Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд, Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 11, 75–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:03:00

УДК 517.983.36

Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд

Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева

Известно, что эллиптическая система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ порядка l слабо коэрцитивна в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, т.е. оценивает в L^∞ -норме все дифференциальные мономы порядка $\leq l-1$ на функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В работе найдены условия, при которых справедливо обратное утверждение, а также изучены другие свойства слабо коэрцитивных систем.

Получен аналог теоремы де Лю и Миркила для операторов с переменными коэффициентами: показано, что оператор $P(x, D)$ от $n \geq 3$ переменных и с постоянной главной частью слабо коэрцитивен в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ в точности тогда, когда он эллиптичен. Аналогичный результат получен для систем $\{P_j(D)\}_1^N$ с постоянными коэффициентами при условии $n \geq 2N+1$ и некоторых ограничениях на символы $P_j(\xi)$.

Дано полное описание слабо коэрцитивных в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ дифференциальных полиномов от двух переменных. Построены широкие классы слабо коэрцитивных в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптических систем с постоянными коэффициентами.

Библиография: 32 названия.

§ 1. Введение

Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, $l := (l_1, \dots, l_n)$ – вектор с натуральными компонентами. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему $\{P_j(x, D)\}_1^N$ дифференциальных операторов вида

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha: l| \leq l} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad (1.1)$$

с измеримыми коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot)$. Пусть $P_j^l(x, D) := \sum_{|\alpha: l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha$ – l -главная часть оператора $P_j(x, D)$, а $P_j^l(x, \xi) := \sum_{|\alpha: l|=1} a_{j\alpha}(x) \xi^\alpha$ – его главный l -квазиоднородный символ. Напомним следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (см. [1]–[3]). Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1.1) называют l -квазиэллиптической, если

$$(P_1^l(x, \xi), \dots, P_N^l(x, \xi)) \neq 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

и, в частности, эллиптической порядка l , если $l_1 = \dots = l_n = l$.

Известно, что эллиптический оператор порядка l существует не для каждого l : согласно результату Я. Б. Лопатинского [4] (см. также [5], [6; гл. 2, § 1], [7]) при $n \geq 3$ эллиптический оператор $P(D)$ является правильно эллиптическим и, в частности, имеет четный порядок. Однако аналогичный вопрос для l -квазиэллиптических операторов, по-видимому, оставался неисследованным. В § 3

мы даем, используя теорему Борсука–Улама (теорема 2.1), полное описание тех векторов l , для которых существуют l -квазиэллиптические системы. Так, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $n \geq 2N+1$. Для существования l -квазиэллиптических систем $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1.1) необходимо и достаточно, чтобы среди чисел $l_1, \dots, l_n$ было не более $2N-1$ нечетных.

Пусть $\{P_j(x, D)\}_1^N$ – система дифференциальных операторов вида (1.1) с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot) \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$. Напомним следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 (см. [1; гл. III, § 11, п. 11.1]). Система дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1.1) называется *коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива оценка

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha: l| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad (1.2)$$

в которой C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Хорошо известно (см. [1], [3], [8], [9]), что при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω система (1.1) l -квазиэллиптична в точности тогда, когда она коэрцитивна в $\dot{W}_p^l(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$. При $p = 1, \infty$ оценка (1.2) для l -квазиэллиптической системы утрачивает силу. Именно, одним из авторов было доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4 (см. [10]–[12; § 5, теорема 3]). Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $Q(x, D)$, $\{P_j(x, D)\}_1^N$ – дифференциальные операторы вида

$$Q(x, D) = \sum_{|\alpha: l| \leq 1} b_\alpha(x) D^\alpha, \quad P_j(x, D) = \sum_{|\alpha: l| \leq 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \quad (1.3)$$

где $x \in \Omega$, $j \in \{1, \dots, N\}$, с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot), b_\alpha(\cdot) \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$ при $|\alpha: l| < 1$ и $a_{j\alpha}(\cdot), b_\alpha(\cdot) \in C^1(\Omega)$ при $|\alpha: l| = 1$. Тогда из оценки

$$\|Q(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.4)$$

при $p = \infty$ следует равенство

$$Q^l(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(x) P_j^l(x, \xi), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

где $\lambda_j(\cdot) \in C^1(\Omega)$. Если коэффициенты операторов $Q(x, D)$ и $\{P_j(x, D)\}_1^N$ постоянны, то функции $\lambda_j(x)$ в (1.5) также постоянны, $\lambda_j(x) \equiv \lambda_j$.

В [11], [12] найден критерий коэрцитивности системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ в $\dot{W}_\infty^l(\Omega)$, из которого следует, что l -квазиэллиптическая система является коэрцитивной в $\dot{W}_\infty^l(\Omega)$ в исключительных случаях (в однородном случае критерий коэрцитивности найден еще ранее в [10]). Тем не менее для l -квазиэллиптической

системы $\{P_j\}_1^N$ верна оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad (1.6)$$

$$f \in C_0^\infty(\Omega),$$

при $p \in (1, \infty)$ вытекающая из доказанной в [1], [8] (см. также [3]) оценки (1.2), а при $p = \infty$ доказанная в [11], [12]. Отметим также, что невозможность оценки вида (1.2) при $p = 1$ вытекает из результатов Орнштейна [13]. В то же время наличие оценки (1.6) при $p = 1$ доказано (для случая операторов с постоянными коэффициентами) в работах [14], [15].

Эти результаты делают естественным следующее введенное в [15]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1.1) называют *слабо коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\mathring{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива оценка (1.6), в которой C_1 и C_2 не зависят от f .

В случае изотропного пространства Соболева $\mathring{W}_p^l(\Omega)$, т.е. при $l_1 = \dots = l_n = l$, неравенство $|\alpha : l| < 1$ в (1.6) принимает обычный вид: $|\alpha| < l$.

Для случая одного оператора еще ранее де Лю и Миркил [16] показали, что при $n \geq 3$ эллиптический оператор $P(D) = P_1(D)$ может быть охарактеризован при помощи априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 1.6 (см. [16; с. 119]). *При $n \geq 3$ эллиптичность дифференциального полинома $P(D)$ порядка $l \geq 2$ эквивалентна его слабой коэрцитивности в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$.*

Условие $n \geq 3$ в теореме 1.6 существенно. Так, в [16; с. 123] приведен принадлежащий Мальгранжу пример слабо коэрцитивного в $\mathring{W}_\infty^2(\mathbb{R}^2)$ неэллиптического оператора $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$.

В настоящей работе мы рассматриваем в основном однородные системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1.1), состоящие из операторов с однородными старшими символами порядка l , откладывая изучение квазиоднородного случая до следующей публикации. Во избежание повторения мы приводим здесь лишь те “анизотропные” результаты, доказательства которых практически не отличаются от соответствующих “изотропных”.

Значительная часть наших результатов группируется вокруг теоремы 1.6 де Лю и Миркила. Именно, мы распространяем теорему 1.6 на систему операторов $\{P_j(D)\}_1^N$ с постоянными коэффициентами (теорема 4.9), а также доказываем ее аналог для оператора $P(x, D)$ с переменными коэффициентами (теорема 4.11). Для доказательства последнего результата мы применяем новый метод, в существенном базирующийся на предложении 1.4, а также на некоторых топологических соображениях (резюмированных в предложении 4.1, (iii)). Отметим, что метод работы [16] неприменим для случая операторов с переменными коэффициентами, хотя при доказательстве теоремы 4.9 о системах с постоянными коэффициентами мы наряду с топологическими соображениями используем некоторые соображения из [16].

Кроме того, мы даем полное описание слабо коэрцитивных в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ операторов от двух переменных (теоремы 5.1 и 5.4). В частности, для этого мы

показываем, что нетривиальные нули старшего символа слабо коэрцитивного оператора простые (предложение 4.1, (iv)). Заметим, что для доказательства как последнего утверждения, так и теоремы 4.11 – аналога теоремы 1.6 – применяется анизотропная версия предложения 1.4. Такое применение предложения 1.4 к доказательству “изотропных” результатов основывается на принципиальной возможности неоднозначного выделения главной части дифференциального оператора.

Отметим еще, что топологические соображения используются также в § 4 и для доказательства аналога теоремы 1.2 для случая слабо коэрцитивных систем (теорема 4.3). Именно, привлекая теорему Борсука (теорема 2.3) и теорию степени отображений, мы показываем, что (при некоторых ограничениях) система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ имеет четный порядок.

Интересно отметить также, что в § 6 при построении слабо коэрцитивных, но не эллиптических систем появились новые несимметричные и нетрадиционные для эллиптической теории мультипликаторы в L^p , $p \in [1, \infty]$. Например, при доказательстве теоремы 6.2 показано, что если $P(\xi)$ – эллиптический полином степени l , то

$$m(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi^\alpha}{P(\xi) \sum_{k=2}^n (1 + \xi_k^2)} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } |\alpha| \leq l + 1, \alpha_1 \leq l - 1,$$

т.е. $m(\cdot)$ является мультипликатором в $L^1(\mathbb{R}^n)$, а значит, и в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1, \infty]$. Здесь через $\chi(\cdot)$ обозначена соответствующая “срезающая” функция. Для проверки включения $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1, \infty)$ можно воспользоваться теоремой Михлина–Лизоркина (см. [14], а также [17], [18]), что недостаточно, однако, для проверки включения $m \in \mathcal{M}_1$. Для доказательства последнего мы используем результат из [14].

Остановимся кратко на содержании работы. В § 2 приводятся предварительные топологические и аналитические результаты, необходимые для дальнейшего. В § 3 доказаны критерий существования l -квазиэллиптических систем (теорема 1.2) и критерий устойчивости систем порядка l относительно возмущений порядка $\leq l - 1$ (предложение 3.10). Свойствам слабо коэрцитивных систем в изотропных пространствах $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$ посвящен § 4. В нем также доказываются аналоги теоремы 1.6 для случаев однородной системы (теорема 4.9) и оператора с переменными коэффициентами (теорема 4.11). В § 5 мы даем полное описание слабо коэрцитивных в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$, но не эллиптических операторов от двух переменных (теоремы 5.1 и 5.4). Наконец, § 6 посвящен построению широких классов слабо коэрцитивных в изотропном пространстве $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптических систем (теорема 6.2).

Часть результатов работы анонсирована (без доказательств) в [15], [19].

Результаты работы неоднократно обсуждались с Л. Р. Волевичем, которому мы выражаем свою искреннюю признательность. Мы также признательны О. В. Бесову, Л. Д. Кудрявцеву, С. И. Похожаеву и участникам их семинара, на котором докладывалась работа, а также Л. Л. Оридороге за полезные обсуждения. И наконец, мы глубоко благодарны рецензенту за тщательное прочтение рукописи и указание на ряд неточностей, допущенных в первоначальном варианте работы.

Мы посвящаем эту работу светлой памяти замечательного математика и человека Л. Р. Волевича. М. М. Маламуда связывала тесная дружба с Л. Р. Волевичем, который оказал значительное влияние на понимание им эллиптической теории.

§ 2. Предварительные сведения

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+$ (n – число сомножителей), $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$. Далее, $D_k := -i \partial / \partial x_k$, $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ полагаем $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}$. Если $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, то $|\alpha : l| := \alpha_1 / l_1 + \cdots + \alpha_n / l_n$.

Пусть также $|x| := (\sum_1^n x_k^2)^{1/2}$, $\langle x, y \rangle := \sum_1^n x_k y_k$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$; $S_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = r\}$ – n -мерная сфера радиуса r в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S^n := S_1^n$; $B_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ – замкнутый шар радиуса r .

Обозначим через $\mathbb{I} = \mathbb{I}_n$ тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, а через $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ – алгебру мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.

2.1. Топологические сведения.

ТЕОРЕМА 2.1 (теорема Борсука–Улама; см. [20; гл. 5, § 8, п. 9]). *Для всякого непрерывного отображения $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, найдется такая точка $x \in S^n$, что $f(x) = f(-x)$.*

Напомним, следуя [20; гл. 4, § 7], [21], понятие степени отображения. Известно, что n -мерная гомотопическая группа сферы S^n изоморфна $\mathbb{Z}$, $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. Каждое непрерывное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ индуцирует групповой гомоморфизм $f_*: \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_n(S^n)$ и, значит, имеет вид $f_*: \mathbb{Z} \rightarrow k\mathbb{Z}$. Число k , не зависящее от выбора образующей в группе $\pi_n(S^n)$, называют *степенью отображения* f и обозначают $\deg f$.

Так как n -мерная группа гомологий сферы $H_n(S^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, то степень отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ можно определить, используя гомоморфизм $f_*: H_n(S^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S^n; \mathbb{Z})$. Оба определения тождественны.

Далее, степени гомотопных отображений равны. Верно и обратное (теорема Хопфа).

