Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. К. Лейнартас, М. Пассаре, А. К. Цих, Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 10, 87–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:32:50

УДК 517.55+517.965

Е. К. Лейнартас, М. Пассаре, А. К. Цих

Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений

Дано обобщение классической (одномерной) теоремы Пуанкаре об асимптотике решений линейных разностных уравнений на случай многих переменных. Рассмотрены: 1) общие решения систем n уравнений для функции n переменных; 2) решения из специального подпространства для одного (скалярного) уравнения. В классической теореме Пуанкаре предполагалось, что все корни предельного характеристического полинома различны по абсолютной величине. В работе на основе понятия амебы алгебраической гиперповерхности сформулирован многомерный аналог этого свойства полинома, обеспечивающий хорошее асимптотическое поведение для специальных решений соответствующего разностного уравнения.

Библиография: 20 названий.

Введение

Пусть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ – комплекснозначная функция дискретного аргумента $x \in \mathbb{Z}^n$. На векторном пространстве всех таких функций мы рассматриваем линейные операторы сдвига

$$\delta_j f(x) = f(x + e_j) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

С помощью набора $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ можно поставить в соответствие каждому полиномиальному символу $P(x, z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) z^{\alpha}$ с переменными коэффициентами общий скалярный разностный оператор

$$P(x, \delta) f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) f(x + \alpha).$$

Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения при $x \rightarrow \infty$ решений

1) систем однородных разностных уравнений

$$P_1(x, \delta) f(x) = \dots = P_n(x, \delta) f(x) = 0; \quad (1)$$

2) скалярных однородных разностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$P(\delta) f(x) = 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке фондов Гёрана Густавсона (Швеция) и Шведской королевской академии наук. Работа первого и третьего автора поддержана также Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 08-01-00844) и грантом Президента РФ НШ-2427.2008.1.

Система уравнений (1) и уравнение (2) являются естественными обобщениями классического случая (скалярного) разностного уравнения одной переменной ($n = 1$), изученного в фундаментальной работе Пуанкаре [1] (см. также [2]). Ее основным результатом является следующая теорема, где предельный характеристический полином при $x \rightarrow \infty$ обозначается символом $P(\infty, z)$.

ТЕОРЕМА (Пуанкаре). *Предположим, что коэффициенты $a_j(x)$ одномерного разностного уравнения*

$$f(x+k) + a_{k-1}(x)f(x+k-1) + \dots + a_0(x)f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

имеют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_j(x) =: a_j, \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

и все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ характеристического уравнения $P(\infty, z) = 0$ различны по модулю. Тогда для любого решения $f(x)$ уравнения (3), не обращающегося в нуль при $x > x_0$, предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

существует и равен одному из характеристических корней λ_p .

Возвращаясь к многомерным разностным уравнениям, отметим, что в определенном смысле решения системы (1) имеют значительно более простую структуру, чем решения скалярного уравнения (2). Например, если коэффициенты системы уравнений (1) постоянны и все корни $\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(k)}$ характеристической системы $P_1(z) = \dots = P_n(z) = 0$ простые (т.е. кратности один), то общее решение системы (1) может быть представлено как линейная комбинация экспоненциальных решений (см. предложение 3):

$$f(x) = C_1 \lambda_{(1)}^x + \dots + C_k \lambda_{(k)}^x,$$

где для корня $\lambda_{(j)}$ использовано стандартное мультииндексное обозначение $\lambda_{(j)}^x = \lambda_{(j)1}^{x_1} \dots \lambda_{(j)n}^{x_n}$. С другой стороны, решения уравнения (2) могут в общем случае иметь неконтролируемое асимптотическое поведение (см. § 2).

Прежде чем сформулировать обобщение теоремы Пуанкаре для системы (1), отметим следующее. Формально в одномерной теореме Пуанкаре есть только два условия: сходимости коэффициентов и несовпадение модулей корней. Но в действительности требуется также нормирование коэффициента при старшей степени, и возможность такой нормировки отражает тот факт, что корни характеристического многочлена $P(x, z)$ не могут стремиться к бесконечности при $x \rightarrow \infty$. В многомерном случае соответствующее условие следующее: проекция

$$\pi: \{(x, z) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{C}^n; P_1(x, z) = \dots = P_n(x, z) = 0\} \rightarrow \mathbb{Z}^n \quad (4)$$

на решетку $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}_x^n$ должна быть собственным отображением в том смысле, что число прообразов $\pi^{-1}(x)$ конечно и не зависит от x . Например, такому условию удовлетворяет система, у которой старшие однородные составляющие по z полиномов $P_j(x, z)$ не зависят от x и обращаются в нуль одновременно лишь при $z = 0$.

С функцией f ассоциируем вектор

$$\left(\frac{f(x + e_1)}{f(x)}, \dots, \frac{f(x + e_n)}{f(x)} \right),$$

который назовем *вектором Горна*. Эта терминология объясняется тем, что такой вектор участвует в определении общего гипергеометрического ряда, введенного Горном [3].

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что проекция (4) – собственная и для данного направления $q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ каждый из коэффициентов системы (1) стремится к конечному пределу при $x \rightarrow \infty$ вдоль любой последовательности $x^{(l)}$ вида $\{a + ql; l \in \mathbb{N}\}$, где $a \in \mathbb{Z}^n$. Потребуем также, чтобы для корней $\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(k)}$ предельной характеристической системы, соответствующей (1), мономы $\lambda_{(1)}^q, \dots, \lambda_{(k)}^q$ были бы все различны по абсолютной величине. Тогда для любого решения $f(x)$ системы (1), не обращающегося в нуль на $x^{(l)}$ при $l > l_0$, предел вектора Горна*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x + e_1)}{f(x)}, \dots, \frac{f(x + e_n)}{f(x)} \right) \Big|_{x=a+ql}$$

существует и равен одному из характеристических корней $\lambda_{(p)}$ предельной системы.

Для доказательства теоремы 1 вводится понятие обобщенной матрицы Вандермонда и с помощью некоторых результатов теории идеалов в кольце многочленов задача сводится к одномерной теореме Пуанкаре.

