Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин, Асимптотический анализ краевых задач в густых трехмерных многоуровневых соединениях, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 3, 49–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:49:17

УДК 517.956.225+517.956.8

Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин

Асимптотический анализ краевых задач в густых трехмерных многоуровневых соединениях

Рассматриваются задачи усреднения в сингулярно возмущенной трехмерной области типа многоуровневого соединения, которая включает в себя тело соединения и большое количество чередующихся тонких криволинейных цилиндров, относящихся к двум классам. В предположении, что один класс состоит из цилиндров конечной высоты, а второй класс – из цилиндров бесконечно малой высоты и на границах тонких криволинейных цилиндров заданы разные неоднородные краевые условия третьего рода с возмущенными коэффициентами, доказываются теоремы усреднения и сходимость интегралов энергии.

Библиография: 42 названия.

Ключевые слова: усреднение, густые соединения, асимптотики.

Введение

В настоящей работе мы исследуем асимптотические свойства решений краевых задач в новом типе сингулярно возмущенных областей (методы исследования решений в известных сингулярно возмущенных областях см., например, в [1]–[7]). Предполагается, что область имеет тело соединения, которое не зависит от малого параметра, и два класса присоединенных тонких цилиндров. Один класс состоит из тонких криволинейных цилиндров конечной высоты, расположенных периодически с периодом ε , где ε – малый дискретный параметр. Другой класс состоит из тонких цилиндров малой высоты (порядка ε), также расположенных периодически с периодом ε . Кроме того, цилиндры из разных классов ε -периодически чередуются и имеется большой перепад длин цилиндров при переходе из одного класса в другой.

Области рассматриваемого типа по сути являются симбиозом областей с густым соединением цилиндров конечной длины, методы исследования краевых задач в которых разработаны в работах [1], [8]–[21], и областей с быстро осциллирующей границей, краевые задачи в которых рассматривались в работах [22]–[37]. Отметим, что методы, разработанные в упомянутых работах, кроме статьи [35], для областей с быстро осциллирующей границей, существенно используют тот факт, что осцилляция определяется некоторой гладкой функцией, тогда как в настоящей работе с самого начала мы рассматриваем другую геометрию осцилляций границы, которая не может быть описана функцией. Это приводит к дополнительным трудностям, которые удаётся преодолеть.

Работа первого автора поддержана Фондом Александра фон Гумбольдта, работа второго автора – Программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1698.2008.1) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 06-01-00138).

С другой стороны, в отличие от работ, где исследовались краевые задачи в густых многоуровневых соединениях отростков конечной длины (см. [9], [16]–[18]), в рассматриваемой задаче появляются новые эффекты.

В настоящей работе предполагается, что на границах тонких цилиндров разных классов выставлены разные неоднородные краевые условия Фурье (краевые условия третьего рода), в которые входят дополнительные параметры. В зависимости от этих параметров качественно меняется асимптотическое поведение решения исходной задачи. Аналогичные результаты для плоских густых многоуровневых соединений такого типа авторы анонсировали в работе [38].

Густые каскадные соединения являются прототипами многих физических и биологических систем, например, таких, как строение стенки желудка и кишечника с разными уровнями поглощения полезных веществ на разных участках тканей.

Статья состоит из трех параграфов. В § 1 описываются результаты, полученные ранее, ставится задача, которая будет исследоваться, а также формулируются и обсуждаются основные утверждения. В § 2 доказываются вспомогательные асимптотические результаты. В § 3 доказываются теоремы усреднения.

§ 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Пусть B – конечное объединение гладких непересекающихся и некасающихся односвязных двумерных областей, строго лежащих в единичном квадрате

$$\square = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : 0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < 1\}.$$

Произвольным образом выберем из B одну область, которую обозначим через $B^{(2)}$, а объединение остальных множеств обозначим через $B^{(1)} = \bigcup_{k=1}^{K_1} B_k^{(1)}$. Предположим, что $B^{(2)}$ – это круг (см. замечание 2). Модельное густое каскадное соединение Ω_ε состоит из тела соединения

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x' = (x_1, x_2) \in Q, 0 < x_3 < \gamma(x')\},$$

где $Q = (0, a) \times (0, a)$, $\gamma \in C^1(\overline{Q})$, $\min_{x' \in \overline{Q}} \gamma(x') = \gamma_0 > 0$, и большого числа тонких цилиндров

$$G_\varepsilon^{(1)} = \bigcup_{i,j=0}^{N-1} \left(\bigcup_{k=1}^{K_1} \{x : (\varepsilon^{-1}x_1 - i, \varepsilon^{-1}x_2 - j) \in B_k^{(1)}, x_3 \in (-\varepsilon l_1, 0]\} \right),$$

$$G_\varepsilon^{(2)} = \bigcup_{i,j=0}^{N-1} (\{x : (\varepsilon^{-1}\varrho^{-1}(x_3)x_1 - i, \varepsilon^{-1}\varrho^{-1}(x_3)x_2 - j) \in B^{(2)}, x_3 \in (-l_2, 0]\}).$$

Здесь $\varrho(x_3)$, $x_3 \in [-l_2, 0]$, – заданная гладкая положительная функция, причем $\varrho(0) = 1$; N – большое натуральное число, поэтому $\varepsilon = a/N$ – малый дискретный параметр, который характеризует расстояние между соседними тонкими цилиндрами и их толщину, и можно считать, что он настолько мал, а функция ϱ такова, что указанные тонкие цилиндры не касаются и не пересекаются.

Таким образом, $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)} \cup G_\varepsilon^{(2)}$. Тонкие цилиндры разделены на два класса $G_\varepsilon^{(1)}$ и $G_\varepsilon^{(2)}$ в зависимости от их высоты: высота цилиндров из первого класса равна εl_1 , а из второго класса равна l_2 , т.е. имеется большой перепад

Рис. 1. Ячейка чередования

высот цилиндров при переходе из одного класса в другой. Кроме того, эти цилиндры ε -периодически чередуются вдоль направлений Ox_1 и Ox_2 и присоединяются к Ω_0 по ε -гомотетическим образам $\varepsilon(i + j + B_k^{(1)})$, $k = 1, \dots, K_1$, и $\varepsilon(i + j + B^{(2)})$, $i, j = 0, 1, \dots, N - 1$, множеств $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ соответственно. Ячейка чередования изображена на рис. 1.

В Ω_ε рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_\varepsilon(x) &= f_\varepsilon(x), & x \in \Omega_\varepsilon; \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) + \varepsilon^\tau k_1 u_\varepsilon(x) &= p_\varepsilon(x), & x \in \Upsilon_\varepsilon^{(1)}; \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) + \varepsilon^\mu k_2 u_\varepsilon(x) &= \varepsilon^\beta g_\varepsilon(x), & x \in \Upsilon_\varepsilon^{(2)}; \\ u_\varepsilon(x) &= 0, & x \in \Gamma_1; \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) &= 0, & x \in \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ – производная по внешней нормали; постоянные k_1 и k_2 положительные; $\beta, \mu, \tau \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 1$; $\Upsilon_\varepsilon^{(i)}$ – объединение боковых поверхностей и нижних оснований цилиндров из i -класса, $i = 1, 2$; $\Gamma_1 = \{x : x_3 = \gamma(x'), x' \in Q\}$; $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus (\Upsilon_\varepsilon^{(1)} \cup \Upsilon_\varepsilon^{(2)} \cup \Gamma_1)$. Заметим, что

$$[u_\varepsilon] = 0, \quad [\partial_{x_3} u_\varepsilon] = 0 \quad \text{на } Q \cap (G_\varepsilon^{(1)} \cup G_\varepsilon^{(2)}),$$

где квадратные скобки обозначают скачок указанной функции.

Относительно заданных функций будем предполагать, что выполняются следующие условия. Не ограничивая общности, считаем, что $f_\varepsilon \in L^2(\Omega_2)$, где $\bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{D}_2$, $D_2 = Q \times (-l_2, 0)$ – параллелепипед, который заполняется тонкими цилиндрами из второго класса, и

$$f_\varepsilon \rightarrow f_0 \quad \text{сильно в } L^2(\Omega_2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2)$$

Функция g_ε принадлежит $H^1(D_2)$ и

$$g_\varepsilon \rightharpoonup g_0 \quad \text{слабо в } H^1(D_2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

На функцию $p_\varepsilon \in H^1(D_\varepsilon^{(1)})$, $D_\varepsilon^{(1)} = Q \times (-\varepsilon l_1, 0)$, накладываются следующие условия:

- существует константа $c > 0$ такая, что

$$\|p_\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^{(1)})} \leq c\sqrt{\varepsilon}; \quad (4)$$

- имеет место сходимость следов

$$p_\varepsilon(\cdot, 0) \rightarrow p_0 \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь и далее все константы c_i , C_i , которые появляются в неравенствах, не зависят от ε .

Напомним, что функция $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1) = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$ является обобщенным решением задачи (1), если она удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x u_\varepsilon \cdot \nabla_x \psi \, dx + \varepsilon^\tau k_1 \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \psi \, d\sigma_x + \varepsilon^\mu k_2 \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} u_\varepsilon \psi \, d\sigma_x \\ = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \psi \, dx + \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon \psi \, d\sigma_x + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon \psi \, d\sigma_x \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Из теории краевых задач (см, например, [39]) следует, что для каждого фиксированного значения параметра $\varepsilon > 0$ существует единственное обобщенное решение задачи (1).

Нашей целью является изучение асимптотического поведения обобщенного решения задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. когда число тонких присоединяемых цилиндров из каждого класса неограниченно возрастает, а их толщина стремится к нулю. Следует заметить, что предельный переход сопровождается возмущением коэффициентов в краевых условиях с помощью параметров β , τ , μ . В статье изучается также влияние этих возмущений на асимптотическое поведение решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для упрощения промежуточных выкладок и преобразований мы взяли прямолинейные цилиндры из первого класса (поскольку они очень маленькой высоты) и предположили, что $B^{(2)}$ – это круг. Учет влияния переменного сечения криволинейных цилиндров на асимптотику решения исследуется на примере цилиндров из второго класса. Случай общей формы криволинейных цилиндров

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : -h < x_3 < 0, (\varepsilon^{-1}x_1 - i, \varepsilon^{-1}x_2 - j) \in \omega(x_3)\},$$

где $\omega(x_3)$ – плоская область для каждого фиксированного $x_3 \in [-l_2, 0]$, удовлетворяющая вышеизложенным требованиям, для цилиндров из обоих классов исследуется аналогично и требует в некоторых случаях более громоздких вычислений.