Так как $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ гомотопически эквивалентно S^n , то $\pi_n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \simeq \pi_n(S^n)$, и можно говорить о степени отображения $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Мы будем неоднократно использовать следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2.2 (см. [21; § 1.4]). *Непрерывное отображение $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ продолжается до отображения замкнутого шара B_1^{n+1} в $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ в точности тогда, когда $\deg f = 0$.*

ТЕОРЕМА 2.3 (теорема Борсука о степени отображения; см. [21; § 1.7]). *Пусть f – нечетное отображение сферы S^n в себя, $f(-x) = -f(x)$. Тогда его степень $\deg f$ нечетна.*

2.2. Аналитические результаты.

ЛЕММА 2.4 (теорема Эберлейна; см. [16; с. 114]). *Пусть μ – конечная борелевская мера в $\mathbb{R}^n$ и M – ее преобразование Фурье–Стилтьеса. Тогда постоянная функция $s \equiv \mu(0)$ есть равномерный предел функций $\pi * M$, где π – вероятностная мера (т.е. $\pi(\mathbb{R}^n) = 1$).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 (см. [16; с. 113, предложение 1]). Пусть $Q(D), \{P_j(D)\}_1^N$ суть дифференциальные операторы вида (1.3) с постоянными коэффициентами. Тогда оценка (1.4) при $p = \infty$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ эквивалентна тождеству

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) P_j(\xi) + M_{N+1}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

где $\{M_j(\cdot)\}_1^{N+1}$ – преобразования Фурье–Стилтьеса конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6 (см. [16; с. 114]). Пусть $\{P_j(D)\}_1^N$ – система, удовлетворяющая оценке (1.4) при $p = \infty$, $\Omega = \mathbb{R}^n$, и старшие формы $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$ линейно независимы. Пусть также $\{\lambda_j\}_1^N$ – коэффициенты из равенства (1.5), $\{\mu_j\}_1^N$ – конечные борелевские меры, $\hat{\mu}_j = M_j$, где $\{M_j(\cdot)\}_1^N$ – функции из (2.1). Тогда $\lambda_j = \mu_j(0)$, $j \in \{1, \dots, N\}$.

Следующее предложение хорошо известно специалистам. Так, оно упоминается (без доказательства) в [22]. Приведем его с доказательством для полноты изложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $p \in [1, \infty]$, $Q(D), \{P_j(D)\}_1^N$ – дифференциальные операторы вида (1.3) с постоянными коэффициентами. Тогда из априорной оценки (1.4) вытекает алгебраическое неравенство для символов

$$|Q(\xi)| \leq C'_1 \sum_{j=1}^N |P_j(\xi)| + C'_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. (i) Пусть $p \in [1, \infty)$ и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi \not\equiv 0$. Обозначим $\psi_r(x) := \psi(x/r) = \psi(x_1/r, \dots, x_n/r)$, $r > 0$. Непосредственно проверяется, что

$$\|D^\alpha \psi_r P(D) e^{i\langle x, \xi \rangle}\|_p = r^{-|\alpha|} r^{n/p} |P(\xi)| \|D^\alpha \psi\|_p. \quad (2.3)$$

Применяя формулу Лейбница (см. [9; гл. II, § 2.1]) к $f_r(x) := \psi_r(x) e^{i\langle x, \xi \rangle}$, имеем

$$P(D) f_r = P(D) (\psi_r e^{i\langle x, \xi \rangle}) = \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{|\alpha|!} \right) D^\alpha \psi_r P^{(\alpha)}(D) e^{i\langle x, \xi \rangle}, \quad (2.4)$$

где $P^{(\alpha)}(D)$ – оператор с символом $D^\alpha P(\xi)$. Учитывая (2.3) и (2.4), имеем оценки

$$\begin{aligned} \|P_j(D) f_r\|_p &\leq r^{n/p} |P_j(\xi)| \|\psi\|_p + o(r^{n/p}), \\ \|Q(D) f_r\|_p &\geq r^{n/p} |Q(\xi)| \|\psi\|_p + o(r^{n/p}). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (1.4), придем к оценке

$$r^{n/p} |Q(\xi)| \|\psi\|_p + o(r^{n/p}) \leq C'_1 \sum_{j=1}^N r^{n/p} |P_j(\xi)| \|\psi\|_p + o(r^{n/p}) + C'_2 r^{n/p} \|\psi\|_p. \quad (2.5)$$

Деля обе части (2.5) на $r^{n/p} \|\psi\|_p > 0$ и переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, получим (2.2).

(ii) При $p = \infty$ доказательство аналогично; нужно лишь заметить, что при $p = \infty$ в формуле (2.3) множитель $r^{n/p}$ равен $r^{n/\infty} = r^0 = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. (i) Предложение 1.4 остается в силе (вместе с доказательством), если все дифференциальные мономы D^α зависят лишь от части переменных $D_1, \dots, D_m$ в соответствии с разложением $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, т.е. $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_m^{\alpha_m} \otimes \mathbb{I}_{n-m}$. В этом случае равенство (1.5) вытекает из неравенства (1.4) с $p = \infty$, в котором $f \in C_0^\infty(\Omega_m)$, где $\Omega_m = \pi_m \Omega$ – проекция области Ω на $\mathbb{R}^m$.

(ii) Неравенство (2.2) является следствием оценки (1.4), но не эквивалентно ей. Например, если $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2$, а $Q(\xi) = \xi_1^2 - \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2$, то $Q(\xi) < \frac{3}{2}P(\xi)$. В то же время в силу предложения 1.4 оценка (1.4) не имеет места при $p = \infty$.

(iii) Предложение 2.7 неверно для произвольных областей Ω . Так, если Ω ограничена и $p = 2$, то по теореме Хёрмандера [9; § 2.3] оценка (1.4) верна при $P(D) = D_1^2 - D_2^2$, $Q(D) = D_1$, хотя неравенство $|\xi_1| \leq C[|\xi_1^2 - \xi_2^2| + 1]$ не имеет места.

2.3. Мультипликаторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9 (см. [23; гл. IV, § 3]). Пусть $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называют *мультипликатором* в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если оператор свертки $f \rightarrow T_\Phi f =: \mathcal{F}^{-1} \Phi \mathcal{F} f$ отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Простое описание пространств $\mathcal{M}_p$ мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$ известно лишь при $p = 1, 2, \infty$. Так, алгебра $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty$ есть множество образов конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье–Стилтьеса (см. [23; гл. IV, § 3]):

$$\Phi \in \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty \iff \Phi(\xi) = \hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x), \quad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty. \quad (2.6)$$

Для остальных значений $p \in (1, \infty)$ известны лишь достаточные условия включения $\Phi \in \mathcal{M}_p$ (см. [1], [7], [23]). Отметим, что в силу (2.6) $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_p$ при $p \in (1, \infty)$.

Нам понадобится следующая теорема из [14] о мультипликаторах в L^1 , являющаяся внешним (довольно грубым) аналогом теоремы Михлина–Лизоркина (см. [1]).

ТЕОРЕМА 2.10 (см. [14; § 3, теорема 2]). Пусть $\Phi \in C(\mathbb{R}^n)$ и при некоторых постоянных $\delta \in (0, 1)$ и $A_\delta > 0$ удовлетворяет следующим условиям:

(i)

$$\prod_{j=1}^n (1 + |\xi_j|)^\delta |\Phi(\xi)| \leq A_\delta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \quad (2.7)$$

(ii) для любых мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^n$ таких, что $\alpha + \beta = (1, 1, \dots, 1)$, существуют производные $D^\alpha \Phi$ и выполнено неравенство

$$\prod_{j \in \mathbb{N}_\alpha} |\xi_j|^{1-\delta} (1 + |\xi_j|^{2\delta}) \prod_{j \in \mathbb{N}_\beta} (1 + |\xi_j|)^\delta |D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \Phi(\xi)| \leq A_\delta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.8)$$

Здесь $\mathbb{N}_\alpha \subset \{1, \dots, n\}$ – носитель мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, т.е. множество индексов $j \in \{1, \dots, n\}$, для которых $\alpha_j > 0$.

Тогда $\Phi \in \mathcal{M}_1$ и, значит, $\Phi \in \mathcal{M}_p$ при $p \in [1, \infty]$.

Отметим, что более общие результаты о мультипликаторах в $L^1(\mathbb{R}^n)$ содержатся в [24]–[27; теорема 6.4.2], однако в применении к оценкам дифференциальных операторов функции Φ являются, как правило, рациональными функциями от ξ и $\bar{\xi}$, и проверка условий (2.7), (2.8) для них столь же проста, сколь и проверка соответствующих условий теоремы Михлина–Лизоркина.

2.4. Свойства l -квазиэллиптических систем. Хорошо известны (см. [1], [2], [28]) следующие свойства l -квазиэллиптической системы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $\{P_j(D)\}_1^N$ – l -квазиэллиптическая система вида (1.1) с постоянными коэффициентами. Тогда:

(i) множество нулей системы $\{P_j(\xi)\}_1^N$ компактно и, следовательно, содержится в некотором шаре B_r^n ;

(ii) справедлива двусторонняя оценка

$$C_1 \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{2l_k} \leq \sum_{j=1}^N |P_j^l(\xi)|^2 \leq C_2 \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{2l_k}, \quad C_1, C_2 > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.9)$$

§ 3. Эллиптические и квазиэллиптические системы

3.1. При каких l существуют l -квазиэллиптические системы? В этом пункте мы докажем теорему, сформулированную во введении, теорему 1.2, описывающую все наборы $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, для которых существуют l -квазиэллиптические системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Необходимость. Пусть $n = 2N + 1$.

(i) Пусть вначале все l_j нечетны. Покажем, что $P_j^l(x, -\xi) = -P_j^l(x, \xi)$. Пусть $\alpha \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n = 1$. Так как все l_j нечетны, то это равенство принимает вид $\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n = k_0$, где все k_j нечетны, $k_j = 2k'_j + 1$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Отсюда $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2k'_0 + 1 - \sum_{j=1}^n 2\alpha_j k'_j = 2p + 1$. Поэтому

$$P_j^l(x, -\xi) = \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)(-\xi)^\alpha = \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)(-1)^{|\alpha|} \xi^\alpha = -P_j^l(x, \xi).$$

Далее, считая $x_0 \in \Omega$ фиксированным, рассмотрим отображение $T := (T_1, \dots, T_{2N}): \mathbb{S}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$, в котором

$$T_{2j-1}(\xi) := \operatorname{Re} P_j^l(x_0, \xi), \quad T_{2j}(\xi) := \operatorname{Im} P_j^l(x_0, \xi), \quad j \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.1)$$

Оно нечетно, $T(-\xi) = -T(\xi)$, и согласно теореме 2.1 $T(\xi^0) = 0$ в некоторой точке $\xi^0 \in \mathbb{S}^{2N}$. Но это противоречит l -квазиэллипτικости системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$.

(ii) Допустим, что лишь одно из чисел l_j четно, например $l_1 = 2^m l'_1$, а остальные l'_1 и l_j нечетны, $j \in \{2, \dots, n\}$. Покажем, что если $|\alpha : l| = 1$, то α_1 также делится на 2^m , т.е. $\alpha_1 = 2^m \alpha'_1$, $\alpha'_1 \in \mathbb{N}$. Равенство $|\alpha : l| = 1$ приводится к следующему:

$$\alpha_1 k_1 + 2^m(\alpha_2 k_2 + \dots + \alpha_n k_n) = 2^m k_0,$$

в котором все k_j нечетны. Значит, $\alpha_1 = 2^m \alpha'_1$.

Пусть, далее, $l' := (l'_1, l_2, \dots, l_n) := (l'_1, l'_2, \dots, l'_n)$ и $|\alpha : l| = 1$. Тогда $\alpha_1 = 2^m \beta_1$, и, полагая $\eta_1 = \xi_1^{2^m}$, $\eta_j = \xi_j$ и $\beta_j = \alpha_j$, $j \in \{2, \dots, n\}$, запишем полином $P_j^l(\xi)$ в виде

$$P_j^l(\xi) = \tilde{P}_j^{l'}(\eta), \quad \text{где} \quad \tilde{P}_j^{l'}(\eta) := \sum_{|\beta:l'|=1} a_{j\beta} \eta^\beta, \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Система $\{\tilde{P}_j^{l'}(\eta)\}_1^N$ l' -квазиэллиптическая. В самом деле, пусть $\tilde{P}_j^{l'}(\eta^0) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, $\eta^0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Так как все l'_j нечетны, то согласно (i) $\tilde{P}_j^{l'}(\eta)$ нечетны, $\tilde{P}_j^{l'}(-\eta^0) = -\tilde{P}_j^{l'}(\eta^0) = 0$. Поэтому можно считать, что $\eta_1^0 > 0$. Но тогда, полагая $\xi_1^0 := (\eta_1^0)^{1/2^m}$, $\xi_j^0 := \eta_j^0$ при $j \in \{2, \dots, n\}$, получим $P_j^l(\xi^0) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, откуда $\xi^0 = 0$, что противоречит предположению $\eta^0 \neq 0$. Итак, система $\{\tilde{P}_j^{l'}(\eta)\}_1^N$ l' -квазиэллиптическая, причем все l'_j нечетны. Согласно (i) это невозможно. Значит, среди чисел l_j не менее двух четных, т.е. при $n = 2N + 1$ теорема доказана.