Важный класс систем уравнений (1) составляют те, у которых коэффициенты рационально зависят от x ; к их числу, например, относятся голономные системы в теории $\mathcal{D}$ -модулей. Чтобы удовлетворить первому условию теоремы 1, необходимо потребовать, чтобы у коэффициентов $a_\alpha^{(i)}(x)$ i -го уравнения степени числителей не превосходили степеней знаменателей; при этом окажется, что для почти всех направлений q , т.е. для $q \in \mathbb{Q}P_{n-1} \setminus A_{\mathbb{Q}}$, где $A_{\mathbb{Q}}$ – некоторое алгебраическое множество, пределы для $a_\alpha^{(i)}(x)$ существуют и совпадают на последовательностях вида $x = a + ql$.

Рассмотрим два расширения проективного пространства $\mathbb{Q}P_{n-1}$: $\mathbb{Q}P_{n-1} \subset \mathbb{R}P_{n-1} \subset \mathbb{C}P_{n-1}$. Определим в $\mathbb{C}^n$ подмножество

$$\tilde{\chi} = \bigcup_{q \in \mathbb{R}P_{n-1} \setminus A_{\mathbb{R}}} \{z \in \mathbb{C}^n; P_1^{(q)}(z) = \dots = P_n^{(q)}(z) = 0\},$$

где $P_i^{(q)}$ – предельный символ i -го уравнения системы (1) вдоль направления q . Замыкание $\tilde{\chi}$ назовем *характеристическим множеством* для системы (1) и обозначим через χ . В условиях теоремы 1 множество χ локально параметризуется в виде $z = \lambda_{(j)}(q)$. Следовательно, χ является вещественно-алгебраическим множеством, размерность которого может быть равной $0, 1, \dots, n-1$. *Комплексификацию* χ , т.е. замыкание множества всех ростков $z = \lambda_{(j)}(q)$, $q \in \mathbb{C}P_{n-1} \setminus A_{\mathbb{C}}$, обозначим через $\chi_{\mathbb{C}}$.

В § 2 изучаются решения уравнения (2) с постоянными коэффициентами. Так как в многомерной ситуации такое уравнение имеет решения с весьма хаотическим поведением, мы ограничиваем свое внимание на специальных экспоненциальных решениях, которые представляются интегралами голоморфных форм по циклам на характеристическом множестве уравнения. Для формулировки соответствующего варианта теоремы Пуанкаре используется понятие амобы характеристического многочлена (см. [4], [5], а также § 2), с помощью которого формулируется многомерный аналог условия несовпадения абсолютных величин корней полинома (т.е. второго условия теоремы Пуанкаре). В теореме 2 приводится двумерный вариант теоремы Пуанкаре. Для ее доказательства используется известная теорема Пика о связи числа целых точек в целочисленном выпуклом многоугольнике с его площадью. Отметим, что указанному условию на абсолютные величины корней удовлетворяют кривые Гарнака (см. [6] и [7]).

В заключительном § 3 на основе фундаментальных решений уравнения (2) выделяется подкласс экспоненциальных решений, который удовлетворяет системе разностных уравнений, полученной добавлением к уравнению (2) системы $n - 1$ уравнения с переменными коэффициентами. Предельный символ этой системы совпадает с логарифмическим отображением Гаусса [8], [9] для характеристического многочлена уравнения (2). Для упомянутого подкласса решений приводится многомерный вариант теоремы Пуанкаре (теорема 3). Комплексифицированное характеристическое множество χ_S расширенной системы совпадает с характеристическим множеством уравнения (2), а само характеристическое множество $\chi \subset \chi_S = V$ проектируется в контур амобы $\mathcal{A}_V$.

Авторы благодарны участникам семинара по комплексному анализу при Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН за полезные замечания.

§ 1. Исследование системы разностных уравнений

В настоящем параграфе доказывается теорема 1, обобщающая теорему Пуанкаре на случай многомерных систем разностных уравнений вида (1). Прежде чем доказывать теорему, приведем три вспомогательных результата. Обозначим через $\langle P_1(x, z), \dots, P_n(x, z) \rangle$ идеал (зависящий от параметра x) в кольце многочленов $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, порожденный символами операторов $P_j(x, \delta)$ системы (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если разность двух символов $M(x, z)$ и $N(x, z)$ принадлежит идеалу $\langle P_1(x, z), \dots, P_n(x, z) \rangle$, то соответствующие операторы $M(x, \delta)$ и $N(x, \delta)$ совпадают на пространстве решений системы (1).*

Доказательство очевидно.

В предложениях 2 и 3, приведенных ниже, рассматриваются разностные уравнения с постоянными коэффициентами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если фактор-кольцо*

$$Q = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] / \langle P_1(z), \dots, P_n(z) \rangle \quad (5)$$

конечномерно и $\{z^\alpha; \alpha \in B \subset \mathbb{Z}^n\}$ – мономиальный базис для Q , то любое решение системы разностных уравнений

$$P_j(\delta)f(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

единственным образом определяется своими значениями на множестве B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного решения $f(x)$ системы (6) рассмотрим его z -преобразование

$$F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \frac{f(x)}{z^{x+I}}, \quad I = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^n,$$

и предположим, что μ – целочисленный вектор, не лежащий в B . Существуют определенные единственным образом константы c_α такие, что

$$z^\mu = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha z^\alpha + g(z),$$

где $g \in \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Умножая это тождество на F и учитывая, что $g(\delta)f(x) = 0$ для всех x , получим $f(x+\mu) = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha f(x+\alpha)$. В частности, для $x = 0$ имеем

$$f(\mu) = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha f(\alpha),$$

что доказывает наше утверждение.

