Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Хагигатдуст, А. А. Ошемков, Топология слоения Ли-увилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 6, 119–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 04:31:52

УДК 517.938.5

Г. Хагигатдуст, А. А. Ошемков

Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$

В 2004 г. В. В. Соколовым было найдено несколько новых интегрируемых случаев для уравнений Эйлера на некоторых шестимерных алгебрах Ли. В работе исследованы топологические свойства одного из этих интегрируемых случаев на алгебре Ли $so(4)$. В частности, для рассматриваемой интегрируемой системы построены бифуркационные диаграммы отображения момента, а также вычислены все инварианты Фоменко. Таким образом, получена классификация изоэнергетических поверхностей этой системы с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, отображение момента, бифуркационная диаграмма, топологические инварианты.

Введение

В работе В. В. Соколова [1] были описаны новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера на шестимерных алгебрах Ли $so(4)$, $so(3, 1)$, $e(3)$. Гамильтонианы всех этих случаев – квадратичные функции на алгебре Ли, а интегралы – полиномы степени четыре. Алгебраические свойства этих интегрируемых случаев пока не очень понятны, хотя есть некоторые основания предполагать, что они качественно отличаются от известных ранее случаев интегрируемости (например, от случая Ковалевской, где дополнительный интеграл также имеет степень четыре). Поэтому интересно исследовать эти новые случаи с топологической точки зрения. В частности, используя теорию топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем (см. [2]), можно вычислить топологические инварианты этих интегрируемых случаев и сравнить их с инвариантами классических интегрируемых систем (по поводу вычисления топологических инвариантов для некоторых классических интегрируемых систем см. [2], [3]).

В работах [4], [5] Г. Хагигатдуст исследовал топологию изоэнергетических поверхностей для интегрируемых случаев Соколова на алгебре Ли $so(4)$, т.е.

Работа А. А. Ошемкова выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00648), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-660.2008.1) и гранта Национальных Научных Проектов 2.1.1.7988, работа Г. Хагигатдуста выполнена при поддержке исследовательской лаборатории Azarbaijan University of Tarbiat Moallem.

совместных поверхностей уровня инвариантов алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$ и гамильтониана для этих случаев. В частности, им были вычислены индексы критических точек гамильтониана (как функции на четырехмерных орбитах алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$), а также описан топологический тип изоэнергетических поверхностей для всех значений энергии и параметров, задающих орбиту (см. рис. 1).

В настоящей работе исследованы топологические свойства одного из случаев интегрируемости, обнаруженных В.В. Соколовым, на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$. Для этого интегрируемого случая построены бифуркационные диаграммы отображения момента (теоремы 2 и 3), найдены типы критических точек ранга нуль (теорема 4), определены перестройки торов Лиувилля (теорема 5), а также вычислены инварианты Фоменко (см. таблицу в теореме 6). Таким образом, получена классификация изоэнергетических поверхностей для этого случая с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности (см. рис. 5).

§ 1. Основные определения и постановка задачи

1.1. Уравнения Эйлера на алгебре Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^*$ – соответствующая коалгебра (пространство линейных функций на $\mathfrak{g}$). Рассмотрим базис $e_1, \dots, e_n$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть c_{ij}^k – структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в этом базисе:

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k.$$

Рассмотрим линейные координаты $x_1, \dots, x_n$ на $\mathfrak{g}^*$, соответствующие базису $e_1, \dots, e_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скобка Пуассона на пространстве $\mathfrak{g}^*$, заданная формулой

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где f, g – гладкие функции на $\mathfrak{g}^*$, называется *скобкой Ли–Пуассона* для алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнения

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\},$$

задающие динамическую систему на $\mathfrak{g}^*$, где H – гладкая функция на $\mathfrak{g}^*$, называются *уравнениями Эйлера* для алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Хорошо известно (см., например, [6]), что динамическая система, задаваемая уравнениями Эйлера, является гамильтоновой (с гамильтонианом H) на орбитах коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Соответствующее векторное поле на орбитах называется также *косым градиентом* функции H и обозначается $\text{sgrad } H$.

Многие динамические системы, описывающие задачи механики и физики, могут быть записаны в виде уравнений Эйлера для некоторой алгебры Ли. Например, различные задачи о движении твердого тела описываются уравнениями Эйлера для алгебры Ли $\mathfrak{e}(3)$ (см. [2], [6], [7]). Эти системы являются гамильтоновыми системами с двумя степенями свободы на орбитах алгебры Ли $\mathfrak{e}(3)$. Интегрируемость таких систем означает существование интеграла, функционально независимого с гамильтонианом H на орбитах.

В п. 1.2 описана интегрируемая система на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ с квадратичным гамильтонианом и интегралом степени четыре, найденная недавно В. В. Соколовым [1].

1.2. Интегрируемый случай Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$. Рассмотрим на пространстве $\mathfrak{so}(4)^*$, двойственном к алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$, линейные координаты $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$, в которых скобка Ли–Пуассона имеет вид

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad (1)$$

где ε_{ijk} – знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$. Координаты (S_1, S_2, S_3) и (R_1, R_2, R_3) удобно рассматривать как компоненты двух трехмерных векторов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{R}$.

Уравнения Эйлера на $\mathfrak{so}(4)^*$ с гамильтонианом H имеют следующий вид:

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}, \quad \dot{R}_i = \{R_i, H\}.$$

Скобка (1) обладает двумя функциями Казимира

$$f_1 = \mathbf{S}^2 + \mathbf{R}^2, \quad f_2 = \langle \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle,$$

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ (в частности, $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{R}^2$ – скалярные квадраты векторов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{R}$). Функции f_1 и f_2 коммутируют относительно скобки Ли–Пуассона (1) со всеми функциями, их совместные поверхности уровня

$$M_{c,g} = \{(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \mid f_1(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = c, f_2(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = g\}$$

являются орбитами коприсоединенного представления. Ограничение скобки (1) на $M_{c,g}$ невырождено, т.е. задает на орбитах симплектическую структуру. При выполнении условия $2|g| < |c|$ эти орбиты являются четырехмерными подмногообразиями в $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$, диффеоморфными произведению двумерных сфер $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, а в случае $2|g| = |c|$ (особые орбиты) они диффеоморфны двумерной сфере $\mathbb{S}^2$.

Мы будем исследовать интегрируемый случай уравнений Эйлера для алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$, найденный в работе В. В. Соколова [1]. Гамильтониан H и дополнительный интеграл K для этого случая имеют следующий вид:

$$H = \alpha S_2^2 - \frac{1}{\alpha} S_1^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1, \quad (2)$$

$$K = (S_1 R_2 - S_2 R_1)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2) - \alpha(S_2 R_3 - S_3 R_2)^2 + \frac{1}{\alpha}(S_3 R_1 - S_1 R_3)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)(S_1 R_2 - S_2 R_1)^2. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При умножении всех координат на некоторую константу $(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \rightarrow \lambda(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ орбиты $M_{c,g}$ переходят в орбиты $M_{\lambda^2 c, \lambda^2 g}$. Поскольку гамильтониан (2) и интеграл (3) рассматриваемой системы – однородные функции координат, при этом преобразовании они также умножаются на константу. Таким образом, случай произвольного c сводится к случаю $c = 1$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь орбиты $M_{1,g}$. Более того, без ограничения общности можно предполагать, что $g \geq 0$, поскольку, например, при замене координат $(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3) \rightarrow (-S_1, S_2, S_3, R_1, -R_2, -R_3)$ инвариант f_1 , гамильтониан H и интеграл K сохраняются, а инвариант f_2 меняет знак.