(iii) Пусть $n > 2N + 1$, но число нечетных l_j больше $2N - 1$. Не нарушая общности, считаем, что $l_1, \dots, l_{2N}$ нечетны. Легко видеть, что “суженная” система $\{P_j(x_0, \xi_1, \dots, \xi_{2N+1}, 0, \dots, 0)\}_1^N$ является l' -квазиэллиптической, где $l' = (l_1, \dots, l_{2N+1})$. Поэтому согласно (i) и (ii) получаем противоречие. Таким образом, число нечетных среди $l_1, \dots, l_n$ не превосходит $2N - 1$.

Достаточность. Пусть $n = 2N + 1$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, где $l_1, \dots, l_{n-2}$ нечетны, а l_{n-1} и l_n четны. Тогда система

$$P_1(\xi) = \xi_1^{l_1} + i\xi_2^{l_2}, \quad \dots, \quad P_{N-1}(\xi) = \xi_{n-4}^{l_{n-4}} + i\xi_{n-3}^{l_{n-3}}, \quad P_N(\xi) = i\xi_{n-2}^{l_{n-2}} + \xi_{n-1}^{l_{n-1}} + \xi_n^{l_n}$$

является l -квазиэллиптической, причем ровно два числа из l_j четны.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если $n \geq 3$, то l -квазиэллиптические операторы существуют в точности тогда, когда среди чисел $l_1, \dots, l_n$ не более одного нечетного.

В однородном случае теорема 1.2 принимает следующий вид.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $l_1 = \dots = l_n = l$ и система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1.1) эллиптическая. Если $n \geq 2N + 1$, то l четное.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. (i) Условие $n \geq 2N + 1$ теоремы 1.2 является точным. Именно, при $n = 2N$ и любом $l = (l_1, \dots, l_{2N})$ рассмотрим систему операторов

$$P_1(D) := D_1^{l_1} + iD_2^{l_2}, \quad \dots, \quad P_N(D) := D_{2N-1}^{l_{2N-1}} + iD_{2N}^{l_{2N}}. \quad (3.2)$$

Система (3.2) l -квазиэллиптическая. То есть при $n \leq 2N$ теорема 1.2 неверна.

(ii) В случае $N = 1$ более сильное, чем в теореме 1.2, утверждение принадлежит Я. Б. Лопатинскому: при $n \geq 3$ эллиптический оператор $P(D)$ является правильно эллиптическим и, в частности, имеет четный порядок (см. [4]–[7]).

3.2. Характеризация l -квазиэллиптических систем посредством априорных оценок. Охарактеризуем l -квазиэллиптические системы с помощью априорных оценок в изотропных пространствах Соболева $\mathring{W}_p^l(\Omega)$. Напомним (см. [1], [8], [29]) следующий критерий коэрцитивности системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ в $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$.

ТЕОРЕМА 3.4 (см. [1; гл. III, § 11], [8], [29]). Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $\{P_j(x, D)\}_1^N$ – система дифференциальных операторов вида (1.1), в которой $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha : l| \leq 1$ и $a_{j\alpha}(\cdot) \in C(\Omega)$ при $|\alpha : l| = 1$.

Для того чтобы система (1.1) была коэрцитивна в анизотропном пространстве Соболева $\mathring{W}_p^l(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, необходимо, а в случае ограниченной области Ω и достаточно, чтобы она была l -квазиэллиптической.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. В книге [3; гл. I, § 4 и гл. V, § 2] вводятся и изучаются N -квазиэллиптические операторы $P(x, D)$, определяемые при помощи многогранника Ньютона $N(P)$. В частности, N -квазиэллиптический оператор является l -квазиэллиптическим в точности тогда, когда при каждом $x \in \Omega$ многогранник Ньютона $N(P(x))$ является симплексом с вершинами в нуле и точках $(0, \dots, l_j, \dots, 0)$ (компонента l_j стоит на j -м месте). В [3; гл. VI, § 4] N -квазиэллиптические операторы охарактеризованы посредством априорной оценки

$$\sum_{\alpha \in N(P)} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|P(x, D)f\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad (3.3)$$

существенно развивающей критерий коэрцитивности в $\mathring{W}_2^l(\Omega)$.

Критерий коэрцитивности в $\mathring{W}_\infty^l(\Omega)$ получен в [12; § 5, теорема 4]. Из этого критерия (как, впрочем, и из предложения 1.4) вытекает, что l -квазиэллиптическая система не является, вообще говоря, коэрцитивной в $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ при $p = 1, \infty$. Однако она является слабо коэрцитивной в $\mathring{W}_\infty^l(\Omega)$ (см. [12; § 5]) и в $\mathring{W}_1^l(\Omega)$ (см. [14; п. 4, теорема 3] и [15], где это доказано для операторов с постоянными коэффициентами).

ТЕОРЕМА 3.6 (см. [1], [12]). Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\{P_j(x, D)\}_1^N$ – l -квазиэллиптическая система операторов вида (1.1). Если $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha : l| \leq 1$ и $a_{j\alpha}(\cdot) \in C(\Omega)$ при $|\alpha : l| = 1$, $j \in \{1, \dots, N\}$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется не зависящая от $p \in (1, \infty]$ (в случае операторов с постоянными коэффициентами – от $p \in [1, \infty]$) константа $C_\varepsilon > 0$ такая, что справедлива оценка

$$\sum_{|\alpha : l| < 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_\varepsilon \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.4)$$

В частности, l -квазиэллиптическая система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1.1) слабо коэрцитивна в пространствах $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ при $p \in (1, \infty]$ (в случае операторов с постоянными коэффициентами – при $p \in [1, \infty]$).

В следующей теореме мы показываем, что при каждом $p \in (1, \infty]$ неравенство (3.4) с любым $\varepsilon > 0$ характеризует эллиптические системы в классе всех слабо коэрцитивных в $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ систем с постоянными коэффициентами в их главных частях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть $l_1 = \dots = l_n = l$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $\{P_j(x, D)\}_1^N$ – система операторов вида (1.1), главные части которых имеют постоянные коэффициенты, т.е. $P_j^l(x, D) = P_j^l(D)$, и $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha : l| < 1$, $j \in \{1, \dots, N\}$ и $p \in (1, \infty]$. Тогда система операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ эллиптика в точности тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ с некоторой константой $C_\varepsilon > 0$ справедлива оценка (3.4).

Критерий сохраняет силу и при $p = 1$, если коэффициенты операторов $P_j(x, D)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, постоянны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из теоремы 3.6.

Достаточность. Пусть выполнена оценка (3.4). Полагая

$$\tilde{P}_j(x, D) := P_j(x, D) - P_j^l(D),$$

из неравенства треугольника получим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon' \sum \|P_j^l(D)f\|_p + C_{\varepsilon'} \|f\|_p &\geq \varepsilon' \sum \|P_j(x, D)f\|_p \\ &- \varepsilon' \sum \|\tilde{P}_j(x, D)f\|_p + C_{\varepsilon'} \|f\|_p, \quad \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \in (0; 1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая, что неравенство (3.4) выполнено с $\sum_{j=1}^N \|\tilde{P}_j(x, D)f\|_p$ в левой его части, из (3.5) имеем

$$\begin{aligned} &\varepsilon' \sum \|P_j^l(D)f\|_p + C_{\varepsilon'} \|f\|_p \\ &\geq \varepsilon' \sum \|P_j(x, D)f\|_p - \varepsilon' \left[\varepsilon' \sum \|P_j(x, D)f\|_p + C_{\varepsilon'} \|f\|_p \right] + C_{\varepsilon'} \|f\|_p \\ &= (1 - \varepsilon') \left[\varepsilon' \sum \|P_j(x, D)f\|_p + C_{\varepsilon'} \|f\|_p \right] \geq (1 - \varepsilon') \sum_{|\alpha| < l} \|D^\alpha f\|_p. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Разделив обе части неравенства (3.6) на $1 - \varepsilon' > 0$ и учитывая, что $\varepsilon'/(1 - \varepsilon') = \varepsilon$, приходим к оценке (3.4) с $P_j^l(D)$ вместо $P_j(x, D)$:

$$\sum_{|\alpha| < l} \|D^\alpha f\|_p \leq \varepsilon \sum_{j=1}^N \|P_j^l(D)f\|_p + C_\varepsilon \|f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.7)$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \not\equiv 0$. Положим в (3.7) $f(x) := \varphi(x)e^{it\langle \xi, x \rangle}$, $x \in \Omega$. Так как

$$(D^\gamma f)(x) = t^{|\gamma|} \xi^\gamma f(x) + t^{|\gamma|-1} e^{it\langle x, \xi \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \xi_k} D_k \varphi(x) + o(t^{|\gamma|-1})$$

по формуле Лейбница (2.4), то из оценки (3.7) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha| < l} \|t^{|\alpha|} \xi^\alpha f + o(t^{l-1})\|_p - C_\varepsilon \|f\|_p \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^N \left\| t^l P_j^l(\xi) f + t^{l-1} \left[e^{it\langle x, \xi \rangle} \sum_{|\alpha|=l} a_{j\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi_k} D_k \varphi \right] + o(t^{l-1}) \right\|_p. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пусть $P_j^l(\xi^0) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, при некотором $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда $\xi_s^0 \neq 0$ для некоторого $s \in \{1, \dots, n\}$. Полагая $\xi = \xi^0$, из (3.8) получим

$$t^{l-1} |\xi_s^0|^{l-1} \|\varphi\|_p + o(t^{l-1}) \leq \varepsilon C t^{l-1} |\xi^0|^{l-1} \|\varphi\|_{W_p^1} + o(t^{l-1}), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (3.9)$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, разделив обе части (3.9) на t^{l-1} и перейдя к пределу при $t \rightarrow \infty$, получаем противоречие. Значит, система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ эллиптическая.

3.3. Системы главного типа. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$. Обозначим через $L_{p, \Omega}^0(P_1, \dots, P_N)$ пространство всех дифференциальных операторов $Q(x, D)$, подчиненных системе $\{P_j(x, D)\}_1^N$, т.е. удовлетворяющих оценке (1.4). Напомним, следуя [9; гл. II, § 2.7],

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Система дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1.1) с коэффициентами из $L^\infty(\Omega)$ называется *системой главного типа* в $L^p(\Omega)$, если $\{P_j(x, D)\}_1^N$ и любая другая система $\{R_j(x, D)\}_1^N$ с коэффициентами из $L^\infty(\Omega)$ и с теми же главными частями имеют одинаковую “силу” в том смысле, что пространства $L_{p,\Omega}^0(P_1, \dots, P_N)$ и $L_{p,\Omega}^0(R_1, \dots, R_N)$ совпадают.

Из определения систем главного типа легко вытекает следующее простое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ дифференциальных операторов главного типа в $L^p(\Omega)$ является слабо коэрцитивной в $\mathring{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D^α – дифференциальный моном, $|\alpha| < 1$ и $\widetilde{P}_1 := P_1 + D^\alpha$. Так как

$$P_1 \in L_{p,\Omega}^0(P_1, \dots, P_N), \quad \widetilde{P}_1 \in L_{p,\Omega}^0(\widetilde{P}_1, \dots, P_N), \\ L_{p,\Omega}^0(P_1, \dots, P_N) = L_{p,\Omega}^0(\widetilde{P}_1, \dots, P_N)$$

по условию, то

$$\widetilde{P}_1 - P_1 = D^\alpha \in L_{p,\Omega}^0(P_1, \dots, P_N).$$

Согласно теореме 3.6 “сила” эллиптической системы в $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, не меняется при возмущениях операторами младшего порядка. Оказывается, что это свойство выделяет эллиптические системы в $L^p(\mathbb{R}^n)$ среди всей совокупности слабо коэрцитивных в $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$ систем с постоянными коэффициентами их главных частей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Пусть $\{P_j(x, D)\}_1^N$ – система порядка l с коэффициентами из $L^\infty(\Omega)$, причем коэффициенты главных частей операторов $P_j(x, D)$ постоянны, $P_j^l(x, D) \equiv P_j^l(D)$.

Тогда система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ эллиптна в точности тогда, когда она является системой главного типа в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1, \infty]$ (в случае постоянных коэффициентов – при $p \in [1, \infty]$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из теоремы 3.6.

Достаточность. Предположим, что система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ главного типа, но не эллиптна. Без ограничения общности можно считать, что $P_j^l(\xi^0) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, при $\xi^0 = (1, 0, \dots, 0)$. Из слабой коэрцитивности системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ в $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$ (предложение 3.9) вытекает, что $D_1 \in L_{p,\mathbb{R}^n}^0(P_1, \dots, P_N) = L_{p,\mathbb{R}^n}^0(P_1^l, \dots, P_N^l)$. Отсюда согласно предложению 2.7 получаем неравенство

$$|\xi_1| \leq C_1 \sum_{j=1}^N |P_j^l(\xi)| + C_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

неверное при $\xi = \xi^0 t$ и больших $t > 0$. Значит, система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ эллиптна.