Отметим, что фактор-кольцо (5) конечномерно тогда и только тогда, когда система алгебраических уравнений

$$P_j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

имеет конечное число корней, и что размерность векторного пространства $\dim Q$ равна числу корней (с учетом кратности) этой системы (см., например, [10; § 5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если все корни $\lambda_{(j)} = (\lambda_{(j)1}, \dots, \lambda_{(j)n})$, $j = 1, \dots, k$, системы (7) простые, то всякое решение $f(x)$ системы (6) является линейной комбинацией экспонент, т.е.

$$f(x) = \sum_{j=1}^k c_j \lambda_{(j)}^x. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что любая функция вида (8) является решением системы (6). Поэтому в силу предложения 2 достаточно доказать, что для произвольного решения f системы (6) существуют константы c_j такие, что

$$\sum_{j=1}^k c_j \lambda_{(j)}^\alpha = f(\alpha) \quad \text{для всех } \alpha \in B.$$

(Напомним, что $\{z^\alpha; \alpha \in B\}$ – мономиальный базис Q .) Для того чтобы доказать это, достаточно проверить, что матрица $W = (\lambda_{(j)}^\alpha)$ обратима; назовем

матрицу W обобщенной матрицей Вандермонда. Итак, пусть $y = (c_\alpha)_{\alpha \in B}$ – произвольное решение системы линейных уравнений $Wy = 0$. Это означает, что многочлен $\sum_{\alpha \in B} c_\alpha z^\alpha$ равен нулю в каждом корне $\lambda_{(j)}$ системы (7), поэтому в силу простоты корней он принадлежит идеалу $\langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Но поскольку $\{z^\alpha; \alpha \in B\}$ – базис для Q , то все коэффициенты c_α должны быть нулевыми. Следовательно, W – обратимая матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим через z^0 моном, равный единице, и дополним его до мономиального базиса z^α , $\alpha \in B = \{\alpha^{(1)} = 0, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(k)}\}$, фактор-кольца (5), где $P_j(z)$ обозначает предельные символы $P_j(\infty, z)$ системы (1) вдоль направления $q \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$. Пользуясь обратимостью обобщенной матрицы Вандермонда, для данного решения $f(x)$ системы (1) найдем функции $u_1(x), \dots, u_k(x)$ такие, что

$$f(x + \alpha) = \sum_{j=1}^k \lambda_{(j)}^\alpha u_j(x), \quad \alpha \in B. \quad (9)$$

В частности, это означает, что решение $f(x)$ представимо в виде суммы

$$f(x) = u_1(x) + \dots + u_k(x). \quad (10)$$

В соответствии с (9) напомним для каждого индекса $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$f(x + \alpha + e_i) = \sum_{j=1}^k \lambda_{(j)}^\alpha u_j(x + e_i), \quad \alpha \in B. \quad (11)$$

Далее отметим, что из предположения о собственности проекции (4) следует, что набор $\{z^\alpha; \alpha \in B\}$ является базисом фактор-кольца

$$Q(x) = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] / \langle P_1(x, z), \dots, P_n(x, z) \rangle$$

для всех достаточно больших значений x . Действительно, из собственности проекции $\pi: \{(x, z); P(x, z) = 0\} \rightarrow \mathbb{Z}_x^n$ следует, что число корней системы $P(x, z) = 0$ одинаково для всех x . Предположим, что существует последовательность точек $x^{(j)} \rightarrow \infty$, для которой набор $\{z^\alpha; \alpha \in B\}$ линейно зависим в $Q(x^{(j)})$,

$$\sum_{\alpha \in B} c_\alpha^{(j)} z^\alpha \in \langle P_1(x^{(j)}, z), \dots, P_n(x^{(j)}, z) \rangle,$$

где векторы $c^{(j)} = (c_\alpha^{(j)}) \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ можно нормировать так, что $|c^{(j)}| = 1$. Выбирая предельную точку $c^0 = (c_\alpha^0)$ последовательности $\{c^{(j)}\}$ на компактной сфере $|c| = 1$, получим ненулевой многочлен $M(z) = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha^0 z^\alpha$, который обращается в нуль во всех корнях предельной системы

$$(P_1(z), \dots, P_n(z)).$$

(Здесь мы используем непрерывную зависимость корней от коэффициентов уравнения.) Поскольку все эти корни простые, то многочлен M должен принадлежать идеалу $\langle P_1, \dots, P_n \rangle$, а это противоречит тому факту, что $\{z^\alpha; \alpha \in B\}$ – базис фактор-кольца.

В соответствии с вышеизложенным мы можем каждый из мономов $z^{\alpha+e_i}$ выразить через элементы базиса z^β , $\beta \in B$, фактор-кольца $Q(x)$, т.е.

$$z^{\alpha+e_i} = \sum_{\beta \in B} C_{\alpha\beta}^{(i)}(x) z^\beta, \quad x = a + ql, \quad (12)$$

с целым достаточно большим l . Из предложения 1 и тождества (9) получаем, что

$$f(x + \alpha + e_i) = \sum_{\beta \in B} C_{\alpha\beta}^{(i)}(x) f(x + \beta) = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{\beta \in B} C_{\alpha\beta}^{(i)}(x) \lambda_{(j)}^\beta \right) u_j(x).$$

Принимая во внимание (11), находим, что векторы $u(x) = (u_1(x), \dots, u_k(x))$ и $u(x + e_i) = (u_1(x + e_i), \dots, u_k(x + e_i))$ связаны тождеством

$$u(x + e_i) = W^{-1} C^{(i)}(x) W u(x) \quad (13)$$

с матрицей Вандермонда W и $C^{(i)} = (C_{\alpha\beta}^{(i)})$. Теперь заметим, что матрицы W и $C^{(i)}(x)$ зависят только от характеристических корней предельной системы для (1) и от выбора базиса $\{z^\alpha; \alpha \in B\}$ для фактор-кольца Q , но не зависят от решения $f(x)$ системы (1). Это означает, что если мы проделаем описанную выше процедуру с решением $g(x)$ предельной системы (с постоянными коэффициентами), которое в силу предложения 3 имеет вид $g(x) = b_1 \lambda_{(1)}^x + \dots + \lambda_{(k)}^x$, то тождество (9) для $g(x)$ можно реализовать функциями вида $u_j(x) = b_j \lambda_{(j)}^x$. Формула (13) примет вид

$$u_j(x + e_i) = \lambda_{(j)i} u_j(x).$$

Но отсюда следует, что предельная матрица $\Lambda_i := W^{-1} C^{(i)}(\infty) W$ является диагональной с элементами $\lambda_{(1)i}, \dots, \lambda_{(k)i}$ на диагонали. А так как матрица $C_{\alpha\beta}^{(i)}$ в формуле (12) зависит от коэффициентов системы непрерывным образом, то можно сделать вывод, что

$$W^{-1} C^{(i)}(x) W = \Lambda_i + \varepsilon(x),$$

где $\varepsilon(x)$ – матрица, стремящаяся к нулевой матрице при $x \rightarrow \infty$ вдоль последовательностей $x^{(l)}$ вида $\{a + ql; l \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{Z}^n$.

