Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Трынин, Обобщение теоремы
отсчетов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непре-
рывных функций на отрезке, *Матем. сб.*, 2009, том 200,
номер 11, 61–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 03:29:55

УДК 517.518.85

А. Ю. Трынин

Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непрерывных функций на отрезке

Описаны классы в пространстве непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций f , исчезающих на концах отрезка, для которых имеет место поточечная и равномерная аппроксимативная сходимость операторов типа Лагранжа

$$S_\lambda(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda})(x - x_{k, \lambda})} f(x_{k, \lambda}),$$

построенных по решениям $y(x, \lambda)$ задачи Коши для уравнения

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0$$

при $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ (где $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шар радиуса $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$ в пространстве функций ограниченной вариации, исчезающих в нуле, а $y(x_{k, \lambda}) = 0$). Предложен ряд модификаций этого оператора, позволяющих равномерно приближать на отрезке $[0, \pi]$ произвольную непрерывную функцию.

Библиография: 40 названий.

Ключевые слова: теорема отсчетов, интерполяция, равномерная сходимость, синк-аппроксимация.

§ 1. Введение

В работе изучаются аппроксимативные свойства операторов интерполирования лагранжева типа, представляющих собой некоторое обобщение усеченных кардинальных функций Уиттекера и классических интерполяционных многочленов. Полученные в этой работе результаты являются продолжением исследований, опубликованных в [1] и [2].

Пусть $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ – некоторая система комплексных или действительнозначных функций, определенных на множестве $D \subset \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, каждая из которых при любом натуральном n обращается в нуль во всех точках множества $\{x_{k, n}\}_{k=0}^n \subset D$ и имеет конечную отличную от нуля производную в этих точках. Тогда значения операторов L_n , ставящих в соответствие любой определенной на множестве $\{x_{k, n}\}_{k=0}^n \subset D$ функции f другую, доопределенную по непрерывности в точках множества $\{x_{k, n}\}_{k=0}^n$ функцию вида

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{y_n(x)}{y'_n(x_{k, n})(x - x_{k, n})} f(x_{k, n}) = \sum_{k=0}^n l_{k, n}(x) f(x_{k, n}), \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00167) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2970.2008.1).

интерполируют f в узлах $\{x_{k,n}\}_{k=0}^n$, т.е.

$$L_n(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n}), \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В рассматриваемом случае, когда функция y_n в каждом слагаемом не зависит от номера узла k , оператор (1.1) может быть достаточно экономично реализован численно. Важность таких аппроксимационных конструкций с точки зрения фундаментальных исследований подчеркивается следующим фактом. Если кроме перечисленных условий от функций системы $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ потребовать непрерывность на множестве D и отличие от нуля вне множества $\{x_{k,n}\}_{k=0}^n$, $n \in \mathbb{N}$ (т.е. для произвольного натурального n значение функции $y_n(x)$ отлично от нуля для любой точки $x \in D \setminus \{x_{k,n}\}_{k=0}^n$), то множества функций $\{l_{k,n}\}_{k=0}^n$ образуют систему Чебышёва, или Т-систему (см., например, [3; гл. 1, § 2]). К таким операторам следует отнести, например, классические алгебраические интерполяционные многочлены Лагранжа, усеченные кардинальные функции Уиттекера или синк-аппроксимации, интерполяционные процессы (1.1), в которых в качестве y_n берутся специальные функции математической физики. История интерполирования многочленами хорошо известна и достаточно полно изложена, например, в [3]–[7]. Приведем не претендующую на полноту историческую справку о других частных случаях рассматриваемых операторов.

Кроме случая ортогональных многочленов исследования аппроксимативных свойств операторов (1.1), построенных по специальным функциям математической физики, содержатся, например, в [8]–[13].

В связи с необходимостью развития теории кодирования сигналов Э. Борель и Э. Т. Уиттекер ввели понятия кардинальной функции и усеченной кардинальной функции, сужение на отрезок $[0, \pi]$ которой выглядит так:

$$C_n^w(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right). \quad (1.2)$$

К настоящему времени достаточно фундаментально исследована проблема синк-аппроксимации аналитической в открытой полосе, содержащей действительную ось, функции, экспоненциально убывающей на бесконечности (см., например, [14], [15]). Наиболее полный обзор результатов, полученных в этом направлении, а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти в [16]. Кроме того, появился ряд исследований, восходящих к теореме отсчетов (или, как ее еще называют, теореме дискретизации Котельникова), в которых получены различные представления целых функций рядами по синкам с узлами интерполирования, удовлетворяющими некоторым условиям “равномерности распределения”, например [17], [18]. Синк-аппроксимации нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и теории приближения функций как одной, так и нескольких переменных (см. [19]–[22]), в теории квадратурных формул (см. [16], [23]) и теории вейвлет-преобразований, или всплесков (см. [24]–[27]). Доказать наличие аппроксимативной сходимости на оси для менее гладких функций удалось авторам статьи [28]. Правда, для этого пришлось

несколько модифицировать оператор (1.2). Ими установлено, что для равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f , принадлежащих классу Дини–Липшица $\{f : \lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f, \delta) \ln \frac{1}{\delta} = 0\}$, где $\omega(f, \delta)$ – модуль непрерывности функции f , и, кроме того, удовлетворяющих условию $f(x) = O(|x|^{-\delta})$ при $x \rightarrow \pm\infty$ для некоторого $\delta > 0$, равномерно на $\mathbb{R}$ для любых $m \in \mathbb{N}$ и $0 < a < 1$ справедливо равенство

$$\lim_{W \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{W}\right) \left[\frac{\sin \pi \left(\frac{a(Wx-k)}{m} \right)}{\pi \frac{a(Wx-k)}{m}} \right]^m \frac{\sin \pi(Wx-k)}{\pi(Wx-k)} = f(x).$$

Кроме того, для этих аппроксимаций авторами работы [28] получены теоремы типа Джексона при $W \rightarrow \infty$. Интересный признак равномерной сходимости на оси самих кардинальных функций Уиттекера приводится в [29]. Для функций из класса

$$F^p = \{f : f \in L^p(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}); \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})\},$$

где $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p < \infty$, а $\hat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f , на действительной оси имеет место оценка

$$\left| f(x) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{w}\right) \operatorname{sinc}(wx-k) \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|t| \geq \pi w} |\hat{f}(t)| dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В этой же работе получены достаточные условия сходимости в L^p кардинальных функций Уиттекера в случае аппроксимации функций, локально интегрируемых по Риману на $\mathbb{R}$.

До появления работ [1], [2], [30]–[35], насколько мне известно, приближение кардинальными функциями Уиттекера на отрезке, или ограниченном интервале, осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций, например, сведением к случаю оси с помощью конформного отображения (см. [16]).

Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ и при каждом неотрицательном λ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е.

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \rho_\lambda = o(\lambda). \quad (1.3)$$

Для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ нули решения задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 1, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda) \quad (1.4)$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \quad (1.5)$$

попадающие в $[0, \pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \leq x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \dots < x_{n(\lambda),\lambda} \leq \pi, \quad \text{где } x_{-1,\lambda} < 0, \quad x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi. \quad (1.6)$$

(Здесь $x_{-1,\lambda} < 0$, $x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули продолжения решения задачи Коши (1.4) или (1.5) после доопределения каким-либо образом функции q_λ вне отрезка $[0, \pi]$ с сохранением ограниченности вариации.)

Каждая задача Коши (1.4) и (1.5) при $q_\lambda \in L[0, \pi]$ имеет единственное обобщенное решение, которое можно интерпретировать как непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения (см., например, [36; гл. IV, §§ 1, 2])

$$y(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) q_\lambda(\tau) y(\tau, \lambda) d\tau \quad (1.7)$$

в случае задачи Коши (1.4) или

$$y(x, \lambda) = \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) q_\lambda(\tau) y(\tau, \lambda) d\tau$$

для задачи Коши (1.5). Из теоремы Пикара (см., например, [36; гл. IV, § 1]) следует, что все нули (1.6) простые, а условие (1.3) и теорема осцилляции (см., например, [37; гл. 1, § 3, теорема 3.3]), адаптированная к условиям (1.3) в случае $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\lambda)$, гарантируют их существование для достаточно больших λ . В дальнейшем, если не оговорено иное, для краткости будем обозначать $n = n(\lambda)$. Теорема осцилляции или метод контурного интегрирования при условии (1.3) обеспечивают также неограниченное возрастание количества нулей (1.6) $n(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

В настоящей работе исследуются аппроксимативные свойства операторов типа Лагранжа (1.1), построенных по решениям задачи Коши вида (1.4) или (1.5) и ставящих в соответствие любой определенной на отрезке $[0, \pi]$ функции f интерполирующую ее в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^n$ непрерывную функцию таким образом:

$$S_\lambda(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^n s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}). \quad (1.8)$$

Подбирая соответствующим образом функции q_λ (следует иметь в виду, что условие (1.3) является достаточным, но не необходимым для наличия нулей (1.6)), получаем единое представление в виде оператора (1.8) различных конструкций лагранжева типа таких, как классические интерполяционные многочлены, кардинальные функции Уиттекера, интерполяционные процессы Лагранжа, построенные по специальным функциям математической физики. Так, например, с точностью до преобразования Лиувилля многочлены Чебышёва и многочлены Якоби в случае $\alpha = \pm 1/2$, $\beta = \pm 1/2$ (см. [5; гл. VII, § 3] или [6; § 4.24]) являются решениями дифференциальных уравнений задач (1.4), (1.5) с потенциалом, удовлетворяющим условию (1.3). Если взять $q_\lambda \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, то операторы (1.8) превращаются в усеченные кардинальные функции Уиттекера (1.2). Следовательно, утверждения полученных в предлагаемой работе результатов справедливы для синк-аппроксимаций на отрезке (см., например, [1], [2]). В случае непрерывности фиксированной функции ограниченной вариации $q_\lambda \equiv q$ для операторов (1.8), построенных по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля, с краевыми условиями третьего рода, из которых

удалены условия первого рода, в [10] получены некоторые аналогичные результаты, но с оценкой скорости сходимости в терминах модуля непрерывности аппроксимируемой функции. В настоящей работе приведены необходимые и достаточные условия аппроксимативной сходимости в точке значений операторов (1.8) для непрерывных функций. (Информация о функции f может быть ограничена только ее значениями в узлах $x_{k,\lambda}$, находящихся в окрестности точки, в которой исследуются аппроксимативные свойства (1.8).) А также получен критерий равномерной сходимости значений операторов (1.8) для непрерывных функций, аналогичный критерию Привалова сходимости интерполяционных многочленов Лагранжа–Чебышёва и тригонометрических полиномов (см. [7]).

Несмотря на очевидные преимущества операторов (1.8) перед классическими интерполяционными многочленами (при интерполировании многочленами по равноотстоящим узлам константы Лебега растут, как геометрическая прогрессия [4; ч. 3, гл. 2, §2], и известный результат С.Н. Бернштейна [4; ч. 3, гл. 2, §2] показывает отсутствие аппроксимации даже для функции $|x|$) рассматриваемые интерполяционные процессы, особенно при аппроксимации не исчезающих на концах отрезка непрерывных функций, обладают некоторыми недостатками. Так, например, легко видеть, что, вообще говоря, не выполняются привычные в алгебраическом интерполировании или теории рядов Фурье тождества $S_\lambda(1, x) \not\equiv 1$ (что затрудняет использование неравенства Лебега) и $S_{\lambda_1}(f, x) \not\equiv S_{\lambda_2}(S_{\lambda_1}(f, \cdot), x)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$. Заметим также, что из результатов работы [12] следует, что задача представления функции в качестве предела значений операторов (1.8) при изменении q_λ и $h(\lambda)$ не устойчива в пространстве непрерывных функций. В этом смысле операторы (1.8) ведут себя так же, как классические алгебраические или тригонометрические интерполяционные полиномы при изменении матрицы узлов интерполирования. Кроме того, если $f \in C[0, \pi]$, $f(0) \neq 0$ или $f(\pi) \neq 0$ уже в “модельном случае” задачи (1.5) $q \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, $f \equiv 1$, то, как было установлено в [33], имеет место равенство

$$\left| 1 - S_{\lambda_n} \left(1, \frac{\pi}{2n} \right) \right| = \frac{4 - \pi}{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

гарантирующее отсутствие равномерной сходимости (1.8) на $[0, \pi]$, даже если в концы отрезка попадают узлы интерполяции. Г.И. Натансоном [8] в свою очередь было замечено, что в “модельном случае” оператора (1.8), построенном по решениям задачи Коши (1.4) при $h \equiv 0$, $q \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$, имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\lambda_n}(1, 0) = \frac{1}{2},$$

позволяющее констатировать отсутствие сходимости на концах отрезка, если в них не попадают узлы интерполяции. Два последних примера показывают, что если $f \in C[0, \pi] \setminus C_0[0, \pi]$, то исследование вопросов сходимости операторов (1.8) в точке $x = \pi$ (случай задачи (1.5)) и точках $x = 0$ или $x = \pi$ (случай задачи (1.4)) для каждой конкретной задачи Коши и выбора последовательности значений $\lambda = \lambda_n$ следует проводить отдельно. Поэтому в настоящей работе предлагаются некоторые модификации оператора (1.8).

Определим оператор, ставящий в соответствие любой заданной на отрезке $[0, \pi]$ функции f непрерывную функцию $T_\lambda(f, x)$ по правилу

$$T_\lambda(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda})(x - x_{k, \lambda})} \left[f(x_{k, \lambda}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k, \lambda} - f(0) \right] + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0). \quad (1.9)$$

С помощью этого оператора, в отличие от (1.8), можно равномерно на всем отрезке $[0, \pi]$ аппроксимировать непрерывные (не обязательно исчезающие на концах отрезка) функции, обладающие достаточным запасом гладкости, с сохранением интерполяции, т.е. $T_\lambda(f, x_{k, \lambda}) = f(x_{k, \lambda})$ для всех $k = 0, \dots, n$. Далее, на пространстве непрерывных на $[0, \pi]$ функций f определим операторы

$$\begin{aligned} A_\lambda(f, x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (s_{k-1, \lambda}(x) + s_{k, \lambda}(x)) f(x_{k, \lambda}), \\ \tilde{A}_\lambda(f, x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1, \lambda}) + f(x_{k, \lambda})}{2} s_{k, \lambda}(x), \\ AT_\lambda(f, x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[f(x_{k, \lambda}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k, \lambda} - f(0) \right] \\ &\quad \times (s_{k-1, \lambda}(x) + s_{k, \lambda}(x)) + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0), \\ \widetilde{AT}_\lambda(f, x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{f(x_{k+1, \lambda}) + f(x_{k, \lambda})}{2} - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \frac{x_{k+1, \lambda} + x_{k, \lambda}}{2} - f(0) \right] \\ &\quad \times s_{k, \lambda}(x) + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0). \end{aligned} \quad (1.10)$$

К сожалению, предлагаемые операторы не обладают интерполяционными свойствами, как S_λ или T_λ . Но их аппроксимативные качества существенно менее чувствительны к гладкостным свойствам приближаемой функции. С их помощью можно приближать произвольный элемент пространства $C[0, \pi]$. Обратим внимание на то, что численная реализация операторов T_λ , A_λ , $\tilde{A}_\lambda$, AT_λ , $\widetilde{AT}_\lambda$ по сложности почти не уступает подсчету значения оператора S_λ .

§ 2. Основные результаты

Будем обозначать через $C_0[0, \pi]$ пространство непрерывных исчезающих на концах отрезка функций с чебышёвской нормой, т.е. $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$. Далее, если не оговорено иное, договоримся о следующих обозначениях. В предположении $\rho_\lambda \geq 0$ при каждом неотрицательном λ считаем, что функция q_λ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ радиуса $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е. такая, что

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad q_\lambda(0) = 0. \quad (2.1)$$

В случае задачи Коши (1.5), кроме того, потребуем отличие от нуля функции $h(\lambda)$, т.е.

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad h(\lambda) \neq 0. \quad (2.2)$$

При каждом $\lambda > 0$ доопределим функцию q :

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} q_\lambda(x) & \text{при } x \in [0, \pi], \\ q_\lambda(\pi) & \text{при } x > \pi, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Через $x_{k,\lambda}$, $k \in \mathbb{Z}$, будем обозначать нули решения $y(x, \lambda)$ задачи Коши (1.4) или (1.5), рассматриваемой на всей действительной оси, перенумерованные в порядке возрастания таким образом, чтобы выполнялись неравенства (1.6).