Аналогичным образом можно уменьшить количество рассматриваемых случаев для параметра α . При замене $S_1 \rightarrow -S_1$, $R_1 \rightarrow -R_1$ и $\alpha \rightarrow -\alpha$, а также при замене $S_1 \leftrightarrow S_2$, $R_1 \leftrightarrow R_2$ и $\alpha \rightarrow 1/\alpha$ инварианты f_1 и f_2 сохраняются, а гамильтониан H и интеграл K лишь меняют знак (что не влияет на топологию рассматриваемой системы).

Итак, в дальнейшем мы будем предполагать, что параметры рассматриваемой интегрируемой системы с гамильтонианом (2) и интегралом (3) на орбитах $M_{c,g}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$c = 1, \quad 0 \leq g < \frac{1}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

1.3. Топология изоэнергетических поверхностей. Важной характеристикой интегрируемой гамильтоновой системы является топология поверхностей уровня ее гамильтониана. Они называются *изоэнергетическими поверхностями*.

Если система задана уравнениями Эйлера для алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$, то ее изоэнергетические поверхности зависят от значения гамильтониана h и от параметров, задающих орбиту. Таким образом, в нашем случае изоэнергетические поверхности $Q_{g,h}^3$ – это совместные поверхности уровня инвариантов f_1, f_2 алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$ и гамильтониана (2), заданных на пространстве $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$, т.е.

$$Q_{g,h}^3 = \{(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \mid f_1(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = 1, f_2(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = g, H(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = h\}.$$

В работах [4], [5] доказана следующая теорема, описывающая топологию изоэнергетических поверхностей $Q_{g,h}^3$ гамильтониана (2) при различных значениях параметров g и h .

Рис. 1. Топологический тип изоэнергетических поверхностей $Q_{g,h}^3$

ТЕОРЕМА 1. *Связные компоненты изоэнергетических поверхностей $Q_{g,h}^3$ гамильтониана (2) при различных значениях g и h гомеоморфны либо трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$, либо связной сумме нескольких экземпляров многообразия $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Более точно, различным областям на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$, указанным на рис. 1, соответствуют следующие многообразия $Q_{g,h}^3$:*

$$2\mathbb{S}^3, \quad N_1, \quad 2N_1, \quad N_3, \quad N_5,$$

где $N_k = \#_1^k \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На рис. 1 изображена лишь полуплоскость $g \geq 0$, поскольку системы на орбитах $M_{1,g}$ и $M_{1,-g}$ одинаковы (см. замечание 1), т.е. набор областей в полуплоскости $g \leq 0$ симметричен указанному относительно оси h . Кроме того, приведенный рисунок соответствует случаю $1/2 < \alpha \leq 1$. При $0 < \alpha \leq 1/2$ исчезает одна из областей с изоэнергетической поверхностью N_3 на рис. 1 (см. также рис. 5, содержащий более подробную информацию о топологии рассматриваемой системы).

1.4. Слоение Лиувилля. Топология изоэнергетических поверхностей гамильтоновой системы зависит лишь от ее гамильтониана. Более полную информацию о топологии интегрируемой гамильтоновой системы можно получить, исследуя слоение фазового пространства на инвариантные поверхности. Это слоение может иметь особенности, а все его неособые слои (в случае, когда фазовое пространство компактно) являются торами Лиувилля. Приведем точное определение (см. [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если гамильтонова система на фазовом пространстве M^{2n} интегрируема по Лиувиллю при помощи интегралов $f_1, \dots, f_n$, то слоение, образованное связными компонентами совместных поверхностей уровня функций $f_1, \dots, f_n$, называется *слоением Лиувилля* данной системы.

Один из подходов к исследованию топологии интегрируемой гамильтоновой системы заключается в описании слоения Лиувилля на ее изоэнергетических поверхностях с точностью до *лиувиллевой эквивалентности*, т.е. с точностью до диффеоморфизма, переводящего слои в слои. Для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы имеется полный топологический инвариант, классифицирующий изоэнергетические поверхности с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Этот инвариант, впервые описанный в [8], называется *инвариантом Фоменко–Цишанга* или *меченой молекулой* (см. также [2]). Он представляет собой граф (называемый “молекулой”), вершины которого (“атомы”) соответствуют особым слоям слоения Лиувилля, а ребра – однопараметрическим семействам регулярных слоев (т.е. торов Лиувилля). При этом ребра и некоторые вершины молекулы снабжены числовыми метками. Эти метки содержат информацию о склейке однопараметрических семейств торов Лиувилля в окрестности особых слоев.

Молекулу без меток иногда называют *инвариантом Фоменко*. Этот инвариант классифицирует изоэнергетические поверхности с точностью до *грубой лиувиллевой эквивалентности* (см. [2], [9]), для которой допустимой операцией является разрезание изоэнергетической поверхности по тору Лиувилля и склейка полученных граничных торов по некоторому диффеоморфизму.

Один из основных методов вычисления инвариантов Фоменко для конкретной интегрируемой системы состоит в исследовании особенностей отображения, сопоставляющего каждой точке фазового пространства набор значений интегралов в ней. Такое отображение называется *отображением момента*, а множество его критических значений – *бифуркационной диаграммой*. Особые слои слоения Лиувилля – это в точности те, которые содержат критические точки отображения момента.

Таким образом, для исследования топологии данной интегрируемой гамильтоновой системы (в частности, для вычисления ее инвариантов Фоменко) полезно сначала найти критические точки отображения момента и построить бифуркационную диаграмму. Для рассматриваемого в настоящей работе интегрируемого случая Соколова эта задача решается в § 2. После этого необходимо исследовать перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента и построить соответствующие молекулы. Это сделано в § 3.

§ 2. Бифуркационные диаграммы отображения момента для случая Соколова

Рассматриваемая система является гамильтоновой на четырехмерных многообразиях $M_{1,g}$. Для каждого значения параметра g гамильтониан и дополнительный интеграл системы являются ограничениями функций (2) и (3) на соответствующее многообразие $M_{1,g}$. Мы будем обозначать эти ограничения также через H и K (как и исходные функции в $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$). Соответствующее семейство отображений момента имеет вид

$$\Phi_g: M_{1,g} \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k), \quad x \mapsto (H(x), K(x)). \quad (4)$$

Таким образом, отображение Φ_g зависит от параметра g , задающего орбиту, а также от параметра α .

Рангом критической точки отображения момента называется ранг дифференциала отображения момента в этой точке. Ясно, что для рассматриваемой системы критические точки отображения момента Φ_g имеют ранг нуль или один. Рассмотрим отдельно каждый из этих двух случаев.

2.1. Критические точки ранга нуль. Критические точки нулевого ранга – это в точности те точки, в которых и $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ равны нулю (они соответствуют положениям равновесия системы).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Множество всех критических точек ранга нуль для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (2) и интегралом (3) является объединением следующих (двупараметрических) семейств в пространстве $\text{so}(4)^* = \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$:*

- 1) $(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$;
- 2) $(0, S_2, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - S_2^2 - 2\alpha R_1 S_2 = 0$;
- 3) $(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \pm S_2, \pm S_3)$;
- 4) $(S_1, 0, 0, R_1, R_2, 0)$, где $R_1^2 + R_2^2 - S_1^2 - \frac{2}{\alpha} R_2 S_1 = 0$;
- 5) $(S_1, 0, S_3, \pm S_1, \pm S_3, \pm S_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Координаты векторного поля $\text{sgrad } H$ относительно скобки Ли–Пуассона (1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \{S_1, H\} &= 2\alpha S_2 S_3 + S_1 R_3 - R_1 S_3, & \{R_1, H\} &= 2\alpha S_2 R_3 + S_1 S_3 - R_1 R_3, \\ \{S_2, H\} &= \frac{2}{\alpha} S_1 S_3 + S_2 R_3 - R_2 S_3, & \{R_2, H\} &= \frac{2}{\alpha} S_1 R_3 + S_2 S_3 - R_2 R_3, \\ \{S_3, H\} &= -2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) S_1 S_2, & \{R_3, H\} &= -2\left(\alpha R_1 S_2 + \frac{1}{\alpha} S_1 R_2\right) \\ & & & + R_1^2 + R_2^2 - S_1^2 - S_2^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда сразу видно, что в любой критической точке ранга нуль либо $S_1 = 0$, либо $S_2 = 0$. Приравнивая к нулю оставшиеся координаты и перебирая все возможные варианты, получаем указанные пять случаев. После этого легко проверяется, что в указанных точках $\text{sgrad } K$ также равен нулю.