Другими словами, тождество (13) может быть переписано следующим образом

$$u_j(x + e_i) = \lambda_{(j)i} u_j(x) + \sum_{p=1}^k \varepsilon_{jp}(x) u_p(x), \quad j = 1, \dots, k, \quad (14)$$

где $\varepsilon_{jp}(a + ql) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Итерируя соотношение (14), получим

$$\begin{aligned} u_j(q(l+1)) &= u_j(ql + q_1 e_1 + \dots + q_n e_n) \\ &= \lambda_{(j)}^q u_j(ql) + \sum_{p=1}^k \tilde{\varepsilon}_{jp}(ql) u_p(ql), \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (15)$$

где функции $\tilde{\varepsilon}_{jp}(ql)$ стремятся к нулю при $l \rightarrow \infty$. Тождества (15) для функций $u_j(ql)$ одного параметра l в точности те же, что использовались в доказательстве одномерной теоремы Пуанкаре (см. [11] или [12]). А поскольку по условию теоремы 1 модули $u_1(ql), \dots, u_k(ql)$ попарно различны, то из упомянутого доказательства вытекает, что одна из функций $|\lambda_{(1)}^q|, \dots, |\lambda_{(k)}^q|$ мажорирует остальные. Следовательно, из (14) получаем равенство

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_p(x + e_1)}{u_p(x)}, \dots, \frac{u_p(x + e_n)}{u_p(x)} \right) \Big|_{x=ql} = \lambda_{(p)}$$

для мажорирующей функции u_p . Учитывая формулу (10), мы теперь получаем утверждение теоремы 1.

§ 2. Скалярные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующие скалярные разностные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$P(\delta)f(x) := \sum_{\alpha \in A} a_\alpha f(x + \alpha) = 0. \quad (16)$$

Предположим, что A – произвольное конечное подмножество целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, т.е. характеристический многочлен $P(z) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha z^\alpha$ может быть многочленом Лорана. В отличие от системы (1) уравнение (16) допускает решения, которые имеют произвольный рост и такое хаотическое поведение, что невозможно описать их асимптотическое поведение. Например, общее решение уравнения

$$f(x_1 + 1, x_2 + 1) - f(x_1 + 1, x_2) - f(x_1, x_2 + 1) + f(x_1, x_2) = 0$$

имеет вид $f(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2)$, где φ и ψ – произвольные функции.

Если говорить о свойствах вектора Горна решения $f(x)$, т.е. формулировать теорему Пуанкаре, то, как и в одномерном случае, она не будет выполняться даже для решений экспоненциального роста, если не требовать дополнительных ограничений на предельное характеристическое множество. Например, для решения

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x_2} [c_1 + c_2(-1)^{x_2}]$$

уравнения

$$f(x_1 + 1, x_2) + f(x_1, x_2 + 2) - f(x_1, x_2) = 0,$$

где c_1 и c_2 произвольные константы, мы получим при $c_1 c_2 \neq 0$, что отношение

$$\frac{f(x_1, x_2 + 1)}{f(x_1, x_2)} = \frac{\sqrt{2} [c_1 - c_2(-1)^{x_2}]}{2[c_1 + c_2(-1)^{x_2}]}$$

не имеет предела вдоль любого направления $(x_1, x_2) = l(q_1, q_2)$ с $q_2 = 1$. Причина состоит в том, что для любой точки (z_1, z_2) характеристического множества $z_1 + z_2^2 - 1 = 0$ найдется точка $(z_1, -z_2)$, принадлежащая этому множеству, с теми же абсолютными величинами обеих координат. Другими словами, на этом

множестве нарушается условие инъективности проекции характеристического множества на пространство модулей координат, а это условие существенно уже в одномерной теореме Пуанкаре. Отметим, что в действительности эта проекция $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (|z_1|, \dots, |z_n|)$ не является инъективной в многомерном случае ($n \geq 2$) всегда. Для того чтобы сформулировать многомерный аналог условия, что корни полинома имеют различные абсолютные значения, удобно использовать понятие амёбы (см. [4], [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Амёбой многочлена Лорана P (или алгебраической гиперповерхности $V = \{z \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n; P(z) = 0\}$) называется образ V при логарифмическом проектировании

$$\text{Log}: (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|).$$

Будем обозначать амёбу через $\mathcal{A}_P$ или $\mathcal{A}_V$.

Приведем необходимые общие факты, касающиеся амёб:

1) Дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_P$ состоит из конечного числа связных компонент $\{E\}$, каждая из которых открыта и выпукла, и каждый прообраз $\text{Log}^{-1}(E)$ есть область сходимости соответствующего ряда Лорана для рациональной функции $1/P$ (см. [4]).

2) Существует инъективное отображение

$$\nu: \{E\} \rightarrow \mathbb{Z}^n \cap N_P$$

такое, что нормальный конус $C_{\nu(E)}$ многогранника Ньютона N_P в точке $\nu(E)$ совпадает с конусом рецессии компоненты E . Целочисленный вектор $\nu(E)$ называется *порядком компоненты E* . Число компонент не менее числа вершин многогранника N_P и не более числа целых точек N_P (см. [5]):

$$\# \text{vert } N_P \leq \#\{E\} \leq \#\{\mathbb{Z}^n \cap N_P\}.$$

Если нижняя оценка достигается, т.е. если число компонент дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_P$ минимально, то амёба называется *солидной*. Для одномерного случая солидность амёбы означает, что все корни многочлена имеют одинаковые абсолютные величины. В настоящей работе нас интересует другой крайний случай: амёбы, которые имеют максимальное число $\#\{\mathbb{Z}^n \cap N_P\}$ связных компонент. Ясно, что в одномерной ситуации ($n = 1$) – это случай, когда все корни P попарно различны.