1.1. Основные результаты. Введем операцию продолжения нулем для функций из пространства $H^1(G_\varepsilon^{(2)})$:

$$\tilde{y}_\varepsilon(x) = \begin{cases} y_\varepsilon, & x \in G_\varepsilon^{(2)}, \\ 0, & x \in D_2 \setminus G_\varepsilon^{(2)}. \end{cases}$$

Обозначим $\omega(x_3) = \{\xi' \in \mathbb{R}^2 : (\varrho^{-1}(x_3)\xi_1, \varrho^{-1}(x_3)\xi_2) \in B^{(2)}\}$, $|\omega(x_3)|$ и $l_\omega(x_3)$ – соответственно площадь и периметр области $\omega(x_3)$ для каждого фиксированного $x_3 \in [-l_2, 0]$.

ТЕОРЕМА 1 (случай $\tau \geq 0$ и $\mu \geq 1$). Решение u_ε задачи (1) удовлетворяет следующим соотношениям при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon|_{\Omega_0} &\rightharpoonup v_0^+ && \text{слабо в } H^1(\Omega_0, \Gamma_1), \\ \widetilde{u_\varepsilon} &\rightharpoonup |\omega(x_3)| v_0^- && \text{слабо в } L^2(D_2), \\ \widetilde{\partial_{x_3} u_\varepsilon} &\rightharpoonup |\omega(x_3)| \partial_{x_3} v_0^- && \text{слабо в } L^2(D_2), \\ \widetilde{\partial_{x_i} u_\varepsilon} &\rightharpoonup 0 && \text{слабо в } L^2(D_2), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где функция

$$v_0(x) = \begin{cases} v_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ v_0^-(x), & x \in D_2, \end{cases}$$

является единственным решением задачи

$$\begin{aligned} -\Delta_x v_0^+(x) &= f_0(x), & x \in \Omega_0, \\ v_0^+(x) &= 0, & x \in \Gamma_1, \\ \partial_\nu v_0^+(x) &= 0, & x \in \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma_1 \cup Q), \\ -\partial_{x_3}(|\omega(x_3)| \partial_{x_3} v_0^-(x)) + \delta_{\mu,1} l_\omega(x_3) k_2 v_0^-(x) &= |\omega(x_3)| f_0(x) + \delta_{\beta,1} l_\omega(x_3) g_0(x), \\ && x \in D_2, \\ v_0^+(x', 0) &= v_0^-(x', 0), & (x', 0) \in Q, \\ (|\omega(0)| \partial_{x_3} v_0^- - \partial_{x_3} v_0^+ + \delta_{\tau,0} k_1 \Xi v_0^+)(x_1, 0) &= \Xi p_0(x'), & (x', 0) \in Q, \\ \partial_{x_3} v_0^-(x', -l_2) &= 0, & (x', -l_2) \in Q_{l_2}, \end{aligned} \tag{7}$$

которая называется усредненной задачей для задачи (1). Здесь $Q_{l_2} = \{x : x_3 = -l_2, x' \in Q\}$, $\delta_{\alpha,k}$ – символ Кронекера, а

$$\Xi := |\partial B^{(1)}| l_1 + |B^{(1)}| \tag{8}$$

равна площади поверхности “малых” цилиндров на ячейке периодичности в растянутых координатах.

Кроме того, имеет место сходимость интегралов энергии при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &:= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla_x u_\varepsilon|^2 dx + \varepsilon^\tau k_1 \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon^2 d\sigma_x + \varepsilon^\mu k_2 \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} u_\varepsilon^2 d\sigma_x \\ &\rightarrow \int_{\Omega_0} |\nabla v_0^+|^2 dx + \int_{D_2} (|\omega(x_3)| |\partial_{x_3} v_0^-|^2 + \delta_{\mu,1} k_2 l_\omega(x_3) |v_0^-|^2) dx \\ &\quad + \delta_{\tau,0} k_1 \Xi \int_Q |v_0^+(x', 0)|^2 dx' =: E_0(v_0). \end{aligned} \tag{9}$$

ТЕОРЕМА 2 (случай $\tau < 0$ и $\mu \geq 1$). Для решения u_ε задачи (1) имеют место пределы

$$\begin{aligned} u_\varepsilon|_{\Omega_0} &\rightharpoonup v_0^+ && \text{слабо в } H^1(\Omega_0, \Gamma_1), \\ \widetilde{u_\varepsilon} &\rightharpoonup |\omega(x_3)| v_0^- && \text{слабо в } L^2(D_2), \\ \widetilde{\partial_{x_3} u_\varepsilon} &\rightharpoonup |\omega(x_3)| \partial_{x_3} v_0^- && \text{слабо в } L^2(D_2), \\ \widetilde{\partial_{x_i} u_\varepsilon} &\rightharpoonup 0 && \text{слабо в } L^2(D_2), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{10}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где функции v_0^+ и v_0^- являются соответственно решениями следующих задач:

$$\begin{cases} -\Delta_x v_0^+(x) = f_0(x), & x \in \Omega_0, \\ v_0^+(x) = 0, & x \in \Gamma_1 \cup Q, \\ \partial_\nu v_0^+(x) = 0, & x \in \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma_1 \cup Q), \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} -\partial_{x_3}(|\omega(x_3)| \partial_{x_3} v_0^-(x)) + \delta_{\mu,1} k_2 l_\omega(x_3) v_0^-(x) \\ \quad = |\omega(x_3)| f_0(x) + \delta_{\beta,1} l_\omega(x_3) g_0(x), & x \in D_2, \\ v_0^-(x', 0) = 0, & (x', 0) \in Q, \\ \partial_{x_3} v_0^-(x', -l_2) = 0, & (x', -l_2) \in Q_{l_2}, \end{cases} \quad (12)$$

которые в совокупности называются усредненной задачей для задачи (1).

Кроме того, имеет место сходимость интегралов энергий при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &\rightarrow \int_{\Omega_0} |\nabla v_0^+|^2 dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| |\partial_{x_3} v_0^-|^2 dx + \delta_{\mu,1} k_2 \int_{D_2} l_\omega(x_3) |v_0^-|^2 dx \\ &=: E_0(v_0^+) + E_0(v_0^-). \end{aligned} \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 3 (случай $\mu < 1$). Для решения u_ε задачи (1) имеют место пределы

$$\begin{aligned} u_\varepsilon|_{\Omega_0} &\rightharpoonup v_0^+ \quad \text{слабо в } H^1(\Omega_0, \Gamma_1), \\ \widetilde{u_\varepsilon} &\rightarrow 0 \quad \text{сильно в } L^2(D_2), \end{aligned} \quad (14)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где функция v_0^+ – решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta_x v_0^+(x) = f_0(x), & x \in \Omega_0, \\ v_0^+(x) = 0, & x \in \Gamma_1 \cup Q, \\ \partial_\nu v_0^+(x) = 0, & x \in \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma_1 \cup Q). \end{cases} \quad (15)$$

Кроме того, имеет место сходимость интегралов энергий при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow \int_{\Omega_0} |\nabla v_0^+|^2 dx =: E_0(v_0^+). \quad (16)$$

1.2. Обсуждение результатов. Из приведенных результатов видно существенное влияние краевых условий на асимптотическое поведение решения задачи (1) (имеется три качественно разных случая). На боковых поверхностях тонких цилиндров из второго класса задано третье краевое условие

$$\partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^\mu k_2 u_\varepsilon = \varepsilon^\beta g_\varepsilon.$$

На первый взгляд может показаться, что нет никакой разницы между этим условием и однородным условием Неймана, поскольку член $k_2 u_\varepsilon$ умножается на ε^μ , а g_ε на ε^β в случае, если $\mu \geq 1$, $\beta \geq 1$. Однако это верно только при $\mu > 1$, $\beta > 1$. Если же $\beta = 1$ и $\mu \geq 1$, то слагаемое $\varepsilon g_\varepsilon$ трансформируется в правую часть усредненного дифференциального уравнения в области D_2 (см. (7) и (12)). Если $\mu = 1$, то мы получаем новый член $k_2 l_\omega(x_3) v_0^-$ в этом усредненном уравнении в D_2 , который описывает локальную экстракцию величины, плотность которой задается функцией v_0^- .

Отметим также влияния параметров τ и μ . Во-первых, при $\tau \geq 0$ и $\mu \geq 1$ мы получаем нестандартное неоднородное условие сопряжения

$$|\omega(0)|\partial_{x_3}v_0^-(x', 0) - \partial_{x_3}v_0^+(x', 0) + \delta_{\tau,0}k_1\Xi v_0^+(x', 0) = \Xi p_0(x'), \quad (x', 0) \in Q, \quad (17)$$

которое учитывает геометрию тонких цилиндров из первого класса и взаимодействие поверхностей этих цилиндров с внешней средой.

Во-вторых, при $\tau < 0$ и $\mu \geq 1$ задача (1) фактически распадается в пределе на две независимые задачи (11) и (12). Аналогичный эффект наблюдался в работе [18] для многоуровневых густых соединений тонких цилиндров конечной высоты. Однако в [18] такое распадение происходило за счет присутствия однородных условий Дирихле на стенках тонких цилиндров из второго уровня, а в исследуемой задаче (1) эффект возникает как следствие очень большого взаимодействия поверхностей “малых” цилиндров с внешней средой. В этом случае также исчезает зависимость от величины p_ε . Заметим, что функция p_ε может совпадать с функцией g_ε . Тогда в правой части условия сопряжения (17) появится след функции g_0 .

В случае $\mu < 1$ взаимодействие поверхностей “длинных” цилиндров с внешней средой играет определяющую роль в асимптотическом поведении решения. Заметим, что взаимодействие локально может быть и не слишком большим при $0 \leq \mu < 1$, однако за счет суммарной площади поверхностей “длинных” цилиндров дает такой эффект. В этом случае ($\mu < 1$) исчезает зависимость в первом члене асимптотики решения задачи (1) от величин g_ε , p_ε и параметров β и τ .

В [4] было отмечено, что для функционалов, которые заданы на рефлексивных пространствах и растут быстрее нормы, фактически имеет место только одно естественное определение усреднения – это определение через сходимость энергий. Поэтому доказательства сходимости интегралов энергии и сходимости решений – очень важный результат, который дает возможность изучать вариационные задачи и задачи оптимального управления в таких густых каскадных соединениях, используя прямой метод вариационного исчисления (см. [40]).