В предложении 1 множество всех критических точек ранга нуль рассматривается как подмножество во всем пространстве $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$. Каждое из указанных пяти семейств, пересекаясь с конкретной орбитой $M_{1,g}$, дает положения равновесия соответствующей интегрируемой системы на орбите. Учитывая уравнения, задающие орбиту, для каждого значения g получаем множество критических точек ранга нуль на орбите $M_{1,g}$ и их образы при отображении момента Φ_g . Ответ приведен в следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Критические точки ранга нуль для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (2) и интегралом (3) на орбите $M_{1,g}$ перечислены ниже в виде пяти серий, соответствующих пяти семействам из предложения 1, причем для каждой точки x из этого списка указаны значение гамильтониана $h = H(x)$ и значение интеграла $k = K(x)$:

1) при всех $0 \leq g < 1/2$ имеется четыре точки вида

$$(0, 0, S_3, 0, 0, R_3), \quad \text{где } S_3^2 + R_3^2 = 1, \quad S_3 R_3 = g,$$

при этом $h = 0, k = 0$;

2) при всех $0 \leq g < 1/2$ имеется четыре точки вида

$$\left(0, S_2, 0, \frac{1}{2\alpha S_2} - \frac{S_2}{\alpha}, \frac{g}{S_2}, 0\right), \quad \text{где } S_2^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(1-4g^2)}{4(\alpha^2+1)}},$$

при этом $h = (\alpha \pm \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)})/2, k = (1-4g^2)/(4\alpha)$;

3) при $g > 1/(2+4\alpha^2)$ имеется четыре точки вида

$$(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, S_2, S_3), \quad \text{где } S_2^2 = \frac{1}{4\alpha^2}(1-2g), \quad S_3^2 = \frac{g(2+4\alpha^2)-1}{4\alpha^2},$$

при этом $h = -(1-2g)/(4\alpha)$ и $k = (1-4g^2)/(4\alpha)$;

4) при всех $0 \leq g < \frac{1}{2}$ имеется четыре точки вида

$$\left(S_1, 0, 0, \frac{g}{S_1}, \frac{\alpha}{2S_1} - \alpha S_1, 0\right), \quad \text{где } S_1^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4g^2}{4(\alpha^2+1)}},$$

при этом $h = (-1 \mp \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)})/(2\alpha)$ и $k = -\alpha(1-4g^2)/4$;

5) при $g > \alpha^2/(2\alpha^2 + 4)$ имеется четыре точки вида

$$\left(S_1, 0, S_3, S_1, \frac{2}{\alpha}S_1, S_3\right), \quad \text{где } S_1^2 = \frac{\alpha^2}{4}(1 - 2g), \quad S_3^2 = \frac{g(2\alpha^2 + 4) - \alpha^2}{4},$$

при этом $h = \alpha(1 - 2g)/4$ и $k = -\alpha(1 - 4g^2)/4$.

2.2. Критические точки ранга один. Кривые, составляющие бифуркационную диаграмму отображения момента, являются образами критических точек ранга один. В этих точках косые градиенты $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ линейно зависимы, но хотя бы один из них не равен нулю. Отметим, что бифуркационную диаграмму для рассматриваемой системы можно построить и не выписывая явные формулы для критических точек ранга один (см. лемму 4), но этого недостаточно для нахождения перестроек торов Лиувилля. Поэтому мы приведем здесь явное описание этих точек.

Выражение для $\text{sgrad } K$ в координатах $\mathbf{S}, \mathbf{R}$ достаточно громоздко. Чтобы упростить дальнейшие вычисления, введем следующие обозначения:

$$Q_1 = S_2R_3 - S_3R_2, \quad Q_2 = S_3R_1 - S_1R_3, \quad Q_3 = S_1R_2 - S_2R_1, \quad (6)$$

$$q = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2. \quad (7)$$

Если рассматривать (Q_1, Q_2, Q_3) как координаты вектора $\mathbf{Q}$, то $\mathbf{Q} = \mathbf{S} \times \mathbf{R}$ (где $\times$ – векторное произведение), а $q = \mathbf{S}^2 - \mathbf{R}^2$.

Используя эти обозначения, гамильтониан (2) и интеграл (3) можно записать в следующем виде:

$$H = \alpha S_2^2 - \frac{1}{\alpha} S_1^2 + Q_3, \quad (8)$$

$$K = Q_3q - \alpha Q_1^2 + \frac{1}{\alpha} Q_2^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) Q_3^2. \quad (9)$$

В “переменных” $(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$ гамильтониан и интеграл имеют простой вид, однако на всем пространстве $\text{so}(4)^*$ их нельзя рассматривать как систему координат, поскольку имеется очевидное соотношение $\langle \mathbf{S}, \mathbf{Q} \rangle \equiv 0$. Тем не менее оказывается, что это не мешает использовать их как координаты при исследовании особенностей отображения момента. Сформулируем необходимые утверждения.

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$ – отображение, заданное формулами (6). При этом отображении каждая орбита $M_{1,g}$ переходит в некоторое множество $\varphi(M_{1,g}) \subset \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$. Поскольку гамильтониан H и интеграл K выражаются через $\mathbf{S}$ и $\mathbf{Q}$ (см. формулы (8) и (9)), отображение момента (4) можно представить как композицию $\Phi_g = \Psi_g \circ \varphi$, где

$$\Psi_g: \varphi(M_{1,g}) \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$$

задается формулами (8), (9).

ЛЕММА 1. При $g \neq 0$ ограничение отображения φ на орбиту $M_{1,g}$ является диффеоморфизмом на образ $\varphi(M_{1,g})$. В частности, множества критических значений отображений Φ_g и Ψ_g совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathbf{S} \neq 0$, то, зная $\mathbf{S} \times \mathbf{R}$ и $\langle \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle$, мы однозначно определяем $\mathbf{R}$. Поэтому ограничение отображения φ на любую орбиту $M_{1,g}$, где $g \neq 0$, является взаимно однозначным.

Далее, дифференциал отображения φ (как отображения всего пространства $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ в $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$) в каждой точке $(\mathbf{S}, \mathbf{R})$, где $\mathbf{S} \neq 0$, имеет одномерное ядро, натянутое на вектор $(0, \mathbf{S})$. Но этот вектор не лежит в касательном пространстве к орбите, так как производная инварианта f_2 вдоль этого вектора равна $\mathbf{S}^2 \neq 0$.

Следующие два утверждения также легко проверяются непосредственным вычислением.

ЛЕММА 2. *Попарные скобки функций $S_1, S_2, S_3, Q_1, Q_2, Q_3$ имеют следующий вид:*

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, Q_j\} = \varepsilon_{ijk} Q_k, \quad \{Q_i, Q_j\} = \varepsilon_{ijk} q S_k. \quad (10)$$

ЛЕММА 3. *Образ орбиты $M_{1,g}$ при отображении φ задается в $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$ следующими уравнениями:*

$$\langle \mathbf{S}, \mathbf{Q} \rangle = 0, \quad \mathbf{S}^2(1 - \mathbf{S}^2) - \mathbf{Q}^2 = g^2. \quad (11)$$

Таким образом, лемма 1 показывает, что (при $g \neq 0$) мы можем рассматривать функции H и K как функции от $\mathbf{S}, \mathbf{Q}$. При этом множество точек, где эти функции зависимы, надо искать не на $M_{1,g}$, а на многообразии $\varphi(M_{1,g})$, заданном уравнениями (11), а образы этих точек при отображении Ψ_g дадут требуемую бифуркационную диаграмму. Это существенно упрощает все дальнейшие вычисления.