Под *экспоненциальным решением уравнения (16)* будем (в случае, когда характеристический многочлен $P(z)$ не имеет кратных множителей) понимать интеграл вида

$$f(x) = \int_V z^x d\mu(z), \quad x \in \mathbb{Z}^n, \quad (17)$$

где $d\mu$ – мера с носителем на характеристическом множестве $V = \{P(z) = 0\}$. При наличии кратных множителей следует ввести под знак интеграла дифференциальный оператор $\mathcal{D}_z$ (см. [13]).

Для того чтобы была возможность контролировать асимптотическое поведение интеграла (17) с помощью хорошо известных методов, мы ограничимся

мерами $d\mu$, которые представляются голоморфными $(n-1)$ -формами ω на V . Таким образом, класс допустимых решений уравнения (16), который мы будем рассматривать, дается интегралами

$$f(x) = \int_c z^x \omega(z), \quad x \in \mathbb{Z}^n, \quad (18)$$

где $\omega \in \Omega^{n-1}(V)$ – голоморфные формы на V , а c – цикл на V размерности $n-1$. В случае негладкой гиперповерхности V под голоморфной $(n-1)$ -формой понимается абелев дифференциал, т.е. голоморфная форма на регулярных точках V , “не имеющая вычетов относительно сингулярности” (см. [14], [15]).

Отметим, что при $n = 2$ некоторые циклы c на V определяются как поднятия на V относительных 1-циклов пары $(\mathcal{A}_V, \partial\mathcal{A}_V)$, где $\partial\mathcal{A}_V$ – граница амобы $\mathcal{A}_V$ (см. рис. 1).

Рис. 1. Относительные циклы амобы многочлена $1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2$ (слева) и контур этой амобы (справа)

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n = 2$. Предположим, что амоба $\mathcal{A}_V$ характеристического множества уравнения (16) имеет максимальное число компонент дополнения и граница $\partial\mathcal{A}_V$ – гладкая. Тогда для любого ненулевого допустимого решения (18) и для почти любого из направлений $q \in \mathbb{Q}P_1$, на которых f не обращается в нуль, предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x + e_1)}{f(x)}, \frac{f(x + e_2)}{f(x)} \right) \Big|_{x=a+kq}$$

существует и равен точке $z \in V$.

Класс характеристических кривых, удовлетворяющих условию теоремы 2, дается так называемыми кривыми Гарнака – вещественными алгебраическими кривыми V , для которых Log-проекция на амобу $\mathcal{A}_V$ является $(2 \rightarrow 1)$ -отображением (см. [7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $n = 2$. Предположим, что $\mathcal{A}_V$ имеет максимальное число компонент дополнения, и граница $\partial\mathcal{A}_V$ – гладкая. Тогда $V \cap \text{Log}^{-1}(x)$ состоит из одной точки для каждого $x \in \partial\mathcal{A}_V$. В частности, вещественные алгебраические кривые, комплексификация которых имеет максимальную амобу с гладкой границей, являются гладкими гарнаковскими кривыми.

Прежде чем доказывать предложение, введем понятия контура амобы и логарифмического отображения Гаусса. *Контуром* $\mathcal{C}$ амобы $\mathcal{A}_V$ называется множество критических значений отображения $\text{Log}|_V$ (см. [9]). Нетрудно видеть, что $\partial\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Понятие контура тесно связано с логарифмическим отображением Гаусса (см. [8])

$$\gamma: V \rightarrow \mathbb{C}P_{n-1},$$

которое любой регулярной точке $z \in V$ ставит в соответствие комплексную нормаль к гиперповерхности $\log(V) \subset \mathbb{C}^n$ в точке $\log(z) = \log|z| + i \arg z$. В терминах логарифмического отображения Гаусса контур задается так: $\mathcal{C} = \text{Log}(\gamma^{-1}(\mathbb{R}P_{n-1}))$. Другими словами, точка $z \in V$ является критической точкой отображения $\text{Log}|_V$ тогда и только тогда, когда значение $\gamma(z)$ вещественно. Множество $\gamma^{-1}(\mathbb{R}P_{n-1})$ критических точек совпадает с объединением по всем $q \in \mathbb{R}P_{n-1}$ решений систем

$$P(z) = q_2 z_1 \partial_1 P(z) - q_1 z_2 \partial_2 P(z) = \dots = q_n z_1 \partial_1 P(z) - q_1 z_n \partial_n P(z) = 0.$$

Степень логарифмического отображения Гаусса равна нормированному объему многогранника Ньютона (см. [6]):

$$\deg \gamma = n! \text{Vol}(N_P). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Из хорошо известной формулы Пика мы находим, что

$$2 \text{Area}(N_P) = 2 \cdot \#N_P - b - 2 = 2i + b^0 + v - 2,$$

где i , b , v обозначают соответственно число внутренних, граничных и вершинных целочисленных точек многоугольника N_P , а $b^0 = b - v$ есть число точек в относительной внутренности граней многоугольника N_P . Так как мы предположили, что $\mathcal{A}_P$ имеет максимальное число связных компонент, то всякой целочисленной точке $\alpha \in N_P$ соответствует связная компонента E_α порядка α . Каждой внутренней целочисленной точке $\alpha \in N_P^0$ соответствует ограниченная компонента E_α , которая вследствие гладкости своей границы определяет по крайней мере две критические точки для каждого направления $q \in \mathbb{R}P_1$ (точки p и r на рис. 2, где исходящий из них вектор соответствует направлению q).

Для точки β из относительной внутренности границы N_P существует по крайней мере одна такая точка (точка t на рис. 2). Компоненты E_δ , соответствующие всем вершинам N_P , определяют не менее чем $v - 2$ критические точки. Действительно, сумма внутренних углов v -угольника равна $\pi(v - 2)$ и для каждого π радиан направлений $q \in \mathbb{R}P_1$ найдется по крайней мере одна критическая точка (точка s на рис. 2). Из изложенного выше следует, что мощность $\#\gamma^{-1}(q)$ не меньше, чем выражение в правой части формулы Пика, т.е.

$$\#\gamma^{-1}(q) \geq 2 \text{Area}(N_P).$$

Однако ввиду (19) в действительности мы получаем здесь равенство. Отсюда следует, что все прообразы $\gamma^{-1}(q)$ отображаются в границу $\partial\mathcal{A}_V$ и для каждой точки $x \in \partial\mathcal{A}_V$ множество $V \cap \text{Log}^{-1}(x)$ состоит в точности из одной точки.