§ 2. Вспомогательные асимптотические утверждения

Краевые задачи в густых соединениях с неоднородными краевыми условиями Неймана, Фурье или нелинейными краевыми условиями на границах тонких областей имеют свои специфические трудности. Для усреднения таких краевых задач в работах [15], [16], [19] был предложен новый подход с использованием специальных интегральных тождеств (тип густого соединения определяет его вид). В нашем случае оно имеет следующий вид (см. [19]):

$$\varepsilon \int_{S_\varepsilon^{(2)}} \frac{\varphi(x) d\sigma_x}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2}} = \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|} \varphi dx + \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \nabla_{\xi'} Y_2(\xi', x_3) \Big|_{\xi' = x' / \varepsilon} \cdot \nabla_{x'} \varphi dx \quad (18)$$

для любой функции $\varphi \in H^1(G_\varepsilon^{(2)})$. Здесь $S_\varepsilon^{(i)}$ – объединение боковых поверхностей тонких цилиндров из i -класса, $i = 1, 2$; Y_2 – 1-периодическая функция по ξ_1 и ξ_2 , которая на ячейке периодичности является единственным решением

следующей задачи:

$$\begin{aligned}\Delta_{\xi'} Y_2(\xi', x_3) &= \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|} \quad \text{в } \omega(x_3), \\ \partial_{\nu'}(\xi') Y_2 &= 1 \quad \text{на } \partial\omega(x_3), \\ \int_{\omega(x_3)} Y_2(\xi', x_3) d\xi' &= 0,\end{aligned}\tag{19}$$

где $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$, $\nu'(\xi') = (\nu_1(\xi'), \nu_2(\xi'))$ – внешняя нормаль к границе ω , переменная $x_3 \in [-l_2, 0]$ рассматривается как параметр в этой задаче.

В [19] доказаны следующие неравенства:

$$\sup_{x \in G_\varepsilon^{(2)}} |\nabla_{\xi'} Y_2(\xi', x_3)|_{\xi' = x'/\varepsilon} = \sup_{\xi' \in \omega(x_3), x_3 \in (-l_2, 0)} |\nabla_{\xi'} Y_2(\xi', x_3)| \leq C_0, \tag{20}$$

$$\varepsilon \int_{S_\varepsilon^{(2)}} \varphi^2 d\sigma_x \leq C_1 \left(\varepsilon^2 \int_{G_\varepsilon^{(2)}} |\nabla_{x'} \varphi|^2 dx + \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \varphi^2 dx \right), \tag{21}$$

$$\int_{G_\varepsilon^{(2)}} \varphi^2 dx \leq C_2 \left(\varepsilon^2 \int_{G_\varepsilon^{(2)}} |\nabla_{x'} \varphi|^2 dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon^{(2)}} \varphi^2 d\sigma_x \right) \quad \forall \varphi \in H^1(G_\varepsilon^{(2)}), \tag{22}$$

из которых следует оценка

$$\|v\|_{L^2(S_\varepsilon^{(2)})} \leq C_2 \varepsilon^{-1/2} \|v\|_{H^1(G_\varepsilon^{(2)})}. \tag{23}$$

Обозначим через $Q_\varepsilon^{(i)} := \Upsilon_\varepsilon^{(i)} \setminus S_\varepsilon^{(i)}$ объединение нижних оснований тонких цилиндров из i -класса, $i = 1, 2$. Стандартным способом (см. [41], [42]) получаем

$$\|v\|_{L^2(Q_\varepsilon^{(2)})} \leq C_3 \|v\|_{H^1(G_\varepsilon^{(2)})}. \tag{24}$$

ЛЕММА 1. Для любой функции $v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1)$ имеют место оценки

$$\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} v^2(x) d\sigma_x \leq C_1 \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |\nabla v|^2 dx + 4 \int_Q v^2(x', 0) dx', \tag{25}$$

$$\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} v^2(x) d\sigma_x \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2. \tag{26}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что области $B_k^{(1)}$ достаточно гладкие, перейдем в окрестности границы $\partial(\varepsilon B_k^{(1)})$ к естественным криволинейным координатам (n, t) , где t – длина дуги вдоль $\partial(\varepsilon B_k^{(1)})$, а n – ориентированное расстояние до границы $\partial(\varepsilon B_k^{(1)})$ вдоль внутренней нормали, т.е. $n > 0$ в $\varepsilon B_k^{(1)}$. Представим значение функции v на боковых поверхностях “малых” отростков с основаниями $\varepsilon B_k^{(1)}$, которые составляют $S_\varepsilon^{(1)}$, в следующей форме:

$$v(x', y) = \int_{(x', y)}^{(\check{x}', 0)} \frac{\partial v}{\partial s} ds + v(\check{x}', 0). \tag{27}$$

Здесь $\check{x}' = x' + \frac{\alpha}{l_1}(\varepsilon l_1 - y)$ для достаточно малого α , а s – натуральный параметр отрезка $[(x', y); (\check{x}', 0)]$ (см. рис. 2). Возведем в квадрат обе части равенства и, воспользовавшись неравенствами Коши–Буняковского и $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, перепишем его в виде

$$v^2(x', y) \leq 2C_3 \varepsilon \int_{(x', y)}^{(\check{x}', 0)} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 ds + 2v^2(\check{x}', 0).$$

Рис. 2. “Малый” отросток из класса $G_\varepsilon^{(1)}$ и его сечение

Далее, проинтегрируем по y от $-\varepsilon l_1$ до 0 и по t вдоль контура $\partial(\varepsilon B_k^{(1)})$, после этого просуммируем по k и по всем ячейкам периодичности. Пользуясь очевидными соображениями, получим

$$\int_{S_\varepsilon^{(1)}} v^2(x', x_3) d\sigma_x \leq 2C_3\varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |\nabla v|^2 dx + 2 \int_Q v^2(x', 0) dx'. \quad (28)$$

Аналогичным образом значение функции v на горизонтальных поверхностях “малых” отростков, которые составляют $Q_\varepsilon^{(1)}(l_1)$, представляем в виде

$$v(x', -\varepsilon l_1) = - \int_{-\varepsilon l_1}^0 \frac{\partial v}{\partial x_3} dx_3 + v(x', 0).$$

Делая преобразования, аналогичные тем, которые мы проводили с (27), выводим

$$v^2(x', -\varepsilon l_1) \leq 2l_1\varepsilon \int_{-\varepsilon l_1}^0 \left(\frac{\partial v}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 + 2v^2(x', 0).$$

Далее, проинтегрируем по x' по основанию “малого” отростка $\varepsilon B_k^{(1)}$, просуммируем по k и по всем ячейкам периодичности. Имеем

$$\int_{Q_\varepsilon^{(1)}} v^2(x', -\varepsilon l_1) dx' \leq 2l_1\varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |\nabla v|^2 dx + 2 \int_Q v^2(x', 0) dx'. \quad (29)$$

Окончательно из (28) и (29) получаем оценку (25), из которой непосредственно вытекает (26).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогично можно доказать оценку для любой функции $v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1)$ вида

$$\int_Q \chi_\varepsilon^{(1)}(x') v^2(x', 0) dx' \leq C_4 \left(\varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_\varepsilon^{(1)}} v^2(x) d\sigma_x \right), \quad (30)$$

где $\chi_\varepsilon^{(1)}(x') = \sum_{k=1}^{K_1} \chi_\varepsilon^{(1),k}(x')$, $\chi_\varepsilon^{(1),k}(x') = \chi_k(x'/\varepsilon)$, а $\chi_k(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, — это 1-периодическая по ξ_1 и ξ_2 функция, которая на квадрате $\square$ задается следующим образом:

$$\chi_k(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in B_k^{(1)}, \\ 0, & \xi \in \square \setminus B_k^{(1)}, \end{cases} \quad k = 1, \dots, K_1. \quad (31)$$

Очевидно, что $\chi_\varepsilon^{(1),k} \rightharpoonup |B_k^{(1)}|$ слабо в $L^2(Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Взяв $\varphi = u_\varepsilon$ в интегральном тождестве (6) и учитывая неравенства (23), (24) и (26), выводим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx &\leq \left| \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon dx + \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon u_\varepsilon d\sigma_x + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon u_\varepsilon d\sigma_x \right| \\ &\leq \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|p_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(1)})} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(1)})} + \varepsilon^\beta \|g_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(2)})} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(2)})} \\ &\leq C_4 (\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|p_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(1)})} + \varepsilon^{\beta-1/2} \|g_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(2)})}) \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

или, в силу условий на функции f_ε , p_ε , g_ε и значений параметра β ,

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_5. \quad (32)$$

ЛЕММА 2. При выполнении условий на функцию g_ε имеет место следующая сходимость:

$$\varepsilon \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon \psi d\sigma_x \longrightarrow \int_{D_2} l_\omega(x_3) g_0 \psi dx \quad \forall \psi \in H^1(D_2)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании тождества (18) для любой функции $\psi \in H^1(D_2)$

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon \psi d\sigma_x &= \varepsilon \int_{Q_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon \psi dx' + \int_{D_2} \chi_\varepsilon^{(2)}(x) \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2} g_\varepsilon \psi dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2} \nabla_{\xi'} Y_2(\xi', x_3) \Big|_{\xi' = x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (g_\varepsilon \psi) dx, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\chi_\varepsilon^{(2)}$ — характеристическая функция множества $G_\varepsilon^{(2)}$, т.е.

$$\chi_\varepsilon^{(2)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_\varepsilon^{(2)}, \\ 0, & x \in D_2 \setminus G_\varepsilon^{(2)}. \end{cases} \quad (34)$$

Известно (см. [19]), что $\chi_\varepsilon^{(2)} \rightharpoonup |\omega|$ слабо в $L^2(D_2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда в силу (3) предел второго слагаемого в правой части (33) равен $\int_{D_2} l_\omega g_0 \psi dx$.

В силу (3) и (20) имеем

$$\left| \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2} \nabla_{\xi'} Y_2(\xi', x_3) \Big|_{\xi' = x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (g_\varepsilon \psi) dx \right| \leq \varepsilon C_1 \|\psi\|_{H^1(D_2)}.$$

Учитывая (3) и неравенство (24), выводим

$$\varepsilon \left| \int_{Q_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon \psi dx_1 \right| \leq \varepsilon \|g_\varepsilon\|_{L^2(Q_\varepsilon^{(2)})} \|\psi\|_{L^2(Q_\varepsilon^{(2)})} \leq \varepsilon C_2 \|\psi\|_{H^1(D_2)}.$$

Полученные оценки дают возможность перейти к пределу в правой части (33) и доказать данную лемму.