Следующее предложение представляет собой простое обобщение результата Хёрмандера (см. [9; гл. II, § 2.7, теорема 2.3]) для случая $N > 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Система дифференциальных полиномов $\{P_j(D)\}_1^N$ порядка l является системой главного типа в $L^2(\Omega)$ в точности тогда, когда

$$(\nabla P_1^l, \dots, \nabla P_N^l)(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Доказательство предложения 3.11 аналогично доказательству Хёрмандера (см. [9]). Нужно лишь вместо теоремы Хёрмандера использовать ее аналог для системы $\{P_j(D)\}_1^N$ (см. [30], [11], а также [1; гл. III, § 11]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. (i) По-видимому, теорема 3.6 и предложения 3.7, 3.10 остаются верными для всех $p \in [1, \infty]$ в случае операторов с переменными коэффициентами.

(ii) Предложение 3.9 в случае пространства $L^2(\Omega)$ и ограниченной области Ω вытекает также из предложения 3.11 (см. [9]).

(iii) В книге [3] вводятся и изучаются операторы $P(x, D)$ N -главного типа в $L^2(\Omega)$, определяемые при помощи многогранника Ньютона $N(P)$. Для таких операторов в [3; гл. V, VI] получены оценки типа (3.3), в которых сумма слева распространяется лишь на внутренние точки многогранника Ньютона $N(P)$, что является существенным развитием упомянутого результата Хёрмандера [9].

3.4. О силе тензорного произведения эллиптических операторов в L^∞ . Из предложения 1.4 и теоремы 3.6 следует, что если $P(D)$ – эллиптический оператор порядка l , то базис пространства $L_{\infty, \mathbb{R}^n}^0(P)$ образуют $P^l(D)$ и мономы $\{D^\alpha\}_{|\alpha| < l}$. Здесь мы опишем структуру пространства $L_{\infty, \mathbb{R}^n}^0(P)$ для оператора $P(D) = P_1(D') \otimes P_2(D'')$, где P_1, P_2 – эллиптические операторы, действующие по разным переменным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. Пусть $P_1(\xi)$ и $P_2(\eta)$ – эллиптические полиномы степеней l и m соответственно, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{p_1}) \in \mathbb{R}^{p_1}$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{p_2}) \in \mathbb{R}^{p_2}$, $p_1 + p_2 = n$, причем $P_1(\xi) \neq 0$, $P_2(\eta) \neq 0$ при любых $\xi \in \mathbb{R}^{p_1}$, $\eta \in \mathbb{R}^{p_2}$. Тогда

$$L_{\infty, \mathbb{R}^n}^0(P_1 P_2) = \text{span}\{Q_1 Q_2 : Q_k \in L_{\infty, \mathbb{R}^{p_k}}^0(P_k), k = 1, 2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $Q \in \text{span}\{Q_1 Q_2 : Q_k \in L_{\infty, \mathbb{R}^{p_k}}^0(P_k), k = 1, 2\}$, т.е.

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^s Q_{j1}(\xi) Q_{j2}(\eta), \quad (3.10)$$

где $Q_{jk} \in L_{\infty, \mathbb{R}^{p_k}}^0(P_k)$, $j \in \{1, \dots, s\}$, $k = 1, 2$. В силу предложения 2.5 символы $Q_{j1}(\xi)$ и $Q_{j2}(\eta)$ удовлетворяют равенствам

$$Q_{jk} = M_{jk} P_k + N_{jk} = (M_{jk} + P_k^{-1} N_{jk}) P_k =: \widetilde{M}_{jk} P_k, \quad (3.11)$$

где $M_{jk}, N_{jk} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{p_k})$, $j \in \{1, \dots, s\}$, $k = 1, 2$. Поскольку P_1 и P_2 – эллиптические операторы с невырожденными полными символами, то $1/P_1(\xi) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{p_1})$ и $1/P_2(\eta) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{p_2})$ (см. [14; § 4, теорема 3]). Тогда $\widetilde{M}_{jk}(\cdot) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{p_k}) \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2$. Поэтому в силу равенств (3.10), (3.11) и того же предложения 2.5 имеем $Q \in L_{\infty, \mathbb{R}^n}^0(P_1 P_2)$.

(ii) Обратно, пусть $Q \in L_{\infty, \mathbb{R}^n}^0(P_1 P_2)$. Представим символ $Q(\xi, \eta)$ в виде суммы (3.10). Покажем, что (возможно, после некоторой перегруппировки членов в (3.10)) справедливы включения $Q_{jk} \in L_{\infty, \mathbb{R}^{p_k}}^0(P_k)$, $j \in \{1, \dots, s\}$, $k = 1, 2$.

Пусть $\max_{j \in \{1, \dots, s\}} \deg Q_{j1} = l'$. Сначала докажем, что $l' \leq l$. В самом деле, не нарушая общности, можно считать, что $\deg Q_{j1} = l'$ для $j \in \{1, \dots, s'\}$, $s' \leq s$, и $\deg Q_{j1} < l'$ для $j > s'$. Приводя, если необходимо, подобные члены в сумме (3.10), можно считать, что полиномы $Q_{j1}'(\xi)$, $j \in \{1, \dots, s'\}$, линейно независимы. Выберем вектор η^0 , при котором хотя бы один из полиномов

$Q_{j2}(\eta)$, $j \in \{1, \dots, s'\}$, не обращается в нуль. Если предположить, что $l' > l$, то, полагая $\eta := \eta^0$ в неравенстве

$$|Q(\xi, \eta)| \leq C_1 |P_1(\xi)P_2(\eta)| + C_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^{p_1}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{p_2}, \quad (3.12)$$

вытекающем из включения $Q \in L_{\infty, \mathbb{R}^n}(P_1 P_2)$ (см. предложение 2.7), придем к противоречию. Действительно, в левой части (3.12) имеем

$$\deg Q(\xi, \eta^0) \geq \deg \sum_{j=1}^{s'} Q_{j1}(\xi) Q_{j2}(\eta^0) = l',$$

поскольку старшие формы полиномов $Q_{j1}(\xi)$, $j \in \{1, \dots, s'\}$, не сокращаются. В правой части (3.12) имеем $\deg P_1(\xi)P_2(\eta^0) = l$, так как $P_2(\eta^0) \neq 0$. Значит, $l' \leq l$.

Рассуждая аналогично, докажем, что $\max_{j \in \{1, \dots, s\}} \deg Q_{j2} =: m' \leq m$.

Далее, в силу предложения 1.4 включение $Q \in L_{\infty, \mathbb{R}^n}(P_1 P_2)$ влечет равенство

$$Q^{l+m}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^s Q_{j1}^l(\xi) Q_{j2}^m(\eta) = c P_1^l(\xi) P_2^m(\eta), \quad \xi \in \mathbb{R}^{p_1}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{p_2}. \quad (3.13)$$

Как и выше, можно считать, что полиномы $\{Q_{j2}^m(\eta)\}_1^s$ линейно независимы. Тогда можно подобрать такие векторы $\eta^1, \dots, \eta^s \in \mathbb{R}^{p_2}$, что $\det(Q_{j2}^m(\eta^r)) \neq 0$, $j, r \in \{1, \dots, s\}$ (см. [31; гл. V, § 19, лемма 3]). Полагая в (3.13) $\eta = \eta^r$, раз решим полученную систему относительно функций $Q_{j1}^l(\xi)$. Отсюда вытекает, что $Q_{j1}^l(\xi) = \lambda_j P_1^l(\xi)$, $j \in \{1, \dots, s\}$.

Рассуждая аналогично, получим, что $Q_{j2}^m(\eta) = \mu_j P_2^m(\eta)$, $j \in \{1, \dots, s\}$.

Наконец, так как P_j – эллиптические полиномы, то в силу предложений 1.4 и 3.10 $Q_{jk} \in L_{\infty, \mathbb{R}^{p_k}}^0(P_k)$, т.е. $Q \in \text{span}\{Q_1 Q_2 : Q_k \in L_{\infty, \mathbb{R}^{p_k}}^0(P_k), k = 1, 2\}$.

Условие невырожденности полных символов операторов P_1 и P_2 в предложении 3.13 существенно. В следующем предложении мы покажем, что уже в случае произведения $P_1 P_2$ двух однородных эллиптических операторов P_1 и P_2 , действующих по разным группам переменных, пространство $L_{\infty, \mathbb{R}^n}^0(P_1 P_2)$ не содержит ни одного дифференциального монома.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. *Если $P_1(\xi)$ и $P_2(\eta)$ – однородные эллиптические полиномы степеней l и m соответственно, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{p_1}) \in \mathbb{R}^{p_1}$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{p_2}) \in \mathbb{R}^{p_2}$, $p_1, p_2 > 1$, $p_1 + p_2 = n$, то включение $D^\alpha \in L_{\infty, \mathbb{R}^n}^0(P_1 P_2)$ невозможно ни при каком $\alpha \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$D^\alpha = D'^{\alpha_1} D''^{\alpha_2} \in L_{\infty, \mathbb{R}^n}^0(P_1 P_2), \quad D' := (D_1, \dots, D_{p_1}), \quad D'' := (D_1, \dots, D_{p_2}), \\ \alpha_k \in \mathbb{Z}_+^{p_k}, \quad k = 1, 2.$$

В силу предложения 2.5 оценка

$$\|D'^{\alpha_1} D''^{\alpha_2} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|P_1(D') P_2(D'') f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (3.14)$$

эквивалентна равенству

$$\xi^{\alpha_1} \eta^{\alpha_2} = M(\xi, \eta) P_1(\xi) P_2(\eta) + N(\xi, \eta), \quad \xi \in \mathbb{R}^{p_1}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{p_2}, \quad (3.15)$$

где $M, N \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$. Положим в равенстве (3.15) $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{p_1}$, $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{p_2}$. Учитывая, что “сужение” мультипликатора в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ на подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$ будет мультипликатором в $L^\infty(E)$ (см. [23; гл. IV, § 7, п. 7.5]), согласно предложению 2.5 получим, что дифференциальный моном с символом $\xi_1^{|\alpha_1|} \eta_1^{|\alpha_2|}$ оценивается в $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ другим дифференциальным мономом с символом $c \xi_1^l \eta_1^m$, причем $c = P_1(1, \dots, 1) P_2(1, \dots, 1) \neq 0$ в силу эллиптичности полиномов P_1 и P_2 . По теореме Бомана (см. [22; п. 5, теорема 2]) при $\alpha \neq 0$ это возможно, лишь если $|\alpha_1| = l$, $|\alpha_2| = m$. В последнем случае моном $\xi^{\alpha_1} \eta^{\alpha_2}$ имеет степень $l + m$ и согласно предложению 1.4

$$\xi^{\alpha_1} \eta^{\alpha_2} = C P_1^l(\xi) P_2^m(\eta) = C P_1(\xi) P_2(\eta),$$

откуда $P_1(\xi) = C_1 \xi^{\alpha_1}$ и $P_2(\eta) = C_2 \eta^{\alpha_2}$. Но при $p_1 > 1$ и $p_2 > 1$ полиномы ξ^{α_1} и η^{α_2} не эллиптические. Таким образом, оценка (3.14) невозможна ни при каком $\alpha \neq 0$.

§ 4. Слабая коэрцитивность в изотропном пространстве $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$

В этом параграфе мы изучим свойства слабо коэрцитивных в изотропном пространстве Соболева $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$ систем порядка l вида

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.1)$$

В частности, для таких систем нами будет получен аналог теоремы 1.2.

4.1. Свойства слабо коэрцитивных систем в $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\{P_j(x, D)\}_1^N$ – система операторов вида (4.1) порядка $l \geq 2$, коэффициенты главных частей которых постоянны, а $a_{j\alpha}(\cdot) \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| \leq l - 1$. Пусть также система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в изотропном пространстве $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.

(i) Если коэффициенты операторов $P_j(x, D)$ непрерывны, $j \in \{1, \dots, N\}$, то при каждом фиксированном $x_0 \in \mathbb{R}^n$ множество нулей

$$\mathcal{N}(x_0, P) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : P_1(x_0, \xi) = \dots = P_N(x_0, \xi) = 0\}$$

системы полиномов $\{P_j(x_0, \xi)\}_1^N$ компактно.

(ii) Для любой системы $\{Q_j(x, D)\}_1^N$, где $Q_j(x, D)$ – операторы порядка $\leq l - 2$ с коэффициентами из $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, система $\{P_j(x, D) + Q_j(x, D)\}_1^N$ также слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Пусть $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ – нуль отображения $P^l = (P_1^l, \dots, P_N^l): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$, т.е. $P_j^l(\xi^0) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$. Если $n \geq 2N + 1$, то ранг якобиевой матрицы отображения $P^l := (P_1^l, \dots, P_N^l): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ в точке ξ^0 меньше $2N$.

(iv) Пусть дополнительно $a_{j\alpha}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| = l - 1$. Если $N = 1$, $p = \infty$, $n \geq 2$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ – нуль полинома $P^l(\xi)$, то $\nabla P^l(\xi^0) \neq 0$. В частности, при $n = 2$ нули полинома $P^l(\xi)$ простые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть при некотором $x_0 \in \mathbb{R}^n$ множество $\mathcal{N}(x_0, P)$ не компактно. Тогда $P_j(x_0, \xi^{(m)}) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, для некоторой последовательности $\{\xi^{(m)}\}_1^\infty$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \xi^{(m)} = \infty$ (можно считать $|\xi^{(m)}| > 1$, $m \in \mathbb{N}$).