Перейдем теперь к описанию множества критических точек.

Вычисления удобно проводить в переменных $\mathbf{S}, \mathbf{Q}$. Заметим, что мы можем это делать в любой точке, где $\mathbf{S} \neq 0$ (в условии леммы 1 было $g \neq 0$, но приведенное там доказательство годится и при выполнении более слабого условия $\mathbf{S} \neq 0$). Легко проверяется, что в точках $(\mathbf{S}, \mathbf{R})$, где $\mathbf{S} = 0$, $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ (вычисленные в координатах $\mathbf{S}, \mathbf{R}$) пропорциональны. Поэтому все такие точки являются критическими.

Далее можно предполагать, что $\mathbf{S} \neq 0$ и работать с переменными $\mathbf{S}, \mathbf{Q}$. Используя соотношения (10), легко выписать скобки функций S_i, Q_j с гамильтонианом (8) и интегралом (9). Получаем

$$\begin{aligned} \{S_1, H\} &= 2\alpha S_2 S_3 - Q_2, & \{S_1, K\} &= Q_2(2\alpha Q_3 - q), \\ \{S_2, H\} &= \frac{2}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1, & \{S_2, K\} &= \frac{Q_1}{\alpha}(\alpha q + 2Q_3), \\ \{S_3, H\} &= -2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) S_1 S_2, & \{S_3, K\} &= -2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) Q_1 Q_2, \\ \{Q_1, H\} &= S_2(2\alpha Q_3 - q), & \{Q_1, K\} &= \frac{2\alpha Q_3 - q}{\alpha}(S_2(\alpha q + 2Q_3) - 2S_3 Q_2), \\ \{Q_2, H\} &= \frac{S_1}{\alpha}(\alpha q + 2Q_3), & \{Q_2, K\} &= \frac{\alpha q + 2Q_3}{\alpha}(S_1(q - 2\alpha Q_3) + 2\alpha S_3 Q_1), \\ \{Q_3, H\} &= -\frac{2S_1 Q_2}{\alpha} - 2\alpha S_2 Q_1, & \{Q_3, K\} &= \frac{2S_1 Q_2}{\alpha}(2\alpha Q_3 - q) - 2S_2 Q_1(\alpha q + 2Q_3). \end{aligned}$$

Если рассматривать выписанные выражения как координаты двух шестимерных векторов, то нам надо найти те точки $(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$, в которых они зависимы. Это можно сделать, приравнявая к нулю все миноры (2×6) -матрицы, составленной из координат этих векторов. Опуская это достаточно длинное вычисление, приведем лишь ответ. При этом, хотя сами вычисления удобнее проводить в переменных $\mathbf{S}, \mathbf{Q}$, мы выписываем уравнения для критических точек в исходных переменных $\mathbf{S}, \mathbf{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Множество всех точек, где косые градиенты гамильтониана (2) и интеграла (3) зависимы, является объединением (четырёхпараметрических) семейств, задаваемых следующими уравнениями в пространстве $\text{so}(4)^* = \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$:*

$$(A1) \quad S_1 = 0, \quad S_3 = 0;$$

$$(A2) \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0;$$

$$(B1) \quad S_2 R_3 - S_3 R_2 = 0, \quad S_1 R_2 - S_2 R_1 = \frac{1}{2\alpha}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2);$$

$$(B2) \quad S_3 R_1 - S_1 R_3 = 0, \quad S_1 R_2 - S_2 R_1 = -\frac{\alpha}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2);$$

$$(C1) \quad \begin{aligned} R_1 - S_1 &= \alpha(S_2 - R_2), \\ (1 + \alpha^2)S_1 S_2(S_2 - R_2) - S_3 R_3(S_1 - \alpha S_2) + S_3^2(S_1 - \alpha R_2) &= 0; \end{aligned}$$

$$(C2) \quad \begin{aligned} R_1 + S_1 &= \alpha(S_2 + R_2), \\ (1 + \alpha^2)S_1 S_2(S_2 + R_2) + S_3 R_3(S_1 + \alpha S_2) + S_3^2(S_1 - \alpha R_2) &= 0. \end{aligned}$$

Пересечение каждого из семейств критических точек, выписанных в предложении 3, с орбитой $M_{1,g}$ даёт некоторое множество критических точек отображения момента Φ_g . Образ каждого из этих множеств при отображении Φ_g есть некоторая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$, которая является частью соответствующей бифуркационной диаграммы $\Sigma_{h,k}$.

Для того, чтобы найти эти кривые, нужно в каждом из случаев, перечисленных в предложении 3, сделать следующее: добавить к двум уравнениям, задающим соответствующее семейство, ещё четыре уравнения

$$f_1(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = 1, \quad f_2(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = g, \quad H(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = h, \quad K(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = k, \quad (12)$$

а затем исключить переменные $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$ из полученной системы уравнений. Эти вычисления мы также опустим, приведя лишь ответ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для семейств критических точек, перечисленных в предложении 3, их образы при отображении момента Φ_g содержатся в кривых, задаваемых следующими уравнениями на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$:*

$$(A1) \quad k = \frac{1}{\alpha}h^2 - h + \alpha g^2; \quad (A2) \quad k = -\alpha h^2 - h - \frac{1}{\alpha}g^2;$$

$$(B1) \quad k = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{4} - g^2\right); \quad (B2) \quad k = -\alpha\left(\frac{1}{4} - g^2\right);$$

$$(C1) \quad k = -(1 - 2g)h; \quad (C2) \quad k = -(1 + 2g)h.$$

Отметим, что бифуркационные диаграммы $\Sigma_{h,k}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ содержат лишь части кривых, указанных в предложении 4. Точное описание бифуркационных диаграмм дано в следующем пункте.

2.3. Бифуркационные диаграммы отображения момента. Для того, чтобы построить бифуркационную диаграмму отображения момента Φ_g , нам нужно найти образы критических точек, лежащих на орбите $M_{1,g}$, при отображении Φ_g . Все критические точки перечислены в предложении 3. Их образы содержатся в кривых, описанных в предложении 4. Таким образом, для каждого из семейств, указанных в предложении 3, нужно описать те значения (g, h, k) , для которых соответствующая система из шести уравнений (два уравнения, задающие семейство, и уравнения (12)) имеет решение относительно неизвестных $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$. Следующее утверждение позволяет упростить вычисления при решении этой задачи.

ЛЕММА 4. *Каждая периодическая траектория векторного поля $\text{sgrad } H$ пересекать хотя бы одну из двух гиперплоскостей $S_1 = 0, S_2 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую периодическую траекторию и координату S_3 как функцию на ней. Зависимость S_3 от времени задается уравнением $\dot{S}_3 = \{S_3, H\} = -2(\alpha + 1/\alpha)S_1S_2$. Для периодической функции $S_3(t)$ всегда существует t_0 , для которого $\dot{S}_3(t_0) = 0$. Тогда для этой траектории получаем $S_1(t_0) = 0$ или $S_2(t_0) = 0$.

Отметим, что доказанное утверждение справедливо, в частности, для неподвижных точек потока, задаваемого $\text{sgrad } H$, т.е. каждая особая точка векторного поля $\text{sgrad } H$ лежит в гиперплоскости $S_1 = 0$ или в гиперплоскости $S_2 = 0$ (что, впрочем, видно и из списка, приведенного в предложении 1).

Учитывая лемму 4, мы можем строить бифуркационные диаграммы, находя образы не всех критических точек, а лишь тех, для которых $S_1 = 0$ или $S_2 = 0$.

Рассмотрим сначала случай $g = 0$. Как оказалось, в этом случае вычисления для построения бифуркационной диаграммы $\Sigma_{h,k}$ отображения момента Φ_0 и вид самой бифуркационной диаграммы проще, чем в общем случае.