Исключив из рассмотрения тривиальный случай $f \equiv 0$, возьмем фиксированную положительнозначную функцию $\vartheta(\lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\vartheta(\lambda) = o(1), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})} = \infty;$$

положим

$$\varepsilon(\lambda) = \exp\left\{-\frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}\right\}. \quad (2.4)$$

Например, в качестве $\vartheta(\lambda)$ можно взять $\vartheta(\lambda) = \sqrt{\omega(f, \pi/\sqrt{\lambda})}$, тогда

$$\varepsilon(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}}\right\}.$$

Для любого положительного λ и $x \in [0, \pi]$ пусть p , m_1 и m_2 – такие целые числа, что

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right], \quad x_{p,\lambda} \leq x < x_{p+1,\lambda}, \quad (2.5)$$

где номера нулей k_1 и k_2 определяются из неравенств

$$x_{k_1-1,\lambda} < x - \varepsilon(\lambda) \leq x_{k_1,\lambda}, \quad x_{k_2,\lambda} \leq x + \varepsilon(\lambda) < x_{k_2+1,\lambda}.$$

Теперь сформулируем основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 1 (критерий сходимости в точке). Пусть $f \in C_0[0, \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (2.1) в случае задачи Коши (1.4) или (2.2) – в случае задачи (1.5). Доопределим функцию f :

$$f(x) = 0 \quad \text{для всех } x \notin [0, \pi]. \quad (2.6)$$

Тогда для операторов вида (1.8), построенных с помощью решений задачи Коши (1.4), равномерно по x на $[0, \pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$

и $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| S_\lambda(f, x) - f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \times \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m+1,n}) - 2f(x_{2m,n}) + f(x_{2m-1,n})}{p - 2m} \right| = 0. \quad (2.7)$$

А для операторов вида (1.8), построенных с помощью решений задачи Коши (1.5), равномерно по x на $[0, \pi]$, а также по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| S_\lambda(f, x) - f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi h(\lambda)} \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p - 2m} \right| = 0. \quad (2.8)$$

Здесь штрих у сумм в (2.7) и (2.8) означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$, то суммы в (2.7) и (2.8) равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 является критерием сходимости в точке значений операторов S_λ . Действительно, например, в случае задачи Коши (1.4) из утверждения теоремы 1, в частности, следует, что для того, чтобы в точке $x \in [0, \pi]$ имело место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |S_\lambda(f, x) - f(x)| = 0,$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m+1,n}) - 2f(x_{2m,n}) + f(x_{2m-1,n})}{p - 2m} \right| = 0.$$

Здесь штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$, то сумма равна нулю.

ТЕОРЕМА 2 (критерий равномерной сходимости). Пусть $f \in C_0[0, \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (2.1) в случае задачи Коши (1.4) или (2.2) – в случае задачи (1.5). Тогда для того чтобы значения оператора (1.8), построенного по решениям задачи Коши (1.4) или (1.5), равномерно по x на $[0, \pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ аппроксимировали функцию $f \in C_0[0, \pi]$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|S_\lambda(f, \cdot) - f\|_{C[0, \pi]} = 0, \quad (2.9)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{0 \leq p \leq n} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p - 2m} \right| = 0 \quad (2.10)$$

или эквивалентное ему условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{0 \leq p \leq n} \left| \sum_{m=1}^{[n/2]'-1} \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p - 2m} \right| = 0, \quad (2.11)$$

где штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$, то сумма в (2.10) равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 2, в частности, следует равномерная сходимость (2.9) операторов (1.8) для функций из класса Дини–Липшица, принадлежащих $C_0[0, \pi]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На классе непрерывных на $[0, \pi]$ функций утверждения теорем 1, 2 остаются справедливыми, если сходимость в (2.7), (2.8) и (2.9) ослабить до равномерной внутри $(0, \pi)$.

Для равномерной и поточечной аппроксимации непрерывных функций, обладающих достаточным запасом гладкости, на всем отрезке $[0, \pi]$ следует применять вместо оператора (1.8) его модификацию (1.9). Особо отметим, что значения оператора T_λ , как и S_λ , обладают интерполяционным свойством

$$T_\lambda(f, x_{k,\lambda}) = f(x_{k,\lambda}) \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Исключив из рассмотрения тривиальный случай, когда f линейна, возьмем фиксированную положительнозначную функцию $\vartheta(\lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\tilde{\vartheta}(\lambda) = o(1), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\vartheta}(\lambda)}{\omega\left(f(\cdot) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi} \cdot - f(0), \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)} = \infty;$$

положим

$$\tilde{\varepsilon}(\lambda) = \exp \left\{ - \frac{\tilde{\vartheta}(\lambda)}{\omega\left(f(\cdot) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi} \cdot - f(0), \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)} \right\}. \quad (2.12)$$

Для любого положительного λ и $x \in [0, \pi]$ пусть p , $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ – такие целые числа, что

$$\tilde{m}_1 = \left\lfloor \frac{\tilde{k}_1}{2} \right\rfloor + 1, \quad \tilde{m}_2 = \left\lfloor \frac{\tilde{k}_2}{2} \right\rfloor, \quad x_{p,\lambda} \leq x < x_{p+1,\lambda}, \quad (2.13)$$

где номера нулей $\tilde{k}_1$ и $\tilde{k}_2$ определяются из неравенств

$$x_{\tilde{k}_1-1,\lambda} < x - \tilde{\varepsilon}(\lambda) \leq x_{\tilde{k}_1,\lambda}, \quad x_{\tilde{k}_2,\lambda} \leq x + \tilde{\varepsilon}(\lambda) < x_{\tilde{k}_2+1,\lambda}.$$

ТЕОРЕМА 3 (критерий поточечной сходимости операторов T_λ). Пусть параметры задачи Коши (1.4) или (1.5) удовлетворяют условию (2.1) или (2.2) соответственно и $f \in C[0, \pi]$. Доопределим функции

$$f(x) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0)$$

для всех $x \notin [0, \pi]$ и q_λ , как в (2.3). Тогда для операторов вида (1.9), построенных с помощью решений задачи Коши (1.5), равномерно по x на $[0, \pi]$, а также по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $h(\lambda) \neq 0$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| T_\lambda(f, x) - f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi h(\lambda)} \sum_{m=\tilde{m}_1}^{\tilde{m}_2'} \frac{f(x_{2m+1, \lambda}) - 2f(x_{2m, \lambda}) + f(x_{2m-1, \lambda})}{p - 2m} \right| = 0. \quad (2.14)$$

А для операторов вида (1.9), построенных с помощью решений задачи Коши (1.4), равномерно по x на $[0, \pi]$, а также по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| T_\lambda(f, x) - f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi \sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \times \sum_{m=\tilde{m}_1}^{\tilde{m}_2'} \frac{f(x_{2m+1, \lambda}) - 2f(x_{2m, \lambda}) + f(x_{2m-1, \lambda})}{p - 2m} \right| = 0. \quad (2.15)$$

Здесь штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $\tilde{m}_2 < \tilde{m}_1$ (см. (2.13)), то сумма в (2.14) и (2.15) равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 3 является критерием сходимости в точке значений операторов T_λ . Действительно, например, в случае задачи Коши (1.4) из утверждения теоремы 3, в частности, следует, что для того, чтобы в точке $x \in [0, \pi]$ имело место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |T_\lambda(f, x) - f(x)| = 0,$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi \sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \sum_{m=\tilde{m}_1}^{\tilde{m}_2'} \frac{f(x_{2m+1, n}) - 2f(x_{2m, n}) + f(x_{2m-1, n})}{p - 2m} \right| = 0.$$

Здесь штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $\tilde{m}_2 < \tilde{m}_1$, то сумма равна нулю.

ТЕОРЕМА 4 (критерий равномерной сходимости операторов T_λ). Пусть $f \in C[0, \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (2.1) в случае задачи Коши (1.4) или (2.2) – в случае задачи (1.5). Доопределим функции

$$f(x) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0)$$

для всех $x \notin [0, \pi]$ и q_λ , как в (2.3). Тогда для того чтобы значения оператора (1.9), построенного по решениям задачи Коши (1.4) или (1.5), равномерно на $[0, \pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ аппроксимировали функцию $f \in C[0, \pi]$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|T_\lambda(f, \cdot) - f\|_{C[0, \pi]} = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.10) (где границы изменения индекса суммирования определяются с помощью (2.13)) или эквивалентное ему условие (2.11). Если $\tilde{m}_2 < \tilde{m}_1$, то сумма в (2.10) равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из теоремы 4, в частности, следует аппроксимативная равномерная сходимостъ значений операторов (1.9) для функций из класса Дини–Липшица на отрезке $[0, \pi]$.

Значения операторов S_λ и T_λ интерполируют аппроксимируемую функцию, но зато, как видно из теорем 1–4, достаточно чувствительны к гладкостным свойствам приближаемой функции. Поэтому для приближения “плохих” функций можно пользоваться операторами (1.10).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in C_0[0, \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (2.1) в случае задачи Коши (1.4) или (2.2) – в случае задачи (1.5). Тогда равномерно по x на отрезке $[0, \pi]$ и по q_λ на шарах $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda(f, x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{A}_\lambda(f, x) = f(x). \quad (2.16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f \in C[0, \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (2.1) в случае задачи Коши (1.4) или (2.2) – в случае задачи (1.5). Тогда равномерно по x на отрезке $[0, \pi]$ и по q_λ на шарах $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} AT_\lambda(f, x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \widetilde{AT}_\lambda(f, x) = f(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Вместо операторов вида (1.10) для приближения произвольных функций $f \in C_0[0, \pi]$ можно использовать другие аналогичные конструкции операторов, например,

$$B_\lambda(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (s_{k+1, \lambda}(x) + s_{k, \lambda}(x)) f(x_{k, \lambda}),$$

$$\tilde{B}_\lambda(f, x) = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1, \lambda}) + f(x_{k, \lambda})}{2} s_{k, \lambda}(x)$$

или

$$C_\lambda(f, x) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} (s_{k+1, \lambda}(x) + 2s_{k, \lambda}(x) + s_{k-1, \lambda}(x)) f(x_{k, \lambda}),$$

$$\tilde{C}_\lambda(f, x) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} s_{k, \lambda}(x) (f(x_{k+1, \lambda}) + 2f(x_{k, \lambda}) + f(x_{k-1, \lambda})).$$

Операторы такого вида получаются в результате использования соотношений (4.15), (4.16), (4.18) и (4.19) вместо формул (4.14) и (4.17). Аппроксимацию произвольных непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций можно осуществлять с помощью модификаций таких операторов, аналогичных конструкции AT_λ или $\widetilde{AT}_\lambda$ в (1.10).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Обратим внимание на то, что если рассмотреть, например, “симметричные” аналоги оператора A_λ вида

$$D_\lambda(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (s_{k-1, \lambda}(x) + s_{k+1, \lambda}(x)) f(x_{k, \lambda})$$

или

$$\tilde{D}_\lambda(f, x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_{k+1, \lambda}) + f(x_{k-1, \lambda})}{2} s_{k, \lambda}(x),$$

то для определения возможности равномерной аппроксимации с его помощью функций пространства $C_0[0, \pi]$ вновь потребуются необходимые и достаточные условия (2.10) или (2.11).

§ 3. Равномерная по потенциалу ограниченной вариации асимптотика решений задачи Коши

Заготовим асимптотические формулы решений задач Коши (1.4) и (1.5), обеспечивающие достаточно хороший порядок приближения для выбранного метода изучения аппроксимативных свойств операторов (1.8)–(1.10). Предлагаемая асимптотика равномерна на всем семействе (2.1) потенциалов, являющихся, вообще говоря, функциями двух переменных x и λ . При этом по сравнению с хорошо известными результатами классической спектральной теории дифференциальных операторов, обеспечивающими такой же порядок приближения, правда, в случае фиксированной, не зависящей от λ , функции q_λ (см., например, [37]), удалось снять требование непрерывности потенциала q_λ . С помощью метода скользящего горба можно привести контрпример, показывающий, что требование ограниченности вариации является существенным для сохранения полученного порядка аппроксимации даже для фиксированного, не зависящего от λ , непрерывного потенциала q_λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е. для любого действительного λ

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \text{где } \rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Тогда существует такое $\lambda_1 > 4\pi^2\rho_\lambda^2$, что для всех $\lambda \geq \lambda_1$, любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольного $x \in [0, \pi]$ решение задачи Коши (1.4) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} & \left| y(x, \lambda) - \gamma(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda}x - \beta(x, \lambda, h) \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| \\ & \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2\lambda} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & |y'(x, \lambda) + \sqrt{\lambda}\gamma(x, \lambda, h) \sin \sqrt{\lambda}x - \beta(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda}x| \\ & \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$|y''(x, \lambda) + \lambda \gamma(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} \beta(x, \lambda, h) \sin \sqrt{\lambda} x| \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi \rho_\lambda)}{2} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad (3.4)$$

где

$$\beta(x, \lambda, h) = h(\lambda) + \frac{1}{2} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau, \quad \gamma(x, \lambda, h) = 1 - \frac{h(\lambda)}{2\lambda} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле. Тогда существует такое $\lambda_1 > 4\pi^2 \rho_\lambda^2$, что для всех $\lambda \geq \lambda_1$, любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольного $x \in [0, \pi]$ решение задачи Коши (1.5) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\left| y(x, \lambda) - \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \delta(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda} x \right| \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi \rho_\lambda) |h(\lambda)|}{2\lambda \sqrt{\lambda}}, \quad (3.6)$$

$$|y'(x, \lambda) - h(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} x - \sqrt{\lambda} \delta(x, \lambda, h) \sin \sqrt{\lambda} x| \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi \rho_\lambda) |h(\lambda)|}{2\lambda}, \quad (3.7)$$

$$|y''(x, \lambda) + h(\lambda) \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x - \lambda \delta(x, \lambda, h) \cos \sqrt{\lambda} x| \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi \rho_\lambda) |h(\lambda)|}{2\sqrt{\lambda}}, \quad (3.8)$$

где

$$\delta(x, \lambda, h) = \frac{h(\lambda)}{2\lambda} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau.$$

Прежде чем доказывать эти предложения, получим оценки скорости убывания интегралов в лемме Римана–Лебега для функций из шара $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$.

ЛЕММА 1. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$ и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е. для любого действительного λ выполняется соотношение

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \rho_\lambda \geq 0.$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольного $x \in [0, \pi]$ справедливы неравенства

$$\left| \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) q_\lambda(\tau) d\tau \right| \leq \frac{\rho_\lambda}{\sqrt{\lambda}}, \quad (3.9)$$

$$\left| \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) q_\lambda(\tau) d\tau \right| \leq \frac{\rho_\lambda}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы о среднем в форме Бонне (см. [38; § 4.14]) для любых интегрируемой по Риману функции f и неотрицательной не убывающей на отрезке $[a, b]$ функции φ найдется $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

Потенциал q_λ как функция с ограниченным изменением, исчезающая в нуле, по теореме Жордана (см. [39; гл. II, § 4, п. 10]) может быть единственным образом представлен в виде разности своих положительного и отрицательного изменений $q_\lambda(x) = q_{\lambda,1}(x) - q_{\lambda,2}(x)$. Тогда для любого $x \in [0, \pi]$

$$V_0^x[q_\lambda] = V_0^x[q_{\lambda,1}] + V_0^x[q_{\lambda,2}].$$

Теперь

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) q_\lambda(\tau) d\tau \right| \\ & \leq \left| q_{\lambda,1}(x) \int_{\xi_1}^x \sin \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) d\tau - q_{\lambda,2}(x) \int_{\xi_2}^x \sin \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) d\tau \right| \leq V_0^x[q_\lambda] \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Задача Коши (1.4) в случае, когда $q_\lambda \in L[0, \pi]$, имеет единственное обобщенное решение, которое можно интерпретировать как непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения (1.7). Для потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ методом, изложенным в [37; гл. I, § 2, леммы 2.1, 2.2], устанавливается, что для $\lambda \geq \lambda_0$, где λ_0 выбирается настолько большим, чтобы для всех $\lambda \geq \lambda_0$ в силу (3.1) выполнялось соотношение $\lambda > 4\pi^2 \rho_\lambda^2$, справедлива оценка

$$\left| y(x, \lambda) - \cos \sqrt{\lambda}x - \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{2\rho_\lambda}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right) x. \quad (3.11)$$

Пусть $y(x, \lambda)$ – решение задачи Коши (1.4) или интегрального уравнения (1.7). Согласно методу Лиувилля–Стеклова подставим тождество (1.7) вновь под интеграл в (1.7):