Так как коэффициенты главных частей операторов $P_j(x, D)$ постоянны, то символы $P_j(x, \xi^{(m)}) = P_j(x, \xi^{(m)}) - P_j(x_0, \xi^{(m)})$ имеют степень $\leq l - 1$ (по ξ). Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется шар $B_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \delta\}$, $\delta > 0$, такой, что

$$P_j(x, \xi^{(m)}) \leq \frac{\varepsilon}{N} |\xi^{(m)}|^{l-1}, \quad \left| \frac{\partial P_j}{\partial \xi_k}(x, \xi^{(m)}) \right| \leq C |\xi^{(m)}|^{l-1} \quad (4.2)$$

при $x \in B_\delta(x_0)$, $m \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть $\psi \in C_0^\infty(B_\delta(x_0))$, $\psi \not\equiv 0$. Рассмотрим функции $f_r(x) := \psi_r(x) e^{i\langle x, \xi^{(m)} \rangle}$, где $\psi_r(x) := \psi(x/r)$, $r > 0$. Тогда из (4.2) вытекают оценки

$$\begin{aligned} \|P_j(x, \xi^{(m)}) e^{i\langle x, \xi^{(m)} \rangle} \psi_r(x)\|_p &\leq \frac{\varepsilon}{N} |\xi^{(m)}|^{l-1} \|\psi_r\|_p, \\ \left\| \frac{\partial P_j}{\partial \xi_k}(x, \xi^{(m)}) e^{i\langle x, \xi^{(m)} \rangle} D_k \psi_r(x) \right\|_p &\leq C |\xi^{(m)}|^{l-1} \|D_k \psi_r\|_p. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Полагая $f = f_r$ в неравенстве (1.6) и применяя формулу Лейбница (2.4), имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha| < l} \|(\xi^{(m)})^\alpha e^{i\langle x, \xi^{(m)} \rangle} \psi_r(x) + o(|\xi^{(m)}|^\alpha)\|_p \\ &\leq C_1 \sum_{j=1}^N \left\| P_j(x, \xi^{(m)}) e^{i\langle x, \xi^{(m)} \rangle} \psi_r(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_j}{\partial \xi_k}(x, \xi^{(m)}) e^{i\langle x, \xi^{(m)} \rangle} D_k \psi_r(x) \right. \\ &\quad \left. + o(|\xi^{(m)}|^{l-1}) \right\|_p + C_2 \|\psi_r\|_p. \end{aligned} \quad (4.4)$$

С учетом (4.3) и очевидного неравенства $|\xi^{(m)}|^{l-1} \leq C' \sum_{k=1}^n |\xi_k^{(m)}|^{l-1}$ из (4.4) имеем

$$|\xi^{(m)}|^{l-1} \|\psi_r\|_p \leq C' C_1 |\xi^{(m)}|^{l-1} \left[\varepsilon \|\psi_r\|_p + C \sum_{k=1}^n \|D_k \psi_r\|_p \right] + o(|\xi^{(m)}|^{l-1}). \quad (4.5)$$

Разделив обе части (4.5) на $|\xi^{(m)}|^{l-1}$ и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$\|\psi_r\|_p \leq C' C_1 \left[\varepsilon \|\psi_r\|_p + C \sum_{k=1}^n \|D_k \psi_r\|_p \right]. \quad (4.6)$$

Далее, пусть $p \in [1, \infty)$. Заметим, что

$$\|\psi_r\|_p = r^{n/p} \|\psi\|_p, \quad \|D_k \psi_r\|_p = r^{-1} r^{n/p} \|D_k \psi\|_p.$$

Тогда, сокращая (4.6) на множитель $r^{n/p}$ и устремляя $r \rightarrow \infty$, приходим к оценке $\|\psi\|_p \leq \varepsilon C' C_1 \|\psi\|_p$. (При $p = \infty$ здесь нужно положить $r^{n/p} = r^{n/\infty} = 1$.) Наконец, выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получаем противоречие.

(ii) Из теорем вложения (см. [1; гл. III, § 9]) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^N \|Q_j(x, D) f\|_p \leq \varepsilon \sum_{|\alpha| \leq l-1} \|D^\alpha f\|_p + C_\varepsilon \|f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (4.7)$$

Учитывая (4.7) и (1.6), имеем

$$\sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f + Q_j(x, D)f\|_p + \|f\|_p \geq (C_1 - \varepsilon) \sum_{|\alpha| \leq l-1} \|D^\alpha f\|_p - C_\varepsilon \|f\|_p \quad (4.8)$$

при всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Выберем $\varepsilon < C_1$ в (4.7). Тогда из (4.8) вытекает оценка

$$\sum_{|\alpha| \leq l-1} \|D^\alpha f\|_p \leq (C_1 - \varepsilon)^{-1} \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f + Q_j(x, D)f\|_p + (C_\varepsilon + 1)\|f\|_p,$$

из которой следует слабая коэрцитивность системы $\{P_j(x, D) + Q_j(x, D)\}_1^N$.

(iii) Пусть вначале $n = 2N + 1$. В силу (ii) можно считать, что операторы P_j имеют вид $P_j(x, D) = P_j^l(D) + P_j^{l-1}(x, D)$, где $P_j^{l-1}(x, D) := \sum_{|\alpha| = l-1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha$, $j \in \{1, \dots, N\}$. Предположим противное, т.е. что ранг матрицы Якоби отображения $P^l = (P_1^l, \dots, P_N^l): \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ в точке ξ^0 равен $2N$:

$$\text{rank} \frac{\partial(\text{Re } P_1^l, \text{Im } P_1^l, \dots, \text{Re } P_N^l, \text{Im } P_N^l)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_{2N+1})}(\xi^0) = 2N. \quad (4.9)$$

Введем гладкую параметризацию сферы $\mathbb{S}^{2N}$ в окрестности точки ξ^0 , т.е. рассмотрим диффеоморфизм $\Phi := (\Phi_1, \dots, \Phi_{2N+1}): B_\varepsilon^{2N} \rightarrow V$, где $B_\varepsilon^{2N} := \{\varphi \in \mathbb{R}^{2N} : |\varphi| < \varepsilon\}$ и V – открытая окрестность точки ξ^0 на сфере $\mathbb{S}^{2N}$, причем $\Phi(0) = \xi^0$. Так как Φ – диффеоморфизм, то ранг матрицы Якоби отображения Φ в нуле равен $2N$:

$$\text{rank} \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_{2N+1})}{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{2N})}(0) = 2N. \quad (4.10)$$

Пусть $\tilde{T} := P^l \circ \Phi$ – композиция отображений P^l и Φ , $\tilde{T}: B_\varepsilon^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$. В силу того, что $\Phi(0) = \xi^0$, и по условию $P_j^l(\xi^0) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, имеем

$$\tilde{T}(0) = 0. \quad (4.11)$$

Кроме того, из равенств (4.9) и (4.10) вытекает, что якобиан $J_{\tilde{T}}$ отображения $\tilde{T}$ в точке 0 отличен от нуля:

$$J_{\tilde{T}}(0) \neq 0. \quad (4.12)$$

В силу (4.11) и (4.12) точка 0 – изолированный нуль отображения $\tilde{T}: B_\varepsilon^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^{2N}$ – такая открытая окрестность точки 0, что справедливы соотношения $\tilde{T}(\varphi) \neq 0$, $\varphi \in \bar{U} \setminus \{0\}$, и $J_{\tilde{T}}(\varphi) \neq 0$, $\varphi \in \bar{U}$. Можно считать для простоты, что $U = B_r^{2N}$. Обозначим через Φ^r отображение из U в $\mathbb{S}_r^{2N}$, определяемое как $\Phi^r(\varphi) := r\Phi(\varphi) := (r\Phi_1(\varphi), \dots, r\Phi_{2N+1}(\varphi))$ при каждом $r > 0$, а через $\tilde{T}^r := P^l \circ \Phi^r$, $\tilde{T}^r: U \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ – композицию отображений P^l и Φ^r . Так как компоненты отображения P^l – однородные полиномы степени l , то $\tilde{T}^r = P^l(\Phi^r) = P^l(r\Phi) = r^l P^l(\Phi) = r^l \tilde{T}$. Аналогично, $J_{\tilde{T}^r} = r^{2N(l-1)} J_{\tilde{T}}$. Поэтому ясно, что для отображения $\tilde{T}^r$ справедливы те же соотношения, что и для отображения $\tilde{T}$, т.е.

$$\tilde{T}^r(\varphi) \neq 0, \quad \varphi \in \bar{U} \setminus \{0\}, \quad J_{\tilde{T}^r}(\varphi) \neq 0, \quad \varphi \in \bar{U}. \quad (4.13)$$

В силу (4.13) векторное поле $\tilde{T}^r$ не обращается в нуль на границе $\partial U = \mathbb{S}_\varepsilon^{2N-1}$ и имеет лишь одну особую точку внутри U для всех $r > 0$.

Не нарушая общности, можно считать, что в (4.12) $J_{\tilde{T}}(0) > 0$ и, значит, в (4.13) $J_{\tilde{T}^r}(\varphi) > 0$. Тогда индекс особой точки 0 векторного поля $\tilde{T}^r$ равен 1, $\text{ind}(0, \tilde{T}^r) = 1$, где, как обычно, $\text{ind}(x_0, F)$ – это индекс особой точки x_0 векторного поля F . Так как вращение $\gamma(\tilde{T}^r, \partial U)$ поля $\tilde{T}^r$ на границе ∂U равно сумме индексов особых точек поля $\tilde{T}^r$ внутри U , то справедливы соотношения

$$\gamma(\tilde{T}^r, \partial U) = \text{ind}(0, \tilde{T}^r) = \text{sign } J_{\tilde{T}^r}(0) = 1. \quad (4.14)$$

Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Так как $P^l(\xi) \neq 0$, $\xi \in \partial V$, то найдется $r_0 > 0$ такое, что при $r > r_0$

$$P(x_0, r\xi) = P^l(r\xi) + P^{l-1}(x_0, r\xi) = r^l[P^l(\xi) + r^{l-1}P^{l-1}(x_0, \xi)] \neq 0, \quad \xi \in \partial V. \quad (4.15)$$

Введем отображения $\tilde{P} := P \circ \Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$, где $P := (\text{Re } P_1, \text{Im } P_1, \dots, \text{Re } P_N, \text{Im } P_N): \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$, и $\tilde{P}^r := P \circ \Phi^r: U \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$. В силу (4.15) и того, что Φ – диффеоморфизм, имеем $\tilde{P}^r(\varphi) \neq 0$ при $\varphi \in \partial U$. Значит, отображения $\tilde{T}^r: \partial U \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$ и $\tilde{P}^r: \partial U \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$ гомотопны в пространстве непрерывных отображений из ∂U в $\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$ для каждого $r > r_0$, и гомотопия дается равенством

$$\Psi_r(t, \xi) = tP(x_0, \xi) + (1-t)P^l(\xi) = P^l(\xi) + tP^{l-1}(x_0, \xi): \partial V \rightarrow \mathbb{R}^{2N+1} \setminus \{0\}, \\ t \in [0, 1].$$

Но вращения гомотопных векторных полей равны. Отсюда с учетом (4.14) получаем

$$\gamma(\tilde{P}^r, \partial U) = \gamma(\tilde{T}^r, \partial U) = 1. \quad (4.16)$$

Таким образом, отображение $P^r: \partial U \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$ гомотопически нетривиально и, значит, по теореме 2.2 любое его непрерывное продолжение внутрь U обращается в нуль при каждом $r > r_0$. В частности, при каждом $r > r_0$ найдется $\varphi^0(r) \in U$, так что $\tilde{P}^r(\varphi^0(r)) = P(\Phi^r(\varphi^0(r))) = 0$, где $\Phi^r(\varphi^0(r)) \in \mathbb{S}_r^{2N}$. Это противоречит утверждению (i) о компактности множества нулей. Утверждение доказано для случая $n = 2N + 1$.

Пусть $n > 2N + 1$, но ранг матрицы Якоби отображения P^l в точке ξ^0 равен $2N$. Выберем $2N$ столбцов, в которых расположен ненулевой минор этой матрицы, и положим оставшиеся $n - 2N$ переменные равными нулю. Так как система (4.1) слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$, множество ее нулей $\mathcal{N}(x_0, P)$ компактно (пункт (i)). После “сужения” на подпространство свойство компактности множества $\mathcal{N}(x_0, P)$ сохраняется, и поэтому дальнейшее доказательство сводится к случаю $n = 2N + 1$.