Пусть $\phi \in H^1(D_\varepsilon^{(1)})$. Тогда для почти всех $t \in [-\varepsilon l_1, 0]$ легко доказать неравенство

$$\left\| \phi(\cdot, t) - \frac{1}{\varepsilon l_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \phi(\cdot, x_3) dx_3 \right\|_{L^2(Q)} \leq l_1 \sqrt{\varepsilon} \|\partial_{x_3} \phi\|_{L^2(D_\varepsilon^{(1)})}. \quad (35)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\phi(x', t) - \frac{1}{\varepsilon l_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \phi(x', x_3) dx_3 \right)^2 dx' \\ &= \frac{1}{(\varepsilon l_1)^2} \int_Q \left(\int_{-\varepsilon l_1}^0 (\phi(x', t) - \phi(x', x_3)) dx_3 \right)^2 dx' \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon l_1} \int_Q \int_{-\varepsilon l_1}^0 (\phi(x', t) - \phi(x', x_3))^2 dx_3 dx' \\ &= \frac{1}{\varepsilon l_1} \int_Q \int_{-\varepsilon l_1}^0 \left(\int_{x_3}^t \partial_{x_3} \phi(x', y) dy \right)^2 dx_3 dx' \\ &\leq \int_Q \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{-\varepsilon l_1}^0 (\partial_{x_3} \phi(x', y))^2 dy dx_3 dx' = \varepsilon l_1 \int_{D_\varepsilon^{(1)}} (\partial_{x_3} \phi(x', x_3))^2 dx. \end{aligned}$$

Из (4), (5) и (35) следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon l_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 p_\varepsilon(x', x_3) dx_3 \longrightarrow p_0(x') \quad \text{сильно в } L^2(Q) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (36)$$

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия (4) и (5). Тогда имеет место сходимость

$$\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon(x) \psi(x') d\sigma_x \longrightarrow \Xi \int_Q p_0(x') \psi(x') dx' \quad \forall \psi \in H^1(Q) \quad (37)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где Ξ задана формулой (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем прием, аналогичный примененному для “длинных” стержней (см. (18), (19)) и для многоуровневых густых соединений тонких цилиндров конечной высоты (см. [17], [18]), определяя специальные функции $Y_1^{(k)}$ как единственные решения следующих задач:

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi'} Y_1^{(k)} &= \frac{|\partial B_k^{(1)}|}{|B_k^{(1)}|} \quad \text{в } B_k^{(1)}, \\ \partial_{\nu'(\xi')} Y_1^{(k)} &= 1 \quad \text{на } \partial B_k^{(1)}, \\ \int_{B_k^{(1)}} Y_1^{(k)}(\xi') d\xi' &= 0, \end{aligned}$$

и далее эти решения 1-периодически продолжаем по ξ_1 и ξ_2 ; $\xi' = x'/\varepsilon$, $\nu'(\xi') = (\nu_1(\xi'), \nu_2(\xi'))$ – внешняя нормаль к границе $B_k^{(1)}$.

Записываем интегральное тождество, аналогичное (18):

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon \varphi d\sigma_x &= \sum_{k=1}^{K_1} \frac{|\partial B_k^{(1)}|}{\varepsilon |B_k^{(1)}|} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} p_\varepsilon \varphi dx' dx_3 \\ &+ \sum_{k=1}^{K_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} \nabla_{\xi'} Y_1^{(k)}(\xi') \Big|_{\xi'=x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (p_\varepsilon \varphi) dx' dx_3 \\ &\quad \forall \varphi \in H^1(G_\varepsilon^{(1)}), \end{aligned} \quad (38)$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon \psi d\sigma_x &= \sum_{k=1}^{K_1} \frac{l_1 |\partial B_k^{(1)}|}{|B_k^{(1)}|} \int_Q \chi_\varepsilon^{(1),k}(x') \frac{1}{\varepsilon l_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 p_\varepsilon dx_3 \psi(x') dx' \\ &+ \sum_{k=1}^{K_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} \nabla_{\xi'} Y_1^{(k)}(\xi') \Big|_{\xi'=x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (p_\varepsilon \psi) dx, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\chi_\varepsilon^{(1),k}(x_1)$ задана в (31).

Имея в виду ограниченность (4) и сходимости (36), в силу (39) заключаем, что

$$\int_{S_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon \psi d\sigma_x \longrightarrow l_1 |\partial B^{(1)}| \int_Q p_0 \psi dx'. \quad (40)$$

В силу (5), (35) и (36) имеем

$$\int_{Q_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon \psi dx' = \int_Q \chi_\varepsilon^{(1)}(x') p_\varepsilon(x', -\varepsilon l_1) \psi(x') dx' \longrightarrow |B^{(1)}| \int_Q p_0 \psi dx'. \quad (41)$$

Объединяя сходимости (40) и (41), получаем (37).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\phi_\varepsilon \in H^1(D_\varepsilon^{(1)})$, норма $\|\phi_\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^{(1)})}$ равномерно ограниченная по ε и

$$\phi_\varepsilon(x', 0) \longrightarrow \phi_0(x') \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (42)$$

Тогда имеет место сходимость

$$\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon(x) \phi_\varepsilon(x) d\sigma_x \longrightarrow \Xi \int_Q p_0(x') \phi_0(x') dx'$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где Ξ задана формулой (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что

$$\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon(x) \phi_\varepsilon(x) d\sigma_x = \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \phi_\varepsilon(x) p_0(x') d\sigma_x + \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} (p_\varepsilon(x) - p_0(x')) \phi_\varepsilon(x) d\sigma_x.$$

Учитывая условия на функцию ϕ_ε и (35), имеем

$$\frac{1}{\varepsilon l_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \phi_\varepsilon(x', x_3) dx_3 \longrightarrow \phi_0(x') \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (43)$$

Из (4) и (36) следует, что $p_0 \in H^1(Q)$. Тогда так же, как и в лемме 3, показываем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \phi_\varepsilon(x) p_0(x') d\sigma_x = \Xi \int_Q p_0(x') \phi_0(x') dx'.$$

Очевидно,

$$\int_{Q_\varepsilon^{(1)}(l_1)} (p_\varepsilon(x', -\varepsilon l_1) - p_0(x')) \phi_\varepsilon(x', -\varepsilon l_1) dx' \longrightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Применяя (38), имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_{S_\varepsilon^{(1)}} (p_\varepsilon(x) - p_0(x')) \phi_\varepsilon(x) d\sigma_x \\
 &= \sum_{k=1}^{K_1} \frac{|\partial B_k^{(1)}|}{\varepsilon |B_k^{(1)}|} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} (p_\varepsilon(x) - p_0(x')) \phi_\varepsilon(x) dx' dx_3 \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{K_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} \nabla_{\xi'} Y_1^{(k)}(\xi') \Big|_{\xi'=x'/\varepsilon} \\
 & \quad \times \nabla_{x'} ((p_\varepsilon(x) - p_0(x')) \phi_\varepsilon(x)) dx' dx_3.
 \end{aligned} \tag{44}$$

В силу неравенства (44) и равномерной ограниченности нормы $\|\phi_\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^{(1)})}$ предел последнего интеграла в (44) равен нулю. Для первого интеграла справа сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{K_1} \frac{|\partial B_k^{(1)}|}{\varepsilon |B_k^{(1)}|} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} (p_\varepsilon(x) - p_0(x')) \phi_\varepsilon(x) dx' dx_3 \\
 &= \sum_{k=1}^{K_1} \frac{|\partial B_k^{(1)}|}{\varepsilon |B_k^{(1)}|} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} (p_\varepsilon(x) - p_\varepsilon(x', 0)) (\phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x', 0)) dx' dx_3 \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{|\partial B_k^{(1)}|}{\varepsilon |B_k^{(1)}|} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} (p_\varepsilon(x) - p_\varepsilon(x', 0)) \phi_\varepsilon(x', 0) dx' dx_3 \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{|\partial B_k^{(1)}|}{\varepsilon |B_k^{(1)}|} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} (p_\varepsilon(x', 0) - p_0(x')) \phi_\varepsilon(x', 0) dx' dx_3 \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{|\partial B_k^{(1)}|}{\varepsilon |B_k^{(1)}|} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} (p_\varepsilon(x', 0) - p_0(x')) (\phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x', 0)) dx' dx_3.
 \end{aligned} \tag{45}$$

В силу (5), (36), (42) и (43) предел последних трех интегралов в (45) равен нулю. Первый интеграл в правой части (45) оцениваем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=1}^{K_1} \frac{|\partial B_k^{(1)}|}{\varepsilon |B_k^{(1)}|} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} (p_\varepsilon(x) - p_\varepsilon(x', 0)) (\phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x', 0)) dx' dx_3 \right| \\
 & \leq \left| \frac{C}{\varepsilon} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (p_\varepsilon(x) - p_\varepsilon(x', 0)) (\phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x', 0)) dx \right| \\
 & \leq \frac{C}{\varepsilon} \sqrt{\int_{G_\varepsilon^{(1)}} \left(\int_{x_3}^0 \partial_{x_3} p_\varepsilon(x', y) dy \right)^2 dx} \sqrt{\int_{G_\varepsilon^{(1)}} \left(\int_{x_3}^0 \partial_{x_3} \phi_\varepsilon(x', y) dy \right)^2 dx} \\
 & \leq C_1 \varepsilon \|\partial_{x_3} p_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} \|\partial_{x_3} \phi_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} \leq C_2 \varepsilon^{3/2}.
 \end{aligned}$$

§ 3. Доказательство теорем сходимости

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1. Из (32) следует, что величины

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)}, \quad \|\widetilde{u_\varepsilon}\|_{L^2(D_2)}, \quad \|\widetilde{\partial_{x_i} u_\varepsilon}\|_{L^2(D_2)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

равномерно ограничены по ε . Поэтому существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$, которую опять обозначим через ε , что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon|_{\Omega_0} &\rightharpoonup v_0^+ && \text{слабо в } H^1(\Omega_0, \Gamma_1), \\ \widetilde{u_\varepsilon} &\rightharpoonup |\omega(x_3)|(|\omega(x_3)|^{-1} v) =: |\omega| v_0^- && \text{слабо в } L^2(D_2), \\ \widetilde{\partial_{x_i} u_\varepsilon} &\rightharpoonup \zeta_i && \text{слабо в } L^2(D_2) \end{aligned} \quad (46)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где v_0^+ , v_0^- , ζ_i , $i = 1, 2, 3$, – некоторые функции, которые будут определены далее.