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) = & \left[1 - \frac{h(\lambda)}{2\lambda} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau \right] \cos \sqrt{\lambda}x + \left[h(\lambda) + \frac{1}{2} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau \right] \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) q_\lambda(\tau) d\tau + \frac{h(\lambda)}{2\lambda} \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) q_\lambda(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) q_\lambda(\tau) d\tau \\ & \quad \times \int_0^\tau \sin \sqrt{\lambda}(\tau - \xi) q_\lambda(\xi) \left(\cos \sqrt{\lambda}\xi + \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}} \right) d\xi \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) q_\lambda(\tau) d\tau \\ & \quad \times \int_0^\tau \sin \sqrt{\lambda}(\tau - \xi) q_\lambda(\xi) \left(y(\xi, \lambda) - \left(\cos \sqrt{\lambda}\xi + \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}} \right) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рассмотрим отдельно интеграл из пятого слагаемого:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \int_0^x \int_0^\tau \cos \sqrt{\lambda}(x - 2\tau + 2\xi) q_\lambda(\tau) q_\lambda(\xi) d\xi d\tau \\
& + \frac{1}{4} \int_0^x \int_0^\tau \cos \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) q_\lambda(\tau) q_\lambda(\xi) d\xi d\tau \\
& + \frac{h(\lambda)}{4\sqrt{\lambda}} \int_0^x \int_0^\tau \sin \sqrt{\lambda}(x - 2\tau + 2\xi) q_\lambda(\tau) q_\lambda(\xi) d\xi d\tau \\
& - \frac{h(\lambda)}{4\sqrt{\lambda}} \int_0^x \int_0^\tau \sin \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) q_\lambda(\tau) q_\lambda(\xi) d\xi d\tau \\
& - \frac{h(\lambda)}{4\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}(x) \int_0^x \int_0^\tau q_\lambda(\tau) q_\lambda(\xi) d\xi d\tau \\
& + \frac{h(\lambda)}{4\sqrt{\lambda}} \int_0^x \int_0^\tau \sin \sqrt{\lambda}(x - 2\xi) q_\lambda(\tau) q_\lambda(\xi) d\xi d\tau \\
& - \frac{1}{4} \cos \sqrt{\lambda}(x) \int_0^x \int_0^\tau q_\lambda(\tau) q_\lambda(\xi) d\xi d\tau \\
& - \frac{1}{4} \int_0^x \int_0^\tau \cos \sqrt{\lambda}(x - 2\xi) q_\lambda(\tau) q_\lambda(\xi) d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

(Для некоторого увеличения точности аппроксимации асимптотических формул (3.2)–(3.4) сумму пятого и седьмого интегралов можно, как это часто делают, перенести налево, в главную часть (3.2)–(3.4). Но тогда усложнятся функции (3.5).) Здесь разность второго и восьмого интегралов можно оценить с помощью теоремы Фубини следующим образом. Во втором слагаемом сменим порядок интегрирования, а в восьмом поменяем местами обозначения переменных интегрирования. Для каждого фиксированного $\xi \in [0, x] \subset [0, \pi]$ положим

$$\tilde{q}_\lambda(\tau) = \begin{cases} q_\lambda(\tau) & \text{при } \tau \in [\xi, \pi], \\ -q_\lambda(\tau) & \text{при } \tau \in [0, \xi]. \end{cases}$$

Для любого $\xi \in [0, x] \subset [0, \pi]$ функция $\tilde{q}_\lambda(\tau)$ принадлежит шару $V_{3\rho_\lambda}[0, \pi]$. Следовательно, в силу леммы 1

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{4} \int_0^x \int_0^\tau \cos \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) q_\lambda(\tau) q_\lambda(\xi) d\xi d\tau \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} \int_0^x \int_0^\tau \cos \sqrt{\lambda}(x - 2\xi) q_\lambda(\tau) q_\lambda(\xi) d\xi d\tau \right| \\
& = \left| \frac{1}{4} \int_0^x q_\lambda(\xi) d\xi \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) \tilde{q}_\lambda(\tau) d\tau \right| \leq \frac{3\pi\rho_\lambda^2}{4\sqrt{\lambda}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Так же оцениваются четвертое и шестое слагаемые в (3.13):

$$\left| \frac{h(\lambda)}{4\sqrt{\lambda}} \int_0^x q_\lambda(\xi) d\xi \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - 2\tau) \tilde{q}_\lambda(\tau) d\tau \right| \leq \frac{3\pi\rho_\lambda^2 |h(\lambda)|}{4\lambda}. \tag{3.15}$$

После смены порядка интегрирования в первом интеграле и замены переменных $\eta = \tau - \xi$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_0^x q_\lambda(\xi) d\xi \int_\xi^x \cos \sqrt{\lambda}(x - 2\tau + 2\xi) q_\lambda(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_0^x q_\lambda(\xi) d\xi \int_0^{x-\xi} \cos \sqrt{\lambda}(x - 2\eta) q_\lambda(\eta + \xi) d\eta. \end{aligned}$$

Чтобы для оценки этого слагаемого можно было применить лемму 1, при любом фиксированном ξ к функции $q_\lambda(\eta + \xi)$ добавим и отнимем от нее $-q_\lambda(\xi)$. При этом функция $q_\lambda(\eta + \xi) - q_\lambda(\xi)$ как функция переменной η , доопределенная на $[\pi - \xi, \pi]$ нулем, принадлежит шару $V_{2\rho_\lambda}[0, \pi]$. Оценка для третьего слагаемого получается аналогично.

Отсюда в силу (3.13), а также оценок (3.9), (3.10), (3.14) и (3.15) получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) q_\lambda(\tau) d\tau \int_0^\tau \sin \sqrt{\lambda}(\tau - \xi) q_\lambda(\xi) \left(\cos \sqrt{\lambda}\xi + \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}} \right) d\xi \right| \\ & \leq \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right) \frac{\rho_\lambda^2 \pi}{8} \left(\frac{12}{\sqrt{\lambda}} + \pi \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Осталось с помощью (3.1) и (3.11) оценить интеграл:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) q_\lambda(\tau) d\tau \int_0^\tau \sin \sqrt{\lambda}(\tau - \xi) q_\lambda(\xi) \right. \\ & \quad \times \left. \left(y(\xi, \lambda) - \left(\cos \sqrt{\lambda}\xi + \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}} \right) \right) d\xi \right| \leq 2\pi \frac{\rho_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right) \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (3.12), (3.16) и определения шара (3.1), точнее, ограничения на скорость роста радиусов шаров $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda})$, найдется такое $\lambda_1 \geq \lambda_0$ (где λ_0 выбирается настолько большим, чтобы для всех $\lambda \geq \lambda_0$ выполнялось соотношение $\lambda > 4\pi^2 \rho_\lambda^2$), что для любого $\lambda \geq \lambda_1$ и всех $x \in [0, \pi]$ будет справедливо неравенство (3.2). Продифференцируем тождество (3.12) по x и, повторяя технику доказательства (3.2), с учетом леммы 1 получим (3.3). После двукратного дифференцирования получаем (3.4).

Предложение 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Для того чтобы установить справедливость неравенств (3.6)–(3.8), проводятся рассуждения, аналогичные доказательству предложения 2. Сначала устанавливается, что решение задачи (1.5) для всех $x \in [0, \pi]$ удовлетворяет неравенству

$$\left| y(x, \lambda) - \frac{h(\lambda) \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{2|h(\lambda)|\rho_\lambda}{\lambda} x$$

при $\lambda \geq \lambda_0$, где λ_0 выбирается настолько большим, чтобы для всех $\lambda \geq \lambda_0$ выполнялось соотношение $\lambda > 4\pi^2 \rho_\lambda^2$. Затем так же, как и в случае задачи (1.4), обнаруживаем существование $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такого, что для всех $\lambda > \lambda_1$ будут справедливы неравенства (3.6)–(3.8).

Предложение 3 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Тем же методом, что и при доказательстве предложений 2 и 3, получаются оценки остаточных членов в более точных асимптотических формулах, получаемых итерацией метода Лиувилля–Стеклова и аналогичных рассмотренным в работе [6; § 8.61, формула (8.61.7)].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для нулей решений задачи Коши (1.4), попадающих в $[0, \pi]$ и перенумерованных в порядке возрастания согласно (1.6), справедливы следующие асимптотические формулы:

$$x_{k,\lambda} = \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} + o\left(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln \lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.17)$$

$$y'(x_{k,\lambda}, \lambda) = \sqrt{\lambda + h^2(\lambda)} \left((-1)^{k+1} + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

А для перенумерованных согласно (1.6) нулей решений задачи Коши (1.5) с $h(\lambda) \neq 0$ и q_λ , удовлетворяющими соотношению (2.2), справедливы следующие асимптотические формулы:

$$x_{k,\lambda} = \frac{k}{\sqrt{\lambda}}\pi + o\left(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln \lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

$$y'(x_{k,\lambda}, \lambda) = h(\lambda) \left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

Стремление к нулю в o -символе Ландау равномерно по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и k , $0 \leq k \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим справедливость асимптотических формул (3.19) и (3.20). Во-первых, для $k = 0$ эти формулы следуют из условий задачи Коши (1.5). Далее, пусть $x \neq x_{0,\lambda}$ – некоторый нуль решения задачи Коши (1.5) $y(x, \lambda)$. Тогда в силу (3.6)

$$\left| \sin \left(\sqrt{\lambda}x - \arcsin \frac{\int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau}{2\sqrt{\lambda} \sqrt{1 + \frac{1}{4\lambda} \left[\int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau \right]^2}} \right) \right| \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2\lambda\sqrt{\lambda} \sqrt{1 + \frac{1}{4\lambda} \left[\int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau \right]^2}}.$$

Разложим функцию $\arcsin$ в нуле по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Получаем неравенство

$$\left| \left(\sqrt{\lambda}x - \pi m - \frac{\int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau}{2\sqrt{\lambda} \sqrt{1 + \frac{1}{4\lambda} \left[\int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau \right]^2}} + o \left(\left(\frac{\int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau}{2\sqrt{\lambda} \sqrt{1 + \frac{1}{4\lambda} \left[\int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau \right]^2}} \right)^2 \right) \right) \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2\lambda\sqrt{\lambda}},$$

где m – некоторое целое число, или, учитывая ограничение на скорость роста радиусов шаров ρ_λ в (2.2), имеем соотношение

$$x - \frac{\pi m}{\sqrt{\lambda}} = O\left(\frac{\rho_\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) + O\left(\frac{\rho_\lambda^2}{\lambda\sqrt{\lambda}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}\ln\lambda}\right).$$

Следовательно, найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для всех $\lambda > \lambda_0$ нули решений задачи Коши (1.5) будут попадать в $\delta(\lambda)$ – окрестность точек, где $\delta(\lambda) = o(1/(\sqrt{\lambda}\ln\lambda))$. А так как нулевой узел уже определен условиями задачи (1.5), то целое число m по теореме осцилляции должно совпадать с номером узла k согласно нумерации (1.6). Таким образом, формула (3.19) доказана. Формула (3.20) получается подстановкой (3.19) в (3.7).

Пусть теперь x – нуль решения задачи Коши (1.4). Продолжим функцию q_λ :

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} q_\lambda(x) & \text{при } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, \pi]. \end{cases} \quad (3.21)$$

После этого сделаем замену независимой переменной

$$t = \frac{\pi\left(x\sqrt{\lambda} + \arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}\right)}{\pi\sqrt{\lambda} + \arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}}. \quad (3.22)$$

Обозначим

$$\hat{y}(t, \hat{\lambda}) = y\left(\frac{\pi\sqrt{\lambda} + \arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}}{\pi\sqrt{\lambda}}t - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}, \lambda\right), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t) &= \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}\right)^2 \\ &\times q_\lambda\left(\frac{\pi\sqrt{\lambda} + \arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}}{\pi\sqrt{\lambda}}t - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}, \lambda\right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$\hat{\lambda} = \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}\right)^2 \lambda.$$

После замены переменных (3.22) убеждаемся с помощью теоремы Пикара, что функции (3.23) есть одновременно решения задач Коши

$$\begin{aligned} \hat{y}'' + (\hat{\lambda} - \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t))\hat{y} &= 0, & \hat{y}(t(0), \hat{\lambda}) &= y(0, \lambda) = 1, \\ \hat{y}'(t(0), \hat{\lambda}) &= \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}\right)h(\lambda) \end{aligned} \quad (3.25)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{y}'' + (\hat{\lambda} - \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t))\hat{y} &= 0, & \hat{y}(0, \hat{\lambda}) &= y\left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}\right) = 0, \\ \hat{y}'(0, \hat{\lambda}) &= \sqrt{\lambda+h^2(\lambda)}\left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\arcsin\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+h^2(\lambda)}}\right) = \hat{h}(\hat{\lambda}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Кроме того, в силу (3.21) и (3.24) $\sqrt{\hat{\lambda}} - 1/2 \leq \sqrt{\lambda} \leq \sqrt{\hat{\lambda}} + 1/2$, т.е. $\sqrt{\hat{\lambda}} \simeq \sqrt{\lambda}$. Следовательно, соотношение (2.1) для задачи (3.26) сохраняется, так как

$$q_{\hat{\lambda}}(0) = 0, \quad V_0^\pi[\hat{q}_{\hat{\lambda}}] \leq \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2 V_0^\pi[q_\lambda] = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right) = o\left(\frac{\sqrt{\hat{\lambda}}}{\ln \hat{\lambda}}\right). \quad (3.27)$$

Для нулей задачи (3.26) асимптотическая формула (3.19) имеет вид

$$t_{m,\hat{\lambda}} = \frac{m}{\sqrt{\hat{\lambda}}} \pi + o\left(\frac{\hat{\lambda}^{-1/2}}{\ln \hat{\lambda}}\right).$$

После обратной замены с учетом (3.23), (3.24) и (3.27) для нулей задачи (1.4) получаем асимптотическую формулу

$$x_{m,\lambda} = \frac{m\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} + o\left(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln \lambda}\right).$$

После смены нумерации узлов для задачи (1.4) согласно (1.6) получаем формулу (3.17).

Для доказательства формулы (3.18) вновь воспользуемся формулой (3.20) для (3.26):

$$\hat{y}'(t_{m,\hat{\lambda}}, \hat{\lambda}) = \hat{h}(\hat{\lambda}) \left((-1)^m + o\left(\frac{1}{\ln \hat{\lambda}}\right) \right).$$

Предложение 4 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть выполняется условие (2.2) и функции q_λ принадлежат $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$. Тогда номер $n = n(\lambda)$ наибольшего из нулей решения $y(x, \lambda)$ задачи Коши (1.5) согласно нумерации (1.6) удовлетворяет соотношению

$$o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \leq \sqrt{\lambda} - n < 1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right), \quad (3.28)$$

а номер наибольшего из нулей решения задачи Коши (1.4) (при условии (2.1)) удовлетворяет соотношению

$$o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \leq \sqrt{\lambda} - (n+1) + \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} < 1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right). \quad (3.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость (3.28) и (3.29) вытекает из определения номера n согласно нумерации (1.6) и формул (3.17) или (3.19) после продолжения решения задач Коши (1.4) и (1.5) и функции $q_\lambda(x)$ (2.3) или (3.21) на множество $\{x : x > \pi\}$.

Предложение 5 доказано.

§ 4. Вспомогательные результаты

Приведем классический результат С.Б. Стечкина, который без указания конкретных значений констант он опубликовал в [40] (см. теорему 7 или частный случай теоремы 3). Заметим, что предложенный в настоящей статье способ доказательства, не зависит от их величины. Доказательство этого утверждения с числовыми оценками констант можно найти, например, в [7; гл. III, § 3.4].

ТЕОРЕМА А (теорема Стечкина; см. [40]). Пусть $f \in C_{2\pi}$. Тогда для любого натурального m существует тригонометрический полином T_m (полином наилучшего приближения функции f) порядка не выше m такой, что справедливы неравенства

$$\|f - T_m\|_{C_{2\pi}} \leq 5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right), \quad (4.1)$$

$$\|T'_m\|_{C_{2\pi}} \leq 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right), \quad (4.2)$$

где $\omega(f, \delta)$ – модуль непрерывности функции f .