(iv) Доказательство опирается на предложение 1.4. Предположим противное, т.е. что оператор $P(x, D)$ слабо коэрцитивен в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, но

$$\nabla P^l(\xi^0) = \left(\frac{\partial P^l}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial P^l}{\partial \xi_n} \right)(\xi^0) = 0. \quad (4.17)$$

Выполняя подходящую ортогональную замену переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, можно считать, что $\xi^0 = (0, \dots, 0, 1)$. Тогда равенство (4.17) означает, что коэффициенты при $\xi_n^l, \xi_n^{l-1}\xi_j, j \in \{1, \dots, n-1\}$, в полиноме $P^l(\xi)$ равны нулю. Выберем

наименьшее $k \in \mathbb{N}$, для которого хотя бы один из мономов ξ^α , $|\alpha| = l$, $\alpha_n = l - k$, входит в P^l с ненулевым коэффициентом (такое k существует, ибо $P^l \neq 0$ и $k \geq 2$ в силу (4.17)). Пусть

$$l' := (l'_1, \dots, l'_n) := \left(\frac{k(l-1)}{k-1}, \dots, \frac{k(l-1)}{k-1}, l-1 \right). \quad (4.18)$$

Вектор l' определяет гиперплоскость $\pi' : |\alpha : l'| = \sum_{j=1}^n \xi_j / l'_j = 1$, или

$$\pi' : (k-1)(\xi_1 + \dots + \xi_{n-1}) + k\xi_n = k(l-1). \quad (4.19)$$

Пусть $P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ – полный символ оператора $P(x, D)$. Ясно, что $(0, \dots, 0, l-1) \in \pi'$ и $\alpha \in \pi'$ при $|\alpha| = l$ и $\alpha_n = l - k$. Покажем, что показатели α всех остальных мономов ξ^α , $|\alpha| \leq l$, лежат “ниже” гиперплоскости π' . Если $|\alpha| = l$ и $\alpha_n < l - k$, то

$$(k-1)(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) + k\alpha_n < k(l-1). \quad (4.20)$$

Наконец, если $|\alpha| \leq l-1$ или $|\alpha| = l-1$, но $\alpha_n < l-1$, то неравенство (4.20) также выполнено. Таким образом, показатели всех мономов ξ^α лежат либо “ниже” гиперплоскости π' , либо на ней. Поэтому l' -старшая форма $P^{l'}(x, \xi) := \sum_{|\alpha: l'|=1} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ полного символа $P(x, \xi)$ имеет вид

$$P^{l'}(x, \xi) = c_0(x) \xi_n^{l-1} + \sum_{|\alpha|=l, \alpha_n=l-k} a_\alpha \xi^\alpha, \quad c_0(x) := a_{0, \dots, 0, l-1}(x). \quad (4.21)$$

Применим предложение 1.4 к операторам $Q(D) := D_n^{l-1}$, $P(x, D)$ и вектору l' вида (4.18). Ясно, что $Q^{l'}(D) = Q(D) = D_n^{l-1}$, и с учетом (4.21)

$$\xi_n^{l-1} \equiv \lambda(x) \left[c_0(x) \xi_n^{l-1} + \sum_{|\alpha|=l, \alpha_n=l-k} a_\alpha \xi^\alpha \right]. \quad (4.22)$$

Из тождества (4.22) следует, что

$$\lambda(x) c_0(x) \equiv 1, \quad \lambda(x) a_\alpha \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |\alpha| = l, \quad \alpha_n = l - k.$$

Отсюда $a_\alpha = 0$, $|\alpha| = l$, $\alpha_n = l - k$, что противоречит выбору k . Значит, $\nabla P^l(\xi^0) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. (i) Компактность множества нулей отображения $P = (P_1, \dots, P_N) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ в случае слабо коэрцитивной системы $\{P_j(D)\}_{j=1}^N$ с постоянными коэффициентами вытекает из алгебраического неравенства (2.2).

(ii) Условие $n \geq 2N + 1$ утверждения (iii) является точным. Так, ранг якобиевой матрицы системы $\{(\xi_1 + i)(\xi_2 + i), (\xi_3 + i)(\xi_4 + i)\}$ в точке $(1, 0, 0, 0)$ равен единице, а в точке $(1, 0, 1, 0)$ – двум.

(iii) В случае постоянных коэффициентов утверждение (iv) содержательно лишь при $n = 2$, так как в силу теоремы 1.6 при $n \geq 3$ каждый слабо коэрцитивный в $\overset{\circ}{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ оператор является эллиптическим.

4.2. При каких l существуют слабо коэрцитивные системы? Следующая теорема является аналогом теоремы 1.2 для случая слабо коэрцитивных систем операторов с постоянными коэффициентами в $\overset{\circ}{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть система $\{P_j(D)\}_1^N$ порядка l слабо коэрцитивна в изотропном пространстве Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, и $n \geq 2N + 1$. Если отображение $P^l := (P_1^l, \dots, P_N^l): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ имеет конечное число нулей на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, то l четно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $n = 2N + 1$. Так как отображение P^l имеет лишь конечное число нулей на $\mathbb{S}^{2N}$, то найдется единичная сфера $\mathbb{S}^{2N-1}$ такая, что сужение $P^l \upharpoonright \mathbb{S}^{2N-1}$ не имеет нулей. Поскольку все полиномы $P_j^l(\xi)$ однородны, то, не нарушая общности, можно считать, что $\mathbb{S}^{2N-1} := \{x \in \mathbb{S}^{2N} : x_n = 0\}$.

Как и в (3.1), обозначим через $T = (T_1, \dots, T_{2N}): \mathbb{S}^{2N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ “сужение” отображения P^l на сферу $\mathbb{S}^{2N-1}$, т.е.

$$T_{2j-1}(\xi) := \operatorname{Re} P_j^l(\xi) \upharpoonright \mathbb{S}^{2N-1}, \quad T_{2j}(\xi) := \operatorname{Im} P_j^l(\xi) \upharpoonright \mathbb{S}^{2N-1}, \quad j \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.23)$$

Так как $P^l \upharpoonright \mathbb{S}_r^{2N-1} \neq 0$ при всех $r > 0$, то отображение

$$T^r := \frac{(T_1, \dots, T_{2N})}{\|P^l\|}: \mathbb{S}_r^{2N-1} \rightarrow \mathbb{S}_r^{2N-1}$$

непрерывно. Если l нечетно, то отображение P^l нечетно, $P^l(-\xi) = -P^l(\xi)$. Тогда по теореме 2.3 отображения T^r имеют нечетную степень, $\deg T^r = 2k + 1$ и, значит, гомотопически нетривиальны (см. [20]).

Рассмотрим сужение отображения $P = (P_1, \dots, P_N)$ на сферу $\mathbb{S}_r^{2N-1}$. Обозначим

$$R_{2j-1}(\xi) := \operatorname{Re} P_j(\xi) \upharpoonright \mathbb{S}_r^{2N-1}, \quad R_{2j}(\xi) := \operatorname{Im} P_j(\xi) \upharpoonright \mathbb{S}_r^{2N-1}, \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

При больших r отображения

$$T^r: \mathbb{S}_r^{2N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}, \quad R^r := (R_1, \dots, R_{2N}): \mathbb{S}_r^{2N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$$

гомотопны в пространстве непрерывных отображений из $\mathbb{S}_r^{2N-1}$ в $\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$. Действительно, при $\xi = r\eta$, $\eta \in \mathbb{S}^1$, и больших $r > 0$

$$R^r(\xi) = R^r(r\eta) = r^l T^1(\eta) + O(r^{l-1}) = r^l T^1(\eta)(1 + O(r^{-1})) \neq 0. \quad (4.24)$$

Поэтому отображения R^r и T^r гомотопны в $\mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$, так как в силу (4.24) при больших $r > 0$ гомотопия $tR^r + (1-t)T^r$ не “задевает” нуля,

$$tR^r + (1-t)T^r: \mathbb{S}_r^{2N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}.$$

Поэтому отображение R^r имеет ту же степень, что и T^r , $\deg R^r = 2k + 1$, и также гомотопически нетривиально. Значит, по теореме 2.2 любое его непрерывное продолжение внутрь замкнутого шара B_r^{2N} обращается в нуль. В частности, имеет нули отображение

$$\widetilde{P^r}(\xi') = \widetilde{P^r}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) := P(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \sqrt{r^2 - |\xi'|^2}): B_r^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}, \quad (4.25)$$

где $\xi' := (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, являющееся непрерывным продолжением отображения $R^r \upharpoonright \mathbb{S}_r^{2N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$ внутрь шара B_r^{2N} . Так как полусфера $\mathbb{S}_{+r}^{2N} := \{x \in \mathbb{S}_r^{2N} : x_n \geq 0\}$ гомеоморфно проецируется на шар B_r^{2N} , то

отображения (4.25) естественным образом определяют отображения $P \restriction \mathbb{S}_{+r}^{2N} = R^r \restriction \mathbb{S}_{+r}^{2N}$ полусферы $\mathbb{S}_{+r}^{2N}$ в $\mathbb{R}^{2N}$, где знак $\restriction$ обозначает сужение отображения на соответствующее подмножество. Значит, последние также имеют нули при больших r . Это противоречит предложению 4.1, (i).

(ii) Пусть $n > 2N + 1$. Полагая $\xi_k = 0$ при $k \in \{2N + 2, \dots, n\}$, рассмотрим “суженную” систему $\{\tilde{P}_j(\xi_1, \dots, \xi_{2N+1}, 0, \dots, 0)\}_1^N$. Отображение $\tilde{P}^l := (\tilde{P}_1^l, \dots, \tilde{P}_N^l): \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ также имеет конечное число нулей на сфере $\mathbb{S}^{2N}$.

Кроме того, так как система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$, множество нулей $N(P)$ ее символов компактно (предложение 4.1, (i)). После “сужения” множество нулей $N(\tilde{P})$ системы $\{\tilde{P}_j(\xi)\}_1^N$ остается компактным в $\mathbb{R}^{2N+1}$. Для завершения доказательства остается лишь повторить рассуждения п. (i) для системы $\{\tilde{P}_j(\xi)\}_1^N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. (i) Мы предполагаем, что заключение теоремы 4.3 о четности числа l справедливо без всяких дополнительных условий на систему $\{P_j(D)\}_1^N$.

(ii) Условие $n \geq 2N + 1$ в теореме 4.3 существенно. Так, при $n = 2N$ система $P_1(D) := (D_1 + iD_2)^l, \quad P_2(D) := (D_3 + iD_4)^l, \quad \dots, \quad P_N(D) := (D_{n-1} + iD_n)^l$ эллиптична при любом l .

(iii) Как видно из доказательства теоремы 4.3, условие конечности числа нулей отображения P^l на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ можно ослабить, потребовав лишь, чтобы существовала сфера $\mathbb{S}^{n-2}$, свободная от нулей отображения P^l . Однако существуют примеры, для которых это не так. Так, при $N = 2, n = 5$ система

$$P_1(D) := (D_1 + i)(D_2 + i), \quad P_2(D) = D_3^2 + D_4^2 + D_5^2$$

слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^5)$, $p \in [1, \infty]$, но сужение отображения $P^l = (\xi_1 \xi_2, \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2)$ на любую сферу $\mathbb{S}^3$ имеет нуль.

4.3. Характеристика слабо коэрцитивных систем операторов с постоянными коэффициентами в $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$. Здесь мы получим аналог теоремы 1.6 для случая однородной системы операторов с постоянными коэффициентами. Для доказательства будет существенно использоваться процедура “сужения” оценок на подпространства, описанная в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $Q(x, D), \{P_j(x, D)\}_1^N$ – операторы вида (1.3) с коэффициентами из $L^\infty(\Omega)$; $(D', 0) := (D_1, \dots, D_m, 0, \dots, 0)$. Тогда из оценки (1.4) с $p = \infty$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ при любом $m < n$ следует “суженная” оценка

$$\|Q(x, D', 0)\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D', 0)\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad (4.26)$$

для всех $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. В частности, если коэффициенты операторов Q и P_j постоянны, то оценка (1.4) сохраняется после “сужения” всех операторов на произвольное подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-m})$ – “срезающая” функция, равная единице в окрестности нуля. Рассмотрим функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ вида

$$f(x_1, \dots, x_n) := \tilde{f}(x_1, \dots, x_m)\varphi(x_{m+1}, \dots, x_n), \quad \text{где } \tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m). \quad (4.27)$$

Далее, для $r > 0$ и функции f вида (4.27) обозначим через f_r функцию

$$f_r(x) := f\left(x_1, \dots, x_m, \frac{x_{m+1}}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\right) = \tilde{f}(x_1, \dots, x_m) \varphi\left(\frac{x_{m+1}}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\right). \quad (4.28)$$

Подставим теперь функции (4.28) в неравенство (1.4). Так как для любого дифференциального монома $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ имеем

$$D^\alpha f_r = r^{-(\alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n)} (D^\alpha f)_r,$$

то, учитывая оценки

$$\|a_{j\alpha}(x) D^\alpha f_r\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|a_{j\alpha}(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|D^\alpha f_r\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C r^{-(\alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n)},$$

после перехода к пределу при $r \rightarrow +\infty$ в полученном неравенстве придем к (4.26).

