text{ – символы Кронекера.}$$

Заметим, что $r\varphi'(r) = f'(r) - f(r)/r \xrightarrow{r \rightarrow 0+} 0$ ввиду равенства $\varphi(r) = f(r)/r$, $r > 0$, и условия (5). Поэтому

$$\varphi'(|u|)\frac{u_i u_j}{|u|} = \varphi'(|u|)|u| \frac{u_i}{|u|} \frac{u_j}{|u|} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

и $A_{ij}(0) = \varphi(0)\delta_{ij}$, где $\varphi(0) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r)/r = f'(0)$.

Ввиду симметричности матрицы $A(u)$ система (1)–(1') – гиперболическая в широком смысле, т.е. (см. [3; гл. 1]) все собственные числа $A(u)$ вещественны и им соответствует полный набор собственных векторов. Легко видеть, что собственные числа матрицы $A(u)$ (с учетом кратности): $\lambda_i = \varphi(|u|)$, $i = 1, \dots, n-1$, $\lambda_n = \varphi(|u|) + \varphi'(|u|)|u|$. Наличие совпадающих собственных значений означает, что система (1)–(1') не является строго гиперболической по Лаксу (см. [3; гл. 1], [4]).

§ 1. Энтропии

Напомним (см. [5], [6]), что энтропией системы (1)–(1') называется функция $p(u) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, для которой существует функция $q(u) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, называемая потоком энтропии, такая, что для всех $u \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla q(u) = A(u)\nabla p(u). \quad (7)$$

Ясно, что (7) определяет поток $q(u)$ с точностью до аддитивной константы.

Для наших целей будет полезно ослабить требование гладкости в определении энтропии. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество функций $p(u) \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, которые удовлетворяют условию Липшица в окрестности нуля. Доопределим градиент $\nabla p(u)$ функции $p(u) \in \mathcal{F}$ в нуле, положив $\nabla p(0) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $p(u) \in \mathcal{F}$ называется *энтропией* системы (1), если найдется функция $q(u) \in \mathcal{F}$ (*поток энтропии*) такая, что для всех $u \in \mathbb{R}^n$ выполнено условие (7).

Поскольку при $p, q \in \mathcal{F}$ мы полагаем $\nabla p(0) = \nabla q(0) = 0$, то в определении 1 достаточно требовать, чтобы (7) было выполнено при $u \neq 0$. Пусть $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Нам понадобится

ЛЕММА 1. Пусть $u = u(t, x) \in C^1(\Pi, \mathbb{R}^n)$, $p(u) \in \mathcal{F}$. Тогда

1) *множество*

$$\mathcal{M} = \{(t, x) \in \Pi : u(t, x) = 0, |u_t(t, x)| + |u_x(t, x)| \neq 0\}$$

имеет нулевую меру Лебега (напомним, что $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$);

2) *выполнены формулы дифференцирования суперпозиции*

$$p(u)_t = (\nabla p(u), u_t), \quad p(u)_x = (\nabla p(u), u_x) \quad (8)$$

в пространстве распределений на Π (в $\mathcal{D}'(\Pi)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $(t, x) \in \mathcal{M}$, то векторы $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$ не равны нулевому вектору одновременно и, значит, существует гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^n$ такая, что отображение $u(t, x)$ трансверсально к H в некоторой окрестности V точки (t, x) . Отсюда следует (см., например, [7; теорема 3.3]), что множество $V \cap u^{-1}(H)$ является подмногообразием коразмерности 1 и, в частности, множество $V \cap M \subset V \cap u^{-1}(H)$ имеет нулевую меру Лебега. Покрывая $\mathcal{M}$ счетным семейством таких окрестностей V (что можно сделать благодаря 2-й аксиоме счетности), получаем, что $\mathcal{M}$ имеет нулевую меру Лебега.

2) По определению класса $\mathcal{F}$ функция $p(u)$ удовлетворяет локально на $\mathbb{R}^n$ условию Липшица, откуда следует, что суперпозиция $p(u(t, x))$ локально липшицева на Π и обобщенные производные $p(u)_t$, $p(u)_x$ являются локально ограниченными функциями. При этом $p(u)_t$, $p(u)_x$ совпадают почти всюду с классическими частными производными, которые существуют для почти всех (t, x) (известно, что $p(u(t, x))$ дифференцируема в точках Лебега вектор-функции $(t, x) \mapsto (p(u)_t(t, x), p(u)_x(t, x))$). Таким образом, достаточно установить, что (8) выполнено для классических производных на некотором множестве полной меры Лебега. Покажем, что при $(t, x) \notin \mathcal{M}$ функция $p(u(t, x))$ дифференцируема и справедливо (8). Так как $\mathcal{M}$ имеет нулевую меру, то это завершит доказательство. Для $(t, x) \notin \mathcal{M}$ возможны два случая:

- а) $u(t, x) \neq 0$,
- б) $u(t, x) = u_t(t, x) = u_x(t, x) = 0$.

В случае а) $p(u)$ дифференцируема при $u = u(t, x)$. По классической теореме о дифференцируемости суперпозиции $p(u(t, x))$ дифференцируема в точке (t, x) и выполнены равенства (8). Рассмотрим случай б). По условию $u(t, x) = u_t(t, x) = u_x(t, x) = 0$, откуда

$$|u(t + \Delta t, x + \Delta x)| = o(|\Delta t| + |\Delta x|) \text{ при } |\Delta t| + |\Delta x| \rightarrow 0. \quad (9)$$

Из локальной липшицевости функции $p(u)$ и (9) следует, что существует константа $k > 0$ такая, что при достаточно малых $\Delta t, \Delta x$

$$|p(u(t + \Delta t, x + \Delta x)) - p(0)| \leq k|u(t + \Delta t, x + \Delta x)| = o(|\Delta t| + |\Delta x|).$$

Поэтому $p(u)_t(t, x) = p(u)_x(t, x) = 0$ и равенства (8) также выполнены. Лемма полностью доказана.

Если $u = u(t, x) - C^1$ -гладкое решение системы (1), $p(u)$ – энтропия, а $q(u)$ – соответствующий поток, то, умножая систему (1') скалярно на $\nabla p(u)$ и учитывая симметричность матрицы $A(u)$, равенство (7) и формулы (8), получаем, что в $\mathcal{D}'(\Pi)$

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla p(u), u_t) + (\nabla p(u), A(u)u_x) = (\nabla p(u), u_t) + (A(u)\nabla p(u), u_x) \\ &= (\nabla p(u), u_t) + (\nabla q(u), u_x) = (p(u))_t + (q(u))_x. \end{aligned}$$

Итак,

$$p(u)_t + q(u)_x = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi) \quad (10)$$

для любой энтропии $p(u)$ и соответствующего потока $q(u)$. Заметим, что для гладких энтропий равенство (10) выполнено в классическом смысле и хорошо известно.

Опишем множество энтропий системы (1). Прежде всего заметим, что ввиду (6) равенство (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \nabla q(u) &= A(u)\nabla p(u) = \varphi(r)\nabla p(u) + \varphi'(r)\left(\nabla p(u), \frac{u}{r}\right)u \\ &= \varphi(r)\nabla p(u) + \varphi'(r)p_r(u)u, \end{aligned} \quad (11)$$

где $r = |u|$, $p_r(u) = (\nabla p(u), u/r)$ – радиальная производная.

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\eta(r) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и непрерывна по Липшицу в окрестности нуля, $h(u) \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ – однородная (степени 1) функция: $h(ru) = rh(u) \quad \forall r > 0$. Тогда

$$p(u) = \eta(|u|) + h(u) \quad (12)$$

является энтропией системы (1) с потоком

$$q(u) = \psi(|u|) + \varphi(|u|)h(u), \quad (13)$$

где $\psi(r)$ определена с точностью до аддитивной константы равенством $\psi'(r) = \eta'(r)f'(r)$, $r > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить равенство (11) при $r = |u| > 0$ для энтропий $p = p_1, h$ и соответствующих потоков $q = q_1, q_2$, где $p_1 = \eta(r)$, $q_1 = \psi(r)$, $q_2 = \varphi(r)h(u)$. Легко видеть, что функция $\psi(r) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и непрерывна по Лишницю в окрестности нуля, как и $\eta(r)$. Поэтому $p_1, q_1 \in \mathcal{F}$. Далее, при $r = |u| > 0$ $\nabla p_1(u) = \eta'(r)u/r$, $\nabla q_1(u) = \psi'(r)u/r = \eta'(r)f'(r)u/r$ и

$$A(u)\nabla p_1(u) = \eta'(r)(\varphi(r) + r\varphi'(r))\frac{u}{r} = \eta'(r)f'(r)\frac{u}{r} = \nabla q_1(u),$$

т.е. выполнено соотношение (11).

Включения $h, q_2 \in \mathcal{F}$ очевидны. Заметим, что в силу однородности $h(u) = rh(\xi)$, $q_2(u) = f(r)h(\xi)$, где $r = |u|$, $\xi = u/|u| \in S$, $S = S^{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Ввиду равенства $h_r(u) = h(\xi) = h(u)/r$ имеем при $r > 0$

$$\begin{aligned} A(u)\nabla h(u) &= \varphi(r)\nabla h(u) + \varphi'(r)h_r(u)u = \varphi(r)\nabla h(u) + h(u)\varphi'(r)\frac{u}{r} \\ &= \varphi(r)\nabla h(u) + h(u)\nabla \varphi(r) = \nabla(\varphi(r)h(u)) = \nabla q_2(u), \end{aligned}$$

и соотношение (11) также выполнено. Теорема полностью доказана.

Энтропии вида (12) мы будем называть *допустимыми*. Оказывается, в достаточно общей ситуации любая энтропия системы (1) является допустимой. Точнее, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $\varphi'(r) \neq 0$ на всюду плотном множестве значений $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда любая энтропия $p(u)$ системы (1) является допустимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q(u)$ — поток, соответствующий энтропии $p(u)$. Введем сферические координаты: $r = |u|$, $\xi = u/r \in S$, S — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Тогда $u = r\xi$ и из (11) вытекают равенства

$$q_r(u) = (\varphi(r) + \varphi'(r)r)p_r(u) = f'(r)p_r(u), \quad (14)$$

$$\nabla_\xi q(u) = \varphi(r)\nabla_\xi p(u), \quad (15)$$

∇_ξ — градиент на сфере $\xi \in S$ при фиксированном r . Из (15) сразу следует, что $q(u) = \varphi(r)p(u) + c(r)$, где $c(r)$ — некоторая гладкая функция на $\mathbb{R}_+$. Подставляя это выражение в (14), получаем, что

$$\varphi'(r)p(u) + \varphi(r)p_r(u) + c'(r) = (\varphi(r) + \varphi'(r)r)p_r(u),$$

откуда $\varphi'(r)(rp_r(u) - p(u)) = c'(r)$ и при $\varphi'(r) \neq 0$ функция $rp_r(u) - p(u)$ не зависит от ξ . По условию множество таких r плотно в $\mathbb{R}_+$. Поэтому $rp_r(u) - p(u)$ не зависит от ξ при всех $r > 0$ и для некоторой непрерывной на $\mathbb{R}_+$ функции $\gamma(r)$

$$r^2 \left(\frac{p(u)}{r} \right)_r = rp_r(u) - p(u) = \gamma(r).$$

Решение последнего уравнения имеет вид $p(u) = \eta(r) + r\alpha(\xi)$, где ввиду условия $p(u) \in \mathcal{F}$ функция $\eta(r) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и удовлетворяет условию Липшица в окрестности нуля, $\alpha(\xi) \in C^1(S)$.

Поскольку $h(u) = r\alpha(\xi) \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ — однородная степени 1 функция, то $p(u)$ имеет вид (12). Теорема доказана.