Далее нам потребуется оценка погрешности аппроксимации функций, допускающих аналитическое продолжение с отрезка $[0, \pi]$ на круг $K_\varepsilon = \{z : |z - \pi/2| \leq \pi/2 + \varepsilon\}$ для $\varepsilon > 0$, интерполяционным оператором по синкам, анонсированная в [30]. Это утверждение доказано разными способами (с разными константами C_0) при получении результатов работ [1], [2], [31], [33].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть f – аналитическая в круге $K_\varepsilon = \{z : |z - \pi/2| \leq \pi/2 + \varepsilon\}$ функция для некоторого положительного ε . Кроме того, в задаче (1.5) возьмем $q_\lambda \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдутся такие абсолютная константа $C_0 > 0$ и натуральное n_ε , зависящее только от ε , что для всех $n \geq n_\varepsilon$ и $x \in [0, \pi]$

$$|S_{\lambda_n}(f, x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f(x_{k, \lambda_n}) - f(x) \right| \leq \frac{C_0 \|f\| |\sin nx|}{n(\pi \frac{n+1}{2n} - |x - \frac{\pi}{2}|)},$$

где $\|f\| = \max_{x \in K_\varepsilon} |f(x)|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть f – аналитическая в круге $K_\varepsilon = \{z : |z - \pi/2| \leq \pi/2 + \varepsilon\}$ функция для некоторого положительного ε . Кроме того, в задаче (1.5) возьмем $q_\lambda \equiv 0$, $\lambda \geq 1$. Тогда найдутся такие абсолютная константа $C_0 > 0$ и λ_ε , зависящее только от ε , что для всех $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$ и $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} |S_\lambda(f, x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} f(\tilde{x}_{k, \lambda}) - f(x) \right| \\ &\leq \frac{C_0 \|f\| |\sin \sqrt{\lambda} x|}{\tilde{n}(\pi \frac{\tilde{n}+1}{2\tilde{n}} - |\frac{\sqrt{\lambda}}{\tilde{n}} x - \frac{\pi}{2}|)} + \omega\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right), \end{aligned}$$

где $\|f\| = \max_{x \in K_\varepsilon} |f(x)|$, $\omega(f, \delta)$ – модуль непрерывности функции f на отрезке $[0, \pi]$ и $\tilde{x}_{k, \lambda} = k\pi/\sqrt{\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots, \tilde{n}$, а $\tilde{n} = \tilde{n}(\lambda) = [\sqrt{\lambda}]$ – номер наибольшего узла $\tilde{x}_{k, \lambda}$, попадающего на отрезок $[0, \pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\sqrt{\lambda}/\tilde{n} \geq 1$ при любом $\lambda \geq 1$. Следовательно, функция $f(\tilde{n}x/\sqrt{\lambda})$ аналитична в круге $K_\varepsilon = \{z : |z - \pi/2| \leq \pi/2 + \varepsilon\}$ и

$$\left\| f\left(\frac{\tilde{n}}{\sqrt{\lambda}} \cdot\right) \right\| \leq \|f\|.$$

Из предложения 6 получаем

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k,\lambda})} f(\tilde{x}_{k,\lambda}) - f(x) \right| \\
 & \leq \left| \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^k \sin \tilde{n} \frac{\sqrt{\lambda}}{\tilde{n}} x}{\tilde{n} \frac{\sqrt{\lambda}}{\tilde{n}} (x - \frac{\tilde{n}}{\sqrt{\lambda}} \frac{k\pi}{\tilde{n}})} f\left(\frac{\tilde{n}}{\sqrt{\lambda}} \frac{k\pi}{\tilde{n}}\right) - f\left(\frac{\tilde{n}}{\sqrt{\lambda}} x\right) \right| + \left| f\left(\frac{\tilde{n}}{\sqrt{\lambda}} x\right) - f(x) \right| \\
 & \leq \frac{C_0 \|f\| |\sin \sqrt{\lambda} x|}{\tilde{n}(\pi \frac{\tilde{n}+1}{2\tilde{n}} - |\frac{\sqrt{\lambda}}{\tilde{n}} x - \frac{\pi}{2}|)} + \omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}).
 \end{aligned}$$

Предложение 7 доказано.

Нам потребуется также оценка нормы функций $s_{k,\lambda}$ в пространстве $C[0, \pi]$.

ЛЕММА 2. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле (в случае задачи Коши (1.5) требуем, чтобы $h(\lambda) \neq 0$). Тогда найдется такое положительное λ_0 , зависящее только от скорости изменения радиусов шаров ρ_λ в (2.1) или (2.2), что для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольного k , $0 \leq k \leq n$, функции $s_{k,\lambda}(x)$, построенные по решениям задачи Коши (1.4) или (1.5), могут быть оценены таким образом:

$$\max_{x \in [0, \pi]} |s_{k,\lambda}(x)| = \max_{x \in [0, \pi]} \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} \right| \leq 3 \quad \text{при } \lambda > \lambda_0. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала приведем доказательство для случая задачи Коши (1.5). Так как оператор (1.8) и каждая функция $s_{k,\lambda}$ инвариантны относительно умножения функции $y(x, \lambda)$ на отличную от нуля константу, то без потери общности можно считать $h \equiv 1$. Возьмем произвольную функцию $s_{k,\lambda}$ при $0 \leq k \leq n$. Рассмотрим сначала отрезок

$$[0, \pi] \cap \left[x_{k,\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, x_{k,\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right].$$

Представим $y(x, \lambda)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Воспользовавшись оценкой второй производной функции $y(x, \lambda)$ (3.8), асимптотической формулой (3.20) и условием (2.2) на этом отрезке, получим

$$\begin{aligned}
 |s_{k,\lambda}(x)| & \leq 1 + \left| \frac{\frac{y''(\xi, \lambda)}{2}(x - x_{k,\lambda})^2}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} \right| \\
 & \leq 1 + \left| \frac{-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \xi + \frac{1}{2} \int_0^\xi q_\lambda(\tau) d\tau \cos \sqrt{\lambda} \xi + O\left(\frac{\rho_\lambda(1 + \pi \rho_\lambda)}{2\sqrt{\lambda}}\right)}{(-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)} \right| |x - x_{k,\lambda}| \\
 & \leq 1 + \left| \frac{-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \xi}{(-1)^k + o(\frac{1}{\ln \lambda})} \right| \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \left| \frac{o(\frac{\pi \sqrt{\lambda}}{2 \ln \lambda}) + o(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln^2 \lambda})}{(-1)^k + o(\frac{1}{\ln \lambda})} \right| \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right). \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть случай

$$x \in [0, \pi] \setminus \left[x_{k,\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, x_{k,\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right].$$

Из (3.6) и (3.20) получаем

$$|s_{k,\lambda}(x)| \leq \left| \frac{y(x, \lambda)}{(-1)^k + o(\frac{1}{\ln \lambda})} \right| \sqrt{\lambda} \leq 1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right). \quad (4.5)$$

Выбирая λ_0 настолько большим, чтобы для всех $\lambda > \lambda_0$ величины $o(1/\ln \lambda)$ в (4.4) и (4.5) не превосходили единицы одновременно, получим (4.3) в случае задачи Коши (1.5).

Покажем, что (4.3) справедливо для $s_{k,\lambda}$, $k = 0, \dots, n$, построенных с помощью решений задачи Коши (1.4). Для этого продолжим функцию $q_\lambda(x)$, как в определении (3.21). После обозначений (3.23), (3.24) и замены переменных (3.22) получаем в силу теоремы Пикара, что функции $\hat{y}(t, \hat{\lambda})$ есть одновременно решения задач Коши (3.25) и (3.26). Кроме того, из (3.21) и (3.24) получаем соотношение (3.27). Согласно (3.23) при

$$t \in [0, \pi], \quad x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}, \pi \right]$$

имеем тождество

$$s_{k,\lambda}(x) = \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} = \frac{\hat{y}(t, \hat{\lambda})}{\hat{y}'(t_{k,\hat{\lambda}}, \hat{\lambda})(t - t_{k,\hat{\lambda}})} = \hat{s}_{k,\hat{\lambda}}(t). \quad (4.6)$$

Так как $\hat{s}_{k,\hat{\lambda}}(t)$ построены с помощью задачи Коши (3.26) вида (1.5), для которой в силу (3.27) справедливость (4.3) уже установлена, то лемма 2 доказана полностью.

ЛЕММА 3. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле (в случае задачи Коши (1.5) требуем, чтобы $h(\lambda) \neq 0$). Тогда найдется такое положительное λ_1 , зависящее только от скорости изменения радиусов шаров ρ_λ в (2.1) или (2.2), что для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольного $x \in [0, \pi]$ функции $s_{k,\lambda}(x)$, построенные по решениям задач Коши (1.4) или (1.5), удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^n |s_{k,\lambda}(x) + s_{k-1,\lambda}(x)| \leq 15 \quad \text{при } \lambda > \lambda_1. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в лемме 2, сначала проведем доказательство для $s_{k,\lambda}$, построенных с помощью задачи Коши (1.5). Также без потери общности можно считать $h \equiv 1$. Возьмем произвольную точку $x \in [0, \pi]$. Обозначим через k_0 номер ближайшего к точке x нуля $x_{k_0,\lambda}$: $|x - x_{k_0,\lambda}| = \min_{0 \leq k \leq n} |x - x_{k,\lambda}|$

функции $y(x, \lambda)$ (если таких нулей два, то в качестве k_0 выбираем любой из них, например левый). Согласно лемме 2

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |s_{k,\lambda}(x) + s_{k-1,\lambda}(x)| &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} + \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k-1,\lambda}, \lambda)(x - x_{k-1,\lambda})} \right| \\ &\leq |y(x, \lambda)| \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} + \frac{1}{y'(x_{k-1,\lambda}, \lambda)(x - x_{k-1,\lambda})} \right| + 12, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k_0 и $k_0 + 1$. Обратим внимание на то, что в рамках условий леммы 3 найдется такое $\lambda_1 \geq \lambda_0$ (здесь λ_0 берется, как в лемме 2), что для всех $\lambda \geq \lambda_1$ и для всех $x \in [0, \pi]$ в силу (3.19) и выбора номера узла k_0 будет выполняться неравенство

$$\min_{k \neq k_0} |x - x_{k,\lambda}| \geq \frac{1}{2} \min_{k=0, \dots, n-1} |x_{k+1,\lambda} - x_{k,\lambda}| \geq \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}. \quad (4.9)$$

Из (3.20) вытекает справедливость равенства

$$\left| \frac{1}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} - \frac{1}{(-1)^k(x - x_{k,\lambda})} \right| = \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right| \frac{1}{|x - x_{k,\lambda}|}. \quad (4.10)$$

Заметим, что знаки $1/(x - x_{k,\lambda})$ и $1/(x - x_{k-1,\lambda})$ положительны, если $1 \leq k \leq k_0 - 1$, и отрицательны, если $k_0 + 2 \leq k \leq n$. Поэтому цепочку неравенств (4.8) можно продолжить с учетом (3.6), (4.9) и (4.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |s_{k,\lambda}(x) + s_{k-1,\lambda}(x)| &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda} \ln \lambda}\right) \right) \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=1}^{k_0-1} \left(\frac{1}{x - x_{k,\lambda}} - \frac{1}{x - x_{k-1,\lambda}} \right) + \sum_{k=k_0+2}^n \left(\frac{1}{x - x_{k,\lambda}} - \frac{1}{x - x_{k-1,\lambda}} \right) \right\} \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda} \ln \lambda}\right) \right) \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)} - \frac{1}{(-1)^k} \right| \frac{1}{|x - x_{k,\lambda}|} + 12 \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda} \ln \lambda}\right) \right) \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=1}^{k_0-1} \left(\frac{1}{x - x_{k,\lambda}} - \frac{1}{x - x_{k-1,\lambda}} \right) + \sum_{k=k_0+2}^n \left(\frac{1}{x - x_{k,\lambda}} - \frac{1}{x - x_{k-1,\lambda}} \right) \right\} \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda} \ln \lambda}\right) \right) \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right| \frac{8\sqrt{\lambda}}{\pi} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{\pi/2 - \pi/(8\sqrt{\lambda})} \frac{dt}{\frac{\pi}{2} - t} + \int_{\pi/2 + \pi/(8\sqrt{\lambda})}^{\pi} \frac{dt}{t - \frac{\pi}{2}} \right\} + 12. \end{aligned}$$

Напомним, что при $k_0 = 0$ и $k_0 = 1$ в оценке сверху отсутствует первая сумма, а при $k_0 = n - 1, n$ отсутствует вторая. Теперь, почленно складывая слагаемые

обеих сумм, получаем

$$\sum_{k=1}^n |s_{k,\lambda}(x) + s_{k-1,\lambda}(x)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda} \ln \lambda}\right) \right) \times \left\{ \frac{1}{x - x_{k_0-1,\lambda}} - \frac{1}{x - x_{0,\lambda}} + \frac{1}{x - x_{n,\lambda}} - \frac{1}{x - x_{k_0+1,\lambda}} \right\} + o(1) + 12.$$

В силу выбора номера k_0 и неравенства (4.9) получим

$$\sum_{k=1}^n |s_{k,\lambda}(x) + s_{k-1,\lambda}(x)| \leq \left\{ \frac{8}{\pi} + 12 + o(1) \right\}.$$

Так как точка $x \in [0, \pi]$ выбиралась произвольным образом, то соотношение (4.7), когда $s_{k,\lambda}(x)$ строятся с помощью решений задачи Коши (1.5), доказано. Справедливость (4.7) в случае задачи Коши (1.4) устанавливается с помощью тождества (4.6) (после доопределения потенциала (3.21) и замены переменных (3.22), (3.23) с учетом соотношений (3.27)) сведением к изученной ситуации для задачи (3.26).

Лемма 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Из леммы 3, в частности, следует ограниченность при $\lambda \rightarrow \infty$ норм операторов (1.10), действующих из $C[0, \pi]$ в $C[0, \pi]$.

Нам потребуются оценки норм операторов (1.8), действующих при каждом λ из $C[0, \pi]$ в $C[0, \pi]$. В теории интерполирования такие нормы называют *константами Лебега* (см. [5], [7]). Проведем также исследование поведения норм функционалов, ставящих в соответствие каждой непрерывной на $[0, \pi]$ функции f значения в точке $x \in [0, \pi]$ результатов действия операторов (1.8). Функциональные зависимости таких норм от переменной $x \in [0, \pi]$ носят название *функции Лебега* (см. [5], [7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле (в случае задачи Коши (1.5) требуем еще выполнение условия $h(\lambda) \neq 0$). Тогда найдется такое значение λ_0 (выбор которого зависит только от скорости изменения радиусов шаров ρ_λ в (2.1) или (2.2)), что для любых потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и функции $h(\lambda)$, а также для всех $\lambda > \lambda_0$ и $x \in [0, \pi]$ функции Лебега оператора (1.8), построенного по решениям задачи Коши (1.5), удовлетворяют неравенству

$$S_\lambda(x) = \sum_{k=0}^n |s_{k,\lambda}(x)| \leq |y(x, \lambda)| \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \ln \lambda + 11, \quad (4.11)$$

а функции Лебега оператора (1.8), построенного по решениям задачи Коши (1.4), удовлетворяют неравенству

$$S_\lambda(x) = \sum_{k=0}^n |s_{k,\lambda}(x)| \leq |y(x, \lambda)| \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi \sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \ln \lambda + 11. \quad (4.12)$$

Константы Лебега оператора (1.8), построенного по решениям задач Коши (1.4) или (1.5), сверху оцениваются следующим образом:

$$S_\lambda = \max_{x \in [0, \pi]} \sum_{k=0}^n |s_{k,\lambda}(x)| \leq \frac{3}{\pi} \ln \lambda + 11. \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассуждения будем проводить в случае задачи Коши (1.5). В силу инвариантности оператора (1.8), его функций и констант Лебега относительно умножения функции $y(x, \lambda)$ на отличную от нуля константу без потери общности полагаем $h(\lambda) \equiv 1$.