Рис. 2. Граничные нормали с выбранным направлением q для амобы гарнаковского многочлена $-z + 6zw + z^2w - 5zw^2 + w^3$

Поскольку для каждого $q = (q_1 : q_2) \in \mathbb{Q}P_1$ мы указали 2 Area N_P прообразов $\gamma^{-1}(q)$ логарифмического отображения Гаусса, сужение на $V \cap \{z : P'_{z_2} \neq 0\}$ (где локальной координатой на V является переменная z_1) функции

$$g(z) := \frac{z_1}{z_2} \frac{P'_{z_1}}{P'_{z_2}} - \frac{q_1}{q_2}$$

имеет лишь простые нули. Выражение для первой производной

$$\frac{\partial}{\partial z_1} (z^q|_V) = \left(q_1 \frac{z^q}{z_1} + q_2 \frac{z^q}{z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z_1} \right) \Big|_V = - \left[z^q \frac{z_1}{q_2} g \right] \Big|_V$$

показывает, что множество критических точек мономиальной функции $z^q|_V$ состоит из $\gamma^{-1}(q)$. Кроме того, из этого выражения видно, что вторая производная $\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} (z^q|_V)$ отлична от нуля в $\gamma^{-1}(q)$, т.е. все критические точки для $z^q|_V$ – морсовские. Легко проверяется, что критические точки для модуля $|z^q|_V$ такие же, как у $z^q|_V$, и они тоже морсовские. Поэтому вблизи границы $\partial \mathcal{A}_V$ логарифмическая проекция $\text{Log} : V \rightarrow \mathcal{A}_V$ является $(2 \rightarrow 1)$ -отображением, т.е. V – гарнаковская кривая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В условиях теоремы комплексная кривая $V = \{z \in (\mathbb{C} \setminus 0)^2; P(z) = 0\}$ гладкая, поэтому ее группа гомологий $H_1(V)$ порождается каноническими разрезами римановой поверхности, соответствующей V , и окружностями вокруг выколотых точек на торической компактификации $\bar{V}$ (см. [6]). Последние окружности являются поднятиями относительных 1-циклов на амбе $\mathcal{A}_V$, представляемых отрезками на щупальцах амобы, которые соединяют пары соседних компонент связности. Канонические разрезы являются поднятиями границ ограниченных компонент дополнения амобы и относительных 1-циклов амобы, которые соединяют ограниченные компоненты с некоторыми другими компонентами дополнения $\mathcal{A}_V$. Доказательство

теоремы достаточно привести для допустимого решения (18), в котором интегрирование производится по базисному циклу c . Для $x = ql$ интеграл (18) представляет собой интеграл Лапласа, поскольку $z^x = e^{l \cdot \langle q, \ln z \rangle} \Big|_V$.

Очевидно, критические точки фазы $\varphi(z) = \langle q, \ln z \rangle \Big|_V$ совпадают с критическими точками монома z^q . Поэтому согласно доказанному выше они проектируются на контур амебы $\mathcal{A}_V$, т.е. согласно предложению 4 на границу $\partial \mathcal{A}_V$, причем в точки, где нормаль к $\partial \mathcal{A}_V$ равна q . Таким образом,

$$\max_c \min_{z \in c} \operatorname{Re} \varphi(z) = \max_c \min_{z \in c} \langle q, \ln |z| \rangle,$$

где c пробегает свой класс гомологий, может реализоваться лишь в точках $z(q) \in V$, для которых образ $\gamma(z)$ логарифмического отображения Гаусса равен q . Иными словами, $z(q) \in \gamma^{-1}(q)$.

В силу предположения о гладкости $\partial \mathcal{A}_V$ для почти всех направлений $q \in \mathbb{Q}P_1$ точка минимакса $z(q)$ единственная и, как мы знаем, морсовская. По методу перевала [16] $f(lq)$ имеет асимптотику

$$f(lq) \sim cl^{-1/2} z(q)^{l \langle q, \ln z(q) \rangle}, \quad l \rightarrow \infty,$$

где коэффициент c не зависит от l . Отсюда легко получается утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. В некоторых случаях условие, что амеба имеет максимальное число компонент, не является необходимым для справедливости теоремы. Например, из любой негладкой гарнаковской кривой малой деформацией можно получить гладкую гарнаковскую кривую, для которой условие максимальной выполняется. Заключение теоремы можно получить теперь предельным переходом. Интересно отметить, что соответствующие допустимые решения разностного уравнения играют роль дискретных функций Грина [17]. Например, рассмотрим дискретное двумерное уравнения Лапласа

$$f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y) = 0 \quad (20)$$

с характеристическим многочленом

$$P(z, w) = z + \frac{1}{z} + w + \frac{1}{w} - 4.$$

Критическое множество для отображения $\operatorname{Log} \Big|_V$ состоит из решений систем уравнений

$$z + z^{-1} + w + w^{-1} - 4 = z(1 - z^{-2}) - qw(1 - w^{-2}) = 0,$$

где q принимает значения из $\mathbb{R}P_1$. Для каждого q точка $(1, 1)$ является решением системы кратности два. Площадь многогранника Ньютона N_P равна двум, так что из (19) следует, что другие два корня системы должны при отображении перейти в границу амебы. Это означает, что контур амебы $\mathcal{C}$ состоит из границы $\partial \mathcal{A}_V$ с добавленной точкой $(0, 0) = (\log 1, \log 1)$. Точка $(0, 0)$ не имеет других прообразов на V , кроме $(1, 1)$, поскольку сумма $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} + e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ может быть равна четырем только при $\varphi = \theta = 0$. Более того, для каждой

Рис. 3. Амеба и контур многочлена $z + z^{-1} + w + w^{-1} - 4$

границей точки $u \in \partial \mathcal{A}_V$ может найтись только одна точка в $V \cap \text{Log}^{-1}(u)$, так как всякая такая точка должна быть критической, а существует только четыре критические точки для каждого фиксированного q (см. рис. 3; отметим, что начало координат является изолированной точкой контура).