2. Сначала найдем ζ_3 . Возьмем любую функцию $\phi \in C_0^\infty(D_2)$ и с помощью (18) сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \int_{D_2} \widetilde{\partial_{x_3} u_\varepsilon} \phi \, dx &= \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \partial_{x_3} u_\varepsilon \phi \, dx = - \int_{G_\varepsilon^{(2)}} u_\varepsilon \partial_{x_3} \phi \, dx - \varepsilon \int_{S_\varepsilon^{(2)}} \frac{\varrho'(x_3) u_\varepsilon \phi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2}} \, d\sigma_x \\ &= - \int_{D_2} \widetilde{u_\varepsilon} \partial_{x_3} \phi \, dx - \int_{D_2} \varrho'(x_3) \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|} \widetilde{u_\varepsilon} \phi \, dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \varrho'(x_3) \nabla_{\xi'} Y_2(\xi', x_3) \Big|_{\xi' = x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (u_\varepsilon \phi) \, dx. \end{aligned} \quad (47)$$

Учитывая (20), (32) и переходя к пределу в (47) при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\int_{D_2} \zeta_3 \phi \, dx = - \int_{D_2} (|\omega(x_3)| v_0^- \partial_{x_3} \phi + |\omega(x_3)|' v_0^- \phi) \, dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(D_2),$$

откуда следует, что существует обобщенная производная $\partial_{x_3} v_0^-$ и

$$\zeta_3(x) = |\omega(x_3)| \partial_{x_3} v_0^-(x)$$

для почти всех $x \in D_2$.

Теперь найдем ζ_i , $i = 1, 2$. Рассмотрим функции

$$Z_i(\xi_i) = -\xi_i + b^{(2)} + [\xi_i], \quad i = 1, 2,$$

где $b^{(2)}$ – центр круга $B^{(2)}$, $[t]$ – целая часть числа t . С помощью этих функций определим следующие тестовые функции:

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}, \\ \varepsilon Z_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \psi(x), & x \in G_\varepsilon^{(2)}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D_2).$$

Легко видеть, что $\Phi_i \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1)$ и

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_1(x) &= \left(-\psi + \varepsilon Z_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} \psi, \varepsilon Z_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_3} \psi, \varepsilon Z_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_3} \psi \right), & x \in G_\varepsilon^{(2)}, \\ \nabla \Phi_2(x) &= \left(\varepsilon Z_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} \psi, -\psi + \varepsilon Z_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2} \psi, \varepsilon Z_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_3} \psi \right), & x \in G_\varepsilon^{(2)}. \end{aligned}$$

Подставляя эти функции в интегральное тождество (6), имеем

$$\begin{aligned} \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \left(-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \psi + \varepsilon Z_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \varepsilon Z_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \varepsilon Z_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) dx \\ = -\varepsilon^{\mu+1} k_2 \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} u_\varepsilon Z_i \psi \, d\sigma_x + \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(2)}} f_\varepsilon Z_i \psi \, dx + \varepsilon^{\beta+1} \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon Z_i \psi \, d\sigma_x, \\ i = 1, 2. \end{aligned}$$

Учитывая свойства функций Z_1 и Z_2 , неравенства (23), (24) и (32), условия (2) и (3) и то, что $\beta \geq 1$ и $\mu \geq 1$, из предыдущих равенств выводим неравенства

$$\begin{aligned} \left| \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \partial_{x_i} u_\varepsilon \psi dx \right| &\leq \varepsilon c_1 (\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(2)})} \|\nabla \psi\|_{L^2(G_\varepsilon^{(2)})} + \|f_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(2)})} \|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon^{(2)})}) \\ &\quad + \varepsilon^{\beta-1} \|\sqrt{\varepsilon} g_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(2)})} \|\sqrt{\varepsilon} \psi\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(2)})} + \varepsilon^{\mu-1} \|\sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(2)})} \|\sqrt{\varepsilon} \psi\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(2)})}) \\ &\leq \varepsilon c_1 (\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{\beta-1} \|g_\varepsilon\|_{H^1(D_2)} + \varepsilon^{\mu-1} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}) \|\psi\|_{H^1(D_2)} \\ &\leq \varepsilon c_2 \|\psi\|_{H^1(D_2)}. \end{aligned}$$

Переход к пределу в этих неравенствах при $\varepsilon \rightarrow 0$ дает тождества

$$\int_{D_2} \zeta_i \psi dx = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D_2), \quad i = 1, 2,$$

т.е. $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ почти всюду в D_2 .

3. Теперь осталось определить функции v_0^+ и v_0^- . Сначала найдем следы этих функций на интервале $Q = \{(x_1, 0) : 0 < x_1 < a\}$. В силу компактности оператора следа и первого соотношения в (46) имеем

$$u_\varepsilon(x', 0) \longrightarrow v_0^+(x', 0) \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (48)$$

Рассмотрим равенство

$$\widetilde{u}_\varepsilon(x', 0-0) = \chi_\varepsilon^{(2)}(x', 0) u_\varepsilon(x', 0+0) \text{ для почти всех } x' \in Q, \quad (49)$$

где функция $\chi_\varepsilon^{(2)}$ определена в (34).

Понятно, что правая часть в (49) в силу (46) слабо в $L^2(Q)$ стремится к $|\omega(0)| v_0^+(x', 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_Q \chi_\varepsilon^{(2)}(x', 0) u_\varepsilon(x', 0+0) \psi(x') dx' &= \int_Q \widetilde{u}_\varepsilon(x', 0-0) \psi(x') dx' \\ &= \frac{1}{l_2} \left(\int_{D_2} \widetilde{u}_\varepsilon(x) \psi(x') dx + \int_{D_2} (x_3 + l_2) \widetilde{\partial_{x_3} u_\varepsilon}(x) \psi(x') dx \right. \\ &\quad + \int_{D_2} \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|} \varrho'(x_3) (x_3 + l_2) \widetilde{u}_\varepsilon \psi dx \\ &\quad \left. + \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \varrho'(x_3) (x_3 + l_2) \nabla_{\xi'} Y_2(\xi', x_3) \Big|_{\xi' = x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (u_\varepsilon \psi) dx \right) \quad (50) \end{aligned}$$

для произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(Q)$. Переходя к пределу в (50) при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем тождество

$$\begin{aligned} |\omega(0)| \int_Q v_0^+(x', 0) \psi(x') dx' &= \frac{1}{l_2} \left(\int_{D_2} |\omega(x_3)| v_0^-(x) \psi(x') dx \right. \\ &\quad + \int_{D_2} (x_3 + l_2) |\omega(x_3)| \partial_{x_3} v_0^-(x) \psi dx \\ &\quad \left. + \int_{\Omega^+} (x_3 + l_3) l_\omega(x_3) \varrho'(x_3) v_0^-(x) \psi(x') dx \right) \\ &= \frac{1}{l_2} \int_{D_2} \left(|\omega(x_3)| v_0^-(x) \psi(x') + (x_3 + l_2) \psi(x') \partial_{x_3} (|\omega(x_3)| v_0^-(x)) \right) dx \\ &= |\omega(0)| \int_Q v_0^-(x', 0) \psi(x') dx' \quad \forall \psi \in C_0^\infty(Q), \end{aligned}$$

которое означает, что

$$v_0^+(x', 0) = v_0^-(x', 0) \quad \text{для почти всех } x' \in Q. \quad (51)$$

4. Возьмем любую функцию $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega_2})$, $\varphi|_{\Gamma_1} = 0$. С помощью функции φ определим функцию $\widehat{\varphi} \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1)$ следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}, \\ \varphi(x', 0), & x \in G_\varepsilon^{(1)}. \end{cases}$$

Тогда интегральное тождество (6) с пробной функцией $\widehat{\varphi}$, применяя тождество (18), перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \nabla_x u_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi \, dx + \int_{D_2} \widetilde{\nabla_x u_\varepsilon} \cdot \nabla_x \varphi \, dx + \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \nabla_{x'} u_\varepsilon \cdot \nabla_{x'} \varphi(x', 0) \, dx \\ & + \varepsilon^\tau k_1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \varphi(x', 0) \, d\sigma_x + \varepsilon^{\mu-1} k_2 \int_{D_2} \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2} \widetilde{u_\varepsilon} \varphi \, dx \\ & + \varepsilon^\mu \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2} \nabla_{\xi'} Y_2(\xi', x_3) \Big|_{\xi' = x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (u_\varepsilon \varphi) \, dx + \varepsilon^\mu \int_{Q_\varepsilon^{(2)}} u_\varepsilon \varphi \, dx' \\ & = \int_{\Omega_0} f_\varepsilon \varphi \, dx + \int_{D_2} \chi_\varepsilon^{(2)}(x) f_\varepsilon \varphi \, dx + \int_{G_\varepsilon^{(1)}} f_\varepsilon \varphi(x', 0) \, dx \\ & + \int_{\Gamma_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon \varphi(x', 0) \, d\sigma_x + \varepsilon^\beta \int_{\Gamma_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon \varphi \, d\sigma_x. \end{aligned} \quad (52)$$

Теперь перейдем к пределу в этом тождестве. Поскольку

$$\left| \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \nabla_{x'} u_\varepsilon \cdot \nabla_{x'} \varphi(x', 0) \, dx \right| \leq \|\nabla_{x'} u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} \|\nabla_{x'} \varphi(x', 0)\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} \leq C\sqrt{\varepsilon},$$

то предел первой строчки в равенстве (52) на основании соотношений (46) равен

$$\int_{\Omega_0} \nabla_x v_0^+ \cdot \nabla_x \varphi \, dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} v_0^- \partial_{x_3} \varphi \, dx. \quad (53)$$

На основании таких же соображений и условия (2) получаем предел четвертой строчки в (52):

$$\int_{\Omega_0} f_0 \varphi \, dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| f_0 \varphi \, dx.$$

Благодаря тому, что $\mu \geq 1$, предел слагаемых в третьей строке равен нулю.