Если коэффициенты операторов Q и P_j постоянны, то каждая из $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ -норм в (4.26) равна соответствующей $L^\infty(\mathbb{R}^m)$ -норме, что доказывает справедливость оценки (1.4) после “сужения” всех операторов на подпространство $E = \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$. Так как ортогональная замена переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ не нарушает исходной оценки (1.4), то можно считать m -мерное подпространство E произвольным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$ называют *координатным*, если оно имеет вид $E = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0\}$, где $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$.

Обозначим через $P(\xi) \upharpoonright E$ сужение полинома $P(\xi)$ на координатное подпространство E , а через $P(D) \upharpoonright E$ – соответствующий оператор.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Если система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в изотропном пространстве $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, то после сужения на произвольное координатное подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$ система $\{P_j(D) \upharpoonright E\}_1^N$ остается слабо коэрцитивной в $\mathring{W}_\infty^l(E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Поясним, что по-прежнему коэффициенты суженных операторов $Q(x, D)$, $\{P_j(x, D)\}_1^N$ зависят от всех n переменных, в то время как дифференцирование производится лишь по первым m переменным. Заметим еще, что функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ не являются финитными в $\mathbb{R}^n$.

Следующий результат, анонсированный в [15], представляет аналог теоремы 1.6 для случая однородной системы операторов.

ТЕОРЕМА 4.9. Пусть $l \geq 2$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ – система операторов с постоянными коэффициентами порядка l , удовлетворяющая условиям:

(i) $n \geq 2N + 1$;

(ii) полиномы $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$, суженные на любое двумерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, остаются линейно независимыми.

Тогда система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в изотропном пространстве Соболева $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ в точности тогда, когда она эллиптична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность вытекает из теоремы 3.6.

Необходимость. Пусть система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптична, т.е. $P_j^l(\xi^0) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, для некоторого $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Выполняя, если нужно, замену переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, можно считать,

что $\xi^0 = (1, 0, \dots, 0)$. Это означает, что коэффициенты при ξ_1^l в каждом $P_j(\xi)$ равны нулю.

Пусть $P_j^{l-1}(D) := \sum_{|\alpha|=l-1} a_{j\alpha} D^\alpha$, $j \in \{1, \dots, N\}$. Имеем $P_j^{l-1}(\xi^0) \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, \dots, N\}$, ибо в противном случае после подстановки $\xi = \xi^0 t$, $t > 0$, в алгебраическое неравенство (2.2), вытекающее из оценки (1.4) с $Q = D_1^{l-1}$ (предложение 2.7), приходим к противоречию при $t \rightarrow +\infty$.

После линейного преобразования системы $\{P_j(\xi)\}_1^N$ можно считать, что

$$P_1^{l-1}(\xi^0) = 1, \quad P_2^{l-1}(\xi^0) = 0, \quad \dots, \quad P_N^{l-1}(\xi^0) = 0. \quad (4.29)$$

Так как моном ξ_1^l в каждом из полиномов P_j^l отсутствует, то в силу их однородности

$$\frac{\partial P_j^l}{\partial \xi_1}(\xi^0) = 0, \quad j \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.30)$$

Далее, поскольку $n \geq 2N + 1$, то согласно предложению 4.1, (iii) ранг матрицы Якоби отображения $P^l = (P_1^l, \dots, P_N^l): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ в точке ξ^0 не превосходит $2N - 1$. Это означает, что найдется вектор $\lambda := (0, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ такой, что

$$\sum_{k=2}^n \lambda_k \frac{\partial P_j^l}{\partial \xi_k}(\xi^0) = 0, \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Выполняя, если нужно, ортогональную замену переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ вида

$$\xi'_k = \sum_{r=1}^n c_{kr} \xi_r, \quad k, r \in \{1, \dots, n\},$$

где $C := (c_{kr})_{n \times n}$ – ортогональная матрица, первые две строчки которой – координаты векторов $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ и $e_2 = \lambda/|\lambda| = (0, \lambda_2/|\lambda|, \dots, \lambda_n/|\lambda|)$, получим

$$\frac{\partial P_j^l}{\partial e_1}(\xi^0) = \frac{\partial P_j^l}{\partial \xi_1}(\xi^0) = 0, \quad \frac{\partial P_j^l}{\partial e_2}(\xi^0) = \sum_{k=2}^n \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|} \frac{\partial P_j^l}{\partial \xi_k}(\xi^0) = 0.$$

Можно считать, что помимо (4.30) имеет место

$$\frac{\partial P_j^l}{\partial \xi_2}(\xi^0) = 0, \quad j \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.31)$$

Равенства (4.30), (4.31) означают, что $\{P_j(\xi)\}_1^N$ не содержат мономов ξ_1^l и $\xi_1^{l-1} \xi_2$.

Рассмотрим “сужение” системы $\{P_j(D)\}_1^N$ на подпространство $E = \text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$. В силу следствия 4.7 она остается слабо коэрцитивной в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$. Сохраним для “суженных” объектов те же обозначения. Учитывая соотношения (4.29)–(4.31) и применяя предложение 2.5 к операторам $\{P_j(D)\}_1^N$, “суженным” на E , получим

$$\xi_1^{l-1} = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) [a_j \xi_1^{l-2} \xi_2^2 + \dots + \delta_j^1 \xi_1^{l-1} + \dots] + M_{N+1}(\xi), \quad (4.32)$$

где $M_j(\cdot)$, $j \in \{1, \dots, N+1\}$, – мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, δ_j^1 – символ Кронекера.

Разделив обе части равенства (4.32) на ξ_1^{l-1} , получим, что

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow +\infty} M_1(\xi_1, \xi_2^0) = 1, \quad \xi_2^0 = \text{const} \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

Последнее условие (4.33) противоречит лемме 2.4. В самом деле, так как по условию старшие формы $P_j^l(\xi)$ остались линейно независимыми после “сужения” на E , то в силу предложения 2.6 $\mu_j(0) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, где μ_j – конечные меры из интегрального представления (2.6) мультипликаторов $M_j = \hat{\mu}_j$, входящих в тождество (4.32). Согласно предложению 2.4 выпуклые комбинации “сдвигов” функции $M_1(\xi)$ равномерно сходятся к постоянной функции $\mu_1(0) = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m c_k M_1(\xi - \zeta^{(k)}) &\Rightarrow 0; \\ \sum_{k=1}^m c_k &= 1, \quad c_k > 0, \quad \zeta^{(k)} \in \mathbb{R}^2, \quad k \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Из (4.34) вытекает, что для $\varepsilon = 1/2$ найдутся такое $R > 0$ и такие $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, что

$$\left| \sum_{k=1}^m c_k M_1(\xi_1, a_k) \right| \leq \frac{1}{2}, \quad \xi_1 > R. \quad (4.35)$$

Но неравенство (4.35) противоречит соотношению (4.33). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.10. (i) Условие (ii) теоремы 4.9 существенно для ее справедливости. Так, для системы $P_1(\xi) := \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, $P_2(\xi) := (\xi_4 + i)(\xi_5 + i)$ выполнено условие (i) ($n = 2N + 1 = 5$), но нарушено условие (ii): сужения полиномов $\{P_j^2(\xi)\}_1^2$ на двумерное подпространство $\text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$ линейно зависимы. При этом система $\{P_j(D)\}_1^2$ слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_\infty^2(\mathbb{R}^5)$, но не эллиптична.

В то же время условие (ii) теоремы 4.9 не является необходимым. Например, система $P_1(\xi) := \xi_1^2 + \xi_2^2$, $P_2(\xi) := \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2$ слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_\infty^2(\mathbb{R}^5)$, хотя сужения полиномов $\{P_j^2(\xi)\}_1^2$ на подпространство $\text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$ линейно зависимы.

(ii) Мы не располагаем примерами слабо коэрцитивных в $\mathring{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптических систем операторов при $N > 1$, для которых нарушено условие (i), но выполнено (ii). Однако системы, для которых нарушены оба условия (i) и (ii) теоремы 4.9, строятся легко. Например, при $n = 2N$ для системы $P_j(\xi) := (\xi_{2j-1} + i)(\xi_{2j} + i)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, нарушены оба условия (i) и (ii) теоремы 4.9. Она также слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптична.

4.4. Обобщение теоремы де Лю и Миркила на операторы с переменными коэффициентами. Согласно теореме 1.6 де Лю и Миркила слабая коэрцитивность оператора $P(D)$ в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ при $n \geq 3$ влечет его эллиптичность. Следующая теорема распространяет этот результат на операторы с переменными коэффициентами.

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть $l \geq 2$, $n \geq 3$, $P(x, D)$ – дифференциальный оператор порядка $l \geq 2$, в котором $a_\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| \leq l - 1$, $a_\alpha(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| = l - 1$ и $a_\alpha = \text{const}$ при $|\alpha| = l$, т.е. $P^l(x, D) = P^l(D)$.

Тогда оператор $P(x, D)$ слабо коэрцитивен в изотропном пространстве Соболева $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ в точности тогда, когда он эллиптичен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из теоремы 3.6.

Достаточность. Пусть оператор $P(x, D)$ слабо коэрцитивен в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$\sum_{|\alpha| < l} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|P(x, D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad (4.36)$$

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Если P не эллиптичен, то $P^l(\xi^0) = 0$ при $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Выполняя, если нужно, замену переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, можно считать, что $\xi^0 = (1, 0, \dots, 0)$.

В силу тождества Эйлера $\sum_{k=1}^n \xi_k (\partial P^l / \partial \xi_k) = n P^l$ для однородного полинома $P^l(\xi)$ из условия $P^l(\xi^0) = 0$ вытекает равенство $(\partial P^l / \partial \xi_1)(\xi^0) = 0$. Но так как $n \geq 3$, то согласно предложению 4.1, (iii) ранг матрицы Якоби отображения $P^l = (\operatorname{Re} P^l, \operatorname{Im} P^l): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ в точке ξ^0 не превосходит 1. Выполняя, если нужно, подходящую линейную замену координат $\xi_2, \dots, \xi_n$ (см. доказательство теоремы 4.9), можно считать второй столбец матрицы Якоби нулевым, т.е. $(\partial P^l / \partial \xi_2)(\xi^0) = 0$. Таким образом, символ $P(x, \xi)$ оператора $P(x, D)$ не содержит мономов ξ_1^l и $\xi_1^{l-1} \xi_2$.

Далее, в силу предложения 4.5 из оценки (4.36) вытекает “суженная” оценка

$$\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 < l} \|D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad (4.37)$$

для всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Отметим, что $P^l(\xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0) \neq 0$, ибо в противном случае из оценки (4.37) (см. предложение 1.4 и замечание 2.8, (i)) будут следовать соотношения $\xi^\alpha = \lambda_\alpha(x) P^{l-1}(x, \xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ для всех $|\alpha| = l-1$, что, очевидно, невозможно. Поэтому найдется $k (\geq 2)$, для которого коэффициент при $\xi_1^{l-k} \xi_2^k$ в полиноме $P^l(\xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ отличен от нуля.

Выберем наименьшее такое k и проведем прямую ω через точки $(l-1, 0)$ и $(l-k, k)$. Она не вертикальна, так как $k \geq 2$. Обозначим через $l' := (l'_1, l'_2)$ вектор, компоненты которого $l'_1 := l-1$ и $l'_2 := k(l-1)/(k-1)$ суть длины отрезков, отсекаемых прямой ω на осях координат. “Суженный” оператор имеет вид

$$P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) = \sum_{\alpha_1/l'_1 + \alpha_2/l'_2 \leq 1} a_{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2},$$

т.е. ω является l' -главной прямой для оператора P . В самом деле, члены ξ_1^l и $\xi_1^{l-1} \xi_2$ в символе $P(x, \xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ отсутствуют, в “полосе” $l-1 \leq x+y \leq l$, $x, y \geq 0$, нет точек с целыми координатами, кроме как на прямых $x+y = l-1$ и $x+y = l$, и отрезок с концами в $(l-1, 0)$ и $(l-k, k)$ целиком лежит в этой “полосе” (см. рис. 1).

Значит, l' -главная часть оператора $P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0)$ имеет вид

$$P^{l'}(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) = c(x) D_1^{l-1} + b D_1^{l-k} D_2^k,$$

где $c(x) := a_{l-1, 0, 0, \dots, 0}(x)$ и $b := a_{l-k, k, 0, \dots, 0}$, причем $b \neq 0$.

Рис. 1

Поскольку оценка (4.37) имеет место с оператором D_1^{l-1} в левой части, то согласно предложению 1.4 и замечанию 2.8, (i) справедливо равенство

$$\xi_1^{l-1} = \lambda(x)[c(x)\xi_1^{l-1} + b\xi_1^{l-k}\xi_2^k], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.38)$$

Из (4.38) вытекает $\lambda(x)c(x) \equiv 1$ и $\lambda(x)b \equiv 0$, что противоречит условию $b \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что оператор $P(x, D)$ эллиптичен.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. В пространстве $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, с каждым дифференциальным выражением $P(x, D)$ вида (1.1) естественным образом ассоциированы минимальный и максимальный дифференциальные операторы $P_{\min}$ и $P_{\max}$. Напомним (см. [29; гл. 2, § 2]), что по определению $P_{\min}$ – это замыкание в $L^p(\Omega)$ дифференциального оператора $P' = P \upharpoonright C_0^\infty(\Omega)$ с областью определения $\text{dom}(P') = C_0^\infty(\Omega)$. Легко видеть, что $\overset{\circ}{W}_p^l(\Omega) \subset \text{dom}(P_{\min})$.