Отметим, что допустимая энтропия является гладкой на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда найдется представление $p(u) = \eta(|u|) + h(u)$, в котором $\eta(r) \in C^1[0, +\infty)$, $\eta'(0) = 0$, а $h(u)$ — линейная функция.

Нам понадобятся также следующие условия выпуклости допустимых энтропий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) *Предположим, что допустимая энтропия вида (12) выпукла на $\mathbb{R}^n$. Тогда функция $\eta(r)$ выпукла на $\mathbb{R}_+$.*

2) *Энтропия вида $p(u) = \eta(|u|)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда функция $\eta(r)$ выпукла и не убывает на $\mathbb{R}_+$.*

3) *Однородная энтропия $p(u) = h(u)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда функция $h(u)$ сублинейна (т.е. в дополнение к однородности выполнено свойство субаддитивности $h(u+v) \leq h(u) + h(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $p(u) = \eta(|u|) + h(u)$ — выпуклая функция, $e \in \mathbb{R}^n$ — вектор единичной длины. Тогда функция $g(r) = p(re) = \eta(r) + h(e)r$ выпукла при $r > 0$, откуда и вытекает выпуклость $\eta(r)$.

2) Если энтропия $p(u) = \eta(|u|)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$, то в обозначениях п. 1) функция $p(re) = \eta(r)$ выпукла и четна на $\mathbb{R}$, откуда непосредственно следует, что $\eta(r)$ выпукла и не убывает на $\mathbb{R}_+$. Обратно, если функция $\eta(r)$ выпукла и не убывает на $\mathbb{R}_+$, то $p(u) = \eta(|u|)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$ как композиция функции $\eta(r)$ и выпуклой на $\mathbb{R}^n$ функции $|u|$.

3) Последнее утверждение очевидно, ибо для однородных функций условие выпуклости эквивалентно условию субаддитивности.

§ 2. Обобщенные энтропийные решения

Пусть начальная вектор-функция $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Определим понятие о.э.р. задачи (1), (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ограниченная измеримая вектор-функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi, \mathbb{R}^n)$ называется *обобщенным энтропийным решением (о.э.р.) задачи Коши* (1), (2), если

- а) для любой допустимой выпуклой энтропии $p(u) \in \mathcal{F}$ и соответствующего потока $q(u)$ выполнено энтропийное условие Кружкова–Лакса (см. [5], [6]):

$$p(u)_t + q(u)_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi); \quad (16)$$

б)
$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} u(t, \cdot) = u_0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad (17)$$

т.е. существует множество нулевой меры Лебега $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}_+$ такое, что $u(t, \cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $t \notin \mathcal{E}$, и $u(t, \cdot) \rightarrow u_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ при $t \rightarrow 0+$, $t \notin \mathcal{E}$.

Условие а) означает, что для любой неотрицательной пробной функции $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$

$$\int_{\Pi} [p(u)g_t + q(u)g_x] dt dx \geq 0.$$

Заметим, что ввиду (10) для классического решения $u(t, x) \in C^1(\Pi, \mathbb{R}^n)$ условие (16) выполнено со знаком равенства.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Подставляя в (16) линейные энтропии $p(u) = \pm(c, u)$, $c \in \mathbb{R}^n$ (которые допустимы ввиду однородности), получаем, что о.э.р. $u(t, x)$ удовлетворяет системе (1) в смысле распределений, т.е. действительно является обобщенным решением.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если T – ортогональное преобразование на $\mathbb{R}^n$, то функции $p(Tu)$, $q(Tu)$ образуют пару, состоящую из выпуклой допустимой энтропии и соответствующего ей потока, одновременно с функциями $p(u)$, $q(u)$. Отсюда легко следует, что для о.э.р. u задачи (1), (2) вектор-функция Tu также является о.э.р. этой задачи с начальными данными Tu_0 .

Для общих гиперболических систем известно (см. [5]), что определяющее энтропийное условие Кружкова–Лакса (16) с гладкими энтропиями $p(u)$ вытекает из метода “исчезающей вязкости”. Покажем, что это остается справедливым и для энтропий из класса $\mathcal{F}$. Рассмотрим параболическую аппроксимацию системы (1):

$$u_t + (\varphi(|u|)u)_x = u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx}, \quad \varepsilon > 0. \quad (18)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть существует последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такая, что определено решение $u^k = u^k(t, x) \in C^2(\Pi, \mathbb{R}^n)$ системы (18) с $\varepsilon = \varepsilon_k$ и при $k \rightarrow \infty$ последовательность u^k сходится в $L_{loc}^1(\Pi, \mathbb{R}^n)$ к вектор-функции $u = u(t, x)$. Тогда $u(t, x)$ удовлетворяет условию (16) для любой выпуклой энтропии $p(u) \in \mathcal{F}$ и соответствующего потока $q(u)$.

Для доказательства нам понадобится следующая

ЛЕММА 2. 1) Пусть $p(u) \in \mathcal{F}$ – выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$, $u = u(t, x) \in C^2(\Pi, \mathbb{R}^n)$. Тогда $(\nabla p(u), u_{xx}) \leq p(u)_{xx}$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$.

2) Если $u = u(t, x) \in C^2(\Pi, \mathbb{R}^n)$ – решение системы (18), то для любой выпуклой энтропии $p(u) \in \mathcal{F}$ и соответствующего потока $q(u)$ справедливо соотношение $p(u)_t + q(u)_x \leq \varepsilon p(u)_{xx}$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $R > 0$ через $B_R = \{u \in \mathbb{R}^n : |u| \leq R\}$ обозначим шар радиуса R в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\rho(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho(u) \geq 0$, $\text{supp } \rho \subset B_1$, $\int \rho(u) du = 1$. При $k \in \mathbb{N}$ положим $\rho_k(u) = k^n \rho(ku)$. Тогда $\rho_k(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho_k(u) \geq 0$, $\text{supp } \rho_k \subset B_{1/k}$, $\int \rho_k(u) du = 1$. Из приведенных свойств следует, что при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\rho_k(u)$ сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к δ -функции Дирака. Рассмотрим средние функции

$$p_k(u) = (p * \rho_k)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} p(u - v) \rho_k(v) dv.$$

Из свойств средних функций следует, что для всех $k \in \mathbb{N}$ $p_k(u)$ – выпуклая бесконечно дифференцируемая функция и (с учетом определения класса $\mathcal{F}$) при $k \rightarrow \infty$

$$p_k(u) \rightarrow p(u) \text{ равномерно на компактах в } \mathbb{R}^n; \quad (19)$$

$$\nabla p_k(u) \rightarrow \nabla p(u) \text{ равномерно на компактах в } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (20)$$

Пусть

$$\mathcal{M} = \{(t, x) \in \Pi : u(t, x) = 0, u_{xx}(t, x) \neq 0\}.$$

Тогда $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, где

$$\mathcal{M}_1 = \{(t, x) \in \Pi : u(t, x) = 0, u_x(t, x) \neq 0\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \{(t, x) \in \Pi : u_x(t, x) = 0, u_{xx}(t, x) \neq 0\}.$$

Применяя лемму 1 к гладким функциям u, u_x , получаем, что множества $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ имеют нулевую меру, откуда следует, что и $\mathcal{M}$ – множество нулевой меры. Покажем, что при $(t, x) \notin \mathcal{M}$ (т.е. для почти всех (t, x))

$$(\nabla p_k(u), u_{xx}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (\nabla p(u), u_{xx}), \quad u = u(t, x). \quad (21)$$

Для этого рассмотрим два возможных случая.

1) $u(t, x) \neq 0$. В этом случае (21) непосредственно следует из предельного соотношения (20).

2) $u(t, x) = 0, u_{xx}(t, x) = 0$. Тогда $(\nabla p(u), u_{xx}) = (\nabla p_k(u), u_{xx}) = 0$ и (21) очевидно.

Далее, легко видеть, что

$$(\nabla p_k(u), u_{xx}) = p_k(u)_{xx} - d^2 p_k(u)(u_x, u_x).$$

Ввиду выпуклости p_k форма $d^2 p_k(u)(du, du)$ неотрицательна, и мы приходим к неравенству $(\nabla p_k(u), u_{xx}) \leq p_k(u)_{xx}$, умножая которое на неотрицательную пробную функцию $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$ и интегрируя на Π с использованием формулы интегрирования по частям, получаем, что

$$\int_{\Pi} (\nabla p_k(u), u_{xx}) g \, dt \, dx \leq \int_{\Pi} p_k(u) g_{xx} \, dt \, dx.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости (заметим, что с учетом локальной липшицевости $p(u)$ функции $(\nabla p_k(u), u_{xx})$ ограничены равномерно по k на любом компакте в Π) из предельных соотношений (19), (21) следует, что

$$\int_{\Pi} (\nabla p(u), u_{xx}) g \, dt \, dx \leq \int_{\Pi} p(u) g_{xx} \, dt \, dx,$$

откуда ввиду произвольности неотрицательной пробной функции $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$ получим, что $(\nabla p(u), u_{xx}) \leq p(u)_{xx}$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Первое утверждение леммы доказано. Для доказательства второго утверждения предположим, что

$u = u(t, x) \in C^2(\Pi, \mathbb{R}^n)$ – решение системы (18), $p(u) \in \mathcal{F}$ – выпуклая энтропия системы (1), а $q(u) \in \mathcal{F}$ – соответствующий поток. Умножим равенство $u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx}$ на $\nabla p(u)$. Используя лемму 1, равенство (7) и уже доказанное первое утверждение леммы 2, получаем требуемое соотношение

$$\begin{aligned} p(u)_t + q(u)_x &= (\nabla p(u), u_t) + (\nabla q(u), u_x) = (\nabla p(u), u_t) + (A(u)\nabla p(u), u_x) \\ &= (\nabla p(u), u_t + A(u)u_x) = \varepsilon (\nabla p(u), u_{xx}) \leq \varepsilon p(u)_{xx} \end{aligned}$$

в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. По лемме 2 для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$p(u^k)_t + q(u^k)_x \leq \varepsilon_k p(u^k)_{xx} \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

умножая которое на неотрицательную пробную функцию $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$ и интегрируя на Π , получаем, что

$$- \int_{\Pi} [p(u^k)g_t + q(u^k)g_x] dt dx \leq \varepsilon_k \int_{\Pi} p(u^k)g_{xx} dt dx.$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$ и принимая во внимание, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$, получаем неравенство

$$\int_{\Pi} [p(u)g_t + q(u)g_x] dt dx \geq 0,$$

эквивалентное (16) ввиду произвольности неотрицательной пробной функции $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$. Предложение доказано.

Заметим, что поток q выпуклой допустимой энтропии определен по формуле (13) и непрерывен на $\mathbb{R}^n$ в случае лишь непрерывной функции $f(z) = \varphi(|z|)z$ (т.е. при выполнении условия (3)), нужно только переопределить функцию $\psi(r)$, положив

$$\psi(r) = \eta'(r)f(r) - \int_0^r f(\sigma) d\eta'(\sigma) \quad (22)$$

(так что в гладком случае $f \in C^1$ верно тождество $\psi'(r) = \eta'(r)f'(r)$). Здесь в соответствии с предложением 1 функция $\eta(r)$ выпукла на $\mathbb{R}_+$ и $d\eta'(\sigma)$ – неотрицательная борелевская мера.

Таким образом, определение 2 корректно и в общем случае, когда выполнено условие (3), что и будет всюду предполагаться. В этом общем случае мы будем часто использовать следующие два технических результата, доказанные в [2].