В силу лемм 2 и 3 предел последней строчки в (52) равен

$$\equiv \int_Q p_0(x') \varphi(x', 0) \, dx' + \delta_{\beta,1} \int_{D_2} l_\omega(x_3) g_0 \varphi \, dx.$$

Аналогичными соображениями, что и в лемме 2, находим предел второго слагаемого во второй строке в (52):

$$\delta_{\mu,1} k_2 \int_{D_2} l_\omega(x_3) v_0^- \varphi \, dx. \quad (54)$$

Осталось найти предел первого слагаемого во второй строке в (52), т.е. слагаемого $\varepsilon^\tau k_1 \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \varphi(x', 0) d\sigma_x$. Для этого нужно применить рассуждения леммы 3, учесть первый предел в (46) и результат п. 3 (равенство следов функций v_0^+ и v_0^- на Q (см. (51)). Вкратце повторим этот метод, обращая внимания на различия. Имеем

$$k_1 \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \varphi d\sigma_x = k_1 \int_{S_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \varphi d\sigma_x + k_1 \int_{Q_\varepsilon^{(1)}(l_1)} u_\varepsilon \varphi dx'.$$

Покажем, что

$$\int_{Q_\varepsilon^{(1)}(l_1)} u_\varepsilon \varphi dx' \longrightarrow |B^{(1)}| \int_Q v_0^+(x_1, 0) \varphi dx', \quad (55)$$

$$\int_{S_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \varphi d\sigma_x \longrightarrow l_1 |\partial B^{(1)}| \int_Q v_0^+(x_1, 0) \varphi dx'. \quad (56)$$

Для доказательства (55) вычтем и добавим слева под интегралом слагаемое

$$\chi_\varepsilon^{(1)} u_\varepsilon(x', 0) \varphi(x', 0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \varphi dx' &= \int_{Q_\varepsilon^{(1)}} (u_\varepsilon - u_\varepsilon(x', 0)) \varphi dx' + \int_Q (\chi_\varepsilon^{(1)} u_\varepsilon(x', 0) - \chi_\varepsilon^{(1)} v_0^+(x', 0)) \varphi dx' \\ &+ \int_Q (\chi_\varepsilon^{(1)} v_0^+(x', 0) - |B^{(1)}| v_0^+(x', 0)) \varphi dx' + |B^{(1)}| \int_Q v_0^+(x', 0) \varphi dx'. \end{aligned} \quad (57)$$

Второй интеграл в правой части (57) сходится к нулю из-за сходимости следов (48), третий интеграл в правой части сходится к нулю по свойствам характеристической функции. Покажем, что первый интеграл сходится к нулю. Используя дважды неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon^{(1)}} (u_\varepsilon - u_\varepsilon(x', 0)) \varphi dx' &= \int_{Q_\varepsilon^{(1)}} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \partial_{x_3} u_\varepsilon dx_3 \varphi dx' \\ &\leq \left(\int_{Q_\varepsilon^{(1)}} \left(\int_{-\varepsilon l_1}^0 \partial_{x_3} u_\varepsilon dx_3 \right)^2 dx' \right)^{1/2} \left(\int_{Q_\varepsilon^{(1)}} \varphi^2(x', 0) dx' \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\varepsilon l_1 \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (\partial_{x_3} u_\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q_\varepsilon^{(1)}} \varphi^2(x', 0) dx' \right)^{1/2} \\ &\leq C \sqrt{\varepsilon} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \longrightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь обратимся к доказательству сходимости (56). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \varphi d\sigma_x &= \sum_{k=1}^{K_1} \frac{|\partial B_k^{(1)}|}{\varepsilon |B_k^{(1)}|} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} u_\varepsilon \varphi dx' dx_3 \\ &+ \sum_{k=1}^{K_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} \nabla_{\xi'} Y_1^{(k)}(\xi') \Big|_{\xi'=x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (u_\varepsilon \varphi) dx' dx_3 \\ &= \sum_{k=1}^{K_1} \frac{l_1 |\partial B_k^{(1)}|}{|B_k^{(1)}|} \int_Q \chi_\varepsilon^{(1),k}(x') \frac{1}{\varepsilon l_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 u_\varepsilon dx_3 \varphi(x') dx' \\ &+ \sum_{k=1}^{K_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} \nabla_{\xi'} Y_1^{(k)}(\xi') \Big|_{\xi'=x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (u_\varepsilon \varphi) dx' dx_3. \end{aligned}$$

Вычтем и добавим, как и в прошлый раз, слагаемое $\chi_\varepsilon^{(1)} u_\varepsilon(x', 0) \varphi(x', 0)$ в каждом из интегралов суммы. Получим

$$\begin{aligned}
\int_{S_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \varphi d\sigma_x &= \sum_{k=1}^{K_1} \frac{l_1 |\partial B_k^{(1)}|}{|B_k^{(1)}|} \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} \left(\frac{1}{\varepsilon l_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 u_\varepsilon dx_3 - u_\varepsilon(x', 0) \right) \varphi(x') dx' \\
&+ \sum_{k=1}^{K_1} \frac{l_1 |\partial B_k^{(1)}|}{|B_k^{(1)}|} \int_Q (\chi_\varepsilon^{(1),k}(x') u_\varepsilon(x', 0) - \chi_\varepsilon^{(1),k}(x') v_0^+(x', 0)) \varphi(x') dx' \\
&+ \sum_{k=1}^{K_1} \frac{l_1 |\partial B_k^{(1)}|}{|B_k^{(1)}|} \int_Q (\chi_\varepsilon^{(1),k}(x') v_0^+(x', 0) - |B_k^{(1)}| v_0^+(x', 0)) \varphi(x') dx' \\
&+ l_1 |\partial B^{(1)}| \int_Q v_0^+(x', 0) dx' \\
&+ \sum_{k=1}^{K_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} \nabla_{\xi'} Y_1^{(k)}(\xi')|_{\xi'=x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (u_\varepsilon \varphi) dx' dx_3. \quad (58)
\end{aligned}$$

Второй интеграл в правой части равенства (58) сходится к нулю из-за сходимости следов (48), третий интеграл в правой части сходится к нулю в силу свойств характеристической функции. Покажем, что первый интеграл сходится к нулю. Используя неравенство Коши–Буняковского, выводим

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^{K_1} \frac{l_1 |\partial B_k^{(1)}|}{|B_k^{(1)}|} \left| \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} \left(\frac{1}{\varepsilon l_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 u_\varepsilon dx_3 - u_\varepsilon(x', 0) \right) \varphi(x') dx' \right| \right| \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon} \left| \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (u_\varepsilon(x', x_3) - u_\varepsilon(x', 0)) \varphi dx' \right| = \frac{C}{\varepsilon} \left| \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \int_{x_3}^0 \partial_{x_3} u_\varepsilon dx_3 \varphi dx' \right| \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon} \left(\int_{G_\varepsilon^{(1)}} \left(\int_{x_3}^0 \partial_{x_3} u_\varepsilon dx_3 \right)^2 dx' \right)^{1/2} \left(\int_{G_\varepsilon^{(1)}} \varphi^2(x', 0) dx' \right)^{1/2} \\
&\leq C l_1 \left(\varepsilon l_1 \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (\partial_{x_3} u_\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q_\varepsilon^{(1)}(l_1)} \varphi^2(x', 0) dx' \right)^{1/2} \\
&\leq C_1 \sqrt{\varepsilon} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \longrightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Осталось показать, что последний интеграл в правой части (58) сходится к нулю. Учитывая ограниченность функций $Y_1^{(k)}$ и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^{K_1} \int_{-\varepsilon l_1}^0 \int_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B_k^{(1)})} \nabla_{\xi'} Y_1^{(k)}(\xi')|_{\xi'=x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (u_\varepsilon \varphi) dx' dx_3 \right| \\
&\leq C \left| \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \nabla_{x'} (u_\varepsilon) \varphi dx \right| + C \left| \int_{G_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \nabla_{x'} \varphi dx \right| \\
&\leq \left(\int_{G_\varepsilon^{(1)}} (\nabla_{x'} u_\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \left(\varepsilon l_1 \int_{Q_\varepsilon^{(1)}} \varphi^2(x_1, 0) dx_1 \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_{G_\varepsilon^{(1)}} (u_\varepsilon)^2 dx \right)^{1/2} \left(\varepsilon l_1 \int_{Q_\varepsilon^{(1)}} (\nabla_{x'} \varphi)^2 dx' \right)^{1/2} \\
&\leq C \sqrt{\varepsilon} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \longrightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varepsilon^\tau k_1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon \varphi(x', 0) d\sigma_x \longrightarrow \delta_{\tau,0} k_1 \Xi \int_Q v_0^+(x', 0) \varphi(x', 0) dx' \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (59)$$

С учетом полученных результатов ((53), (54), (59)) в предельном переходе интегральное тождество (52) переходит в следующие тождество:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \nabla_x v_0^+ \cdot \nabla_x \varphi dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} v_0^- \partial_{x_3} \varphi dx + \delta_{\mu,1} k_2 \int_{D_2} l_\omega(x_3) v_0^- \varphi dx \\ & \quad + \delta_{\tau,0} k_1 \Xi \int_Q v_0^+(x', 0) \varphi(x', 0) dx' \\ & = \int_{\Omega_0} f_0 \varphi dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| f_0 \varphi dx + \Xi \int_Q p_0(x') \varphi(x', 0) dx' \\ & \quad + \delta_{\beta,1} \int_{D_2} l_\omega(x_3) g_0 \varphi dx \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega_2}), \quad \varphi|_{\Gamma_1} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

5. Поскольку множество функций $\{v \in C^\infty(\overline{\Omega_2}) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$ всюду плотно в частично анизотропном пространстве Соболева

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{v \in L^2(\Omega_2) : \exists \text{ обобщенная производная } \partial_{x_3} v \in L^2(\Omega_2) \\ & \quad \text{и } v|_{\Omega_0} \in H^1(\Omega_0, \Gamma_1)\} \end{aligned}$$

со скалярным произведением

$$\begin{aligned} (u, v)_\mathcal{H} &:= \int_{\Omega_0} \nabla_x u \cdot \nabla_x v dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u \partial_{x_3} v dx \\ & \quad + \delta_{\mu,1} k_2 \int_{D_2} l_\omega(x_3) uv dx + \delta_{\tau,0} k_1 \Xi \int_Q u(x', 0) v(x', 0) dx', \end{aligned}$$

то функция

$$v_0(x) = \begin{cases} v_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ v_0^-(x), & x \in D_2, \end{cases}$$

которая, как следует из пп. 1–3 доказательства, принадлежит пространству $\mathcal{H}$, является решением интегрального тождества (60) с произвольной пробной функцией $\varphi \in \mathcal{H}$. Стандартным способом доказывается единственность такого решения. Кроме того, легко видеть, что v_0 – это обобщенное решение задачи (7) в смысле интегрального тождества (60) в пространстве $\mathcal{H}$.

Благодаря единственности решения усредненной задачи (7) все изложенные выше выкладки в этом доказательстве верны для произвольной подпоследовательности последовательности $\{\varepsilon\}$, выбранной в начале доказательства. Поэтому сходимости (46) имеют место и для всей последовательности $\{\varepsilon\}$.