Возьмем произвольное $x \in [0, \pi]$. Пусть k_0 – номер ближайшего к x узла (если таких узлов два, то в качестве k_0 выбираем номер любого из них). Тогда

$$S_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{k_0-2} |s_{k,\lambda}(x)| + \sum_{k=k_0-1}^{k_0+1} |s_{k,\lambda}(x)| + \sum_{k=k_0+2}^n |s_{k,\lambda}(x)|.$$

Если $k_0 = 0$ или $k_0 = 1$, то в сумме отсутствует первое слагаемое, если же $k_0 = n, n-1$, то нет третьего. Второе слагаемое оценивается с помощью леммы 2:

$$S_\lambda(x) \leq |y(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} \right| + 9,$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемых с индексами $k = k_0 - 1, k_0, k_0 + 1$. В силу (3.19), (3.20), (4.9) и определения (1.6) найдется значение λ_0 (выбор которого зависит только от скорости изменения радиусов шаров в (2.2)) такое, что для всех $\lambda > \lambda_0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} S_\lambda(x) &\leq |y(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{((-1)^k + o(\frac{1}{\ln \lambda}))(x - x_{k,\lambda})} \right| + 9 \\ &\leq |y(x, \lambda)| \left(1 + \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right| \right) \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[\int_0^{x-\pi/(4\sqrt{\lambda})} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\pi/(4\sqrt{\lambda})}^\pi \frac{dt}{t-x} \right] + 9. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\max_{x \in [0, \pi]} x(\pi - x) = \pi^2/4$ и что при $x \in [0, \pi/(4\sqrt{\lambda})]$ первый интеграл в полученной оценке равен нулю, а при $x \in [\pi - \pi/(4\sqrt{\lambda}), \pi]$ нет второго интеграла, получим неравенство

$$S_\lambda(x) \leq |y(x, \lambda)| \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \ln \lambda + |y(x, \lambda)| \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \ln 4 + |y(x, \lambda)| \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} |o(1)| + 9.$$

В силу (3.6) найдется λ_0 такое, что для всех $\lambda \geq \lambda_0$, $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и всех $x \in [0, \pi]$ справедливо неравенство (4.11). Доказательство (4.12) для задачи (1.4) аналогично или устанавливается с помощью тождества (4.6) (после определения потенциала (3.21) и замены переменных (3.22), (3.23) с учетом соотношений (3.27)) сведением к изученной ситуации для задачи (3.26). Справедливость (4.13) для достаточно больших λ сразу вытекает из (4.11) и (3.6) или (4.12) и (3.2).

Предложение 8 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Методом, предложенным в [2; теорема 1] или [1; теорема 5], несложно убедиться в том, что оценки функций и констант Лебега, полученные в предложении 8, точны по порядку.

Выделим главную часть погрешности приближения непрерывной функции, исчезающей на концах отрезка, оператором (1.8), построенным с помощью решений задач Коши (1.4) или (1.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $y(x, \lambda)$ – решения задачи Коши (1.4) или (1.5) и для задачи Коши (1.4) выполняются соотношения (2.1), а в случае задачи Коши (1.5) – соотношения (2.2). Если $f \in C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$, то равномерно по $x \in [0, \pi]$ и по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \{f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})\} s_{k, \lambda}(x) \right) = 0, \quad (4.14)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})\} s_{k, \lambda}(x) \right) = 0, \quad (4.15)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \{f(x_{k+1, \lambda}) - 2f(x_{k, \lambda}) + f(x_{k-1, \lambda})\} s_{k, \lambda}(x) \right) = 0, \quad (4.16)$$

где

$$s_{k, \lambda}(x) = \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})}.$$

Важным представляется тот факт, что погрешность приближения непрерывной функции, исчезающей на концах отрезка, оператором (1.8) определяется значениями функции в узлах интерполяции, расположенных вблизи точки, в которой исследуется возможность аппроксимации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $y(x, \lambda)$ – решения задачи Коши (1.4) или (1.5). Для задачи Коши (1.4) выполняются соотношения (2.1), а в случае задачи Коши (1.5) – соотношения (2.2). Считаем, что функции $f \in C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$ и функции $\vartheta(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ определяются из условий (2.4). Доопределим функции f и q_λ с помощью определений (2.3) и (2.6). Тогда равномерно по $x \in [0, \pi]$ и по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} \{f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})\} s_{k, \lambda}(x) \right) = 0, \quad (4.17)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} \{f(x_{k-1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})\} s_{k, \lambda}(x) \right) = 0, \quad (4.18)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{4} \sum_{k=k_1}^{k_2} \{f(x_{k+1, \lambda}) - 2f(x_{k, \lambda}) + f(x_{k-1, \lambda})\} s_{k, \lambda}(x) \right) = 0. \quad (4.19)$$

Здесь целые числа k_1 и k_2 , являющиеся согласно (1.6) номерами нулей продолженного на $\mathbb{R}$ решения соответствующей задачи Коши, удовлетворяют соотношениям

$$x_{k_1-1,\lambda} < x - \varepsilon(\lambda) \leq x_{k_1,\lambda}, \quad x_{k_2,\lambda} \leq x + \varepsilon(\lambda) < x_{k_2+1,\lambda}.$$

Если окажется, что $k_2 < k_1$, то суммы в (4.17)–(4.19) отсутствуют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЙ 9 и 10. Сначала докажем равномерную внутри интервала $(0, \pi)$ сходимости в соотношениях (4.14)–(4.16) и (4.17)–(4.19) для операторов (1.8), построенных по решениям задачи Коши (1.5). Без потери общности можно считать $h(\lambda) \equiv 1$. Продолжим функцию f на отрезок $[-\pi, \pi]$ четным образом. Получим новую функцию $\tilde{f} \in C_{2\pi}$. Ее норма $\|f\|_{C[0,\pi]} = \|\tilde{f}\|_{C_{2\pi}}$ и модуль непрерывности $\omega(f, \delta) = \omega(\tilde{f}, \delta)$. В силу теоремы А для любого натурального m существует тригонометрический полином по косинусам T_m порядка не выше m , удовлетворяющий соотношениям (4.1) и (4.2). Зафиксируем положительное $\hat{\varepsilon} > 0$ для определения радиуса круга $K_{\hat{\varepsilon}} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z - \pi/2| \leq \pi/2 + \hat{\varepsilon}\}$. С помощью предложения 7 приблизим этот тригонометрический полином оператором (1.8). Погрешность этого приближения оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} |S_{\lambda}(T_m, x) - T_m(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} T_m(x_{k,\lambda}) - T_m(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^n \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} T_m(x_{k,\lambda}) - \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k,\lambda})} T_m(\tilde{x}_{k,\lambda}) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k,\lambda})} T_m(\tilde{x}_{k,\lambda}) - T_m(x) \right|. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{n}$ обозначает номер наибольшего из узлов $\tilde{x}_{k,\lambda} = \pi k / \sqrt{\lambda}$, попадающих в отрезок $[0, \pi]$. Отсюда в силу предложения 7 для всех $x \in [0, \pi]$ и достаточно больших λ получаем неравенство

$$\begin{aligned} |S_{\lambda}(T_m, x) - T_m(x)| &\leq \left| \sum_{k=0}^n \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} T_m(x_{k,\lambda}) - \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k,\lambda})} T_m(\tilde{x}_{k,\lambda}) \right| \\ &\quad + \frac{C_0 \|T_m\|_{C(K_{\hat{\varepsilon}})} |\sin \sqrt{\lambda} x|}{\tilde{n}(\pi \frac{\tilde{n}+1}{2n} - |\frac{\sqrt{\lambda}}{n} x - \frac{\pi}{2}|)} + \omega\left(T_m, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Так как начальные условия задачи Коши (1.5) гарантируют совпадение нулей решений $y(x, \lambda)$ и $\sin \sqrt{\lambda} x$ при $k = 0$, то из (3.19) следует, что для достаточно больших λ между множествами точек $x_{k,\lambda}$ и $\tilde{x}_{k,\lambda}$, $k = 0, \dots, n-1$, можно установить взаимно однозначное соответствие. Таким образом, только $x_{n,\lambda}$ и $\tilde{x}_{n,\lambda}$ могут не попасть одновременно на отрезок $[0, \pi]$. Следовательно, существует $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ такое, что для всякого $\lambda \geq \lambda_1$ выполняется неравенство

$$|n - \tilde{n}| \leq 1. \quad (4.21)$$

Возьмем произвольный отрезок $[a, b] \in (0, \pi)$. Выберем $\lambda_2 \geq \lambda_1$ настолько большим, чтобы для любого $\lambda \geq \lambda_2$ в интервал (b, π) попадало не менее трех нулей каждой из функций $\sin \sqrt{\lambda}x$ и $y(x, \lambda)$. Возможность такого выбора гарантирует асимптотическая формула (3.19). Возьмем произвольное $x \in [a, b]$. Обозначим через k_0 номер ближайшего к x узла – нуля $\tilde{x}_{k_0, \lambda}$ функции $\sin \sqrt{\lambda}x$ (если таких узлов два, то берем любой из них, например левый). Оценим отдельно первое слагаемое в (4.20), учитывая (4.21):

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^n \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) - \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k, \lambda}) \right| \\ & \leq \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) - \frac{(-1)^{k_0} \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k_0, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k_0, \lambda}) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})} \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) - \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k, \lambda}) \right| \\ & \quad + \begin{cases} \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{n, \lambda}, \lambda)(x - x_{n, \lambda})} T_m(x_{n, \lambda}) \right| & \text{при } n = \tilde{n} + 1, \\ 0 & \text{при } n = \tilde{n}, \\ \left| \frac{(-1)^{\tilde{n}} \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{\tilde{n}, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{\tilde{n}, \lambda}) \right| & \text{при } n = \tilde{n} - 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.22)$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемого с индексом k_0 . Заметим, что для любого k , $0 \leq k \leq \min(n, \tilde{n})$, в силу (4.2) и (3.19) справедлива оценка

$$\left| \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) - \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k, \lambda}) \right| = 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda} \ln \lambda}\right). \quad (4.23)$$

Далее, в силу леммы 2 и асимптотической формулы (3.20) равномерно по $x \in [0, \pi]$ и $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) - \frac{y(x, \lambda)}{(-1)^{k_0}(x - x_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) \right| \\ & = \|T_m\| |s_{k_0, \lambda}(x)| |y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) = \|T_m\| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Теперь продолжим оценку (4.22). Сначала оценим первое слагаемое с помощью неравенства треугольника и (4.23):

$$\begin{aligned} & \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) - \frac{(-1)^{k_0} \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k_0, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k_0, \lambda}) \right| \\ & \leq \left| \frac{y(x, \lambda) T_m(x_{k_0, \lambda})}{y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda})} - \frac{(-1)^{k_0} \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) \right| \\ & \quad + 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda} \ln \lambda}\right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

В силу (2.2) и (3.19)

$$\sigma(\lambda) = \max\left(\frac{\rho_\lambda \sqrt{\ln \lambda}}{\lambda}, \max_{k=0, \dots, n} |x_{k, \lambda} - \tilde{x}_{k, \lambda}| \sqrt{\ln \lambda}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda \ln \lambda}}\right). \quad (4.26)$$

В случае $\rho_\lambda \equiv 0$ разность в (4.22) тождественно равна нулю, поэтому в дальнейшем рассматриваем случай $\rho_\lambda > 0$; следовательно, $\sigma(\lambda) > 0$. Пусть $x \in [\tilde{x}_{k_0, \lambda} - \sigma(\lambda), \tilde{x}_{k_0, \lambda} + \sigma(\lambda)]$. С помощью формулы Лагранжа получаем оценку для первого слагаемого в (4.25). В силу (3.20), (3.7), леммы 2 и теоремы A получаем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) - \frac{(-1)^{k_0} \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) \right| \\ & \leq \|T_m\| \left(|\cos \sqrt{\lambda} \xi_{k_0, \lambda} - \cos \sqrt{\lambda} \tilde{\xi}_{k_0, \lambda}| + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) \\ & = \left(\|f\|_{C[0, \pi]} + 5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) \right) \left(|\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \hat{\xi}_{k_0, \lambda}| |\xi_{k_0, \lambda} - \tilde{\xi}_{k_0, \lambda}| + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\xi_{k_0, \lambda} \in [x, x_{k_0, \lambda}], \quad \tilde{\xi}_{k_0, \lambda} \in [x, \tilde{x}_{k_0, \lambda}], \quad \hat{\xi}_{k_0, \lambda} \in [\xi_{k_0, \lambda}, \tilde{\xi}_{k_0, \lambda}]$$

(здесь в обозначениях отрезков не учитывается отношение порядка концов), то в силу (3.19), (4.25) и (4.26) в случае $x \in [\tilde{x}_{k_0, \lambda} - \sigma(\lambda), \tilde{x}_{k_0, \lambda} + \sigma(\lambda)]$ найдем $\lambda_3 \geq \lambda_2$ такое, что для любого $\lambda \geq \lambda_3$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) - \frac{(-1)^{k_0} \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k_0, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k_0, \lambda}) \right| \\ & \leq \left(\|f\|_{C[0, \pi]} + 5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) \right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln \lambda}}\right) + 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda \ln \lambda}}\right). \quad (4.27) \end{aligned}$$

Пусть теперь $x \in [0, \pi] \setminus [\tilde{x}_{k_0, \lambda} - \sigma(\lambda), \tilde{x}_{k_0, \lambda} + \sigma(\lambda)]$. В силу (4.24) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) - \frac{(-1)^{k_0} \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) \right| \\ & \leq \left| \frac{y(x, \lambda)}{x - x_{k_0, \lambda}} T_m(x_{k_0, \lambda}) - \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) \right| + \|T_m\| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \\ & \leq \left| \frac{y(x, \lambda)}{x - x_{k_0, \lambda}} - \frac{y(x, \lambda)}{x - \tilde{x}_{k_0, \lambda}} \right| |T_m(x_{k_0, \lambda})| \\ & \quad + \left| \frac{y(x, \lambda)}{x - \tilde{x}_{k_0, \lambda}} - \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k_0, \lambda})} \right| |T_m(x_{k_0, \lambda})| + \|T_m\| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right). \end{aligned}$$

С помощью формулы Лагранжа, теоремы A, выбора функции σ (4.26) и формул (3.6), (3.7) и (3.19) равномерно на всем множестве

$$[0, \pi] \setminus [\tilde{x}_{k_0, \lambda} - \sigma(\lambda), \tilde{x}_{k_0, \lambda} + \sigma(\lambda)]$$

получаем оценку

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k_0, \lambda}, \lambda)(x - x_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) - \frac{(-1)^{k_0} \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k_0, \lambda})} T_m(x_{k_0, \lambda}) \right| \\
& \leq \left| \frac{[y(x, \lambda) - y(x_{k_0, \lambda}, \lambda)](x_{k_0, \lambda} - \tilde{x}_{k_0, \lambda})}{(x - x_{k_0, \lambda})(x - \tilde{x}_{k_0, \lambda})} \right| \|T_m\| \\
& \quad + \left| \frac{y(x, \lambda) - \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}}{x - \tilde{x}_{k_0, \lambda}} \right| \|T_m\| + \|T_m\| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \\
& \leq \left| \frac{y'(\xi_{k_0, \lambda}, \lambda)(x_{k_0, \lambda} - \tilde{x}_{k_0, \lambda})}{x - \tilde{x}_{k_0, \lambda}} \right| \|T_m\| + \frac{\frac{\rho_\lambda \pi}{2\lambda} + \frac{\rho_\lambda(1+\pi\rho_\lambda)}{2\lambda\sqrt{\lambda}}}{\sigma(\lambda)} \|T_m\| + \|T_m\| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \\
& = \|T_m\| O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln \lambda}}\right) = \left(\|f\|_{C[0, \pi]} + 5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) \right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln \lambda}}\right).
\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (4.25), можно утверждать, что первое слагаемое в (4.22) равномерно на всем отрезке $[0, \pi]$ удовлетворяет соотношению (4.27), где константа равномерности в O -символе Ландау зависит только от скорости изменения радиуса шара ρ_λ в (2.2). Теперь оценим второе слагаемое в (4.22):

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})} \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) - \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k, \lambda}) \right| \\
& \leq \left| \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})} \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) - \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) \right| \\
& \quad + \left| \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})} \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) - \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k, \lambda}) \right|. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Из предложения 5 и (4.23) получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})} \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) - \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k, \lambda}) \right| \\
& = 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda} \ln \lambda}\right) O(\sqrt{\lambda}) = 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.28) получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})} \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) - \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k, \lambda}) \right| \\
& \leq \|T_m\| \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})} \left| \frac{1}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)} \right| \left| \frac{y(x, \lambda)}{x - x_{k, \lambda}} - \frac{y(x, \lambda)}{x - \tilde{x}_{k, \lambda}} \right| \\
& \quad + \frac{y(x, \lambda)}{x - \tilde{x}_{k, \lambda}} - \frac{y'(x_{k, \lambda}, \lambda) \sin \sqrt{\lambda} x}{(-1)^k \sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} \Big| + 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right).
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (3.20):

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})'} \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) - \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k, \lambda}) \right| \\ & \leq \|T_m\| \left(1 + \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right| \right) \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})'} \left| \frac{[y(x, \lambda) - y(x_{k, \lambda}, \lambda)](x_{k, \lambda} - \tilde{x}_{k, \lambda})}{(x - x_{k, \lambda})(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} \right. \\ & \quad \left. + \frac{y(x, \lambda) - \frac{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)}{(-1)^k} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}}{x - \tilde{x}_{k, \lambda}} \right| + 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right). \end{aligned}$$

В силу формулы Лагранжа, формул (3.6), (3.7), (3.19) и (3.20) с учетом (2.2) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})'} \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})} T_m(x_{k, \lambda}) - \frac{(-1)^k \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(x - \tilde{x}_{k, \lambda})} T_m(\tilde{x}_{k, \lambda}) \right| \\ & \leq \|T_m\| \left(1 + \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right| \right) \sum_{k=0}^{\min(n, \tilde{n})'} \left\{ \left| O(1) o\left(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln \lambda}\right) \right| \frac{1}{|x - \tilde{x}_{k, \lambda}|} \right. \\ & \quad \left. + \frac{|y(x, \lambda) - (1 + o(\frac{1}{\ln \lambda})) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}|}{|x - \tilde{x}_{k, \lambda}|} \right\} + 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \\ & \leq \|T_m\| o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \left(\int_0^{x - \pi/(4\sqrt{\lambda})} \frac{dt}{x - t} + \int_{x + \pi/(4\sqrt{\lambda})}^{\pi} \frac{dt}{t - x} \right) + 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \\ & \leq \|T_m\| o(1) + 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Здесь следует иметь в виду следующее. Если $x < \pi/(4\sqrt{\lambda})$, то в силу выбора номера k_0 и формулы (3.19) в полученной оценке отсутствует первый интеграл. В случае $x > \pi - \pi/(4\sqrt{\lambda})$ второй интеграл заменяется нулем.