ЛЕММА 3 (см. также [8]). Пусть $\omega: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ – неубывающая субаддитивная функция. Тогда $\sup_{\sigma > 0} \{\omega(\sigma)/(\sigma + \varepsilon)\} \leq \omega(\varepsilon)/\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha_t + \beta_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, где $\alpha = \alpha(t, x)$, $\beta = \beta(t, x) \in L^\infty(\Pi)$; $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} \alpha(t, x) = \alpha(0, x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$; $\forall \varepsilon > 0 \quad |\beta(t, x)| \leq N(\varepsilon)(\alpha(t, x) + \varepsilon)$ п.в. в Π (из этого условия следует, что $\alpha \geq 0$ п.в. на Π), $N(\varepsilon) \geq 1$. Тогда для почти всех $t > 0$ справедлива оценка:

$$\int \alpha(t, x) e^{-|x|} dx \leq e^t \cdot \inf_{\varepsilon > 0} \left(\int \alpha(0, x) e^{-|x|/N(\varepsilon)} dx + 2\varepsilon N(\varepsilon) \right).$$

Ниже нам понадобятся понятия о.э.р. и обобщенного энтропийного суб-решения (коротко – о.э.суб-р.) задачи Коши для скалярного квазилинейного уравнения

$$r_t + f(r)_x = 0 \quad (23)$$

с начальным условием

$$r(0, x) = r_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (24)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [5], [8]–[10]). Функция $r = r(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *обобщенным энтропийным решением (о.э.р.) задачи Коши* (23), (24), если

а) для любой выпуклой функции $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(r)_t + \psi(r)_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \quad (25)$$

где функция $\psi(r)$ (поток) с точностью до аддитивной константы определена равенством (22);

б) $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} r(t, \cdot) = r_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Подставляя в (25) линейные энтропии $\eta(r) = \pm r$, получаем, что о.э.р. $r(t, x)$ удовлетворяет уравнению (23) в смысле распределений. Заметим также (см. [5], [9]–[11]), что условие а) определения 3 эквивалентно известному условию С. Н. Кружкова из [5]:

$$a') \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad |r - k|_t + ((f(r) - f(k)) \text{sign}(r - k))_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Как установлено в [5], при $f(r) \in C^1(\mathbb{R})$ всегда существует единственное о.э.р. задачи Коши (23), (24). При $f(r) \in C(\mathbb{R})$ о.э.р. также всегда существует, но может быть неединственным в случае более одной пространственной переменной (см. [8], [12]). Однако, как показано в [8], [11], [12], для рассматриваемого случая одной пространственной переменной x задача Коши всегда однозначно разрешима.

Обозначим $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см. [8]–[10]). Функция $r = r(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *обобщенным энтропийным суб-решением (о.э.суб-р.) задачи Коши* (23), (24), если для любой неубывающей выпуклой функции $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ выполнено условие (25) и $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} (r(t, \cdot) - r_0)^+ = 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Понятие обобщенного энтропийного супер-решения определяется аналогично, здесь нужно требовать выполнения условия (25) для невозрастающих выпуклых функций, а в начальном условии заменить $(r(t, \cdot) - r_0)^+$ на $(r(t, \cdot) - r_0)^-$. Ясно, что функция u – о.э.р. задачи (23), (24) тогда и только тогда, когда u одновременно является обобщенным энтропийным суб- и супер-решением этой задачи.

Нам понадобятся некоторые частные случаи принципа сравнения, установленного в работах [8]–[10].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $r = r(t, x)$ — о.э.суб-р. задачи (23), (24) и $r_0(x) \leq M$ п.в. на $\mathbb{R}$ для некоторой константы M . Тогда $r(t, x) \leq M$ п.в. на Π (принцип максимума). Если $r = r(t, x)$ — о.э.р. задачи (23), (24) и $a \leq r_0(x) \leq b$ п.в. на $\mathbb{R}$ для $a \leq b$, то $a \leq r(t, x) \leq b$ п.в. на Π .

Если $\eta(r) \in C^1[0, +\infty)$ — неубывающая выпуклая функция, то функция $p(u) = \eta(|u|)$ является допустимой выпуклой энтропией системы (1) с потоком $q(u) = \psi(|u|)$, где функция $\psi(r)$ определена соотношением (22). Из условий (16), (17) определения 2 тогда сразу следует

ТЕОРЕМА 3. Если $u = u(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (2), то $r = r(t, x) = |u(t, x)|$ является о.э.суб-р. задачи Коши (23), (24) с начальной функцией $r_0(x) = |u_0(x)|$ (причем выполнено строгое начальное условие в смысле требования б) определения 3).

Из теоремы 3 и предложения 3 вытекает принцип максимума для о.э.р. исходной задачи (1), (2):

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $|u_0(x)| \leq M$ п.в. на $\mathbb{R}$ для некоторой константы $M > 0$. Тогда если $u(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (2), то $|u(t, x)| \leq M$ п.в. на Π .

Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ — вектор единичной длины, $0 \leq \delta \leq 1$. Рассмотрим конусы

$$\begin{aligned}\Gamma(e, \delta) &= \{u \in \mathbb{R}^n : (u, e) \geq \delta|u|\}, \\ \dot{\Gamma}(e, \delta) &= \{u \in \mathbb{R}^n : (u, e) > \delta|u|\} \cup \{0\}.\end{aligned}$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u_0(x) \in \Gamma(e, \delta)$ ($u_0(x) \in \dot{\Gamma}(e, \delta)$) для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда если $u = u(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (2), то $u(t, x) \in \Gamma(e, \delta)$ (соответственно $u(t, x) \in \dot{\Gamma}(e, \delta)$) п.в. на Π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду замечания 2 с помощью ортогонального преобразования вектора u можно свести доказательство к случаю, когда $e = (1, 0, \dots, 0)$ — первый базисный вектор. В этом случае

$$\begin{aligned}\Gamma(e, \delta) &= \Gamma(\delta) = \{u \in \mathbb{R}^n : u_1 \geq \delta|u|\}, \\ \dot{\Gamma}(e, \delta) &= \dot{\Gamma}(\delta) = \{u \in \mathbb{R}^n : u_1 > \delta|u|\} \cup \{0\}.\end{aligned}$$

Заметим далее, что энтропийное условие (16) справедливо и для лишь непрерывных сублинейных энтропий $h(u)$. Последнее легко доказывается с помощью равномерной на любом компакте аппроксимации функции $h(u)$ последовательностью сублинейных функций $h_k(u) \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $k \in \mathbb{N}$, и последующего предельного перехода при $k \rightarrow \infty$ в условии (16): $h_k(u)_t + (\varphi(|u|)h_k(u))_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$.

Положим $h(u) = (\delta|u| - u_1)^+ = \max(\delta|u| - u_1, 0)$. Тогда непрерывная функция $h(u)$ сублинейна как максимум сублинейных функций, неотрицательна и $h(u) = 0$ в точности на множестве $\Gamma(\delta)$. В частности, $h(u_0) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$.

Если $u = u(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (2) с начальными данными $u_0 = u_0(x)$, то в силу принципа максимума из следствия 1 $|u(t, x)| \leq M = \text{ess sup } |u_0(x)|$ п.в. на Π .

Пусть $\omega(\sigma) = \sup\{|f(y) - f(z)| : y, z \in [0, M], |y - z| \leq \sigma\}$ – модуль непрерывности функции $f(u)$ на отрезке $[0, M]$. Ясно, что $\omega(\sigma)$ – неубывающая субаддитивная функция на $\mathbb{R}_+$, $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \omega(\sigma) = 0$. Так как $f(0) = 0$, то $|f(r)| = |f(r) - f(0)| \leq \omega(r)$ при $r \in [0, M]$.

По лемме 3 $\forall \varepsilon > 0$ $|f(r)| \leq \omega(r) \leq (r + \varepsilon)\omega(\varepsilon)/\varepsilon$ и для потока $q(u) = \varphi(r)h(u) = f(r)h(u/r)$, $r = |u|$, энтропии $h(u)$ справедлива оценка: $\forall \varepsilon > 0$

$$|q(u)| \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}(r + \varepsilon)h\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}\left(rh\left(\frac{u}{r}\right) + \varepsilon h\left(\frac{u}{r}\right)\right) \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}(h(u) + \varepsilon)$$

(здесь использовано также, что $h(u/r) \leq 1$).

Пусть $N(\varepsilon) = \omega(\varepsilon)/\varepsilon + 1$. Тогда $N(\varepsilon) \geq 1$ и для почти всех $(t, x) \in \Pi$

$$|q(u(t, x))| \leq N(\varepsilon)(h(u(t, x)) + \varepsilon). \quad (26)$$

По условиям (16), (17) имеем также $h(u)_t + q(u)_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ и $\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} h(u(t, x)) = h(u_0(x)) = 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Таким образом, функции $\alpha(t, x) = h(u(t, x))$, $\beta(t, x) = q(u(t, x))$ удовлетворяют условиям леммы 4, и по этой лемме для почти всех $t > 0$

$$\int h(u(t, x))e^{-|x|} dx \leq e^t \cdot \inf_{\varepsilon > 0} 2\varepsilon N(\varepsilon) = 0,$$

так как $\varepsilon N(\varepsilon) = \varepsilon + \omega(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Отсюда следует, что $h(u(t, x)) = 0$ п.в. на Π . С учетом свойств функции $h(u)$ это эквивалентно включению $u(t, x) \in \Gamma(\delta)$ п.в. на Π , которое и нужно было установить.

Переходя к доказательству утверждения теоремы, касающегося множества $\dot{\Gamma}(\delta)$, предположим, что $u_0(x) \in \dot{\Gamma}(\delta)$ п.в. на $\mathbb{R}$. Тогда, как это уже доказано выше, $u(t, x) \in \Gamma(\delta)$ п.в. на Π .

Рассмотрим далее последовательность непрерывных сублинейных функций $h_k(u) = (|u| + k(\delta|u| - u_1))^+$, $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что при $u \in \Gamma(\delta)$ (когда $\delta|u| - u_1 \leq 0$) $0 \leq h_k(u) \leq |u|$ и

$$h_k(u) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} h(u) = \begin{cases} 0, & \delta|u| - u_1 < 0, \\ |u|, & \delta|u| - u_1 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Легко видеть, что $h(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u \in \dot{\Gamma}(\delta)$.

Повторяя рассуждения из первой части доказательства и применяя лемму 4 при $\alpha(t, x) = h_k(u(t, x))$, $\beta(t, x) = q_k(u(t, x))$ (заметим, что $u = u(t, x) \in \Gamma(\delta)$ п.в. на Π и, значит, $h_k(u/r) \leq 1$, откуда вытекает справедливость оценки (26) с $h(u) = h_k(u)$, $q = q_k(u) = \varphi(r)h_k(u)$, $r = |u|$, для всех натуральных k), получаем, что при любом $\varepsilon > 0$ для почти всех $t > 0$

$$\int h_k(u(t, x))e^{-|x|} dx \leq e^t \cdot \left(\int h_k(u_0(x))e^{-|x|/N(\varepsilon)} dx + 2\varepsilon N(\varepsilon) \right). \quad (28)$$

Далее, $u_0(x) \in \dot{\Gamma}(\delta)$ п.в. на $\mathbb{R}$, $u(t, x) \in \Gamma(\delta)$ п.в. на Π . Тогда ввиду (27) при $k \rightarrow \infty$

$$h_k(u_0) \rightarrow h(u_0) = 0 \text{ п.в. на } \mathbb{R}, \quad h_k(u) \rightarrow h(u) \text{ п.в. на } \Pi,$$

и по теореме Лебега об ограниченной сходимости в пределе при $k \rightarrow \infty$ из (28) следует оценка: для почти всех $t > 0$

$$\int h(u(t, x))e^{-|x|} dx \leq 2e^t \varepsilon N(\varepsilon),$$

из которой ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает, что

$$\int h(u(t, x))e^{-|x|} dx = 0 \text{ для почти всех } t > 0.$$

Это означает, что $h(u) = 0$ п.в. на Π , т.е. для почти всех значений аргументов $u(t, x) \in \dot{\Gamma}(\delta)$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $h(u_0) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$, где $h(u) = (c, u)$ — линейная функция, $u = u(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (2). Тогда $h(u) = 0$ п.в. на Π .