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{h,k}$ при $g = 0$

ТЕОРЕМА 2. *При $g = 0$ бифуркационная диаграмма $\Sigma_{h,k}$ имеет вид, указанный на рис. 2. Она состоит из частей двух парабол P_1 и P_2 (касающихся в начале координат) и двух горизонтальных отрезков U и L (касающихся соответствующих парабол в их вершинах):*

$$P_1 = \left\{ (h, k) \mid k = \frac{h^2}{\alpha} - h; \frac{\alpha - \sqrt{1 + \alpha^2}}{2} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}{2} \right\},$$

$$P_2 = \left\{ (h, k) \mid k = -\alpha h^2 - h; \frac{-1 - \sqrt{1 + \alpha^2}}{2\alpha} \leq h \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}{2\alpha} \right\},$$

$$U = \left\{ (h, k) \mid k = \frac{1}{4\alpha}; -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}{2} \right\},$$

$$L = \left\{ (h, k) \mid k = -\frac{\alpha}{4}; \frac{-1 - \sqrt{1 + \alpha^2}}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Теперь рассмотрим произвольное значение g . При $g \neq 0$ появляются еще два отрезка, причем их расположение зависит от значений g и α .

$$(a) \quad 0 < g \leq \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 4}$$

$$(b) \quad \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 4} < g \leq \frac{1}{2 + 4\alpha^2}$$

$$(c) \quad \frac{1}{2 + 4\alpha^2} < g < \frac{1}{2}$$

Рис. 3. Бифуркационные диаграммы $\Sigma_{h,k}$ при различных значениях $g \neq 0$

ТЕОРЕМА 3. При $g > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ бифуркационная диаграмма $\Sigma_{h,k}$ имеет один из трех видов (a), (b), (c), указанных на рис. 3. Во всех случаях она состоит из частей двух парабол P_1 и P_2 , двух горизонтальных отрезков U и L (касающихся соответствующих парабол в их вершинах) и двух отрезков E_1 и E_2 (каждый из которых лежит на одной из двух общих касательных к параболам, причем концы отрезка E_1 – это точки касания, а концы отрезка E_2 – либо точки касания, либо точки пересечения с отрезками U и L).

Эти бифуркационные кривые задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left\{ k = \frac{h^2}{\alpha} - h + \alpha g^2; \right. \\
 &\quad \left. \frac{\alpha - \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2} \right\}, \\
 P_2 &= \left\{ k = -\alpha h^2 - h - \frac{g^2}{\alpha}; \right. \\
 &\quad \left. \frac{-1 - \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2\alpha} \leq h \leq \frac{-1 + \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2\alpha} \right\}, \\
 U &= \left\{ k = \frac{1-4g^2}{4\alpha}; -\frac{1}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha + \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2} \right\}, \\
 L &= \left\{ k = -\frac{\alpha(1-4g^2)}{4}; \frac{-1 - \sqrt{(1+\alpha^2)(1-4g^2)}}{2\alpha} \leq h \leq \frac{\alpha}{2} \right\}, \\
 E_1 &= \left\{ k = -(1-2g)h; -\frac{g}{\alpha} \leq h \leq \alpha g \right\}, \\
 E_2 &= \{ k = -(1+2g)h; h_1 \leq h \leq h_2 \},
 \end{aligned}$$

где для h_1 и h_2 , задающих концы отрезка E_2 , возможны следующие три случая (соответствующие трем диаграммам на рис. 3):

- (а) если $0 < g \leq \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 4}$, то $h_1 = -\alpha g$, $h_2 = \frac{g}{\alpha}$,
- (б) если $\frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 4} < g \leq \frac{1}{2 + 4\alpha^2}$, то $h_1 = -\alpha g$, $h_2 = \frac{\alpha(1-2g)}{4}$,
- (в) если $\frac{1}{2 + 4\alpha^2} < g < \frac{1}{2}$, то $h_1 = -\frac{1-2g}{4\alpha}$, $h_2 = \frac{\alpha(1-2g)}{4}$.

Доказательство теорем 2 и 3 проводится прямым вычислением с учетом леммы 4 (см. также доказательство предложения 5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Все диаграммы (на рис. 2 и 3) изображены для $0 < \alpha \leq 1$ и $g \geq 0$. Как было указано выше (см. замечание 1), при замене g на $-g$ диаграмма вообще не меняется, а случай произвольного α сводится к описанным в теореме 3. А именно, при замене α на $-\alpha$ или $1/\alpha$ соответствующая диаграмма получается из исходной поворотом на 180° . В частности, при $\alpha = 1$ диаграммы симметричны относительно начала координат.

§ 3. Топологические инварианты для случая Соколова

Для вычисления инвариантов Фоменко рассматриваемой интегрируемой гамильтоновой системы необходимо исследовать перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента. Один из удобных способов получения информации об этих перестройках заключается в рассмотрении точек ранга нуль, поскольку в окрестности точки ранга нуль перестройки торов можно определить, зная тип этой особой точки.

3.1. Тип критических точек ранга нуль. Для интегрируемой системы с двумя степенями свободы имеется четыре типа невырожденных точек ранга нуль: центр-центр, центр-седло, седло-седло, фокус-фокус. Невырожденность и тип особой точки определяются собственными значениями оператора, являющегося линеаризацией некоторой линейной комбинации векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ в этой точке. А именно, особая точка ранга нуль является невырожденной, если операторы A_H и A_K , полученные линеаризацией векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ в этой точке, линейно независимы и для некоторой их линейной комбинации $\lambda A_H + \mu A_K$ все собственные значения различны. При этом для точки типа центр-центр все четыре собственных значения чисто мнимые, для точки типа седло-седло – все вещественные, для точки типа центр-седло – два вещественных и два чисто мнимых, а для точки типа фокус-фокус – четыре комплексных числа вида $\pm\tau, \pm i\tau$.

Подробное обсуждение понятия невырожденности и свойств невырожденных особенностей см. в [2].

Для рассматриваемой интегрируемой системы все критические точки ранга нуль на произвольной орбите $M_{1,g}$ перечислены в предложении 2 в виде пяти серий. В следующем утверждении для каждой из этих серий дано описание типов особых точек.

ТЕОРЕМА 4. *Критические точки ранга нуль для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (2) и интегралом (3) на орбите $M_{1,g}$ имеют следующий тип (нумерация соответствует нумерации в предложении 2):*

- 1) *четыре точки в прообразе точки пересечения отрезков E_1 и E_2 имеют тип седло-седло при $g \neq 0$ (при $g = 0$ они вырождены);*
- 2) *две точки в прообразе правой точки параболы P_1 (для верхнего знака в формулах из предложения 2) имеют тип центр-центр; две точки в прообразе левой точки параболы P_1 (для нижнего знака в тех же формулах) являются невырожденными при $g \neq 1/(2 + 4\alpha^2)$, причем они имеют тип центр-седло при $g < 1/(2 + 4\alpha^2)$ (т.е. в случаях (а) и (б) из теоремы 3) и тип центр-центр при $g > 1/(2 + 4\alpha^2)$ (т.е. в случае (с) из теоремы 3);*
- 3) *четыре точки в прообразе точки пересечения отрезков E_2 и U (случай (с) из теоремы 3) имеют тип центр-седло;*
- 4) *две точки в прообразе левой точки параболы P_2 (для верхнего знака в формулах из предложения 2) имеют тип центр-центр; две точки в прообразе правой точки параболы P_2 (для нижнего знака в тех же формулах) являются невырожденными при $g \neq \alpha^2/(2\alpha^2 + 4)$, причем они имеют тип центр-седло при $g < \alpha^2/(2\alpha^2 + 4)$ (т.е. в случае (а) из теоремы 3) и тип центр-центр при $g > \alpha^2/(2\alpha^2 + 4)$ (т.е. в случаях (б) и (с) из теоремы 3);*
- 5) *четыре точки в прообразе точки пересечения отрезков E_2 и L (случаи (б) и (с) из теоремы 3) имеют тип центр-седло.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема вычислений для определения типа особой точки описана в начале этого пункта. Рассмотрим, например, случай 1), т.е. точку вида $x = (0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$.