Осталось оценить последнее слагаемое в (4.22). Если мы проведем рассуждения для $n > \tilde{n}$, то из них будет следовать и частный случай $q \equiv 0$ при $n < \tilde{n}$. Воспользуемся формулами (3.6), (3.19), (3.20) и выбором λ_2 . При $\lambda \geq \lambda_3 \geq \lambda_2$ получаем

$$\left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{n, \lambda}, \lambda)(x - x_{n, \lambda})} T_m(x_{n, \lambda}) \right| = \frac{\|T_m\|}{\pi - b} O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (4.30)$$

В силу линейности оператора (1.8) при любом $x \in [0, \pi]$

$$f(x) - S_\lambda(f, x) - (S_\lambda(T_m, x) - S_\lambda(f, x)) = f(x) - T_m(x) + T_m(x) - S_\lambda(T_m, x).$$

Используя теорему А, соотношения (4.20), (4.22), (4.27), (4.29) и (4.30), при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем равномерную на любом отрезке $[a, b] \subset (0, \pi)$ и шарах $V_{\rho\lambda}[0, \pi]$,

удовлетворяющих условию (2.2), оценку

$$\begin{aligned}
 & |f(x) - S_\lambda(f, x) - S_\lambda(T_m - f, x)| \\
 & \leq 5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) + \left(\|f\|_{C[0, \pi]} + 5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right)\right) \left\{o(1) + \frac{1}{(\pi - b)} O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\} \\
 & + \frac{C_0 \|T_m\|_{C(K_\varepsilon)} |\sin \sqrt{\lambda} x|}{\tilde{n}(\pi^{\frac{\tilde{n}+1}{2\tilde{n}}} - |\frac{\sqrt{\lambda}}{\tilde{n}} x - \frac{\pi}{2}|)} + m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) O\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right). \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Согласно линейности оператора (1.8)

$$\begin{aligned}
 S_\lambda(T_m - f, x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} s_{k, \lambda}(x) (f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} s_{k, \lambda}(x) (T_m(x_{k+1, \lambda}) - T_m(x_{k, \lambda})) \\
 &+ \frac{1}{2} (T_m(x_{n, \lambda}) - f(x_{n, \lambda})) s_{n, \lambda}(x) + \frac{1}{2} (T_m(0) - f(0)) s_{0, \lambda}(x) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (s_{k, \lambda}(x) + s_{k-1, \lambda}(x)) (T_m(x_{k, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})). \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Оценим отдельно вторую сумму в полученном представлении с помощью формулы Лагранжа, формулы (3.19) и теоремы А, точнее – неравенства (4.2). Воспользуемся при этом оценкой констант Лебега в предложении 8. Найдем $\lambda_4 \geq \lambda_3$ такое, что для любого $\lambda \geq \lambda_4$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} s_{k, \lambda}(x) (T_m(x_{k+1, \lambda}) - T_m(x_{k, \lambda})) \right| \leq 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \left[\frac{3}{\pi} \ln \lambda + 11 \right]. \quad (4.33)$$

Из теоремы А и лемм 2, 3 следует существование такого значения $\lambda_5 \geq \lambda_4$, что для всех $\lambda \geq \lambda_5$, $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $x \in [0, \pi]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (s_{k, \lambda}(x) + s_{k-1, \lambda}(x)) (T_m(x_{k, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) \right| \\
 & \leq \frac{1}{2} \|T_m - \tilde{f}\|_{C[-\pi, \pi]} \sum_{k=1}^n |s_{k, \lambda}(x) + s_{k-1, \lambda}(x)| \leq 37.5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right), \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

$$|T_m(x_{n, \lambda}) - f(x_{n, \lambda})| |s_{n, \lambda}(x)| + |T_m(0) - f(0)| |s_{0, \lambda}(x)| \leq 30\omega\left(f, \frac{1}{m}\right).$$

Таким образом, из (4.31)–(4.34) и неравенства треугольника для любого $\lambda \geq \lambda_5$ равномерно по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $x \in [a, b] \subset (0, \pi)$ имеем

$$\begin{aligned}
 & \left| f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} s_{k, \lambda}(x) (f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) \right| \\
 & \leq 57.5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) + \left(\|f\|_{C[0, \pi]} + 5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right)\right) \left\{o(1) + \frac{1}{\pi - b} O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_0 \|T_m\|_{C(K_\varepsilon)} |\sin \sqrt{\lambda} x|}{\tilde{n}(\pi \frac{\tilde{n}+1}{2\tilde{n}} - |\frac{\sqrt{\lambda}}{\tilde{n}} x - \frac{\pi}{2}|)} + m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) O\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \\
& + m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \left[\frac{3}{\pi} \ln \lambda + 11\right].
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Возьмем любой отрезок $[a, b] \subset (0, \pi)$. Выберем произвольное положительное ε . Найдем такое m , для которого $57.5\omega(f, 1/m) \leq \varepsilon/2$. Затем, пользуясь предложением 5, подберем $\lambda_0 \geq \lambda_5$, начиная с которого (т.е. при $\lambda \geq \lambda_0$) будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned}
& \left(\|f\|_{C[0, \pi]} + 5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) \right) \left\{ o(1) + \frac{1}{\pi - b} O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\} \\
& + 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \left[\frac{3}{\pi} \ln \lambda + 11\right] \\
& + \frac{C_0 \|T_m\|_{C(K_\varepsilon)} |\sin \sqrt{\lambda} x|}{\tilde{n} \min((\pi \frac{\tilde{n}+1}{2\tilde{n}} - |\frac{\sqrt{\lambda}}{\tilde{n}} a - \frac{\pi}{2}|), (\pi \frac{\tilde{n}+1}{2\tilde{n}} - |\frac{\sqrt{\lambda}}{\tilde{n}} b - \frac{\pi}{2}|))} \\
& + m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) O\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

одновременно для всех $x \in [a, b]$ и $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$. Значит, для любого положительного ε в силу (4.35) можно найти такое λ_0 , что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и произвольных $x \in [a, b]$, $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ будет справедливо неравенство

$$\left| f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} s_{k, \lambda}(x) (f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) \right| \leq \varepsilon.$$

Таким образом, установлена равномерная внутри интервала $(0, \pi)$ сходимости в (4.14).

Перейдем к доказательству равномерной внутри интервала $(0, \pi)$ сходимости в соотношении (4.17). Используя асимптотические формулы (3.6), (3.19) и (3.20), оценим сумму, представляющую собой часть слагаемых, входящих в сумму из формулы (4.14):

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{\substack{k: 0 \leq k \leq n-1 \\ |x_{k, \lambda} - x| > \varepsilon(\lambda)}} s_{k, \lambda}(x) (f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) \right| \\
& \leq \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) |s_{k_1-1, n}(x)| + \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) |s_{k_2+1, n}(x)| + \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \\
& \quad \times \left(1 + \left|O\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right)\right|\right) \left(\sum_{k=0}^{k_1-2} \frac{1}{|x - x_{k, \lambda}|} + \sum_{k=k_2+2}^{n-1} \frac{1}{|x - x_{k, \lambda}|}\right).
\end{aligned}$$

В случае $k_1 - 2 < 0$ первая сумма в оценке отсутствует. Если же $k_2 + 2 > n - 1$, то вторая сумма равна нулю. Продолжим оценку, используя прием, более

подробно описанный при доказательстве предложения 8. В силу леммы 2

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k: 0 \leq k \leq n-1 \\ |x_{k,\lambda} - x| > \varepsilon(\lambda)}} |s_{k,\lambda}(x)(f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda}))| \\ & \leq \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) O(1) \left(\int_0^{x-\varepsilon(\lambda)/2} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\varepsilon(\lambda)/2}^{\pi} \frac{dt}{t-x} \right) + \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) O(1). \end{aligned}$$

Если $x \leq \varepsilon(\lambda)$, то в оценке отсутствует первый интеграл, а при $x \geq \pi - \varepsilon(\lambda)$ второй интеграл заменяется нулем. Замечая, что $\max_{x \in [0, \pi]} \ln |x(\pi - x)| = 2 \ln(\pi/2)$, в силу (2.4) получаем

$$\sum_{\substack{k: 0 \leq k \leq n-1 \\ |x_{k,\lambda} - x| > \varepsilon(\lambda)}} |s_{k,\lambda}(x)(f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda}))| = o(1). \quad (4.36)$$

Это соотношение выполняется равномерно для всех $x \in [0, \pi]$ и всех $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$. Следовательно, характер сходимости в (4.17) такой же, как и в (4.14), т.е. сходимость будет равномерной внутри интервала $(0, \pi)$.

Для доказательства (4.15) и (4.18) нужно вместо (4.32) сделать преобразование вида

$$\begin{aligned} S_\lambda(T_m - f, x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n s_{k,\lambda}(x)(f(x_{k-1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n s_{k,\lambda}(x)(T_m(x_{k-1,\lambda}) - T_m(x_{k,\lambda})) \\ &\quad + \frac{1}{2} (T_m(x_{n,\lambda}) - f(x_{n,\lambda})) s_{n,\lambda}(x) + \frac{1}{2} (T_m(0) - f(0)) s_{0,\lambda}(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (s_{k,\lambda}(x) + s_{k+1,\lambda}(x)) (T_m(x_{k,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны обоснованию справедливости соотношений (4.14) и (4.17).

Нами установлена равномерная сходимость на любом компакте, содержащемся в интервале $(0, \pi)$, в соотношениях (4.14), (4.15), (4.17) и (4.18). Формула (4.16) получается из (4.14) и (4.15) сложением и делением пополам. Аналогично, из (4.17) и (4.18) следует (4.19).

Покажем, что в случае задачи Коши (1.5) для $f \in C_0[0, \pi]$ в (4.14)–(4.19) имеет место равномерная сходимость на всем отрезке $[0, \pi]$. Для этого продолжим функции q_λ и f :

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} q_\lambda(x) & \text{при } x \in [0, \pi], \\ q_\lambda(\pi) & \text{при } x > \pi, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, \pi], \end{cases} \quad (4.39)$$

а затем для любого $\lambda \geq 1$ сделаем замену независимой переменной

$$t = \frac{x\sqrt{\lambda} + \pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}, \quad x = \frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}t - \frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}. \quad (4.40)$$

Рассмотрим новые функции

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= f\left(\frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}t - \frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}\right), & \hat{y}(t, \hat{\lambda}) &= y\left(\frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}t - \frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}, \lambda\right), \\ \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t) &= \frac{(\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}])^2}{\lambda} q_{\lambda}\left(\frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}t - \frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}\right), \end{aligned} \quad (4.41)$$

где $\hat{\lambda} = (\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}])^2$.

Из непрерывности функции f , продолжения (4.39) и того, что

$$f(0) = f(\pi) = 0,$$

следует принадлежность $\hat{f}$ пространству $C_0[0, \pi]$. Соотношения (4.41) гарантируют справедливость формул

$$\|\hat{f}\|_{C[0, \pi]} = \|f\|_{C[0, \pi]}, \quad \omega(\hat{f}, \delta) = \omega\left(f, \frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}\delta\right) \leq \omega(f, 2\delta) \quad \text{при } \lambda \geq 1. \quad (4.42)$$

В силу теоремы Пикара функции $\hat{y}(t, \hat{\lambda})$ – одновременно решения задач Коши

$$\begin{aligned} \hat{y}'' + (\hat{\lambda} - \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t))\hat{y} &= 0, & \hat{y}(t(0), \hat{\lambda}) &= \hat{y}\left(\frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}, \hat{\lambda}\right) = y(0, \lambda) = 0, \\ \hat{y}'(t(0), \hat{\lambda}) &= \hat{y}'\left(\frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}, \hat{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}} y'(0, \lambda) = \frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{y}'' + (\hat{\lambda} - \hat{q}_{\hat{\lambda}}(t))\hat{y} &= 0, \\ \hat{y}(0, \hat{\lambda}) &= y\left(-\frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}, \lambda\right) = 0, & \hat{y}'(0, \hat{\lambda}) &= (-1)^{[\sqrt{\lambda}]} \frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

В силу (4.38) и (4.41) $\hat{q}_{\hat{\lambda}}(0) = 0$ и для $\lambda \geq 1$

$$\hat{q}_{\hat{\lambda}} \in V_{4\rho_{\lambda}}[0, \pi] \subset V_d[0, \pi], \quad \text{где } d = 4 \sup\left\{\rho_{\lambda} : \sqrt{\lambda} \leq \frac{\sqrt{\hat{\lambda}} + 1}{2}\right\}.$$

Кроме того, из (4.41) следует, что

$$2\sqrt{\lambda} - 1 \leq \sqrt{\hat{\lambda}} \leq 2\sqrt{\lambda} \quad \text{при } \lambda \geq 1, \quad (4.44)$$

следовательно, при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$V_0^{\pi}[\hat{q}_{\hat{\lambda}}] \leq 4V_0^{\pi}[q_{\lambda}] = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right) = o\left(\frac{\sqrt{\hat{\lambda}}}{\ln \hat{\lambda}}\right).$$

Оператор (1.8) инвариантен относительно двухпараметрической группы преобразований независимой переменной, состоящей из однопараметрических групп – масштабных преобразований и преобразований сдвига, т.е. при

$$x \in [0, \pi], \quad t \in \left[\frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}, \pi \right]$$

согласно замене (4.40) и (4.41)

$$S_\lambda(f, x) \equiv \sum_{k=0}^n f(x_{k,\lambda}) \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} \equiv \sum_{k=0}^n \hat{f}(t_{k,\hat{\lambda}}) \frac{\hat{y}(t, \hat{\lambda})}{\hat{y}'(t_{k,\hat{\lambda}}, \hat{\lambda})(t - t_{k,\hat{\lambda}})}.$$

В силу определения функции $\hat{f}(t)$ (4.41) с учетом продолжения функции f вне $[0, \pi]$ (4.39) в эту сумму можно добавить $[\sqrt{\lambda}]$ нулевых слагаемых. Тогда полученное представление $S_\lambda(f, x)$ после замены переменных (4.40), (4.41) окажется сужением значения оператора (1.8) на множество

$$\left\{ t : t \in \left[\frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}, \pi \right] \right\},$$

построенного по решениям задачи Коши (4.43) и примененного к функции $\hat{f}$ на отрезке $t \in [0, \pi]$:

$$S_\lambda(f, x) \equiv \sum_{\hat{k}=0}^{n+[\sqrt{\lambda}]} \hat{f}(t_{\hat{k},\hat{\lambda}}) \frac{\hat{y}(t, \hat{\lambda})}{\hat{y}'(t_{\hat{k},\hat{\lambda}}, \hat{\lambda})(t - t_{\hat{k},\hat{\lambda}})}. \quad (4.45)$$

В силу (4.39) и того, что $f \in C_0[0, \pi]$, к продолженной на отрезок $[-\pi, \pi]$ функции f можно относиться как к сужению элемента пространства $C_{2\pi}$ на отрезок $[-\pi, \pi]$. В качестве T_m в доказательстве теоремы А (см. [7], [40]) С. Б. Стечкин использовал тригонометрический полином наилучшего приближения функции f в $C_{2\pi}$. По теореме Чебышёва об альтернансе для произвольного $\lambda \geq 1$ полином

$$\hat{T}_m(t) = T_m\left(\frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}t - \frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

является полиномом наилучшего приближения функции $\hat{f}$ на отрезке

$$\left[\frac{\pi([\sqrt{\lambda}] - \sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}, \pi \right] \supset [0, \pi].$$