Для доказательства нужно лишь заметить, что гиперплоскость $h(u) = 0$ есть $\Gamma(e, 0) \cap \Gamma(-e, 0)$, $e = c/|c|$.

§3. Сильные о.э.р.

Несмотря на ограничительное энтропийное условие (16) о.э.р. задачи (1), (2) может быть неединственно (см. пример ниже). В связи с этим мы вводим понятие сильного о.э.р. Как будет установлено ниже, сильные о.э.р. образуют класс существования и единственности для рассматриваемой задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Ограниченная измеримая вектор-функция $u = u(t, x)$ называется *сильным о.э.р.*, если функция $r = |u(t, x)|$ является о.э.р. скалярной задачи (23), (24) с начальными данными $r_0 = |u_0|$; $u_t + (\varphi(r)u)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi, \mathbb{R}^n)$ и выполнено начальное условие (17).

Если существует классическое решение $u = u(t, x)$ задачи (1), (2), то оно является также и сильным о.э.р. Действительно, предположим для простоты, что $f(r) \in C^1$. Тогда из соотношения (10) при $p(u) = \eta(|u|)$ следует, что функция $r = |u(t, x)|$ удовлетворяет условию а) определения 3 (причем со знаком равенства). Поскольку условие б) также выполнено, то r — о.э.р. задачи (23), (24) с начальными данными $r_0 = |u_0|$. Таким образом, u удовлетворяет требованиям определения 5.

Если $u = u(t, x)$ — сильное о.э.р. задачи (1), (2), то по определению 5 функция $r = |u(t, x)|$ — единственное о.э.р. задачи (23), (24) с начальной функцией $r_0 = |u_0(x)|$, а неизвестные $v_i = u_i/r$, $i = 1, \dots, n$ (при $r = 0$ значения этих функций не играют роли), должны удовлетворять в $\mathcal{D}'(\Pi)$ линейному уравнению

$$\begin{aligned} (Av)_t + (Bv)_x &= 0, \\ A &= A(t, x) = r(t, x), \quad B = B(t, x) = f(r(t, x)), \end{aligned} \tag{29}$$

с начальным условием

$$v(0, x) = v_0(x) \tag{30}$$

в смысле следующего определения (с $A(0, x) = r_0(x)$):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [1], [2]). Функция $v = v(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *общенным решением* (коротко – *о.р.*) задачи Коши (29), (30), если для любой пробной функции $h = h(t, x)$ из пространства $C_0^\infty(\bar{\Pi})$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\bar{\Pi} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$\int_{\Pi} [Avh_t + Bvh_x] dt dx + \int_{\mathbb{R}} A(0, x)v_0(x)h(0, x) dx = 0. \quad (31)$$

Выбирая в (31) пробные функции $h \in C_0^\infty(\Pi)$, получаем, что $(Av)_t + (Bv)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Тожество (31) учитывает также начальное условие (30). Точнее, (31) эквивалентно равенству $(Av)_t + (Bv)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ и начальному условию (30), понимаемому в смысле *-слабой сходимости $A(t, \cdot)v(t, \cdot) \rightarrow A(0, \cdot)v_0$ в $L^\infty(\mathbb{R})$, когда $t \rightarrow 0+$, пробегая некоторое множество полной меры.

В работе [2] исследована разрешимость задачи (29), (30) и установлены свойства о.р. в случае произвольных коэффициентов $A, B \in L^\infty(\Pi)$ со свойствами:

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x) = A(0, x) \text{ в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \quad A(0, x) \in L^\infty(\mathbb{R}); \quad (32)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |B| \leq N(\varepsilon) \cdot (A + \varepsilon) \text{ п.в. на } \Pi, \quad \varepsilon N(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0; \quad (33)$$

$$A_t + B_x = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (34)$$

Прежде всего установим, что коэффициенты $A = r(t, x)$, $B = f(r(t, x))$ удовлетворяют условиям (32)–(34). Ясно, что $A(0, x) \geq 0$, $A(t, x) \geq 0$. По условию b) определения 3 имеем также

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x) = A(0, x) \text{ в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}),$$

таким образом, выполнено соотношение (32). Далее, пусть $\omega(\sigma)$ – модуль непрерывности функции $f(r)$ на отрезке $[0, M]$, $M = \operatorname{ess\,sup} |u(t, x)|$. Тогда $r = r(t, x) \in [0, M]$ п.в. на Π и по лемме 3 $\forall \varepsilon > 0$

$$|B(t, x)| = |f(r)| = |f(r) - f(0)| \leq \omega(r) \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}(r + \varepsilon) = \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon}(A(t, x) + \varepsilon),$$

т.е. верна оценка (33) с $N(\varepsilon) = \omega(\varepsilon)/\varepsilon$. Наконец, поскольку $r = r(t, x)$ – о.э.р. задачи (23), (24), то в $\mathcal{D}'(\Pi)$

$$A_t + B_x = r_t + f(r)_x = 0$$

и выполнено условие (34).

Заметим, что из условия (33) легко следует, что $A(t, x) \geq 0$ и $B(t, x) = 0$ при $A(t, x) = 0$ п.в. на Π . В частности, как видно из определения 6, значение о.р. $v(t, x)$ при $A(t, x) = 0$ не играет роли. В этом смысле можно рассматривать задачу (29), (30) как задачу Коши относительно неизвестной функции Av с начальными данными $A(0, x)v_0(x)$.

В [2] доказаны следующие утверждения.

- ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) *Существует о.р. $v(t, x)$ задачи (29), (30);*
 2) $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x)v(t, x) = A(0, x)v_0(x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$;
 3) $\forall p(u) \in C^1(\mathbb{R})$ *функция $p(v(t, x))$ является о.р. задачи (29), (30) с начальными данными $p(v_0(x))$;*
 4) *если $v_0(x)A(0, x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$, то $v(t, x)A(t, x) = 0$ п.в. на Π (единственность).*

Из утверждения 3) следует, что множество о.р. образует алгебру. Действительно, если v_1, v_2 — о.р. задачи (29), (30) (со своими начальными данными), то таковым будет и $v_1 v_2 = ((v_1 + v_2)^2 - v_1^2 - v_2^2)/2$. В частности, если $v_i = v_i(t, x)$, $i = 1, \dots, m$, — конечное множество о.р. задачи (29), (30) с начальными данными $v_{0i}, p(z)$ — многочлен от переменных $z = (z_1, \dots, z_m)$, то функция $v = p(v_1, \dots, v_m)$ также является о.р. задачи (29), (30) с начальными данными $v_0 = p(v_{01}, \dots, v_{0m})$.

Заметим далее, что определение 6 имеет смысл и для неограниченных функций $v(t, x), v_0(x)$ таких, что $A(0, x)v_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $Av, Bv \in L^\infty(\Pi)$. В этом общем случае в [2] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $v = v(t, x)$ — о.р. задачи (29), (30) с начальной функцией $v_0(x)$. Тогда

- 1) *о.р. v единственно: если $v_0(x)A(0, x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$, то $v(t, x)A(t, x) = 0$ п.в. на Π ;*
- 2) *если $p(v) \in C^1(\mathbb{R})$, $|p(v)| \leq \text{const} \cdot (|v| + 1)$, то функция $p(v(t, x))$ является о.р. задачи (29), (30) с начальными данными $p(v_0(x))$.*

Нам потребуется следующее обобщение утверждения 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $v_i = v_i(t, x)$, $i = 1, \dots, m$, — о.р. задачи (29), (30) с начальными данными v_{0i} , $p(v) \in C(\mathbb{R}^m)$ и для почти всех (t, x)

$$|p(v)| \leq c(|v| + 1), \quad v = (v_1(t, x), \dots, v_m(t, x)), \quad c = \text{const}, \quad (35)$$

то функция $p(v_1, \dots, v_m)$ является о.р. задачи (29), (30) с начальными данными $p(v_{01}, \dots, v_{0m})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $v_{0i} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $v_i \in L^\infty(\Pi)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда условие (35) выполнено для всех непрерывных $p(z)$. Если $p(z)$ — многочлен, то предложение верно ввиду того, что множество ограниченных о.р. задачи (29), (30) образует алгебру. Аппроксимируя произвольную непрерывную функцию равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^m$ последовательностью многочленов и переходя к пределу в соответствующей последовательности соотношений (31), получаем справедливость предложения для всех $p(z) \in C(\mathbb{R}^m)$.

В общем случае рассмотрим последовательность ограниченных гладких функций $s_k(u)$ на $\mathbb{R}$ со свойствами: $|s_k(u)| \leq |u|$, $s_k(u) \rightarrow u$ при $k \rightarrow \infty \forall u \in \mathbb{R}$ (например, можно положить $s_k(u) = e^{-|u|/k}u$).

По утверждению 2) предложения 5 функции $v_i^k = s_k(v_i)$ являются ограниченными о.р. задачи (29), (30) с начальными данными $v_{0i}^k = s_k(v_{0i}) \in L^\infty(\mathbb{R})$ и, как уже установлено выше, $p^k = p(v_1^k, \dots, v_m^k)$ — о.р. задачи (29), (30) с начальными данными $p_0^k = p(v_{01}^k, \dots, v_{0m}^k)$, т.е. $\forall h = h(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$

$$\int_{\Pi} [Ap^k h_t + Bp^k h_x] dt dx + \int_{\mathbb{R}} A(0, x)p_0^k(x)h(0, x) dx = 0. \quad (36)$$

По построению при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} p^k(t, x) &\rightarrow p(t, x) = p(v_1(t, x), \dots, v_m(t, x)), \\ p_0^k(x) &\rightarrow p_0(x) = p(v_{01}(x), \dots, v_{0m}(x)) \end{aligned}$$

и ввиду условий $|s_k(u)| \leq |u|$ и (35) при $v = (v_1, \dots, v_m)$, $v_0 = (v_{01}, \dots, v_{0m})$ справедливы оценки

$$|Ap^k| \leq cA(1 + |v|), \quad |A(0, x)p_0^k| \leq cA(0, x)(1 + |v_0|), \quad |Bp^k| \leq c|B|(1 + |v|),$$

правые части которых лежат в пространствах L^∞ (поскольку $A(0, x)v_{0i}(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $Av_i, Bv_i \in L^\infty(\Pi)$). Это позволяет применить теорему Лебега при предельном переходе под знаками интегралов в (36) и вывести в пределе при $k \rightarrow \infty$, что $\forall h = h(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$

$$\int_{\Pi} [Aph_t + Bph_x] dt dx + \int_{\mathbb{R}} A(0, x)p_0(x)h(0, x) dx = 0.$$

Таким образом, функция $p = p(v_1, \dots, v_m)$ является о.р. задачи (29), (30) с начальными данными $p_0 = p(v_{01}, \dots, v_{0m})$.

Возвратимся к исследованию задачи (1), (2). Верна следующая

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A = r$, $B = f(r)$; $v_i = v_i(t, x)$ — о.р. задачи (29), (30) (существующие по предложению 4) с начальными данными $v_{0i} = u_{0i}/r_0$, $i = 1, \dots, n$ (при $r_0 = 0$ можно положить $v_{0i} = 0$). Тогда вектор-функция $u = rv$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, является единственным сильным о.э.р. задачи (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\|r\|_\infty = M < \infty$, то $u = rv \in L^\infty(\Pi, \mathbb{R}^n)$. По условию вектор-функция $v(t, x)$ удовлетворяет уравнению (29) и, значит,

$$u_t + (\varphi(r)u)_x = (rv)_t + (f(r)v)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (37)$$

Напомним, что $r = r(t, x)$ — о.э.р. задачи (23), (24) с начальной функцией $r_0 = |u_0(x)|$. С учетом свойства 3) из предложения 4 (или предложения 6) функция $|v|^2 = v_1^2 + \dots + v_n^2$ является о.р. задачи (29), (30) с начальной функцией $|v_0|^2$. Так как $r_0|v_0|^2 \equiv r_0 \cdot 1$, то о.р. этой задачи является также постоянная, равная единице. В силу единственности (см. свойство 4) в предложении 4) $r|v|^2 = r$ п.в. на Π . Умножив это равенство на r , получим, что $|u| = r$ п.в. на Π и, значит, $|u|$ — о.э.р. задачи (23), (24) с начальной функцией $r_0 = |u_0(x)|$. Кроме того, поскольку в (37) $r = |u|$, то u удовлетворяет системе (1) в смысле распределений. Наконец, как следует из свойства 2) предложения 4, для u выполнено начальное условие (17). Итак, все требования определения 5 выполнены и $u = u(t, x)$ — сильное о.э.р. задачи (1), (2).