Выписав матрицы операторов A_H и A_K (линеаризации векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ в точке x), легко проверить, что они линейно зависимы только если $S_3 = 0$ или $S_3 = \pm R_3$. При этом точки, для которых $S_3 = \pm R_3$, лежат на особых (двумерных) орбитах алгебры, которые мы не рассматриваем.

Далее, вычисляя собственные значения матрицы A_H , получаем $S_3 + R_3$, $S_3 - R_3$, $-S_3 + R_3$, $-S_3 - R_3$. Если $S_3 \neq 0$, $R_3 \neq 0$ и $S_3 \neq \pm R_3$, то эти собственные значения попарно различны и вещественны, т.е. в случае $g \neq 0$ рассматриваемая точка имеет тип седло-седло.

При $g = 0$ получаем либо $S_3 = 0$, либо $R_3 = 0$. В обоих случаях особая точка является вырожденной: при $S_3 = 0$ матрицы A_H и A_K линейно зависимы, а при $R_3 = 0$ любая линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_K$ имеет лишь два различных собственных значения $\pm S_3(\lambda - \mu S_3^2)$ кратности два.

Аналогичным образом рассматриваются случаи 2)–5).

3.2. Слоение на критические окружности в прообразах бифуркационных кривых. Для “типичной” точки бифуркационной диаграммы $(h, k) \in \Sigma_{h,k}$ множество критических точек в ее прообразе при отображении момента Φ_g является набором окружностей. Информация о количестве этих окружностей помогает определить тип перестройки торов Лиувилля при данном критическом значении отображения момента.

Соответствие между бифуркационными кривыми и множествами критических точек в их прообразах описано в предложениях 3 и 4. В следующем утверждении дается ответ на вопрос о количестве критических окружностей в прообразах точек бифуркационных кривых.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть (h, k) – точка бифуркационной диаграммы, прообраз которой при отображении Φ_g не содержит точек ранга нуль (т.е. любая точка кроме граничных точек парабол P_1 , P_2 и точек пересечения отрезков U , L , E_1 , E_2).

1) Если точка (h, k) лежит на одной из парабол P_1 , P_2 , или на отрезке U между концами параболы P_1 , или на отрезке L между концами параболы P_2 , то ее прообраз содержит ровно две критические окружности.

2) Если точка (h, k) является внутренней точкой одного из отрезков E_1 , E_2 или внутренней точкой одного из отрезков U , L , но не лежит между концами соответствующей параболы, то ее прообраз содержит ровно четыре критические окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отдельно каждую из бифуркационных кривых P_1 , P_2 , U , L , E_1 , E_2 .

1) Пусть точка (h, k) принадлежит параболе P_1 . Согласно предложениям 3 и 4 критические точки, лежащие в ее прообразе при отображении момента Φ_g , задаются системой уравнений

$$\begin{cases} S_1 = 0 \\ S_3 = 0 \\ S_2^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1 \\ S_2 R_2 = g \\ \alpha S_2^2 - S_2 R_1 = h. \end{cases}$$

Если $S_2 = 0$, то из этих уравнений следует, что $g = 0$ и $h = 0$ (и, следовательно, $k = 0$). Прообраз точки $(0, 0)$ при отображении Φ_0 содержит критические точки ранга нуль. Поскольку мы не рассматриваем такие точки, то дальше предполагаем, что $S_2 \neq 0$. В этом случае R_1 и R_2 однозначно выражаются из последних двух уравнений. Подставляя их в третье уравнение системы, получаем

$$R_3^2 = 1 + 2\alpha h - (1 + \alpha^2)S_2^2 - \frac{g^2 + h^2}{S_2^2}. \quad (13)$$

Рассматривая выражение в правой части как функцию от S_2 , легко получаем, что для всех значений h из интервала

$$\left(\frac{\alpha - \sqrt{(1 + \alpha^2)(1 - 4g^2)}}{2}, \frac{\alpha + \sqrt{(1 + \alpha^2)(1 - 4g^2)}}{2} \right)$$

эта функция положительна ровно на двух интервалах (для других значений h она отрицательна при всех S_2). Это означает, что прообраз каждой внутренней точки параболы P_1 содержит ровно две критические окружности.

Случай параболы P_2 исследуется совершенно аналогично.

2) Рассмотрим отрезок U . Критические точки, лежащие в его прообразе, удовлетворяют условиям (B1) из предложения 3. Видно, что точки, для которых $S_1 = S_2 = S_3 = 0$, не удовлетворяют этим условиям. Поэтому мы можем в этом случае использовать для вычислений переменные $\mathbf{S}, \mathbf{Q}$ (см. лемму 1).

Уравнения, задающие критические точки в прообразе точки (h, k) отрезка U при отображении момента Φ_g , имеют следующий вид в переменных $\mathbf{S}, \mathbf{Q}$ (см. предложение 3, лемму 11 и формулу (8)):

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ 2\alpha Q_3 = 2\mathbf{S}^2 - 1 \\ \langle \mathbf{S}, \mathbf{Q} \rangle = 0 \\ \mathbf{S}^2(1 - \mathbf{S}^2) - \mathbf{Q}^2 = g^2 \\ \alpha S_2^2 - \frac{1}{\alpha} S_1^2 + Q_3 = h. \end{cases}$$

Упрощая последние два уравнения с помощью второго уравнения системы и подставляя выражения для $\mathbf{S}$ и $\mathbf{Q}$, перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - \alpha Q_3 = \frac{1}{2} \\ S_2 Q_2 + S_3 Q_3 = 0 \\ Q_2^2 + (1 + \alpha^2) Q_3^2 = \frac{1}{4} - g^2 \\ S_3^2 + (1 + \alpha^2) S_2^2 = \frac{1}{2} + \alpha h. \end{cases}$$

Из четвертого уравнения видно, что если $Q_2 = Q_3 = 0$, то $g^2 = 1/4$, что соответствует особым орбитам. Поэтому можно считать, что $Q_2 \neq 0$ или $Q_3 \neq 0$, и, учитывая третье уравнение, положить $S_2 = \lambda Q_3$ и $S_3 = -\lambda Q_2$, где λ –

некоторый параметр. Подставляя эти выражения вместо S_2 и S_3 в уравнения системы, после простых преобразований получим следующие соотношения:

$$Q_1 = 0, \quad S_2 = \lambda Q_3, \quad S_3 = -\lambda Q_2, \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{4\alpha h + 2}{1 - 4g^2}}, \quad (14)$$

$$S_1^2 = \frac{2\alpha^2(2\alpha h + 1)}{1 - 4g^2} Q_3^2 + \alpha Q_3 - \alpha h, \quad Q_2^2 = -(1 + \alpha^2) Q_3^2 + \frac{1}{4} - g^2. \quad (15)$$

При каждом значении переменной Q_3 , для которого правые части уравнений (15) неотрицательны, мы можем выразить S_1 и Q_2 из уравнений (15), а затем остальные переменные – из уравнений (14). Если правые части положительны, то имеется четыре способа выбрать знаки при вычислении S_1 и Q_2 , и всегда имеется два варианта выбора знака у λ . Таким образом, если рассматривать правые части уравнений (15) как функции от переменной Q_3 , то количество критических окружностей в прообразе данной точки (h, k) при отображении момента Φ_g полностью определяется взаимным расположением интервалов, на которых эти функции неотрицательны. Например, если отрезок, на котором неотрицательна вторая функция, целиком содержится в интервале, на котором неотрицательна первая функция, то получаем четыре окружности (так как еще можно двумя способами выбрать знак у λ). Разбирая все возможные варианты, получаем ответ.