Хотя, с нашей точки зрения, не принципиально, чтобы $\hat{T}_m$ был именно полиномом наилучшего приближения. Главное, чтобы он являлся преобразованием

$$\hat{T}_m(t) = T_m\left(\frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}t - \frac{\pi[\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

некоторого тригонометрического полинома T_m , удовлетворяющего неравенствам (4.1) и (4.2). И в силу (4.40) и (4.41)

$$\|T_m - f\|_{C[-\pi, \pi]} = \|\widehat{T}_m - \widehat{f}\|_d, \quad \text{где } d = C \left[\frac{\pi([\sqrt{\lambda}] - \sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}, \pi \right].$$

Круг

$$\widehat{K}_{1/2} = \left\{ t : t = re^{i\varphi} + \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$$

в комплексной плоскости t с центром в $\pi/2$ радиуса $\pi/2 + 1/2$ при линейном преобразовании (4.40) преобразуется в круг комплексной плоскости x

$$K'(\lambda) = \left\{ x : x = \frac{\sqrt{\lambda} + [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}} re^{i\varphi} + \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{\lambda} - [\sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}}, \quad 0 \leq r \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \right\},$$

который при любом $\lambda \geq 1$ содержится в круге $K' = \{x : |x| \leq 7\}$. Поэтому для всех $\lambda \geq 1$ чебышёвская норма $\|\widehat{T}_m\|_{C(\widehat{K}_{1/2})}$, участвующая в оценке (4.35) (при $\varepsilon = 1/2$ в условии предложения 7) в случае оператора (4.45), не будет превосходить $\|T_m\|_{C(K')} = \max_{x: |x| \leq 7; x \in \mathbb{C}} |T_m(x)|$:

$$\|\widehat{T}_m\|_{C(\widehat{K}_{1/2})} \leq \|T_m\|_{C(K')}, \quad \lambda \geq 1. \quad (4.46)$$

В силу (4.42) для любого положительного ε найдем такое натуральное m , для которого

$$57.5\omega\left(\widehat{f}, \frac{1}{m}\right) \leq 57.5\omega\left(f, \frac{2}{m}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.47)$$

Для $t \in (0, \pi)$ справедливо неравенство (4.35) в случае задачи (4.43) и функции $\widehat{f}$. Так как существует значение $\lambda_6 \geq \lambda_5$ такое, что для всех $\lambda \geq \lambda_6$ справедливы неравенства $t(0) \geq \pi/4$, $t(\pi/2) \leq 7\pi/8$, то в силу (4.41), (4.42), (4.45) и (4.46) можно подобрать $\lambda_7 \geq \lambda_6$, начиная с которого (т.е. при $\lambda \geq \lambda_7$) будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} & \left(\|f\|_{C[0, \pi]} + 5\omega\left(f, \frac{2}{m}\right) \right) \left\{ o(1) + \frac{1}{\pi - t} O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\} + 7m\omega\left(f, \frac{2}{m}\right) \\ & \times O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \left[\frac{3}{\pi} \ln \widehat{\lambda} + 11 \right] + \frac{C_0 \|T_m\|_{C(K')} |\sin \sqrt{\lambda} t|}{(n + [\sqrt{\lambda}]) \left(\pi \frac{n + [\sqrt{\lambda}] + 1}{2(n + [\sqrt{\lambda}])} - \left| \frac{\sqrt{\lambda}}{n + [\sqrt{\lambda}]} t - \frac{\pi}{2} \right| \right)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

для любого $t \in [\pi/4, 7\pi/8]$. Напомним, что константа равномерности в O -симболе Ландау одна для всех функций

$$\widehat{q}_{\lambda} \in V_{4\rho_{\lambda}}[0, \pi] \subset V_d[0, \pi], \quad \text{где } d = 4 \sup \left\{ \rho_{\lambda} : \sqrt{\lambda} \leq \frac{\sqrt{\widehat{\lambda} + 1}}{2} \right\},$$

а из предложения 5 (в случае задачи Коши (4.43)) следует, что для всех достаточно больших $\sqrt{\widehat{\lambda}}$ справедливо неравенство

$$o\left(\frac{1}{\ln \widehat{\lambda}}\right) \leq \sqrt{\widehat{\lambda}} - (n + [\sqrt{\lambda}]) \leq 1 + o\left(\frac{1}{\ln \widehat{\lambda}}\right)$$

(см. также (4.44)). Следовательно, учитывая (4.47) и (4.35) в случае оператора (4.45), получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi/2]} \left| f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) s_{k, \lambda}(x) \right| \\ & \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{t \in [\pi/4, 7\pi/8]} \left| \widehat{f}(t) - S_{\widehat{\lambda}}(\widehat{f}, t) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+[\sqrt{\widehat{\lambda}}]} (\widehat{f}(t_{k+1, \widehat{\lambda}}) - \widehat{f}(t_{k, \widehat{\lambda}})) s_{k, \widehat{\lambda}}(t) \right| = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Замечая, что при продолжении (4.38) вариация функции q_λ при $x > \pi$ остается неизменной, аналогично устанавливаем справедливость соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{x \in [\pi/2, \pi]} \left| f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) s_{k, \lambda}(x) \right| = 0.$$

Таким образом, равномерность по $x \in [0, \pi]$ и $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ в (4.14) установлена. Равномерная сходимость в (4.17) следует из (4.14) и (4.36).

Доказательство (4.15) и (4.18) заключается в повторении этих рассуждений после применения преобразования (4.37) вместо (4.32). Формулы (4.16) и (4.19) получаются соответственно из (4.14) и (4.15) и из (4.17) и (4.18) сложением и делением пополам, так как в силу (4.3) и (3.19) для любого $k = 0, 1, \dots, n$ при достаточно больших λ справедлива оценка

$$|(f(x_{k\pm 1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) s_{k, \lambda}(x)| \leq 3\omega\left(f, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right).$$

Для доказательства соотношений (4.14)–(4.16) и (4.17)–(4.19) в случае, когда операторы (1.8) строятся с помощью решений задачи Коши (1.4), после продолжения функций (4.38) и (4.39) вместо (4.40) сделаем замену

$$t(x) = \frac{\pi}{\pi + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}}} \left(x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right). \quad (4.49)$$

Дифференциальное уравнение в (1.4) преобразуется к виду

$$\check{y}''(t, \check{\lambda}) + (\check{\lambda} - \check{q}_{\check{\lambda}}(t)) \check{y}(t, \check{\lambda}) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \check{\lambda} &= \lambda \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right)^2, \\ \check{q}_{\check{\lambda}}(t) &= \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right)^2 q_\lambda(x(t)). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Обратим внимание на то, что существуют константы $M_2 \geq M_1 > 0$ и $\lambda_8 > 0$ такие, что для всех $\lambda \geq \lambda_8$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$M_1 \sqrt{\lambda} \leq \sqrt{\check{\lambda}} \leq M_2 \sqrt{\lambda}.$$

Следовательно, так же, как и в случае задачи Коши (1.5), устанавливается принадлежность функции $\check{q}_{\check{\lambda}}$ (4.50) шару $V_{\check{\rho}_{\check{\lambda}}}[0, \pi]$ (см. (3.27)) с ограничениями вида (2.1). Далее убеждаемся в справедливости соотношений (4.42) для функции $\check{f}(t) = f(x(t))$, $t \in [0, \pi]$, при $\lambda \geq \max(1, \lambda_8)$. Так же, как и в случае задачи Коши (1.5), вновь установим, что решение задачи Коши (1.4) $y(x, \lambda)$ после продолжения (4.39) и замены переменных (4.49) является также решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \check{y}''(t, \check{\lambda}) + (\check{\lambda} - q_{\check{\lambda}}(t))y(t, \check{\lambda}) &= 0, \\ \check{y}(0, \check{\lambda}) &= 0, \quad \check{y}'(0, \check{\lambda}) = \sqrt{\lambda + h^2(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Теперь осталось повторить рассуждения, завершающие доказательство равномерной на отрезке $[0, \pi]$ сходимости в формулах (4.14)–(4.16) и (4.17)–(4.19), используя в представлении оператора (4.45) вместо решений $\hat{y}$ задачи Коши (4.43) функции $\check{y}$, удовлетворяющие условиям задачи (4.51). При адаптации представления (4.45) к случаю задачи (1.4) после замены (4.49) в сумму вида (4.48) вместо $[\sqrt{\lambda}]$ слагаемых к n нужно добавлять одно слагаемое.

Предложения 9 и 10 доказаны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Если гладкость функции $f \in C_0[0, \pi]$ допускает выбор функции $\vartheta(\lambda)$, удовлетворяющей требованиям (2.4) и такой, что $k_2 \leq k_1$ (тогда в отрезок $[x - \varepsilon(\lambda), x + \varepsilon(\lambda)]$ будет попадать не более одного узла $x_{k, \lambda}$, или такой, что в отрезок $[x - \varepsilon(\lambda), x + \varepsilon(\lambda)]$ будет попадать не более $K(\lambda) = o(\frac{1}{\omega(f, 2\pi/\sqrt{\lambda})})$ узлов $x_{k, \lambda}$, то это означает возможность равномерной на отрезке $[0, \pi]$ и шарах $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ аппроксимации функции f с помощью операторов (1.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу равномерной непрерывности функции f , формул (3.17) или (3.19) и (4.3) для $\lambda > \lambda_0$ в этом случае имеем

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) s_{k, \lambda}(x) \right| \leq \frac{3K(\lambda)}{2} \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} |f(x) - S_\lambda(f, x)| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| f(x) - S_\lambda(f, x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) s_{k, \lambda}(x) \right| + \frac{3K}{2} \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Предложение 11 доказано.

Отсюда, в частности, следует аналог признака Дини–Липшица равномерной сходимости рядов Фурье (см. [26; гл. 4, § 4, теорема 7] и [5; гл. III, § 4, теорема 3.3]), классических интерполяционных многочленов Лагранжа–Чебышёва (см. [5; гл. VIII, § 2, теорема 8.5] и [7]), значений операторов Лагранжа–Штурма–Лиувилля в случае краевых условий третьего рода, из которых удалены

условия первого рода (см. [8] и [10; следствие 2 к теореме 3']), и многих других аппроксимационных конструкций для исследования возможности приближения с помощью операторов (1.8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12 (признак Дини–Липшица). *Если удовлетворено условие (2.1) или (2.2) в случае задач (1.4) или (1.5) соответственно и функция $f \in C_0[0, \pi]$ принадлежит классу Дини–Липшица, т.е. выполняется соотношение*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \ln \lambda = 0,$$

то значения операторов (1.8) сходятся к f равномерно на $[0, \pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взяв в соотношении (2.4)

$$\vartheta(\lambda) = \omega\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) \ln \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi},$$

воспользуемся соответственно формулами (3.17) или (3.19) и предложением 11.

Предложение 12 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13 (принцип локализации). *Для операторов (1.8), построенных в рамках соблюдения условий предложения 9 (или предложения 10), на классе функций $C_0[0, \pi]$ справедлив принцип локализации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in [0, \pi]$, $\delta > 0$ и функции $f, g \in C_0[0, \pi]$ совпадают в δ -окрестности точки x_0 , т.е. $f(x) = g(x)$ для любого $x \in [0, \pi] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда в силу (4.17) и того, что начиная с некоторого λ_0 выполняется

$$\varepsilon'(\lambda) = \max\left(\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}}\right\}, \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\omega(g, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}}\right\}\right) < \delta$$

(см. (2.4)), получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} |S_\lambda(f, x_0) - S_\lambda(g, x_0)| \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| g(x_0) - S_\lambda(g, x_0) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (g(x_{k+1, \lambda}) - g(x_{k, \lambda})) s_{k, \lambda}(x_0) \right| \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| -f(x_0) + S_\lambda(f, x_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) s_{k, \lambda}(x_0) \right| = 0. \end{aligned}$$

Предложение 13 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Если $f \in C[0, \pi]$, то (4.14)–(4.19) выполняются равномерно внутри $(0, \pi)$, т.е. равномерно на любом компакте K , содержащемся в $(0, \pi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем отрезок $[a, b]$ такой, что $K \subset [a, b] \subset (0, \pi)$. Рассмотрим непрерывную функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in \left[\frac{a}{2}, \frac{\pi+b}{2}\right], \\ 0 & \text{при } x = 0, \pi, \\ \text{линейная} & \text{при } x \in (0, \pi) \setminus \left[\frac{a}{2}, \frac{\pi+b}{2}\right]. \end{cases}$$

Устанавливаем равномерную сходимость в (4.14)–(4.19) для функции f с помощью равенств (4.17)–(4.19), примененных к функции F , с учетом (3.19), (3.17) и (4.36).

Предложение 14 доказано.

§ 5. Доказательство основных результатов

Теперь можно приступить к доказательству утверждений, сформулированных в § 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала установим справедливость соотношения (2.8). Вновь в силу инвариантности оператора (1.8) относительно умножения функции $y(x, \lambda)$ на отличную от нуля константу без потери общности считаем $h \equiv 1$. После продолжения (2.6) функция $f \in C_0[0, \pi]$ стала непрерывной на всем множестве действительных чисел с тем же модулем непрерывности. Обозначим $\psi_{k,\lambda} = f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда существует λ_1 такое, что при каждом $\lambda \geq \lambda_1$ в силу (3.19)

$$\max_{k \in \mathbb{Z}} |\psi_{k,\lambda}| \leq \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (5.1)$$

Отсюда и из леммы 2 для достаточно больших λ следует равномерная по $x \in [0, \pi]$, $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $k \in \mathbb{Z}$ оценка

$$|(f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda}))s_{k,\lambda}(x)| \leq 3\omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (5.2)$$

Сначала заметим, что в силу (5.1), (3.20) и (4.3) справедлива асимптотическая формула

$$\left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x - x_{k,\lambda})} \psi_{k,\lambda} - \frac{y(x, \lambda)}{(-1)^k(x - x_{k,\lambda})} \psi_{k,\lambda} \right| = \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right). \quad (5.3)$$

Здесь при условии выполнения требования (2.2), оценка в o -символе Ландау равномерна по $x \in [0, \pi]$, $0 \leq k \leq n$ и $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$.

Обозначим через k_0 номер ближайшего к x узла – нуля $x_{k_0,\lambda}$ функции $y(x, \lambda)$ (если таких узлов два, то обозначим любой из них, например левый). В силу (5.1), (3.19), (3.20), (3.6) и определения индексов k_1, k_2 в (2.5) справедливо соотношение

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x - x_{k,\lambda})} \psi_{k,\lambda} - \frac{y(x, \lambda)}{(-1)^k(x - x_{k,\lambda})} \psi_{k,\lambda} \right| = \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) o(1), \quad (5.4)$$

в котором штрих у суммы обозначает отсутствие трех слагаемых с номерами $k_0 - 1$, k_0 и $k_0 + 1$. Оценив каждое из трех отсутствующих слагаемых с помощью (5.3), из (5.4) получим асимптотическую формулу

$$\frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} \left| \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda})(x - x_{k, \lambda})} \psi_{k, \lambda} - \frac{y(x, \lambda)}{(-1)^k (x - x_{k, \lambda})} \psi_{k, \lambda} \right| = \omega \left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \right) o(1). \quad (5.5)$$

Зафиксируем произвольное $x \in [0, \pi]$. Выберем индекс $p = p(x, \lambda)$ из соображений, что $x \in [x_{p, \lambda}, x_{p+1, \lambda}]$. Тогда в силу (3.19) найдутся $\beta(k, \lambda) = o(1/\ln \lambda)$ (здесь оценка в o -символе Ландау равномерна по $0 \leq k \leq n$) и $\alpha = \alpha(x, \lambda) \in [0, 1)$ такие, что $x = x_{p, \lambda} + \alpha(x_{p+1, \lambda} - x_{p, \lambda})$ и

$$x - x_{k, \lambda} = \frac{p - k + \alpha + \beta(k, \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \pi. \quad (5.6)$$

Разобьем сумму в (4.17) следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} \psi_{k, \lambda} s_{k, \lambda}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k: k_1 \leq k \leq k_2 \\ |p-k| \geq 3}} \psi_{k, \lambda} s_{k, \lambda}(x) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k: k_1 \leq k \leq k_2 \\ |p-k| < 3}} \psi_{k, \lambda} s_{k, \lambda}(x).$$

Используя (5.1) и (5.6) сразу для всех $x \in [0, \pi]$ и λ настолько больших, что для всех k , $0 \leq k \leq n$, верно неравенство $|\beta(k, \lambda)| < 1$, получаем оценку

$$\left| \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k, \lambda}}{p - k + \alpha + \beta(k, \lambda)} - \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k, \lambda}}{p - k} \right| \leq 3\omega \left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \right).$$

Теперь из (3.6), (5.1), (5.2), (5.5), (5.6) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})) s_{k, \lambda}(x) - \frac{\sqrt{\lambda} y(x, \lambda)}{2\pi} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k \psi_{k, \lambda}}{p - k} \right| \\ & \leq \frac{\sqrt{\lambda} |y(x, \lambda)|}{2\pi} \left| \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k, \lambda}}{p - k + \alpha + \beta(k, \lambda)} - \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k, \lambda}}{p - k} \right| \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{k: |p-k| < 3} |\psi_{k, \lambda} s_{k, \lambda}(x)| + \frac{\sqrt{\lambda} |y(x, \lambda)|}{2\pi} \sum_{k: |p-k| < 3} \frac{|\psi_{k, \lambda}|}{|p - k|} + \omega \left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \right) o(1) \\ & = \omega \left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \right) O(1), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где штрих у сумм обозначает отсутствие слагаемого, знаменатель которого обращается в нуль, а константа в O -символе Ландау зависит лишь от скорости изменения радиусов шаров ρ_λ в (2.2).