Единственность этого решения вытекает из того, что, во-первых, функция $r = r(t, x)$ однозначно определяется как о.э.р. задачи (23), (24) с начальной функцией $r_0 = |u_0(x)|$. Во-вторых, тогда вектор-функция $u = rv$ однозначно (по свойству 4) предложения 4) определяется тем условием, что $v = v(t, x)$ — о.р. задачи (29), (30) (при $A = r$, $B = f(r)$) с $r_0 v_0 = u_0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Сильное о.э.р. задачи (1), (2) является и о.э.р. этой задачи.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1 любая допустимая выпуклая энтропия имеет вид $p(u) = \eta(|u|) + h(u)$ с выпуклой на $\mathbb{R}_+$ функцией $\eta(r)$ и однородной функцией $h(u)$; соответствующий поток есть $q(u) = \psi(|u|) + \varphi(|u|)h(u)$, где функция $\psi(r)$ определена равенством (22). Если $u = u(t, x)$ — сильное о.э.р. задачи (1), (2), то по определению 5 $r = |u|$ — о.э.р. скалярной задачи (23), (24), и в силу условия а) определения 3

$$\eta(|u|)_t + \psi(|u|)_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (38)$$

По теореме 5 компоненты вектор-функции $v = u/r$ являются о.р. задачи (29), (30) при $A = r$, $B = f(r)$. По предложению 6 функция $h(u/r)$ — также о.р. этой задачи (с соответствующими начальными данными) и, в частности, $(rh(u/r))_t + (f(r)h(u/r))_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Ввиду однородности $rh(u/r) = h(u)$ и последнее равенство переписывается как

$$h(u)_t + (\varphi(|u|)h(u))_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (39)$$

Складывая (38) и (39), получаем соотношение

$$p(u)_t + q(u)_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

справедливое для любой допустимой выпуклой энтропии $p(u)$ и соответствующего потока $q(u)$. По определению 2 $u = u(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (2) (заметим, что начальное условие (17) содержится в определении сильного о.э.р.). Теорема доказана.

Из теорем 5, 6, в частности, следует существование о.э.р. задачи (1), (2). Покажем, что в случае, когда начальная вектор-функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию

(C) для некоторого вектора $e \in \mathbb{R}^n$ единичной длины $u_0(x) \in \dot{\Gamma}(e, 0)$ п.в. на $\mathbb{R}$,

верна также единственность о.э.р. Для этого нам понадобится следующая простая

ЛЕММА 5. *Пусть $r = r(t, x)$ — о.э.суб-р. (или о.э.супер-р.) скалярной задачи Коши (23), (24), удовлетворяющее уравнению (23) в смысле распределений и строгому начальному условию (в смысле требования б) определения 3). Тогда $u(t, x)$ — о.э.р. задачи (23), (24).*

Для доказательства нужно лишь заметить, что произвольная выпуклая функция $\eta(r)$ допускает представление $\eta(r) = Cr + \eta(r) - Cr$, где при достаточно большом $C > 0$ функция $Cr + \eta(r)$ выпукла и не убывает на $[-M, M]$, $M = \|r\|_\infty$. Подробности доказательства леммы 5 содержатся, например, в [2].

ТЕОРЕМА 7. *При выполнении условия (C) о.э.р. $u(t, x)$ задачи (1), (2) является сильным и, тем самым, единственным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По замечанию 2 мы можем применить ортогональное преобразование вектора $u = u(t, x)$ и свести доказательство к случаю, когда $e = (1, 0, \dots, 0)$ – первый базисный вектор. В этом случае условие (С) означает, что $u_{01} > 0$ или $r_0 = |u_0| = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Рассмотрим задачу (29), (30) с коэффициентами $A = A(t, x) = u_1(t, x)$, $B = B(t, x) = \varphi(r)u_1(t, x)$, $r = |u|$. Положим $A(0, x) = u_{01}(x)$. Заметим, что коэффициенты A, B удовлетворяют условиям (32)–(34). Действительно, (32) следует из начального требования (17) определения 2. Условие (34) вытекает из того, что u удовлетворяет системе (1) в смысле распределений (см. замечание 1). Далее, пусть $\omega(\sigma)$ – модуль непрерывности функции $f(r)$ на отрезке $[0, M]$, $M = \text{ess sup } |u(t, x)|$. Тогда $r = |u(t, x)| \in [0, M]$ п.в. на Π и по лемме 3 $\forall \varepsilon > 0$

$$|B(t, x)| = \left| f(r) \frac{u_1}{r} \right| \leq \omega(r) \frac{u_1}{r} \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} (r + \varepsilon) \frac{u_1}{r} \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} (A(t, x) + \varepsilon)$$

(здесь при $r = 0$ значение u_1/r можно выбрать произвольно), т.е. верна оценка (33) с $N(\varepsilon) = \omega(\varepsilon)/\varepsilon$.

По теореме 4 $u(t, x) \in \dot{\Gamma}(e, 0)$ п.в. на Π , т.е. $u_1 > 0$ или $r = 0$. Положим

$$v_{0i} = v_{0i}(x) = \begin{cases} \frac{u_{0i}}{u_{01}}, & u_{01} > 0, \\ 0, & u_{01} \leq 0, \end{cases} \quad v_i = v_i(t, x) = \begin{cases} \frac{u_i}{u_1}, & u_1 > 0, \\ 0, & u_1 \leq 0, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$. Заметим, что $Av_i = u_i$, $Bv_i = \varphi(r)u_i$ п.в. на Π . Действительно, это очевидно при $u_1 > 0$ и при $r = 0$ (тогда $u_i = v_i = 0$), а по крайней мере одно из этих условий выполнено п.в. на Π . Аналогично устанавливается, что $A(0, x)v_{0i} = u_{0i}$. С учетом замечания 1 имеем тогда

$$(Av_i)_t + (Bv_i)_x = (u_i)_t + (\varphi(r)u_i)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Кроме того, как следует из требования (17),

$$\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x)v_i(t, x) = \text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} u_i(t, x) = u_{0i}(x) = A(0, x)v_{0i}(x) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Из соотношений, приведенных выше, легко следует (см., например, [2; предложение 7]), что при $v = v_i$ выполнено определяющее условие (31) и v_i – (возможно неограниченное) о.р. задачи (29), (30) с начальной функцией v_{0i} , причем $Av_i, Bv_i \in L^\infty(\Pi)$, $A(0, x)v_{0i}(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Положим $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_0 = (v_{01}, \dots, v_{0n})$. По предложению 6 функция $w = |v|$ является о.р. задачи (29), (30) с начальными данными $w_0 = |v_0|$ и, значит, $r_t + f(r)_x = (Aw)_t + (Bw)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, т.е. функция $r = r(t, x)$ удовлетворяет уравнению (23) в смысле распределений. По теореме 3 r является также о.э.суб-р. задачи (23), (24) со строгим начальным условием. Поэтому в силу леммы 5 $r = |u|$ – о.э.р. задачи (23), (24), и выполнены требования определения 5. Итак, u – сильное о.э.р., единственное по теореме 5. Теорема доказана.

Как иллюстрируется примером ниже, в условии (С) теоремы 7 нельзя заменить конус $\dot{\Gamma}(e, 0)$ на $\Gamma(e, 0)$.

ПРИМЕР. Рассмотрим случай $n = 2$, $\varphi(r) = r$. Тогда система (1) имеет вид

$$u_t + (ru)_x = 0, \quad u = (u_1, u_2), \quad r = |u| = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}. \quad (40)$$

Поставим следующие начальные условия

$$u(0, x) = u_0(x) = (0, \operatorname{sign} x). \quad (41)$$

Заметим, что здесь $u_0 \in \Gamma(e, 0)$ при $e = (1, 0)$. Поскольку $r_0 = |u_0| \equiv 1$, то для сильного о.э.р. $u = u(t, x)$ задачи (40), (41) $r = |u| \equiv 1$ (как о.э.р. соответствующей скалярной задачи с начальной функцией $r_0 \equiv 1$) и $u_t + u_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi, \mathbb{R}^2)$. Поэтому $u(t, x) = u_0(x - t) = (0, \operatorname{sign}(x - t))$ – единственное сильное о.э.р. задачи (40), (41).

Пусть далее $v = v(t, x)$ – о.э.р. задачи Коши для скалярного уравнения

$$v_t + (|v|v)_x = 0$$

с начальной функцией $\operatorname{sign} x$. Легко проверить, что

$$v(t, x) = \begin{cases} -1, & x < 2(\sqrt{2} - 1)t, \\ \frac{x}{2t}, & 2(\sqrt{2} - 1)t \leq x \leq 2t, \\ 1, & x > 2t, \end{cases}$$

и, как показано в работе [5], решение $v(t, x)$ является пределом в $L_{\text{loc}}^1(\Pi)$ семейства классических решений $v^\varepsilon(t, x) \in C^2(\Pi)$ задачи Коши для уравнения $v_t + (|v|v)_x = \varepsilon v_{xx}$ при стремлении “вязкости” ε к нулю. Тогда при $\bar{u}(t, x) = (0, v(t, x))$, $u^\varepsilon(t, x) = (0, v^\varepsilon(t, x))$ вектор-функция u^ε является C^2 -гладким решением параболической системы (18) и $u^\varepsilon(t, x) \rightarrow \bar{u}(t, x)$ в $L_{\text{loc}}^1(\Pi, \mathbb{R}^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В соответствии с предложением 2 $\bar{u}(t, x)$ удовлетворяет энтропийному условию (16) для любой выпуклой энтропии $p(u) \in \mathcal{F}$, и поскольку справедливость начального условия (17) очевидна, то $\bar{u}(t, x)$ также является о.э.р. задачи (40), (41).

Итак, $u(t, x)$, $\bar{u}(t, x)$ – два различных о.э.р. задачи (40), (41).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $u = u(t, x)$ – сильное о.э.р. задачи (1), (2), $r = |u|$, то X -значная функция (X – пространство симметричных $(n \times n)$ -матриц) $U = U(t, x) = u \otimes u / r$ с компонентами $U_{ij} = \begin{cases} u_i u_j / r, & r > 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases}$ является единственным сильным о.э.р. для системы (4) при $f(u) = \varphi(|u|)u$ с соответствующим начальным условием

$$U(0, x) = U_0(x) = u_0 \otimes u_0 / r_0, \quad r_0 = |u_0|, \quad (42)$$

т.е. (см. [1], [2]) выполнены условия:

- (C1) собственные числа $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ матрицы U являются о.э.р. задачи (23), (24) с начальными данными $\lambda_{01} \leq \dots \leq \lambda_{0n}$ – собственными числами матрицы U_0 ;
- (C2) $U_t + \tilde{f}(U)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi, X)$;
- (C3) $\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} U(t, \cdot) = U_0$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, X)$.