Критические точки в прообразе отрезка L исследуются аналогично.

3) Теперь рассмотрим отрезок E_1 . Используя предложения 3 и 4, выпишем систему уравнений, задающую множество критических точек в прообразе некоторой точки (h, k) отрезка E_1 при отображении момента Φ_g :

$$\begin{cases} R_1 - S_1 = \alpha(S_2 - R_2) \\ (1 + \alpha^2)S_1 S_2 (S_2 - R_2) - S_3 R_3 (S_1 - \alpha S_2) + S_3^2 (S_1 - \alpha R_2) = 0 \\ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1 \\ S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g \\ \alpha S_2^2 - \frac{1}{\alpha} S_1^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1 = h. \end{cases}$$

Из трех уравнений, которые линейно зависят от R_1, R_2, R_3 , можно выразить эти переменные через S_1, S_2, S_3 и подставить в оставшиеся два уравнения. Далее, из полученных двух уравнений можно выразить квадраты переменных S_1, S_2, S_3 через некоторый параметр τ . Опуская подробности, приведем окончательный вид этих выражений:

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \frac{\alpha(\alpha g - h)}{1 + \alpha^2} \left(1 + \tau - \frac{g + \alpha h}{1 - 2g} \tau^2 \right), & S_2^2 &= \frac{g + \alpha h}{1 + \alpha^2} \left(1 + \tau - \frac{\alpha g - h}{\alpha(1 - 2g)} \tau^2 \right), \\ S_3^2 &= \frac{(g + \alpha h)(g\alpha - h)}{\alpha(1 - 2g)} \tau^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Рассуждая, как и в предыдущем случае, и учитывая, что R_1, R_2, R_3 однозначно выражаются через S_1, S_2, S_3 , мы получаем, что количество критических

окружностей в прообразе данной точки (h, k) при отображении момента Φ_g определяется взаимным расположением интервалов, на которых правые части полученных соотношений (16) (рассматриваемые как функции от τ) положительны. Легко проверяется, что в данном случае выражение для S_3^2 всегда положительно (если (h, k) – внутренняя точка отрезка E_1), а области неотрицательности для S_1^2 и S_2^2 являются отрезками, причем один из них всегда содержится в другом. Из этого следует, что для каждой внутренней точки отрезка E_1 (кроме точки пересечения с отрезком E_2) имеется ровно четыре критические окружности в ее прообразе.

Аналогичным образом можно исследовать отрезок E_2 .

3.3. Перестройки торов Лиувилля. Теперь, используя уже имеющуюся информацию о топологии рассматриваемой системы, мы можем описать все перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента.

Отметим, что некоторые из приводимых ниже рассуждений будут корректны лишь в том случае, если особенности рассматриваемой системы невырождены (или, в другой терминологии, если интеграл K является боттовским; см. [2]). В настоящей статье мы не проверяем боттовость интеграла K на всех изоповерхностях. Однако, поскольку невырожденность критических точек ранга нуль доказана (теорема 4), можно утверждать, что по крайней мере в некоторых окрестностях этих точек критические окружности являются невырожденными. Более того, так как для данной интегрируемой системы все рассматриваемые функции алгебраические, отсюда следует, что почти все критические окружности невырождены.

Учитывая это замечание, мы будем использовать результаты и методы теории топологической классификации интегрируемых систем, изложенной в книге [2]. Приведем краткое описание некоторых из этих методов, позволяющих определить перестройки торов Лиувилля для рассматриваемой системы.

Во-первых, построенные бифуркационные диаграммы (теоремы 2 и 3) и информация о количестве критических окружностей в прообразах точек бифуркационных кривых (предложение 5) позволяют определить количество торов Лиувилля в прообразах регулярных точек для каждой из областей, на которые бифуркационные кривые разбивают плоскость. Действительно, всего имеется шесть таких областей (см. рис. 3). При непрерывном изменении параметра g их границы изменяются, причем для каждой из этих шести областей при некоторых значениях g часть ее границы содержится в границе образа всей орбиты $M_{1,g}$. Несложно показать, что количество критических окружностей в прообразах точек из этих частей границы совпадает с количеством торов Лиувилля в прообразах регулярных точек из данной области.

Во-вторых, мы знаем тип критических точек ранга нуль (теорема 4). Это позволяет определить, какие перестройки торов Лиувилля соответствуют бифуркационным кривым, примыкающим к образам точек типа центр-седло. В окрестности точки, являющейся образом точки типа центр-седло, бифуркационная диаграмма всегда имеет стандартный вид: одна бифуркационная кривая проходит через эту точку, а другая выходит из нее. Прообраз первой кривой заполнен эллиптическими критическими окружностями, а прообраз второй –

седловыми. При этом перестройку торов Лиувилля, соответствующую кривой с седловыми окружностями в прообразе, можно рассматривать как прямое произведение окружности $\mathbb{S}^1$ на перестройку критических окружностей в прообразе бифуркационной кривой, проходящей через образ рассматриваемой точки типа центр-седло.

Наконец, мы можем использовать информацию о топологии изоэнергетических поверхностей (теорема 1), а также некоторые симметрии рассматриваемой системы. Например, связность изоэнергетической поверхности может накладывать ограничения на тип перестроек. Если же имеется некоторая симметрия системы, то особенности системы должны допускать эту симметрию, т.е. тоже не могут быть произвольными. Поскольку имеется список всех невырожденных особенностей малой сложности, эти соображения иногда позволяют однозначно определить тип перестройки торов Лиувилля.

В следующем утверждении описаны все перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента для рассматриваемой системы. Для описания типов перестроек используются стандартные обозначения: через A обозначается перестройка $\emptyset \rightsquigarrow T^2$, через B – перестройка $T^2 \rightsquigarrow 2T^2$, а через C_2 – перестройка $2T^2 \rightsquigarrow 2T^2$ (их точное описание см. в [2]). При этом число перед обозначением перестройки указывает, что одновременно происходит несколько бифуркаций такого типа (например, $2A$ означает рождение двух торов Лиувилля).

ТЕОРЕМА 5. *Для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (2) и интегралом (3) на орбите $M_{1,g}$ все перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента имеют тип A , B или C_2 . Перестройки, соответствующие различным частям бифуркационной диаграммы, указаны на рис. 4 (для случая (b) из теоремы 3).*

Рис. 4. Перестройки торов Лиувилля

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать диаграмму, изображенную на рис. 4 (т.е. случай (b) из теоремы 3). Жирными точками на ней отмечены образы критических точек ранга нуль и вырожденных критических окружностей. Они разбивают бифуркационные кривые на части так, что перестройки торов Лиувилля, соответствующие точкам из одной части, одинаковы.

Перестройки, соответствующие тем частям бифуркационной диаграммы, которые лежат на границе образа всей орбиты $M_{1,g}$, являются перестройками типа А. При этом их количество определяется количеством критических окружностей в прообразе, т.е., фактически описано в предложении 5.

Далее, на рассматриваемой диаграмме имеются ровно две точки, являющиеся образами точек типа центр-седло (см. теорему 4). Рассуждения, приведенные при доказательстве предложения 5, позволяют определить не только количество критических окружностей в прообразах точек бифуркационных кривых, но и их перестройки при движении точки вдоль бифуркационной кривой, проходящей через образ точки типа центр-седло. А именно, исследуя правые части формул (15), получаем, что перестройка торов Лиувилля, соответствующая левой верхней части параболы P_1 на рис. 4, имеет тип 2В. Аналогичным образом получаем, что перестройка, соответствующая нижней части отрезка E_2 , имеет тип C_2 . Перестройка, соответствующая верхней части отрезка E_2 , также имеет тип C_2 . Это следует из того, что при увеличении значения g (при переходе в случай (с) из теоремы 3) верхняя точка отрезка E_2 становится образом точки типа центр-седло.