6. Докажем сходимость (9) для интеграла энергии $E_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon dx + \int_{\Gamma_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon u_\varepsilon d\sigma_x + \varepsilon^\beta \int_{\Gamma_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon u_\varepsilon d\sigma_x \\ &= \int_{\Omega_0} f_\varepsilon u_\varepsilon dx + \int_{D_2} f_\varepsilon \widetilde{u}_\varepsilon dx + \int_{G_\varepsilon^{(1)}} f_0 u_\varepsilon dx + \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (f_\varepsilon - f_0) u_\varepsilon dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon u_\varepsilon d\sigma_x + \varepsilon^{\beta-1} \int_{D_2} \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2} g_\varepsilon \widetilde{u}_\varepsilon dx \\
& + \varepsilon^\beta \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2} \nabla_{\xi'} Y_2(\xi', x_3) \Big|_{\xi'=x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (g_\varepsilon u_\varepsilon) dx \\
& + \varepsilon^\beta \int_{Q_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon u_\varepsilon dx'. \tag{61}
\end{aligned}$$

В силу (2), (46), (32) и абсолютной непрерывности интеграла Лебега предел второй строчки в (61) равен

$$\int_{\Omega_0} f_0 v_0^+ dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| f_0 v_0^- dx.$$

Поскольку $\beta \geq 1$, то в силу условий на функцию g_ε и неравенств (24), (32) предел последних двух слагаемых в (61) равен нулю. В силу (3) и (46) получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_2} \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2} g_\varepsilon \widetilde{u}_\varepsilon dx = \delta_{\beta,1} \int_{D_2} l_\omega(x_3) g_0 v_0^- dx.$$

Комбинируя выкладки из следствия 1 с рассуждениями доказательства предела (59), находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon u_\varepsilon d\sigma_x = \Xi \int_Q p_0(x') v_0^+(x', 0) dx'.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \int_{\Omega_0} f_0 v_0^+ dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| f_0 v_0^- dx \\
&+ \delta_{\beta,1} \int_{D_2} l_\omega(x_3) g_0 v_0^- dx + \Xi \int_Q p_0(x') v_0^+(x', 0) dx'.
\end{aligned}$$

С другой стороны, замечая, что $(v_0, v_0)_\mathcal{H} = E_0(v_0)$ и интегральное тождество (60) с пробной функцией $\varphi = v_0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
(v_0, v_0)_\mathcal{H} &= \int_{\Omega_0} f_0 v_0^+ dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| f_0 v_0^- dx \\
&+ \delta_{\beta,1} \int_{D_2} l_\omega(x_3) g_0 v_0^- dx + \Xi \int_Q p_0(x') v_0^+(x', 0) dx',
\end{aligned}$$

приходим к (9). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сходимость (10) по подпоследовательности доказывается практически дословно, как это было проделано в пп. 1, 2 в доказательстве теоремы 1. Покажем, что следы функций v_0^+ и v_0^- на Q равны нулю. Из интегрального тождества (6) вытекает следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^\tau k_1 \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} u_\varepsilon^2 d\sigma_x &\leq \left| \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon dx + \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon u_\varepsilon d\sigma_x + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon u_\varepsilon d\sigma_x \right| \\
&\leq C_4 (\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|p_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(1)})} + \varepsilon^{\beta-1/2} \|g_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(2)})}) \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Имея в виду (2)–(4) и (32), заключаем, что

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(1)})} \leq C_7 \varepsilon^{\tau/2} \longrightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда с учетом (30) и того, что $\chi_\varepsilon^{(1)} \rightarrow |B^{(1)}|$ слабо в $L^2(Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, непосредственно вытекает равенство нулю $v_0^-(x', 0)$. Аналогично случаю $\tau \geq 0$ доказывается (51). Таким образом,

$$v_0^+(x', 0) = v_0^-(x', 0) = 0 \quad \text{для почти всех } x' \in Q. \quad (62)$$

Пусть $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega_2})$, $\varphi|_{\Gamma_1 \cup Q} = 0$ – произвольная функция. С помощью функции φ определим функцию $\check{\varphi} \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1)$ следующим образом:

$$\check{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}, \\ 0, & x \in G_\varepsilon^{(1)}, \end{cases}$$

и подставим в интегральное тождество (6). С учетом (19) переписываем тождество (6):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \nabla_x u_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi \, dx + \int_{D_2} \widetilde{\nabla_x u_\varepsilon} \cdot \nabla_x \varphi \, dx + \varepsilon^{\mu-1} k_2 \int_{D_2} \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2} \widetilde{u_\varepsilon} \varphi \, dx \\ & + \varepsilon^\mu \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2} \nabla_{\xi'} Y_2(\xi', x_3) \Big|_{\xi' = x'/\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} (u_\varepsilon \varphi) \, dx + \varepsilon^\mu \int_{Q_\varepsilon^{(2)}} u_\varepsilon \varphi \, dx' \\ & = \int_{\Omega_0} f_\varepsilon \varphi \, dx + \int_{D_2} \chi_\varepsilon^{(2)}(x) f_\varepsilon \varphi \, dx + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon \varphi \, d\sigma_x. \end{aligned}$$

Теперь перейдем к пределу в этом тождестве. Аналогично тому, как это сделано в доказательстве п. 4 теоремы 1, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \nabla_x v_0^+ \cdot \nabla_x \varphi \, dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} v_0^- \partial_{x_3} \varphi \, dx + \delta_{\mu,1} k_2 \int_{D_2} l_\omega(x_3) v_0^- \varphi \, dx \\ & = \int_{\Omega_0} f_0 \varphi \, dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| f_0 \varphi \, dx + \delta_{\beta,1} \int_{D_2} l_\omega(x_3) g_0 \varphi \, dx \\ & \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega_2}), \quad \varphi|_{\Gamma_1 \cup Q} = 0. \end{aligned}$$

В силу (62) это тождество эквивалентно двум таким тождествам:

$$\int_{\Omega_0} \nabla_x v_0^+ \cdot \nabla_x \phi \, dx = \int_{\Omega_0} f_0 \phi \, dx \quad \forall \phi \in H^1(\Omega_0, \Gamma_1 \cup Q) \quad (63)$$

и

$$\begin{aligned} & \int_{D_2} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} v_0^- \partial_{x_3} \psi \, dx + \delta_{\mu,1} k_2 \int_{D_2} l_\omega(x_3) v_0^- \psi \, dx \\ & = \int_{D_2} |\omega(x_3)| f_0 \psi \, dx + \delta_{\beta,1} \int_{D_2} l_\omega(x_3) g_0 \psi \, dx \end{aligned} \quad (64)$$

для любой функции ψ из анизотропного соболевского пространства

$$\begin{aligned} H^{0,0,1}(D_2, Q) &= \{v \in L^2(D_2) : \exists \text{ обобщенная производная } \partial_{x_3} v \in L^2(D_2) \\ & \quad \text{и след } v|_Q = 0\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что тождество (63) – это интегральное тождество, которое соответствует обобщенному решению задачи (11), а тождество (64) – соответственно задачи (12). Очевидно существование и единственность обобщенных решений этих задач. Поэтому сходимости (10) имеют место и для всей последовательности $\{\varepsilon\}$.

Докажем сходимость (13) для интеграла энергии $E_\varepsilon(u_\varepsilon)$, для которого имеет место представление (61) и пределы всех слагаемых, кроме слагаемого

$$\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon u_\varepsilon d\sigma_x,$$

равны тем же величинам, что и в п. 6 доказательства теоремы 1.

Поскольку $u_\varepsilon(x', 0) \rightarrow 0$ в $L^2(Q)$, то согласно следствию 1 (см. также п. 5 теоремы 1) и (62) получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon u_\varepsilon d\sigma_x = 0. \quad (65)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \int_{\Omega_0} f_0 v_0^+ dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| f_0 v_0^- dx + \delta_{\beta,1} \int_{D_2} l_\omega(x_3) g_0 v_0^- dx \\ &= \int_{\Omega_0} |\nabla v_0^+|^2 dx + \int_{D_2} |\omega(x_3)| |\partial_{x_3} v_0^-|^2 dx + \delta_{\mu,1} k_2 \int_{D_2} l_\omega(x_3) |v_0^-|^2 dx \\ &= E_0(v_0^+) + E_0(v_0^-), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E_0(v_0^+) &:= \int_{\Omega_0} |\nabla v_0^+|^2 dx, \\ E_0(v_0^-) &:= h_2 \int_{D_2} |\omega(x_3)| |\partial_{x_3} v_0^-|^2 dx + \delta_{\mu,1} k_2 \int_{D_2} l_\omega(x_3) |v_0^-|^2 dx. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из оценки (32) следует первая сходимость в (14) по некоторой подпоследовательности, а из интегрального тождества (6) и (32) – следующее неравенство:

$$\varepsilon^\mu k_2 \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} u_\varepsilon^2 d\sigma_x \leq C_1. \quad (66)$$

Из (22) с учетом (66) и (32) получаем, что

$$\int_{G_\varepsilon^{(2)}} u_\varepsilon^2 dx \leq C_3 \varepsilon^\vartheta, \quad (67)$$

где $\vartheta = \min(1 - \mu, 2)$. Таким образом, имеет место и вторая сходимость в (14).

Покажем, что след функции v_0^+ на Q равен нулю. В силу (67) из (47) следует, что $\widetilde{\partial_{x_3} u_\varepsilon}$ стремится к нулю слабо в $L^2(D_2)$. Поэтому, переходя к пределу в представлении (50) при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что

$$v_0^+(x', 0) = 0 \quad \text{для почти всех } x' \in Q.$$

Пусть $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega_0})$, $\varphi|_{\Gamma_1 \cup Q} = 0$ – произвольная функция. С помощью функции φ определим пробную функцию $\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1)$ следующим образом:

$$\phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Omega_0, \\ 0, & x \in G_\varepsilon^{(1)} \cup G_\varepsilon^{(2)}, \end{cases}$$

и подставим ее в интегральное тождество (6). Тогда получим тождество

$$\int_{\Omega_0} \nabla_x u_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi \, dx = \int_{\Omega_0} f_\varepsilon \varphi \, dx.$$

Переходя к пределу в этом тождестве, находим

$$\int_{\Omega_0} \nabla_x v_0^+ \cdot \nabla_x \varphi \, dx = \int_{\Omega_0} f_0 \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega_0}), \quad \varphi|_{\Gamma_1 \cup Q} = 0. \quad (68)$$

Тождество (68) означает, что v_0^+ – единственное обобщенное решение задачи (15). Поэтому сходимости (14) имеют место и для всей последовательности $\{\varepsilon\}$.