Действительно, здесь $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_{01} = \dots = \lambda_{0n-1} = 0$, $\lambda_n = r(t, x)$, $\lambda_{0n} = r_0(x)$, и так как по определению 5 $r(t, x)$ – о.э.р. задачи (23), (24) с начальными данными r_0 , то требование (C1) выполнено. Далее, при $U = u \otimes u/r$ верно равенство $\tilde{f}(U) = \varphi(r)U$, и система (4) переписывается в виде $U_t + \varphi(r)U = 0$. По теореме 5 при $i = 1, \dots, n$ функции $v_i = u_i/r$ (полагаем $v_i = 0$ при $r = 0$) являются ограниченными о.р. линейной задачи (29), (30). По предложению 6 тогда $v_i v_j$, $i, j = 1, \dots, n$, также будут о.р. этой задачи. Поэтому

$$(U_{ij})_t + (\varphi(r)U_{ij})_x = (rv_i v_j)_t + (f(r)v_i v_j)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi)$$

и требование (C2) также выполнено. Справедливость (C3) непосредственно следует из начального условия (17) для $u(t, x)$.

Итак, $U(t, x)$ – сильное о.э.р. задачи (4), (42).

Докажем единственность сильного о.э.р. $U(t, x)$. Как следует из (C1), собственные числа $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ как о.э.р. задачи (23), (24) с нулевыми начальными данными $\lambda_{01} = \dots = \lambda_{0n-1}$, а $\lambda_n \geq 0$ п.в. на Π , что вытекает по принципу сравнения из неотрицательности $\lambda_{0n} = r_0(x)$ (см. предложение 3). Таким образом, матрица U неотрицательно определена и имеет ранг не больший единицы. Поэтому найдется представление $U = u \otimes u/|u|$ с некоторым вектором $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi, \mathbb{R}^n)$, при этом $r = |u| = \lambda_n$ – единственное о.э.р. задачи (23), (24) с начальной функцией r_0 . Ввиду условий (C2), (C3) при $i, j = 1, \dots, n$ функции $v = v_{ij} = u_i u_j / r^2$ (значения которых полагаем равными нулю при $r = 0$) – о.р. линейной задачи (29), (30): $(rv)_t + (f(r)v)_x = 0$. По предложению 4 коэффициенты $U_{ij} = rv_{ij}$ однозначно определяются начальными данными $r_0(x)v_{ij}(0, x) = (U_0)_{ij}(x)$. Таким образом, сильное о.э.р. $U(t, x)$ задачи (4), (42) единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $u = u(t, x)$ – сильное о.э.р. задачи (1), (2). Как установлено при доказательстве теоремы 6, для любой однородной функции $h(u) \in C(\mathbb{R}^n)$ выполнено равенство (39). В частности, если рассмотреть замену переменных $v = h(u) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ с однородными компонентами такую, что $r = |u|$ является функцией новых переменных: $r = r(v)$, то вектор $v = h(u(t, x))$ удовлетворяет системе

$$v_t + (\varphi(r)v)_x = 0, \quad r = r(v), \quad v \in \Omega, \quad (43)$$

в $\mathcal{D}'(\Pi, \mathbb{R}^m)$ и начальным данным

$$v(0, x) = v_0(x) = h(u_0(x)). \quad (44)$$

Для задачи Коши (43), (44) можно ввести определение сильного о.э.р., аналогичное определению 5, и так же, как и для задачи (1), (2), установить его существование и единственность. Рассуждения, приведенные выше, показывают, что для сильного о.э.р. $u = u(t, x)$ задачи (1), (2) вектор-функция $v = h(u)$ будет сильным о.э.р. задачи (43), (44).

Если $\|\cdot\|$ – некоторая норма на $\mathbb{R}^n$, то однородная невырожденная замена $v = h(u) = |u| \cdot u/\|u\|$ (при $u = 0$ считаем, что $v = 0$) приводит к задаче (43), (44) с $r = \|v\|$. Таким образом, теория сильных о.э.р. задачи (1), (2) обобщается на

случай, когда вместо $|\cdot|$ в (1) берется произвольная норма. Нетрудно показать, что основные результаты теории остаются справедливыми и для бесконечномерных систем такого вида, например, когда u принимает значения в рефлексивном банаховом пространстве.

Заметим также, что если $v = h(u) = (u_1^2/r, \dots, u_n^2/r)$ (при $r = 0$ полагаем $h(u) = 0$), то $r = v_1 + \dots + v_n$ и для $\varphi(r) = 1/(1+r)$ система (43) является известной системой многокомпонентной хроматографии:

$$v_t + \left(\frac{v}{1+r} \right)_x = 0, \quad r = v_1 + \dots + v_n, \quad v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Известно (см. принцип сравнения из [8]–[10]), что о.э.р. $r(t, x)$ скалярной задачи (23), (24) является наибольшим о.э.суб-р. этой задачи. Из определения 5 и теоремы 3 легко выводится тогда следующий экстремальный принцип:

сильное о.э.р. $u(t, x)$ задачи (1), (2) является о.э.р. этой задачи, для которого значение функционала $\int |u(t, x)| e^{-t-|x|} dt dx$ максимально.

§ 4. Обоснование метода “исчезающей вязкости”

На протяжении параграфа будем предполагать, что функция $f(r) = \varphi(|r|)r \in C^1(\mathbb{R})$ и нелинейна на невырожденных интервалах. Выберем последовательность $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и рассмотрим последовательность $u_k = u_k(t, x) \in C^2(\Pi, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\Pi, \mathbb{R}^n)$ решений задачи Коши для параболической системы (18) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ с начальными данными $u_{0k}(x)$. Допустим также, что последовательность u_{0k} ограничена в $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $u_{0k} \rightarrow u_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ и для вектор-функции $u_0(x)$ выполнено условие (С). Целью настоящего параграфа является доказательство того, что при сделанных предположениях последовательность u_k сходится в $L^1_{\text{loc}}(\Pi, \mathbb{R}^n)$ к сильному о.э.р. исходной задачи (1), (2). Мы будем также считать, что в условии (С) вектор $e = (1, 0, \dots, 0)$ – первый базисный вектор, чего всегда можно добиться с помощью ортогональной замены $u \mapsto Tu$ (см. замечание 2).

Установим прежде всего следующий принцип максимума.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\varepsilon > 0$, $u = u(t, x) \in C^2(\Pi, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\Pi, \mathbb{R}^n)$ – решение задачи Коши (18), (2). Тогда $|u(t, x)| \leq M = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x)|$ для $(t, x) \in \Pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $M_1 = |u|_\infty = \text{ess sup}_{(t, x) \in \Pi} |u(t, x)|$. Пусть $\eta_m(r) = r^m$, $\psi_m(r) = \int_0^r f'(s) \eta'_m(s) ds$ при $m > 2$. Если $N = \max_{[0, M_1]} |f'(r)|$, то при $r \in [0, M_1]$ с учетом равенства $\eta'_m(s) = ms^{m-1}$ имеем оценку

$$|\psi_m(r)| \leq N \int_0^r \eta'_m(s) ds = N \eta_m(r). \quad (45)$$

По теореме 1 и предложению 1 функция $p_m(u) = \eta_m(|u|)$ является выпуклой энтропией системы (1) с потоком $q_m(u) = \psi_m(|u|)$. В силу леммы 2 тогда

$$p_m(u)_t + q_m(u)_x \leq \varepsilon p_m(u)_{xx} \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (46)$$

Выберем функцию $h(x) \in C^2(\mathbb{R})$ так, что $|h'(x)| \leq 1$, $|h''(x)| \leq 1$ всюду на $\mathbb{R}$, $h(x) = |x|$ при $|x| \geq 1$, и положим $g(x) = e^{-h(x)}$. Тогда $g(x) \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $g(x) > 0$ и

$$\begin{aligned} |g'(x)| &= |h'(x)|g(x) \leq g(x), \\ |g''(x)| &\leq ((h'(x))^2 + |h''(x)|)g(x) \leq 2g(x). \end{aligned} \quad (47)$$

Умножим неравенство (46) на функцию $g(x)$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}$. Получим, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$

$$\frac{d}{dt} \int p_m(u(t, x))g(x) dx \leq \int q_m(u(t, x))g'(x) dx + \varepsilon \int p_m(u(t, x))g''(x) dx,$$

откуда с учетом оценок (47)

$$\frac{d}{dt} \int p_m(u(t, x))g(x) dx \leq \int |q_m(u(t, x))|g(x) dx + 2\varepsilon \int p_m(u(t, x))g(x) dx. \quad (48)$$

Поскольку $|u(t, x)| \leq M_1$, то $|q_m(u(t, x))| \leq Np_m(u(t, x))$ ввиду (45), и из (48) вытекает, что функция $F_m(t) = \int p_m(u(t, x))g(x) dx$ удовлетворяет соотношению $F'_m(t) \leq C \cdot F_m(t)$, $C = (N + 2\varepsilon)$.

По лемме Гронуолла $F_m(t) \leq F_m(0)e^{Ct}$, где

$$F_m(0) = \int p_m(u_0(x))g(x) dx = \int |u_0(x)|^m g(x) dx \leq \text{const} \cdot M^m$$

ввиду условия $|u_0(x)| \leq M$ п.в. на $\mathbb{R}$. Итак, $F_m(t) \leq \text{const} \cdot e^{Ct} M^m \quad \forall t > 0$, откуда

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} (F_m(t))^{1/m} \leq M. \quad (49)$$

Как легко видеть, существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (F_m(t))^{1/m} = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)|.$$

Из (49) вытекает тогда требуемая оценка $|u(t, x)| \leq M$. Предложение доказано.

Заметим, что при достаточно гладких функции $f(u)$ и начальных данных действительно существует единственное классическое решение задачи (18), (2). С учетом предложения 7 это следует из результатов монографии [13].

Нам потребуется далее понятие мерозначной функции. Пусть Ω — некоторая область в $\mathbb{R}^N$. *Мерозначная функция* со значениями в $\mathbb{R}^n$ — это слабо измеримое отображение $x \rightarrow \nu_x$ области Ω в пространство $\text{Prob}_0(\mathbb{R}^n)$ вероятностных борелевских мер с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. *Слабая измеримость* ν_x означает, что $\forall p(\xi) \in C(\mathbb{R}^n)$ функция $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} p(\xi) d\nu_x(\xi)$ измерима на Ω .

Мерозначная функция ν_x называется *ограниченной*, если существует $M > 0$ такое, что для почти всех $x \in \Omega$ $\text{supp } \nu_x$ лежит в шаре $|\xi| \leq M$. Минимальное из таких M будем обозначать $\|\nu_x\|_\infty$.

Наконец, мерозначные функции вида $\nu_x(\xi) = \delta(\xi - u(x))$, $u(x) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (где $\delta(\xi - u)$ — мера Дирака в точке $u \in \mathbb{R}^n$), называются *регулярными* и отождествляются с соответствующими функциями $u(x)$. Таким образом, имеется естественное вложение $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \subset \text{MV}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, где через $\text{MV}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ обозначено множество ограниченных мерозначных функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Мерозначные функции естественно возникают как слабые пределы ограниченных последовательностей из $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ в смысле следующего результата Тартара (см. [14]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $u_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, — ограниченная в $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ последовательность, $\|u_k\|_\infty \leq M$. Тогда существует ограниченная мерозначная функция $\nu_x \in \text{MV}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\|\nu_x\|_\infty \leq M$, и подпоследовательность $u_r(x) = u_{k_r}(x)$ последовательности u_k такие, что $\forall p(\xi) \in C(\mathbb{R}^n)$

$$p(u_r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} p(\xi) d\nu_x(\xi) \quad \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(\Omega); \quad (50)$$

при этом мерозначная функция ν_x регулярна: $\nu_x(\xi) = \delta(\xi - u)$, $u = u(x) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, тогда и только тогда, когда $u_r \rightarrow u$ в $L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (сильно).

В дополнение к предложению 8 заметим, что, обратно, любая ограниченная мерозначная функция может быть получена как предел ограниченной последовательности из $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ в смысле предельного соотношения (50).