Правая крайняя точка параболы P_2 на рис. 4 является образом двух точек типа центр-центр (см. теорему 4). Поэтому перестройка торов Лиувилля, соответствующая правой нижней части параболы P_2 , имеет тип 2А. То, что перестройка, соответствующая части параболы P_1 между точками ее касания с отрезками E_1 и E_2 , также имеет тип 2А, опять следует из рассмотрения этой части при значениях g , соответствующих случаю (с) из теоремы 3.

Итак, перестройки определены для всех частей бифуркационной диаграммы кроме отрезка E_1 и двух дуг парабол P_1 и P_2 от вершины до точки касания с этим отрезком.

Для указанных дуг парабол ситуация следующая: здесь два тора Лиувилля перестраиваются в четыре тора Лиувилля, проходя через две критические окружности. Кроме того, у рассматриваемой системы имеется симметрия, которая меняет местами эти критические окружности. Действительно, при изменении знака у переменных S_1, S_2, R_1, R_2 все интегралы рассматриваемой системы f_1, f_2, H, K сохраняются, а окружности, задаваемые формулой (13), меняются местами. Используя список перестроек малой сложности (см. [2]), получаем, что имеется всего один вариант для перестройки, удовлетворяющей всем этим условиям. Это перестройка типа 2В.

Аналогичные рассуждения приводят к ответу и для отрезка E_1 . В этом случае четыре тора перестраиваются в четыре тора через четыре критические окружности. Рассмотрим еще одну симметрию системы – изменение знака у переменных S_3, R_3 . Из формул (16) получаем, что указанные две симметрии меняют местами различные пары из четырех критических окружностей. Кроме того, из теоремы 1 следует, что полные прообразы точек отрезка E_1 состоят из двух связных компонент. Как и в предыдущем случае, используя имеющийся список перестроек малой сложности, получаем, что лишь перестройка типа $2C_2$ удовлетворяет всем перечисленным условиям.

Отметим, что хотя на рис. 4 перестройки торов Лиувилля указаны лишь для случая (b) из теоремы 3, остальные перестройки (для бифуркационных

диаграмм (а) и (с) на рис. 3) однозначно устанавливаются из соображений непрерывности и симметрии.

3.4. Инварианты Фоменко для изоэнергетических поверхностей.

Молекулы (или инварианты Фоменко) классифицируют слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях интегрируемой системы с точностью до группой лиувиллевой эквивалентности (см. п. 1.4). Чтобы построить все молекулы для рассматриваемой интегрируемой системы, нужно для каждой вертикальной прямой на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ определить, что происходит со связными компонентами прообраза точки, движущейся вдоль этой прямой. Пока точка движется от одной бифуркационной кривой до другой, ее прообразом является набор торов Лиувилля, которые трансформируются, образуя однопараметрические семейства. При пересечении бифуркационной кривой происходит перестройка этих торов.

Таблица 1

№	Молекула	Q^3	№	Молекула	Q^3
1	$\begin{array}{c} A \text{ --- } A \\ A \text{ --- } A \end{array}$	$2\mathbb{S}^3$	6	$\begin{array}{c} A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \end{array}$	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$
2	$\begin{array}{c} A \text{ --- } B \text{ --- } A \\ A \text{ --- } B \text{ --- } A \end{array}$	$2\mathbb{S}^3$	7	$\begin{array}{c} A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \end{array}$	$\#_1^3 \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$
3	$\begin{array}{c} A \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \end{array}$	$2\mathbb{S}^3$	8	$\begin{array}{c} A \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \end{array}$	$2\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$
4	$\begin{array}{c} A \text{ --- } B \text{ --- } B \text{ --- } A \\ A \text{ --- } B \text{ --- } B \text{ --- } A \end{array}$	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$	9	$\begin{array}{c} A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } C_2 \text{ --- } A \end{array}$	$\#_1^5 \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$
5	$\begin{array}{c} A \text{ --- } C_2 \text{ --- } B \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } B \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } B \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } B \text{ --- } A \end{array}$	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$	10	$\begin{array}{c} A \text{ --- } C_2 \text{ --- } B \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } B \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } B \text{ --- } A \\ A \text{ --- } C_2 \text{ --- } B \text{ --- } A \end{array}$	$\#_1^3 \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

Поскольку перестройки торов Лиувилля полностью описаны в теореме 5, мы знаем атомы, из которых составлена молекула. Остается только определить, между какими атомами происходит “склейка”. Как оказалось, для рассматриваемой системы все определяется однозначно из информации о количестве связных компонент изоэнергетической поверхности (которую дает теорема 1).

Рис. 5. Разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$

Отметим, что в настоящей работе мы не вычисляем метки, которые полностью определяют слоение Лиувилля на изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3$ (и, в частности, топологию самой этой поверхности). Поэтому одна и та же молекула может соответствовать негомеоморфным изоэнергетическим поверхностям. Если учесть имеющуюся информацию о топологическом типе изоэнергетических поверхностей рассматриваемой системы (теорема 1), то в качестве инварианта можно рассматривать пару “молекула – топологический тип $Q_{g,h}^3$ ”.

ТЕОРЕМА 6. *Для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (2) и интегралом (3) полный список инвариантов Фоменко при различных значениях параметров g , α и h состоит из шести молекул. С учетом топологии изоэнергетической поверхности, имеется ровно десять вариантов для пары “молекула – топологический тип $Q_{g,h}^3$ ”. Они перечислены в таблице 1, а номера вариантов из таблицы указаны на рис. 5.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Рисунок 5 содержит информацию как о топологии изоэнергетических поверхностей, так и о слоении Лиувилля на них. Каждая точка на плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$ определяет изоэнергетическую поверхность $Q_{g,h}^3$. Переход точки из одной области в другую через сплошную кривую на рис. 5 соответствует изменению топологии изоэнергетической поверхности, а переход через пунктирную кривую – изменению слоения Лиувилля на ней (без изменения топологического типа).

Список литературы

- [1] В. В. Соколов, “Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ ”, *Докл. РАН*, **394**:5 (2004), 602–605; англ. пер.: V. V. Sokolov, “One class of quadratic $so(4)$ Hamiltonians”, *Dokl. Math.*, **69**:1 (2004), 108–111.
- [2] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall, CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [3] А. А. Ошемков, “Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **25**, ч. 2 (1993), 23–109; англ. пер.: A. A. Oshemkov, “Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations”, *Topological classification of integrable systems*, Adv. Soviet Math., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67–146.
- [4] Г. Хагигатдуст, “Бифуркационная диаграмма некоторого класса гамильтонианов на алгебре $so(4)$ ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 6, 3–10; англ. пер.: G. Khagigatdust, “Moscow Univ. Math. Bull.”, **60**:6 (2005), 1–8.
- [5] Г. Хагигатдуст, “Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$ ”, *Докл. РАН*, **401**:5 (2005), 599–602; англ. пер.: Gh. Haghighatdoost, “The topology of isoenergetic surfaces for the Sokolov integrable case in the Lie algebra $so(4)$ ”, *Dokl. Math.*, **71**:2 (2005), 256–259.
- [6] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, Факториал, М.; Просперус, Ижевск, 1995.
- [7] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, Ин-т комп. исследований, М.–Ижевск, 2005.

- [8] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: А. Т. Fomenko, Kh. Tsishang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [9] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6 (1986), 1276–1307; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:3 (1987), 629–658.

Г. Хагигатдуст (G. Haghighatdoost)

Department of Fundamental Sciences,

Azərbaycan University of Tarbiat Moallem, Tabriz, Iran

E-mail: gorbanali@azaruniv.edu

Поступила в редакцию

25.12.2007 и 16.03.2009

А. А. Ошемков (A. A. Oshemkov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: oshemkov@mech.math.msu.su