Далее сгруппируем слагаемые парами. Не более трех слагаемых, для которых не нашлось пар, оцениваем с помощью (5.1) и (3.6). Положив

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2} \right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2} \right],$$

имеем соотношение

$$\left| \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi} \left(\sum'_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k \psi_{k,\lambda}}{p-k} - \sum_{m=m_1}^{m_2} \left\{ \frac{\psi_{2m,\lambda}}{p-2m} - \frac{\psi_{2m-1,\lambda}}{p-2m+1} \right\} \right) \right| = \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) O(1).$$

Отсюда в силу (5.1) и (5.7) после преобразования Абеля получаем оценку

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})) s_{k,\lambda}(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\psi_{2m,\lambda} - \psi_{2m-1,\lambda}}{p-2m} \right| = \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) O(1), \quad (5.8)$$

где штрих у суммы обозначает отсутствие слагаемого, знаменатель которого обращается в нуль. Оценка в O -символе Ландау в (5.8) равномерна по $x \in [0, \pi]$, $h(\lambda) \neq 0$ и всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$. Правда, не следует забывать, что при каждом λ и $x \in [0, \pi]$ в (5.8) нужно соответствующим образом выбирать $p = p(x, \lambda)$.

Пусть $f \in C_0[0, \pi]$ и функции $\vartheta(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ удовлетворяют соотношению (2.4). Тогда соотношение (2.8) следует из (2.5), предложения 10 (точнее – соотношения (4.17)) и (5.8).

Перейдем к доказательству (2.7). После продолжения функций (4.38) и (4.39) задача Коши (1.4) эквивалентна с точностью до преобразования сдвига и сжатия (4.49) задаче Коши (4.51). Причем нуль продолженного на всю ось решения задачи Коши (1.4) с номером $k = -1$ согласно нормировке (1.6) после преобразования (4.49) станет нулем решения $\check{y}(0, \check{\lambda}) = 0$ задачи Коши (4.51) с номером $k = 0$. В силу принадлежности функции f пространству $C_0[0, \pi]$ и того, что (4.51) является задачей Коши вида (1.5), из (2.8) и инвариантности оператора (1.8) относительно линейного преобразования (4.49) следует справедливость соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| S_\lambda(f, x) - f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi y'(x_{-1,\lambda})} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) - f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m} \right| = 0.$$

Здесь сходимость является равномерной по $x \in [0, \pi]$, $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольному действительному $h(\lambda)$. В силу (4.38), (4.39), (4.49) и (4.51) получаем равенство (2.7).

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала рассмотрим случай, когда оператор (1.8) строится с помощью решений задачи Коши (1.5). Вновь в силу инвариантности оператора (1.8) относительно умножения функции $y(x, \lambda)$ на отличную от нуля константу без потери общности считаем $h \equiv 1$. В силу предложения 10, соотношений (2.4), (4.17), (3.6) и (2.8) из равенства (2.10) следует равномерная аппроксимативная сходимость (2.9) значений интерполяционного оператора (1.8) по $x \in [0, \pi]$, $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $h(\lambda) \neq 0$. Достаточность критерия равномерной сходимости установлена.

Для доказательства необходимости заметим, что

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) - f(x_{2m-1,\lambda})}{p - 2m} \right| \\ & - \left| \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) - f(x_{2m-1,\lambda})}{(p \pm 2) - 2m} \right| \\ & \leq \omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) \left(4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+2)} + 2 \right) = 5\omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Пусть существуют последовательности $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\bar{p}_i\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \leq \bar{p}_i \leq n(\lambda_i)$, и положительное число q такие, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1,\lambda_i}) - 2f(x_{2m,\lambda_i}) - f(x_{2m-1,\lambda_i})}{\bar{p}_i - 2m} \right| \geq q > 0.$$

Выбрав i_0 таким образом, чтобы для всех $i > i_0$ выполнялось неравенство

$$5\omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_i}}\right) < \frac{q}{2},$$

из (5.9) получим

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1,\lambda_i}) - 2f(x_{2m,\lambda_i}) - f(x_{2m-1,\lambda_i})}{\bar{p}_i + z_i - 2m} \right| \geq \frac{q}{2} > 0, \quad (5.10)$$

где $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – произвольная последовательность, принимающая значения из множества $\{-2, 0, 2\}$. Теперь, если случится так, что $\bar{p}_i$ окажется равным $n(\lambda_i) - 1$ или $n(\lambda_i)$, то, полагая $\tilde{p}_i = \bar{p}_i - 2$, мы можем образовать новую последовательность $\{\tilde{p}_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что точки $(\tilde{p}_i + 1/2)\pi/\sqrt{\lambda_i}$, в которых достигается экстремум функции $\sin \sqrt{\lambda_i}x$, принадлежат отрезку $[0, \pi]$. Тогда из (4.17), (3.6), (2.8) и (5.10) следует неравенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|S_{\lambda_i}(f, x) - f(x)\|_{C[0, \pi]} \geq \frac{q}{4\pi} > 0.$$

Критерий равномерной сходимости в случае задачи (1.5) доказан. Если в рассуждениях использовать вместо “локальной” формулы (4.17) “глобальную” формулу (4.14), то получим обоснование равносильности соотношений (2.9) и (2.11).

Справедливость критерия равномерной сходимости в случае задачи (1.4) следует из аналогичных рассуждений с использованием теоремы 1 (точнее – соотношения (2.7)) и формул (3.2), (5.9), (5.10). Можно также вновь воспользоваться заменой (4.49), чтобы перейти к задаче (4.51) вида (1.5), как это мы делали, например, при доказательстве равенства (2.7).

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Если $f \in C[0, \pi]$, то функция

$$f(x) - \frac{(f(\pi) - f(0))x}{\pi} - f(0)$$

принадлежит пространству $C_0[0, \pi]$ и удовлетворяет условиям теорем 1 и 2. Следовательно, после продолжения

$$f(x) = \frac{(f(\pi) - f(0))x}{\pi} + f(0)$$

для $x \notin [0, \pi]$, например, из (2.8) в случае задачи Коши (1.5) получим равномерно по $x \in [0, \pi]$ и $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} & \left| T_\lambda(f, x) - f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi h(\lambda)} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1, \lambda}) - 2f(x_{2m, \lambda}) + f(x_{2m-1, \lambda}))}{p - 2m} \right| \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| S_\lambda \left(\left\{ f(\cdot) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \cdot -f(0) \right\}, x \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(f(x) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x - f(0) \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi h(\lambda)} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1, \lambda}) - 2f(x_{2m, \lambda}) + f(x_{2m-1, \lambda}))}{p - 2m} \right| = 0, \end{aligned}$$

так как из (3.19) и (3.6) равномерно по $x \in [0, \pi]$, $h(\lambda) \neq 0$ и $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi h(\lambda)} \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{x_{2m+1, \lambda} - 2x_{2m, \lambda} + x_{2m-1, \lambda}}{p - 2m} \right| \\ &= \left| \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right|. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость (2.14) установлена.

Теорема 3 доказана.

Аналогично доказывается теорема 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Справедливость принципа локализации для операторов (1.9) устанавливается дословным повторением доказательства предложения 13.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В (2.7), (2.8), (2.10), (2.14) и (2.15) границы изменения индексов m и $\tilde{m}$ суммирования можно брать, как в (2.11). Справедливость этого утверждения следует из доказательства теорем 1–4, если в них опустить ту часть, где используется свойство (4.36), т.е. вместо предложения 10 применять предложение 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $f \in C_0[0, \pi]$. Тогда равномерно по $x \in [0, \pi]$ и $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ в силу леммы 2 и (3.19) или (3.17)

$$\begin{aligned} |f(x_{n-p, \lambda}) s_{k, \lambda}(x)| &\leq 3\omega\left(f, \frac{3(p+1)\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right), \\ |f(x_{p, \lambda}) s_{k, \lambda}(x)| &\leq 3\omega\left(f, \frac{3(p+1)\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right), \end{aligned} \tag{5.11}$$

где $0 \leq p \leq n$, $0 \leq k \leq n$.

Перепишем соотношение (4.14) в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \{f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})\} s_{k, \lambda}(x) \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (f(x) - \tilde{A}_\lambda(f, x) - f(x_{n, \lambda}) s_{n, \lambda}(x)) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - A_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} f(x_{0, \lambda}) s_{0, \lambda}(x) - \frac{1}{2} f(x_{n, \lambda}) s_{n, \lambda}(x) \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.11) устанавливаем (2.16).

Теорема 5 доказана.

Комбинируя методы доказательств теорем 3 и 4 с неравенствами (5.11), убеждаемся в справедливости утверждений предложения 1, как в теореме 5.

В заключение выражаю благодарность И. Я. Новикову за внимание к моим исследованиям и ряд ценных замечаний.

Список литературы

- [1] А. Ю. Трынин, “Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке”, *Матем. сб.*, **198**:10 (2007), 141–158; англ. пер.: A. Yu. Trynin, “Tests for pointwise and uniform convergence of sinc approximations of continuous functions on a closed interval”, *Sb. Math.*, **198**:10 (2007), 1517–1534.
- [2] А. Ю. Трынин, “Оценки функций Лебега и формула Неваи для *sinc*-приближений непрерывных функций на отрезке”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:5 (2007), 1155–1166; англ. пер.: A. Yu. Trynin, “Estimates for the Lebesgue functions and the Nevai formula for the sinc-approximations of continuous functions on an interval”, *Siberian Math. J.*, **48**:5 (2007), 929–938.
- [3] И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций*, Изд-во Лен. ун-та, Л., 1977.
- [4] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1949; англ. пер.: I. P. Natanson, *Constructive function theory*, vol. I–III, Ungar Publ., New York, 1964–1965.
- [5] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1976.
- [6] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [7] А. А. Привалов, *Теория интерполирования функций*, кн. 1, 2, Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 1990.
- [8] Г. И. Натансон, “Об одном интерполяционном процессе”, *Ученые записки Лен. пед. ин-та им. А. И. Герцена*, **166** (1958), 213–219.
- [9] В. П. Скляров, “Равномерные приближения функциями Лагерра”, *Дифференциальные уравнения и теория функций. Ряды Фурье, интерполирование*, Межвуз. научн. сб., Саратов, 1981, 93–109.
- [10] А. Ю. Трынин, *О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля*, деп. в ВИНТИ 1763–В91.
- [11] А. Ю. Трынин, *Об одном признаке сходимости интерполяционных процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля*, деп. в ВИНТИ 2201–В91.

- [12] А. Ю. Трынин, “Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля”, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, №9, 60–73; англ. пер.: A. Yu. Trynin, “Absence of stability of interpolation with respect to eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **44**:9 (2000), 58–71.
- [13] С. С. Платонов, “Аналог теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона с точки зрения анализа Фурье–Бесселя”, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 264–272; англ. пер.: S. S. Platonov, “Analog of the Whittaker–Kotel’nikov–Shannon theorem from the point of view of Fourier–Bessel analysis”, *Math. Notes*, **83**:1–2 (2008), 238–245.
- [14] А. С. Жук, В. В. Жук, “Некоторые ортогональности в теории приближения”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 20, Записки науч. сем. (ПОМИ, **314**, ПОМИ, СПб., 2004, 83–123; англ. пер.: A. S. Zhuk, V. V. Zhuk, “Some orthogonalities in approximation theory”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **133**:6 (2006), 1652–1675.
- [15] M. G. Beaty, M. M. Dodson, “The Whittaker–Kotel’nikov–Shannon theorem, spectral translates and Plancherel’s formula”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **10**:2 (2004), 179–199.
- [16] F. Stenger, *Numerical methods based on Sinc and analytic functions*, Springer Ser. Comput. Math., **20**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [17] J. J. Voss, “A sampling theorem with nonuniform complex nodes”, *J. Approx. Theory*, **90**:2 (1997), 235–254.
- [18] G. Hinsen, “Irregular sampling of bandlimited L^p -functions”, *J. Approx. Theory*, **72**:3 (1993), 346–364.
- [19] K. M. McArthur, K. L. Bowers, J. Lund, “The sinc method in multiple space dimensions: model problems”, *Numer. Math.*, **56**:8 (1989), 789–816.
- [20] A. Boumenir, “Computing eigenvalues of lommel-type equations by the sampling method”, *J. Comput. Anal. Appl.* 2, **2**:4 (2000), 323–332.
- [21] A. Mohsen, M. El-Gamel, “A Sinc-collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **58**:3 (2007), 380–390.
- [22] W. Hackbusch, B. N. Khoromskij, “Low-rank Kronecker-product approximation to multi-dimensional nonlocal operators. Part I. Separable approximation of multivariate functions”, *Computing*, **76**:3–4 (2006), 177–202.
- [23] M. El-Gamel, J. R. Cannon, “On the solution a of second order singularly-perturbed boundary value problem by the Sinc–Galerkin method”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **56**:1 (2005), 45–58.
- [24] И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин, “Основные конструкции всплесков”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 999–1028.
- [25] И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин, “Основы теории всплесков”, *УМН*, **53**:6 (1998), 53–128; англ. пер.: I. Ya. Novikov, S. B. Stechkin, “Basic wavelet theory”, *Sb. Math.*, **53**:6 (1998), 1159–1231.
- [26] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., Изд-во АФЦ, М., 1999; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [27] G. G. Walter, X. Shen, “Wavelets based on prolate spheroidal wave functions”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **10**:1 (2004), 1–26.
- [28] P. L. Butzer, R. L. Stens, “A modification of the Whittaker–Kotel’nikov–Shannon sampling series”, *Aequationes Math.*, **28**:1 (1985), 305–311.
- [29] P. L. Butzer, J. R. Higgins, R. L. Stens, “Classical and approximate sampling theorems; studies in the $L^p(\mathbb{R})$ and the uniform norm”, *J. Approx. Theory*, **137**:2 (2005), 250–263.
- [30] А. Ю. Трынин, “Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа–Штурма–Лиувилля”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2000, 140–141.

- [31] А. Ю. Трынин, “Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам”, *Математика. Механика*, **7** (2005), 124–127.
- [32] J.-P. Berrut, “A formula for the error of finite sinc-interpolation over a finite interval”, *Numer. Algorithms*, **45**:1–4 (2007), 369–374.
- [33] А. Ю. Трынин, V. P. Sklyarov, “Error of sinc approximation of analytic functions on an interval”, *Sampl. Theory Signal Image Process.*, **7**:3 (2008), 263–270.
- [34] V. P. Sklyarov, “On the best uniform sinc-approximation on a finite interval”, *East J. Approx.*, **14**:2 (2008), 183–192.
- [35] А. Ю. Трынин, “Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке”, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 6, 66–78; англ. пер.: А. Ю. Trynin, “A criterion for the uniform convergence of sinc-approximations on a segment”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **52**:6 (2008), 58–69.
- [36] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney, 1964.
- [37] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, Наука, М., 1988; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Sturm–Liouville and Dirac operators*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **59**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [38] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа. Часть первая. Основные операции анализа*, Физматлит, М., 1963; пер. с англ.: E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.
- [39] Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич, *Интеграл, мера и производная*, Наука, М., 1964; англ. пер.: G. E. Shilov, B. L. Gurevich, *Integral, measure and derivative: a unified approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [40] С. Б. Стечкин, “О порядке наилучших приближений непрерывных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**:3 (1951), 219–242.

А. Ю. Трынин (А. Yu. Trynin)

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: tayu@rambler.ru, atrynin@gmail.com

Поступила в редакцию

25.12.2007 и 03.08.2009