Предложение 8 позволяет осуществить предельный переход по последовательности решений u_k параболической задачи (18), (2), используя лишь содержащуюся в предложении 7 априорную оценку $|u_k| \leq M$. В результате такого предельного перехода получим ограниченную мерозначную функцию $\nu_{t,x} \in \text{MV}(\Pi, \mathbb{R}^n)$ такую, что $\|\nu_{t,x}\|_\infty \leq M$ и (возможно, после выделения подпоследовательности, за которой мы сохраним прежнее обозначение u_k) $\forall p(u) \in C(\mathbb{R}^n)$

$$p(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} p(u) d\nu_{t,x}(u) \quad \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(\Pi). \quad (51)$$

Для предельной мерозначной функции $\nu_{t,x}$ справедлива следующая

ТЕОРЕМА 8. Пусть $p(u)$ — выпуклая энтропия системы (1), $q(u)$ — соответствующий поток. Тогда $\forall g = g(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$, $g(t, x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} p(u) d\nu_{t,x}(u) \right) g_t + \left(\int_{\mathbb{R}^n} q(u) d\nu_{t,x}(u) \right) g_x \right] dt dx \\ + \int_{\mathbb{R}} p(u_0(x)) g(0, x) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 для всех $k \in \mathbb{N}$

$$p(u_k)_t + q(u_k)_x \leq \varepsilon_k p(u_k)_{xx} \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Умножив это неравенство на неотрицательную пробную функцию $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$ и проинтегрировав по частям, получим, что

$$\int_{\Pi} [p(u_k)g_t + q(u_k)g_x + \varepsilon_k p(u_k)g_{xx}] dt dx + \int_{\mathbb{R}} p(u_{0k}(x))g(0, x) dx \geq 0,$$

откуда в пределе при $k \rightarrow \infty$ с учетом (51), предельного соотношения $u_{0k}(x) \rightarrow u_0$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ и условия $\varepsilon_k \rightarrow 0$ получим соотношение (52). Теорема доказана.

Выбирая в (52) неотрицательные пробные функции из $C_0^\infty(\Pi)$, получаем, что для выпуклых энтропий $p(u)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} p(u) d\nu_{t,x}(u) \right)_t + \left(\int_{\mathbb{R}^n} q(u) d\nu_{t,x}(u) \right)_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \quad (53)$$

т.е. мерозначная функция $\nu_{t,x}$ удовлетворяет энтропийному условию (16) “в среднем”. Из соотношения (53) с линейными энтропиями $p(u) = \pm(c, u)$ вытекает, в частности, равенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} u d\nu_{t,x}(u) \right)_t + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|u|)u d\nu_{t,x}(u) \right)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi, \mathbb{R}^n), \quad (54)$$

которое означает, что $\nu_{t,x}$ удовлетворяет “в среднем” системе (1).

Из (52) можно получить также начальное условие $\nu_{0,x}(u) = \delta(u - u_0(x))$ в смысле следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Справедливо предельное соотношение*

$$\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} \int |u - u_0(x)| d\nu_{t,x}(u) = 0 \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}). \quad (55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество, состоящее из значений $t > 0$, являющихся точками Лебега функций

$$t \mapsto F(t, p, h) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(u) d\nu_{t,x}(u) \right) h(x) dx$$

для всех $p(u) \in C(\mathbb{R}^n)$, $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Из сепарабельности пространств $C(\mathbb{R}^n)$, $L^1(\mathbb{R})$ и непрерывной зависимости $F(t, p, h)$ от $p(u) \in C(\mathbb{R}^n)$, $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ легко следует, что $\mathcal{A}$ – множество полной меры в $\mathbb{R}_+$. Выберем функцию $\gamma(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\gamma(s) \geq 0$, $\text{supp } \gamma \subset [0, 1]$, $\int \gamma(s) ds = 1$, и положим $\delta_k(s) = k\gamma(ks)$ при $k \in \mathbb{N}$.

Ясно, что $\delta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\delta_k \geq 0$, $\text{supp } \delta_k \subset [0, 1/k]$, $\int \delta_k(s) ds = 1$ (так что при $k \rightarrow \infty$ последовательность δ_k сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ к δ -функции Дирака). Определим далее последовательность $\chi_k(t) = \int_{-\infty}^t \delta_k(s) ds$, сходящуюся при $k \rightarrow \infty$ к характеристической функции интервала $(0, +\infty)$.

Пусть $\tau \in \mathcal{A}$, $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $h(x) \geq 0$. Возьмем в соотношении (52) $g(t, x) = h(x)(1 - \chi_k(t - \tau))$. Получим после элементарных преобразований, что

$$\begin{aligned} & - \int_{\Pi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(u) d\nu_{t,x}(u) \right) h(x) \delta_k(t - \tau) dt dx \\ & + \int_{\Pi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} q(u) d\nu_{t,x}(u) \right) h'(x) \chi_k(t - \tau) dt dx \\ & + \int_{\mathbb{R}} p(u_0(x)) h(x) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Из (56) с учетом того, что τ — точка Лебега функции

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(u) d\nu_{t,x}(u) \right) h(x) dx,$$

в пределе при $k \rightarrow \infty$ следует соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(u) d\nu_{\tau,x}(u) - p(u_0(x)) \right) h(x) dx \\ & \leq \int_{[0,\tau] \times \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |q(u)| d\nu_{t,x}(u) \right) |h'(x)| dt dx \leq \text{const} \cdot \|h'\|_1 \tau, \end{aligned}$$

откуда

$$\limsup_{\substack{\tau \rightarrow 0+ \\ \tau \in \mathcal{A}}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(u) d\nu_{\tau,x}(u) - p(u_0(x)) \right) h(x) dx \leq 0. \quad (57)$$

Взяв в (57) линейные энтропии $p(u) = \pm(c, u)$, получим, что $\forall h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $h(x) \geq 0$,

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0+ \\ \tau \in \mathcal{A}}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u d\nu_{\tau,x}(u) - u_0(x) \right) h(x) dx = 0. \quad (58)$$

Поскольку линейная оболочка неотрицательных функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$ плотна в $L^1(\mathbb{R})$, то из (58) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} u d\nu_{\tau,x}(u) \xrightarrow[\substack{\tau \rightarrow 0+ \\ \tau \in \mathcal{A}}]{*} u_0(x) \quad \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n). \quad (59)$$

Далее из (57) при $p(u) = |u|^2$ вытекает соотношение

$$\limsup_{\substack{\tau \rightarrow 0+ \\ \tau \in \mathcal{A}}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\nu_{\tau,x}(u) \right) h(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 h(x) dx$$

и ввиду (59) (здесь, как обычно, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$)

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0+ \\ \tau \in \mathcal{A}}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (u, u_0(x)) d\nu_{\tau,x}(u) \right) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 h(x) dx.$$

С учетом этих соотношений

$$\begin{aligned} & \limsup_{\substack{\tau \rightarrow 0+ \\ \tau \in \mathcal{A}}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u - u_0(x)|^2 d\nu_{\tau,x}(u) \right) h(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 h(x) dx + \limsup_{\substack{\tau \rightarrow 0+ \\ \tau \in \mathcal{A}}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 d\nu_{\tau,x}(u) \right) h(x) dx \right. \\ & \quad \left. - 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (u, u_0(x)) d\nu_{\tau,x}(u) \right) h(x) dx \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда ввиду произвольности $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $h(x) \geq 0$, и следует (55). Предложение доказано.

Соотношения (53), (55) означают, что $\nu_{t,x}$ является *мерозначным решением* (коротко – м.р.) задачи Коши (1), (2) в смысле ДиПерна [15]. Ниже мы установим, что м.р. $\nu_{t,x}$ регулярно: $\nu_{t,x}(u) = \delta(u - u(t, x))$, $u(t, x) \in L^\infty(\Pi, \mathbb{R}^n)$. В силу предложения 8 отсюда будет следовать сильная сходимость последовательности u_k к $u = u(t, x)$.

Пусть H^{-1} – пространство Соболева $H_2^{-1}(\mathbb{R}^2)$ (определение и основные свойства пространств Соболева H_p^s с произвольными вещественными показателями s можно найти, например, в монографии [16]). Обозначим через $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$ пространство, состоящее из распределений $u \in \mathcal{D}'(\Pi)$ таких, что $ug \in H^{-1}$ для всех $g \in C_0^\infty(\Pi)$. Топология на $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$ задается полунормами $\|ug\|_{H^{-1}}$, $g \in C_0^\infty(\Pi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Для любой выпуклой энтропии $p(u)$ и соответствующего потока $q(u)$ последовательность распределений $p(u_k)_t + q(u_k)_x$ предкомпактна в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что последовательность распределений $l_k = p(u_k)_t + q(u_k)_x$ ограничена в $H_\infty^{-1}(\Pi)$ ввиду ограниченности в $L^\infty(\Pi)$ функций $p(u_k)$, $q(u_k)$. Из результатов Мюра (см. [14; лемма 28]) тогда следует, что для доказательства предложения достаточно найти представление $l_k = \alpha_k - \beta_k$, в котором последовательность α_k предкомпактна в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$, а β_k ограничена в $\mathcal{M}(\Pi)$, где $\mathcal{M}(\Pi)$ – пространство локально конечных борелевских мер на Π с топологией, порожденной полунормами $\beta \mapsto \text{var}(g\beta)$, $g \in C_0^\infty(\Pi)$.

Положим $l_k = \alpha_k - \beta_k$, где $\alpha_k = \varepsilon_k p(u_k)_{xx}$, и покажем, что данное представление удовлетворяет требуемым условиям. По лемме 2 распределение $\beta_k \geq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$ и, значит, является неотрицательной локально конечной борелевской мерой на Π . Если $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $g \geq 0$, то из равенства $-\beta_k = p(u_k)_t + q(u_k)_x - \varepsilon_k p(u_k)_{xx}$ следует, что

$$\langle \beta_k, g \rangle = \int_{\Pi} g(t, x) d\beta_k(t, x) = \int_{\Pi} [p(u_k)g_t + q(u_k)g_x + \varepsilon_k p(u_k)g_{xx}] dt dx$$

и с учетом оценки $|u_k| \leq M$ величина $\text{var}(g\beta_k) = \int_{\Pi} g(t, x) d\beta_k(t, x)$ ограничена по $k \in \mathbb{N}$. Это означает ограниченность последовательности β_k в пространстве $\mathcal{M}(\Pi)$. Покажем далее, что при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\alpha_k \rightarrow 0$ в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$. По лемме 1 $p(u_k)_x = (\nabla p(u_k), (u_k)_x)$ и

$$\alpha_k = \varepsilon_k p(u_k)_{xx} = \sqrt{\varepsilon_k} (\nabla p(u_k), \sqrt{\varepsilon_k} (u_k)_x)_x.$$

Поэтому для доказательства того, что $\alpha_k \rightarrow 0$ в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$, достаточно установить ограниченность последовательности $\sqrt{\varepsilon_k}(u_k)_x$ в $L_{\text{loc}}^2(\Pi, \mathbb{R}^n)$. Для этого возьмем энтропию $p_0(u) = |u|^2/2$, пусть $q_0(u)$ – соответствующий поток. Умножая равенство $(u_k)_t + A(u_k)(u_k)_x = \varepsilon_k(u_k)_{xx}$ скалярно на $\nabla p_0(u_k) = u_k$, получаем соотношение

$$p_0(u_k)_t + q_0(u_k)_x = \varepsilon_k p_0(u_k)_{xx} - \varepsilon_k |(u_k)_x|^2,$$

из которого путем умножения на неотрицательную пробную функцию $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$ и интегрирования по частям получается равенство

$$\varepsilon_k \int_{\Pi} |(u_k)_x|^2 g(t, x) dt dx = \int_{\Pi} [p_0(u_k)g_t + q_0(u_k)g_x + \varepsilon_k p_0(u_k)g_{xx}] dt dx.$$

Учитывая, что $|u_k| \leq M$, приходим к оценке

$$\varepsilon_k \int_{\Pi} |(u_k)_x|^2 g(t, x) dt dx \leq c,$$

где $c = c(g)$ – константа, не зависящая от k . Это как раз и означает, что последовательность $\sqrt{\varepsilon_k}(u_k)_x$ ограничена в $L_{\text{loc}}^2(\Pi, \mathbb{R}^n)$. Мы установили, что последовательность $\alpha_k \rightarrow 0$ и, значит, предкомпактна в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Pi)$. Предложение доказано.