Дискретная *функция Грина* для уравнения (20) определяется интегралом

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{i(ux+vy)}}{4(\sin^2(u/2) + \sin^2(v/2))} du dv.$$

Она удовлетворяет (20) всюду, кроме точки $(0, 0)$. Предел соответствующего вектора Горна

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x+1, y)}{f(x)}, \frac{f(x, y+1)}{f(x)} \right) \Big|_{x=kq}$$

равен сингулярной точке $(1, 1)$ для любого направления q . Это следует из асимптотической формулы для f (см. [17]).

§ 3. Ассоциированная система для скалярного уравнения и многомерная версия теоремы Пуанкаре для него

Ниже будет показано, что логарифмическое отображение Гаусса определяет естественный способ дополнения скалярного уравнения (16) до системы уравнений вида (1). Этой новой системе уравнений будут удовлетворять функции, которые окажутся естественным подклассом допустимых решений (18) уравнения (16). В отличие от общего интеграла (18), в котором экспоненциальное ядро z^x интегрируется с голоморфным весом по циклу на характеристическом множестве V , решения в подклассе определены как интегралы по специальным циклам в дополнении $\mathbb{C}^n \setminus V$. Построение этого класса мы начнем с интегрального представления для фундаментального решения уравнения (16). Более точно, каждой связной компоненте E_ν дополнения амебы $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ можно поставить в соответствие интеграл

$$\mathcal{P}_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\nu} \frac{z^x}{P(z)} \frac{dz}{z}, \quad (21)$$

где $\Gamma_\nu = \text{Log}^{-1} u$, $u \in E_\nu$, $\frac{dz}{z} = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$. Этот интеграл играет роль фундаментального решения для уравнения (16). Действительно, он удовлетворяет соотношению

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha \mathcal{P}_\nu(x + \alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\nu} z^x \frac{dz}{z} = \delta_{x,0},$$

здесь $\delta_{x,0}$ означает функцию, равную нулю для всех $x \in \mathbb{Z}^n$, кроме точки $x = (0, \dots, 0)$, в которой ее значение равно единице.

Отметим, что $\mathcal{P}_\nu$ — это коэффициент ряда Лорана функции $1/P(z)$, сходящегося в области $\text{Log}^{-1} E_\nu$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Фундаментальное решение $\mathcal{P}_\nu$ уравнения (16) удовлетворяет также следующей системе уравнений с переменными коэффициентами:*

$$\sum_{\alpha \in A} (x_1 \alpha_j - x_j \alpha_1) a_\alpha f(x + \alpha) = 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n, \quad j = 2, 3, \dots, n. \quad (22)$$

Назовем систему (22) *ассоциированной для скалярного уравнения (16)*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим рациональную дифференциальную $(n-1)$ -форму

$$\sigma_j = z_1 z_j z^{x-I} \partial_j P dz[1] - (-1)^{j-1} z_1 z_j z^{x-I} \partial_1 P dz[j],$$

где $dz[j] = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{j-1} \wedge dz_{j+1} \wedge \dots \wedge dz_n$.

Непосредственно проверяется, что $dP \wedge \sigma_j = 0$ и

$$d\sigma_j = [x_1 z_j \partial_j P - x_j z_1 \partial_1 P] z^{x-I} dz. \quad (23)$$

Отсюда следует, что дифференциальные формы $d\sigma_j/P$ точные, потому что $d\sigma_j/P = d(\sigma_j/P)$. Поэтому имеем

$$\int_{\Gamma_\nu} \frac{d\sigma_j}{P} = 0, \quad j = 2, \dots, n.$$

Подставим (23) в последнее равенство и, учитывая (21), получим тождества (22) для $f = \mathcal{P}_\nu$, так как $z_j \partial_j P = \sum \alpha_j a_\alpha z^\alpha$.

Теперь мы можем рассмотреть подкласс решений уравнения (16), удовлетворяющих также системе (22). Положим $x = a + lq$ для некоторого фиксированного направления $q = (q_1 : \dots : q_n) \in \mathbb{Q}P_{n-1}$, где $l \rightarrow \infty$. Если $q_1 \neq 0$, то предельная характеристическая система уравнений (16) и (22) будет иметь вид

$$\begin{cases} P(z) = 0, \\ q_1 z_j \partial_j P - q_j z_1 \partial_1 P = 0, \end{cases} \quad j = 2, \dots, n. \quad (24)$$

Согласно § 2 (перед доказательством предложения 4) решения системы (24) проектируются в контур амебы при отображении Log характеристического множества V уравнения (16).

Таким образом, из теоремы 1 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Если для направления $q \in \mathbb{Q}P_{n-1}$ все корни $\lambda_{(j)}(q)$ предельной характеристической системы (24) простые, причем модули $|\lambda_{(j)}^q(q)|$ попарно различны, то для любого ненулевого решения системы (16), (22) предел логарифмического вектора Горна*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \text{Log} \left(\frac{f(x + e_1)}{f(x)}, \dots, \frac{f(x + e_n)}{f(x)} \right) \Big|_{x=a+lq}$$

существует и принадлежит контуру амeby $\mathcal{A}_V$.

На основе фундаментальных решений построим соответствующий класс решений расширенной системы (16), (22). Он состоит из линейных комбинаций всех сдвигов $\delta^\beta \mathcal{P}_\nu(x) = \mathcal{P}_\nu(x + \beta)$ фундаментальных решений

$$f(x) = \sum_{\nu, \beta} c_{\nu\beta} \delta^\beta \mathcal{P}_\nu(x), \quad \sum_{\nu} c_{\nu\beta} = 0. \quad (25)$$