Докажем сходимость (16) для интеграла энергии $E_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Учитывая (66) и (67), условия (2) и (3), неравенства (23) и (24), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{G_\varepsilon^{(2)}} f_\varepsilon u_\varepsilon \, dx + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon u_\varepsilon \, d\sigma_x \right| \\ & \leq \|f_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(2)})} C_4 \varepsilon^{\vartheta/2} + \varepsilon^{\beta-1} \|\sqrt{\varepsilon} g_\varepsilon\|_{L^2(\Upsilon_\varepsilon^{(2)})} C_5 \varepsilon^{(1-\mu)/2} \leq C_6 \varepsilon^{\vartheta/2}. \end{aligned}$$

Поскольку $u_\varepsilon(x', 0) \rightarrow 0$ в $L^2(Q)$, то имеет место предел (65). Таким образом, переходя к пределу в равенстве

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega_0} f_\varepsilon u_\varepsilon \, dx + \int_{G_\varepsilon^{(2)}} f_\varepsilon u_\varepsilon \, dx + \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} p_\varepsilon u_\varepsilon \, d\sigma_x + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon u_\varepsilon \, d\sigma_x,$$

получим на основании (68), что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega_0} f_0 v_0^+ \, dx = \int_{\Omega_0} |\nabla v_0^+|^2 \, dx = E_0(v_0^+).$$

Теорема 3 доказана.

Основные идеи этих исследований были обсуждены и проработаны в Киеве осенью 2007 г. в рамках соглашения о научном сотрудничестве между Киевским национальным университетом им. Т. Шевченко и Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова. Второй автор выражает самую искреннюю благодарность за гостеприимство и поддержку.

Список литературы

- [1] В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей*, Наукова думка, Киев, 1974.
- [2] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., **5**, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1978.

- [3] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*, Наука, М., 1984; англ. пер.: N. S. Bakhvalov, G. Panasenko, *Homogenisation: averaging processes in periodic media. Mathematical problems in the mechanics of composite materials*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **36**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
- [4] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993; англ. пер.: V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleĭnik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [5] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, *Homogenization of reticulated structures*, Appl. Math. Sci., **136**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1999.
- [6] С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [7] А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, *Усреднение. Методы и приложения*, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2007; англ. пер.: G. A. Chechkin, A. L. Piatnitski, A. S. Shamaev, *Homogenization. Methods and applications*, Transl. Math. Monogr., **234**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [8] D. Blanchard, A. Gaudiello, T. A. Mel'nyk, "Boundary homogenization and reduction of dimension in a Kirchhoff–Love plate", *SIAM J. Math. Anal.*, **39**:6 (2008), 1764–1787.
- [9] U. De Maio, T. Durante, T. A. Mel'nyk, "Asymptotic approximation for the solution to the Robin problem in a thick multi-level junction", *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **15**:12 (2005), 1897–1921.
- [10] F. Fleury, E. Sánchez-Palencia, "Asymptotics and spectral properties of the acoustic vibrations of a body perforated by narrow channels", *Bull. Sci. Math.* (2), **110**:2 (1986), 149–176.
- [11] Т. А. Мельник, С. А. Назаров, "Асимптотическая структура спектра в задаче о гармонических колебаниях ступицы с тяжелыми спицами", *Докл. РАН*, **333**:1 (1993), 13–15; англ. пер.: T. A. Mel'nik, S. A. Nazarov, "The asymptotic structure of the spectrum in the problem of harmonic oscillations of a hub with heavy spokes", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **48**:3 (1994), 428–432.
- [12] Т. А. Мельник, С. А. Назаров, "Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа "густого гребешка"", Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **19**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1996, 138–173; англ. пер.: T. A. Mel'nik, S. A. Nazarov, "The asymptotics of the solution to the Neumann spectral problem in a domain of the "dense-comb" type", *J. Math. Sci. (New York)*, **85**:6 (1997), 2326–2346.
- [13] Т. А. Mel'nyk, "Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction", *Z. Anal. Anwendungen*, **18**:4 (1999), 953–975.
- [14] Т. А. Мельник, С. А. Назаров, "Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями", *Алгебра и анализ*, **12**:2 (2000), 188–238; англ. пер.: T. A. Mel'nik, S. A. Nazarov, "Asymptotic analysis of the Neumann problem on the junction of a body and thin heavy rods", *St. Petersburg Math. J.*, **12**:2 (2001), 317–351.
- [15] Т. А. Mel'nik, "Homogenization of a singularly perturbed parabolic problem in a thick periodic junction of the type 3:2:1", *Укр. матем. журн.*, **52**:11 (2000), 1524–1533; *Ukrainian Math. J.*, **52**:11 (2000), 1737–1748.
- [16] Т. А. Mel'nyk, "Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Fourier problem in a thick multilevel junction", *Укр. матем. журн.*, **58**:2 (2006), 195–216; *Ukrainian Math. J.*, **58**:2 (2006), 220–243.
- [17] Т. А. Mel'nyk, P. S. Vashchuk, "Homogenization of the Neumann–Fourier problem in a thick two-level junction of type 3:2:1.", *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **2**:3 (2006), 318–337.

- [18] Т. А. Мельник, П. С. Ващук, “Усреднение краевой задачи со сменным типом граничных условий в густом соединении”, *Дифференц. уравнения*, **43**:5 (2007), 677–684; англ. пер.: Т. А. Mel’nyk, P. S. Vashchuk, “Homogenization of a boundary value problem with mixed type of boundary conditions in a thick junction”, *Differ. Equ.*, **43**:5 (2007), 696–703.
- [19] Т. А. Mel’nyk, “Homogenization of a boundary-value problem with a nonlinear boundary condition in a thick junction of type 3:2:1”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **31**:9 (2008), 1005–1027.
- [20] С. А. Назаров, “Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. I”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **18**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1995, 3–78; “Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. II”, **20** (1997), 155–195; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions. I”, *J. Math. Sci.*, **80**:5 (1996), 1989–2034; “Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions. II”, *J. Math. Sci. (New York)*, **97**:3 (1999), 4085–4108.
- [21] Е. Я. Хруслов, “О резонансных явлениях в одной задаче дифракции”, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, вып. 6, Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1968, 111–129.
- [22] Y. Amirat, G. A. Chechkin, R. R. Gadyl’shin, “Asymptotics of simple eigenvalues and eigenfunctions for the Laplace operator in a domain with an oscillating boundary”, *ЖВМ и МФ*, **46**:1 (2006), 102–115; *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:1 (2006), 97–110.
- [23] Y. Amirat, G. A. Chechkin, R. R. Gadyl’shin, “Asymptotics for eigenelements of Laplacian in domain with oscillating boundary: multiple eigenvalues”, *Appl. Anal.*, **86**:7 (2007), 873–897.
- [24] А. Г. Беляев, *О сингулярных возмущениях граничных задач*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1990.
- [25] А. Г. Беляев, А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, “Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:4 (1998), 730–754; англ. пер.: A. G. Belyaev, A. L. Pyatnitskii, G. A. Chechkin, “Asymptotic behavior of a solution to a boundary value problem in a perforated domain with oscillating boundary”, *Siberian Math. J.*, **39**:4 (1998), 621–644.
- [26] G. Bouchitté, A. Lidouh, P. Suquet, “Homogénéisation de frontière pour la modélisation du contact entre un corps déformable non linéaire et un corps rigide”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **313**:13 (1991), 967–972.
- [27] G. Chechkin, D. Cioranescu, “Vibration of a thin plate with a “rough” surface”, *Nonlinear partial differential equations and their applications*, Collège de France Seminar, Vol. XIV (Paris, 1997–1998), Stud. Math. Appl., **31**, North-Holland, Amsterdam, 2002, 147–169.
- [28] G. A. Chechkin, A. Friedman, A. L. Piatnitski, “The boundary-value problem in domains with very rapidly oscillating boundary”, *J. Math. Anal. Appl.*, **231**:1 (1999), 213–234.
- [29] E. N. Dancer, D. Daners, “Domain perturbation for elliptic equations subject to robin boundary conditions”, *J. Differential Equations*, **138**:1 (1997), 86–132.
- [30] A. Gaudiello, “Asymptotic behaviour of non-homogeneous Neumann problems in domains with oscillating boundary”, *Ricerche Mat.*, **43**:2 (1994), 239–292.
- [31] W. Jäger, A. Mikelić, “On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow”, *J. Differential Equations*, **170**:1 (2001), 96–122.
- [32] W. Jäger, A. Mikelić, “Couette flows over a rough boundary and drag reduction”, *Comm. Math. Phys.*, **232**:3 (2003), 429–455.
- [33] W. Kohler, G. Papanicolaou, S. Varadhan, “Boundary and interface problems in regions with very rough boundaries”, *Multiple scattering and waves in random media*,

- Proceedings of the U.S. Army Workshop (Blacksburg, VA, 1980), North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1981, 165–197.
- [34] J. Nevard, J. B. Keller, “Homogenization of rough boundaries and interfaces”, *SIAM J. Appl. Math.*, **57**:6 (1997), 1660–1686.
- [35] Т. А. Мельник, “Усреднение эллиптических уравнений, описывающих процессы в сильно неоднородных тонких перфорированных областях с быстро изменяющейся толщиной”, *Докл. АН Украины*, **10** (1991), 15–18.
- [36] Г. А. Чечкин, Т. П. Чечкина, “Об усреднении задач в областях типа “инфузорий””, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **23**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2003, 386–407; англ. пер.: G. A. Chechkin, T. P. Chechkina, “On homogenization of problems in domains of the “infusorium” type”, *J. Math. Sci. (New York)*, **120**:3 (2004), 1470–1482.
- [37] Г. А. Чечкин, Т. П. Чечкина, “Теорема усреднения для задач в областях типа “инфузорий” с несогласованной структурой”, *Дифференциальные уравнения с частными производными*, Совр. матем. и ее прилож., **2**, Ин-т кибернетики АН Грузии, Тбилиси, 2003, 139–154; англ. пер.: G. A. Chechkin, T. P. Chechkina, “Homogenization theorem for problems in domains of the “infusorian” type with uncoordinated structure”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **123**:5 (2004), 4363–4380.
- [38] Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин, “Асимптотический анализ краевых задач в густых каскадных соединениях”, *Докл. НАН Украины*, **9** (2008), 16–22.
- [39] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer–Verlag, New York, 1985.
- [40] Z. Denkowski, S. Mortola, “Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations to partial differential equations”, *J. Optim. Theory Appl.*, **78**:2 (1993), 365–391.
- [41] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Transl. Math. Monogr., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [42] С. Л. Соболев, *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций*, Наука, М., 1989.

Т. А. Мельник (Т. А. Mel'nik)
 Механико-математический факультет
 Киевского национального университета
 им. Т. Шевченко, Украина
E-mail: melnyk@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию
 18.12.2007 и 02.07.2008

Г. А. Чечкин (G. A. Chechkin)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова;
 Narvik University College, Norway
E-mail: chechkin@mech.math.su