Из предложения 10 в соответствии с теорией компенсированной компактности вытекают следующие коммутационные соотношения Тартара–Мюра (см. [14], [17]): для почти всех $(t, x) \in \Pi$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} [p_1(u)q_2(u) - p_2(u)q_1(u)] d\nu_{t,x}(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} p_1(u) d\nu_{t,x}(u) \int_{\mathbb{R}^n} q_2(u) d\nu_{t,x}(u) \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^n} p_2(u) d\nu_{t,x}(u) \int_{\mathbb{R}^n} q_1(u) d\nu_{t,x}(u), \end{aligned} \quad (60)$$

справедливые для любой пары выпуклых энтропий p_1, p_2 с соответствующими потоками q_1, q_2 . Эти соотношения позволяют установить следующий результат.

ТЕОРЕМА 9. *Для почти всех $(t, x) \in \Pi$ функция $r = |u|$ постоянна на замкнутом носителе $\text{supp } \nu_{t,x}$ меры $\nu_{t,x}(u)$: $|u| = r(t, x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\nu}_{t,x} \in \text{MV}(\Pi, \mathbb{R})$ – скалярная мерозначная функция, определенная условием $\tilde{\nu}_{t,x} = r^* \nu_{t,x}$, где $r^* \nu_{t,x}$ обозначает образ меры $\nu_{t,x}$ при отображении $u \mapsto r = |u|$. Ясно, что для доказательства теоремы нужно установить регулярность $\tilde{\nu}_{t,x}$. Из (60) при $p_1(u) = \eta_1(r)$, $p_2(u) = \eta_2(r)$, где $r = |u|$, $\eta_1(r), \eta_2(r) \in C^1(\mathbb{R})$ – неубывающие выпуклые функции, следует коммутационное соотношение: для почти всех $(t, x) \in \Pi$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} [\eta_1(r)\psi_2(r) - \eta_2(r)\psi_1(r)] d\tilde{\nu}_{t,x}(r) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \eta_1(r) d\tilde{\nu}_{t,x}(r) \int_{\mathbb{R}} \psi_2(r) d\tilde{\nu}_{t,x}(r) \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}} \eta_2(r) d\tilde{\nu}_{t,x}(r) \int_{\mathbb{R}} \psi_1(r) d\tilde{\nu}_{t,x}(r), \end{aligned} \quad (61)$$

$\psi'_i(r) = f'(r)\eta'_i(r)$, $i = 1, 2$. Так как линейная оболочка неубывающих выпуклых функций плотна в $C^1(\mathbb{R})$, то (61) выполнено для всех $\eta_1(r), \eta_2(r) \in C^1(\mathbb{R})$. Как показано в [14], при нашем предположении о нелинейности функции f на невырожденных интервалах из условия (61) вытекает регулярность $\tilde{\nu}_{t,x}$ (последнее верно и для лишь непрерывной функции f ; общий многомерный аналог этого утверждения доказан, например, в [18]). Таким образом, для почти всех $(t, x) \in \Pi$ $\tilde{\nu}_{t,x}(r) = \delta(r - r(t, x))$, $r(t, x) \in L^\infty(\Pi)$. Теорема доказана.

Из теоремы 9 следует, что п.в. на Π носители мер $\nu_{t,x}$ лежат на сферах $|u| = r(t, x)$. Заметим также, что, обратно, для таких мерозначных функций $\nu_{t,x}$ выполнены условия (60) для всех пар допустимых энтропий вида (12). Поэтому из метода компенсированной компактности нельзя извлечь большей информации, чем содержится в теореме 9. Для доказательства регулярности $\nu_{t,x}$ необходимо использовать также регулярность начальных данных и условие (C). Из условия (C) вытекает следующее ограничение на носители мер $\nu_{t,x}$, являющееся мерозначным аналогом теоремы 4 (при $\delta = 0$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Для почти всех $(t, x) \in \Pi$ $\text{supp } \nu_{t,x} \subset \dot{\Gamma}(e, 0)$, т.е. $u_1 > 0$ на $\text{supp } \nu_{t,x}$ при $r(t, x) > 0$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 при $\delta = 0$. Просто нужно энтропийное условие (16) заменить на мерозначный аналог этого условия (53), так что всюду в доказательстве величины вида $p(u(t, x))$ заменятся интегральными средними $\int_{\mathbb{R}^n} p(u) d\nu_{t,x}(u)$.

Мы готовы приступить к доказательству основной теоремы.

ТЕОРЕМА 10. *Мерозначное решение $\nu_{t,x}$ регулярно: $\nu_{t,x}(u) = \delta(u - u(t, x))$, где $u(t, x)$ — сильное о.э.р. задачи (1), (2). При этом последовательность $u_k(t, x)$ сходится при $k \rightarrow \infty$ к $u(t, x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi, \mathbb{R}^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим при $r = r(u) = |u|$ вектор

$$v = \begin{cases} \frac{u}{r}, & r > 0, \\ 0, & r = 0. \end{cases}$$

По теореме 9 $r(u) = r(t, x)$ на носителе меры $\nu_{t,x}(u)$ для почти всех (t, x) , и мы можем переписать равенство (54) в виде:

$$\left(r \int_{\mathbb{R}^n} v d\nu_{t,x}(u) \right)_t + \left(f(r) \int_{\mathbb{R}^n} v d\nu_{t,x}(u) \right)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi, \mathbb{R}^n). \quad (62)$$

Обозначим $I_k = I_k(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} v_k d\nu_{t,x}(u)$, $k = 1, \dots, n$. Из предложения 11 непосредственно следует, что $I_1 > 0$ при $r = r(t, x) \neq 0$. Пусть

$$A = A(t, x) = r I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} u_1 d\nu_{t,x}(u),$$

$$B = B(t, x) = f(r) I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(r) u_1 d\nu_{t,x}(u).$$

Так же как при доказательстве теоремы 7 устанавливается, что для функций A, B выполнены условия (32)–(34). Здесь нужно учесть (62) и предельное соотношение

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A(t, x) = A(0, x) = u_{01}(x) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}),$$

следующее из начального условия (55). По (62) $(A\theta_k)_t + (B\theta_k)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, где $\theta_k = I_k/I_1$, а при $I_1 = 0$, что равносильно $r(t, x) = 0$ (п.в. на Π), значения этих функций не играют роли, и можно положить в этом случае $\theta_k = 0$.

Заметим, что

$$A\theta_k = \int_{\mathbb{R}^n} u_k d\nu_{t,x}(u), \quad B\theta_k = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(r) u_k d\nu_{t,x}(u)$$

и из начального условия (55) вытекает соотношение

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} A\theta_k = u_{0k} = A(0, x)\theta_{0k}(x) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}),$$

где $\theta_{0k}(x) = u_{0k}(x)/u_{01}(x)$. Как следует из условия (C), $u_{01}(x) = 0 \Leftrightarrow u_0 = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$, в этом случае можно положить $\theta_{0k}(x) = 0$. Таким образом, компоненты вектор-функции $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ являются (возможно, неограниченными) о.р. задачи (29), (30) с начальными функциями θ_{0k} , причем $A\theta_k, B\theta_k \in L^\infty(\Pi)$.

По предложению 6 функция $R = |\theta|$ также является о.р. задачи (29), (30) с начальной функцией $R_0 = |\theta_0| = r_0/u_{01}$, $\theta_0 = (\theta_{01}, \dots, \theta_{0n})$. Тогда $(AR)_t + (BR)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, т.е. при $I = I(t, x) = (I_1, \dots, I_n)$

$$(r|I|)_t + (f(r)|I|)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (63)$$

Далее, из энтропийного условия (53) с выпуклой энтропией $p(u) = r = |u|$ и потоком $q(u) = f(r)$ следует, что

$$r_t + f(r)_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

откуда ввиду (63)

$$(r(1 - |I|))_t + (f(r)(1 - |I|))_x \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (64)$$

По неравенству Йенсена

$$|I| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |v| d\nu_{t,x}(u) \leq 1,$$

откуда следует неотрицательность функции $\alpha = \alpha(t, x) = r(1 - |I|)$. При этом

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} r(1 - |I|) = r_0 - |u_0| = 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Пусть $\beta = \beta(t, x) = f(r)(1 - |I|)$. Тогда из гладкости функции f следует оценка $|\beta| \leq \operatorname{const} \cdot \alpha$. Далее, ввиду (64) $\alpha_t + \beta_x \leq 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Таким образом, функции α, β

удовлетворяют предположениям леммы 4 с $\alpha(0, x) \equiv 0$. По этой лемме $\alpha(t, x) = 0$ п.в. на Π , и поскольку равенство

$$(r|I|)^2 = \left| \int_{\mathbb{R}^n} u \, d\nu_{t,x}(u) \right|^2 = r^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, d\nu_{t,x}(u)$$

возможно лишь в случае, когда $\nu_{t,x}$ — мера Дирака, мы получаем регулярность мерозначной функции $\nu_{t,x}$: $\nu_{t,x}(u) = \delta(u - u(t, x))$. По предложению 8 последовательность u_k сходится к $u(t, x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi, \mathbb{R}^n)$. Поскольку условия (53), (55) сводятся в регулярном случае к условиям (16), (17) для $u(t, x)$, то $u(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (2). Далее, по теореме 7 о.э.р. $u(t, x)$ единственно и является сильным. В частности, предельная функция $u(t, x)$ последовательности u_k определяется однозначно и не зависит от выбора подпоследовательности. Отсюда следует сходимость исходной последовательности u_k (без выделения подпоследовательности). Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Панов Е. Ю. Об одном классе систем квазилинейных законов сохранения // Матем. сб. 1997. Т. 188. №5. С. 85–112.
2. Панов Е. Ю. К нелокальной теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для одного класса гиперболических систем законов сохранения // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. №1. С. 133–184.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
4. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws // Comm. Partial Differential Equations. 1957. V. 10. P. 537–566.
5. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1970. Т. 81. №2. С. 228–255.
6. Lax P. D. Shock waves and entropy // Shock waves and entropy, contributions to nonlinear functional analysis / ed. E. A. Zaranonello. New York: Academic Press, 1971. P. 603–634.
7. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
8. Kruzhkov S. N., Panov E. Yu. Osgood's type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order // Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.). 1994. V. 15. P. 31–53.
9. Бенилан Ф., Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка с непрерывными нелинейностями // Докл. АН. 1994. Т. 339. №2. С. 151–154.
10. Benilan Ph., Kruzhkov S. N. Conservation laws with continuous flux functions // NoDEA. Nonlinear Differential Equations Appl. 1996. V. 3. P. 395–419.
11. Панов Е. Ю. О мерозначных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. №2. С. 107–148.
12. Кружков С. Н., Панов Е. Ю. Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. №1. С. 79–84.
13. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
14. Tartar L. Compensated compactness and applications to partial differential equations // Research notes in mathematics, nonlinear analysis, and mechanics. Heriot-Watt Symposium. V. 4, 1979. P. 136–212.
15. DiPerna R. J. Measure-valued solutions to conservation laws // Arch. Rational Mech. Anal. 1985. V. 88. P. 223–270.
16. Берг Й, Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1980.

17. *Murat F.* Compacité par compensation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1978. V. 5. P. 489–507.
18. *Панов Е. Ю.* О сильной предкомпактности ограниченных множеств мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 5. С. 103–114.

Новгородский государственный университет
E-mail: kafmatan@info.novsu.ac.ru

Поступила в редакцию
03.03.1999