Отметим, что $\sum_{\beta} c_{\nu\beta} \delta^\beta \mathcal{P}_\nu(x)$ — это коэффициенты ряда Лорана (сходящегося в $\text{Log}^{-1} E_\nu$) рациональной функции $(\sum_{\beta} c_{\nu\beta} z^\beta) / P(z)$. При $n = 2$ асимптотика коэффициентов ряда Тейлора была изучена в статье [18], однако отсутствие понятий амeby и ее контура на тот момент не позволили рассмотреть случай $n > 2$. Связь рядов Лорана с разностными уравнениями была описана в [19]. Очевидно, что функции (25) удовлетворяют как уравнению (16), так и ассоциированной системе (22) для всех $x \in \mathbb{Z}^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *В случае, когда характеристическое множество V уравнения (16) гладкое, функции (25) являются допустимыми решениями уравнения (16), т.е. их можно представить в виде (18).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что семейство $\{\delta^\beta(\mathcal{P}_\nu - \mathcal{P}_\mu)\}$ порождает подкласс (25), так что достаточно любую разность $\delta^\beta \mathcal{P}_\nu - \delta^\beta \mathcal{P}_\mu$ представить интегралом вида (18). Для этого покажем, что разность циклов $\Gamma_\nu - \Gamma_\mu$ гомеоморфна в $\mathbb{C}^n \setminus V$ трубке над циклом $V \cap \text{Log}^{-1}(h)$, где h — отрезок, соединяющий точки $u_\nu \in E_\nu$ и $u_\mu \in E_\mu$ (эти точки определяют циклы Γ_ν и Γ_μ). Действительно, разность $\Gamma_\nu - \Gamma_\mu$ является границей $(n+1)$ -мерной цепи $\text{Log}^{-1}(h)$, которая гомеоморфна цилиндру над n -мерным тором. Трубка над $V \cap \text{Log}^{-1}(h)$ делит $\text{Log}^{-1}(h)$ на две части, одна из которых ограничена этой трубкой и границей цепи $\text{Log}^{-1}(h)$. Отсюда следует, что разность $\Gamma_\nu - \Gamma_\mu$ гомологична трубке над циклом $V \cap \text{Log}^{-1}(h)$.

Если теперь применить формулу Лере (см. [20; п. 21]) к интегралу, представляющему разность $\delta^\beta(\mathcal{P}_\nu - \mathcal{P}_\mu)$, то получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\nu - \Gamma_\mu} \frac{z^\beta z^{x-I} dz}{P(z)} = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{V \cap \text{Log}^{-1}(h)} z^x \omega(z),$$

где $\omega(z) = z^{\beta-I} dz/dP|_V$ — форма-вычет Лере для $z^{\beta-I} dz/P$ в комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Это — интеграл требуемого вида (18).

Список литературы

- [1] H. Poincaré, “Sur les Equations Linéaires aux Différentielles Ordinaires et aux Différences Finies”, *Amer. J. Math.*, **7**:3 (1885), 203–258.
- [2] В. И. Буслаев, “О теореме Пуанкаре и ее приложениях к вопросам сходимости цепных дробей”, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 13–28; англ. пер.: V. I. Buslaev, “Poincaré’s theorem and its applications to the convergence of continued fractions”, *Sb. Math.*, **189**:12, 1749–1764.
- [3] J. Horn, “Ueber die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen”, *Math. Ann.*, **34**:4 (1889), 544–600.
- [4] I. M. Gel’fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Math. Theory Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
- [5] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, “Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas”, *Adv. Math.*, **151**:1 (2000), 45–70.
- [6] G. Mikhalkin, “Real algebraic curves, the moment map and amoebas”, *Ann. of Math.* (2), **151**:1 (2000), 309–326.
- [7] G. Mikhalkin, H. Rullgård, “Amoebas of maximal area”, *Internat. Math. Res. Notices*, 2001, № 9, 441–451.
- [8] M. M. Kapranov, “A characterization of A -discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map”, *Math. Ann.*, **290**:1 (1991), 277–285.
- [9] M. Passare, A. Tsikh, “Amoebas: their spines and their contours”, *Idempotent mathematics and mathematical physics*, Proceedings of the international workshop (Vienna, Austria, 2003), Contemp. Math., **377**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 275–288.
- [10] V. I. Arnol’d, S. M. Gusejn-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, vol. I: The classification of critical points, caustics and wave fronts, Monogr. Math., **82**, Birkhäuser, Boston, MA, 1985; пер. с рус.: В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 1: Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов, Наука, М., 1982.
- [11] O. Perron, “Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung”, *J. Reine Angew. Math.*, **137** (1909), 6–64.
- [12] A. O. Gel’fond, *Differenzenrechnung*, Hochschulbücher für Mathematik, **41**, VEB, Berlin, 1958; пер. с рус.: А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, М.–Л., ГИТТЛ, 1952.
- [13] В. М. Трутнев, А. К. Цих, “О структуре вычетных потоков и функционалов, ортогональных идеалам в пространстве голоморфных функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:5 (1995), 203–224; англ. пер.: V. M. Trutnev, A. K. Tsikh, “On the structure of residue currents and functionals orthogonal to ideals in the space of holomorphic functions”, *Izv. Math.*, **59**:5, 1083–1102.
- [14] J.-E. Björk, “Residues and $\mathcal{D}$ -modules”, *The legacy of Niels Henrik Abel*, Papers from the Abel bicentennial conference (University of Oslo, Oslo, Norway, 2002), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2004, 605–651.
- [15] G. Henkin, M. Passare, “Abelian differentials on singular varieties and variations on a theorem of Lie–Griffiths”, *Invent. Math.*, **135**:2 (1999), 297–328.
- [16] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
- [17] R. J. Duffin, D. H. Shaffer, “Asymptotic expansion of double Fourier transforms”, *Duke Math. J.*, **27**:4 (1960), 581–596.
- [18] А. К. Цих, “Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных”, *Матем. сб.*, **182**:11 (1991), 1588–1612; англ. пер.: A. K. Tsikh, “Conditions for absolute convergence of the Taylor coefficient series of a meromorphic function of two variables”, *Math. USSR-Sb.*, **74**:2 (1993), 337–360.

- [19] Е. К. Лейнартас, “Кратные ряды Лорана и разностные уравнения”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:2 (2004), 387–393; англ. пер.: E. L. Leinartas, “Multiple Laurent series and difference equations”, *Siberian Math. J.*, **45**:2 (2004), 321–326.
- [20] J. Leray, “Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe. (Problème de Cauchy. III)”, *Bull. Soc. Math. France*, **87** (1959), 81–180.

Е. К. Лейнартас (E. K. Leinartas)

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

E-mail: lein@mail.ru

Поступила в редакцию

27.12.2007

М. Пассаре (M. Passare)

Stockholm University, Sweden

E-mail: passare@math.su.se

А. К. Цих (A. K. Tsikh)

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

E-mail: tsikh@lan.krasu.ru