Кроме того, согласно критерию коэрцитивности в $\overset{\circ}{W}_\infty^l(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$ (теорема 3.4) для оператора с непрерывными в ограниченной области $\bar{\Omega}$ коэффициентами равенство $\text{dom}(P_{\min}) = \overset{\circ}{W}_\infty^l(\Omega)$ эквивалентно эллиптичности $P(x, D)$.

Исходя из этого теорема 4.11 эквивалентна следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 4.13. При выполнении условий теоремы 4.11 включение $\text{dom}(P_{\min}) \subset \overset{\circ}{W}_\infty^{l-1}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентно эллиптичности оператора $P(x, D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор $P_{\min}$ замкнут, то включение

$$\text{dom}(P_{\min}) \subset \overset{\circ}{W}_\infty^{l-1}(\mathbb{R}^n)$$

эквивалентно оценке (4.36), т.е. слабой коэрцитивности оператора $P_{\min}$. Остается применить теорему 4.11.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.14. (i) Отметим, что именно возможность неоднозначного выделения главной части дифференциального оператора позволила применить анизотропную часть предложения 1.4 для доказательства “изотропной” теоремы 4.11.

(ii) В случае постоянных коэффициентов оператора P условия

$$P^l(1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial P^l}{\partial \xi_1}(1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial P^l}{\partial \xi_2}(1, 0, \dots, 0) = 0$$

после “сужения” оператора P на двумерное подпространство $\text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$ означают, что $\nabla \tilde{P}^l(1, 0) = 0$ ($\tilde{P}$ – соответствующее “сужение” оператора P). Последнее условие сразу же ведет к противоречию с предложением 4.1, (iv), и заключительная часть доказательства теоремы 4.11 может быть опущена.

§ 5. Характеристика слабо коэрцитивных операторов

от двух переменных в $\dot{W}_p^l(\mathbb{R}^2)$, $p \in [1, \infty]$

В [16; с. 123] приведен пример Мальгранжа слабо коэрцитивного в $\dot{W}_\infty^2(\mathbb{R}^2)$, но не эллиптического оператора: $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$.

Следующее утверждение дает, в частности, полную характеристику операторов, слабо коэрцитивных в изотропном пространстве Соболева $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$.

ТЕОРЕМА 5.1. (i) *Произвольный слабо коэрцитивный оператор $P(D)$ порядка $l \geq 2$ в изотропном пространстве $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ имеет вид*

$$P(D) = R(D) \prod_{k=1}^m (\lambda_k D_1 + \mu_k D_2 + \alpha_k) + Q(D), \quad (5.1)$$

где $R(D)$ – эллиптический оператор порядка $l - m$, $Q(D)$ – оператор порядка $\leq l - 2$, $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $(\lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^2$ – попарно неколлинеарные векторы, $k \in \{1, \dots, m\}$, $m \leq l$.

(ii) *Обратно, всякий оператор вида (5.1) слабо коэрцитивен в $\dot{W}_p^l(\mathbb{R}^2)$, $p \in [1, \infty]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть сначала $P(\xi)$ – произвольный полином порядка l , $P^{l-1}(\xi) := \sum_{|\alpha|=l-1} a_\alpha \xi^\alpha - (l-1)$ -однородная часть полинома $P(\xi)$. Старшую форму $P^l(\xi)$ можно представить в виде произведения

$$P^l(\xi_1, \xi_2) = \prod_{j=1}^s (a_j \xi_1 + b_j \xi_2)^{k_j},$$

где $k_j \geq 1$, $\sum_{j=1}^s k_j = l$ и $(a_j, b_j) \in \mathbb{C}^2$ попарно неколлинеарны, $j \in \{1, \dots, s\}$. Покажем, что многочлен $P(\xi)$ можно записать в виде

$$P(\xi_1, \xi_2) = \prod_{j=1}^s [(a_j \xi_1 + b_j \xi_2)^{k_j} + Q_j(\xi_1, \xi_2)] + Q(\xi_1, \xi_2), \quad (5.2)$$

в котором $\deg Q_j < k_j$, $j \in \{1, \dots, s\}$, $\deg Q \leq l - 2$. Действительно, рациональную дробь $P^{l-1}(\xi)/P^l(\xi)$, являющуюся отношением двух однородных многочленов от двух переменных, можно разложить в сумму “простейших”:

$$\frac{P^{l-1}(\xi_1, \xi_2)}{P^l(\xi_1, \xi_2)} = \sum_{j=1}^s \frac{Q_j(\xi_1, \xi_2)}{(a_j \xi_1 + b_j \xi_2)^{k_j}}, \quad \text{где } \deg Q_j < k_j.$$

Отсюда ясно, что однородные формы степеней l и $l - 1$ полинома

$$\tilde{P}(\xi_1, \xi_2) := P^l(\xi_1, \xi_2) \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{Q_j(\xi_1, \xi_2)}{(a_j \xi_1 + b_j \xi_2)^{k_j}} \right] = \prod_{j=1}^s [(a_j \xi_1 + b_j \xi_2)^{k_j} + Q_j(\xi_1, \xi_2)]$$

совпадают с $P^l(\xi)$ и $P^{l-1}(\xi)$ соответственно. Поэтому разность $Q(\xi) := P(\xi) - \tilde{P}(\xi)$ – полином степени $\leq l-2$. Представление (5.2), таким образом, получено.

Пусть теперь оператор $P(D)$ слабо коэрцитивен в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$. В силу предложения 4.1, (iv) полином $P^l(\xi)$ не имеет кратных вещественных корней и, значит,

$$P^l(\xi_1, \xi_2) = \prod_{j=1}^{s-m} (a_j \xi_1 + b_j \xi_2)^{k_j} \prod_{j=1}^m (\lambda_j \xi_1 + \mu_j \xi_2), \quad k_j \geq 1, \quad \sum_{j=1}^{s-m} k_j = l - m.$$

Здесь векторы $(\lambda_j, \mu_j) \in \mathbb{R}^2$, $j \in \{1, \dots, m\}$, и $(a_j, b_j) \in \mathbb{C}^2$, $j \in \{1, \dots, s-m\}$, попарно неколлинеарны. Запишем теперь для полинома $P(\xi)$ разложение (5.2), в котором $a_{s-m+j} = \lambda_j$, $b_{s-m+j} = \mu_j$ и $Q_{s-m+j}(\xi) \equiv \alpha_j$, $j \in \{1, \dots, m\}$, так как $k_{s-m+1} = \dots = k_s = 1$. Для завершения доказательства осталось отметить, что $\alpha_j \notin \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, в силу предложения 4.1, (i) и обозначить

$$R(D) := \prod_{j=1}^{s-m} [(a_j D_1 + b_j D_2)^{k_j} + Q_j(D)].$$

Оператор $R(D)$ имеет порядок $\sum_{j=1}^{s-m} k_j = l - m$ и эллиптический, поскольку его старшая однородная форма $R^{l-m}(\xi) = \prod_{j=1}^{s-m} (a_j \xi_1 + b_j \xi_2)^{k_j} \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Учитывая (5.2), получаем, что оператор $P(D)$ имеет вид (5.1).

(ii) Докажем теперь, что оператор (5.1) слабо коэрцитивен в $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^2)$ при любом $p \in [1, \infty]$. В силу предложения 4.1, (ii) можно считать, что $\tilde{Q}(D) = 0$. Докажем вначале индукцией по m , $m \in \{0, \dots, l\}$, что

$$\Phi_\gamma^{(m)}(\xi) = \Phi_{\gamma_1, \gamma_2}^{(m)}(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi_1^{\gamma_1} \xi_2^{\gamma_2}}{R(\xi) \prod_{k=1}^m (\lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2 + \alpha_k)} \in \mathcal{M}_1. \quad (5.3)$$

Здесь $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 < l' + m$, $R(\xi)$ – эллиптический полином степени l' , а $\chi(\xi)$ – соответствующая “срезающая” функция.

Выполняя ортогональную замену переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, можно считать, что $\mu_m = 0$. Так как при этом неколлинеарность векторов (λ_k, μ_k) , $k \in \{1, \dots, m\}$, сохранится, то $\mu_k \neq 0$ для всех $k \in \{1, \dots, m-1\}$.

При $m = 0$ доказываемое утверждение справедливо:

$$\Phi_\gamma^{(0)}(\xi) = \chi(\xi) \xi^\gamma (R(\xi))^{-1} \in \mathcal{M}_1 \quad \text{при } |\gamma| < l',$$

поскольку полином $R(\xi)$ эллиптический (см. [14; § 4]).

Далее, $(\lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2 + \alpha_k)^{-1} \in \mathcal{M}_1$, $k \in \{1, \dots, m\}$. В самом деле, пусть $\chi_+(\cdot)$ – функция Хевисайда, $\delta(\cdot)$ – мера Дирака на прямой. Преобразование Фурье–Стилтьеса $\hat{\sigma}$ конечной меры σ с плотностью $-i\chi_+(t_1)e^{-t_1} \otimes \delta(t_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= -i \int_{\mathbb{R}^2} \chi_+(t_1) \delta(t_2) e^{-t_1} e^{it_1 \xi_1} e^{it_2 \xi_2} dt_1 dt_2 = -i \int_0^{+\infty} e^{it_1(\xi_1+i)} dt_1 \\ &= (\xi_1 + i)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Выполняя в (5.4) замену $\eta_1 := \lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2 + \alpha_k$, $\eta_2 := -\mu_k \xi_1 + \lambda_k \xi_2$, получим, что $(\lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2 + \alpha_k)^{-1} = \hat{\sigma}_1$, где конечная мера σ_1 имеет в точке $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$

ПЛОТНОСТЬ

$$\frac{\operatorname{Im} \alpha_k}{\lambda_k^2 + \mu_k^2} \chi_+ (\operatorname{Im} \alpha_k (t_1 \lambda_k + t_2 \mu_k)) \exp \left[(i \operatorname{Re} \alpha_k - \operatorname{Im} \alpha_k) \frac{t_1 \lambda_k + t_2 \mu_k}{\lambda_k^2 + \mu_k^2} \right] \\ \otimes \delta(-t_1 \mu_k + t_2 \lambda_k),$$

откуда вытекает включение $(\lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2 + \alpha_k)^{-1} \in \mathcal{M}_1$ (см. [23; гл. IV, § 3]).

Пусть (5.3) выполнено для всех функций $\Phi_\gamma^{(t)}(\xi)$ при $t \leq m-1$. Если $\gamma_1 > 0$, то $\Phi_\gamma^{(m)} \in \mathcal{M}_1$ как произведение $\Phi_{\gamma_1-1, \gamma_2}^{(m-1)}$ и $\xi_1(\lambda_m \xi_1 + \alpha_m)^{-1}$. Если $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 < l' + m - 1$, то $\Phi_\gamma^{(m)} \in \mathcal{M}_1$ как произведение $\Phi_{0, \gamma_2}^{(0)}$ и $\prod_{k=1}^m (\lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2 + \alpha_k)^{-1}$.

Пусть теперь $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = l' + m - 1$. Пусть $R(\xi) = a_0 \xi_2^{l'} + \dots$, $a_0 \neq 0$, где многочлен обозначен многочлен, степень которого по переменной ξ_2 меньше l' . Рассмотрим разность функции $\Phi_{0, l'+m-1}^{(m)}(\xi)$ и мультипликатора $\chi(\xi)[a_0 \mu_1 \dots \mu_{m-1}(\lambda_m \xi_1 + \alpha_m)]^{-1}$:

$$\chi(\xi) \frac{a_0 \mu_1 \dots \mu_{m-1} \xi_2^{l'+m-1} - (a_0 \xi_2^{l'} + \dots) \prod_{k=1}^{m-1} (\lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2 + \alpha_k)}{a_0 \mu_1 \dots \mu_{m-1} R(\xi) \prod_{k=1}^m (\lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2 + \alpha_k)}. \quad (5.5)$$

Многочлен, стоящий в числителе дроби (5.5), содержит ξ_2 в степени, меньшей $l' + m - 1$. Значит, эта дробь является линейной комбинацией функций $\Phi_\gamma^{(m)}(\xi)$, для которых $\gamma_2 < l' + m - 1$, т.е. является по доказанному выше суммой мультипликаторов.

Слабая коэрцитивность оператора $P(D)$ в $\dot{W}_p^l(\mathbb{R}^2)$ вытекает теперь из тождеств

$$\xi^\gamma \hat{f}(\xi) = \Phi_\gamma^{(m)}(\xi) P(\xi) \hat{f}(\xi) + \xi^\gamma (1 - \chi(\xi)) \hat{f}(\xi), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad |\gamma| < l,$$

после применения к ним обратного преобразования Фурье с учетом (5.3).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Пространство $L_{\infty, \mathbb{R}^2}^0(P)$, где $P(D)$ – оператор (5.1), состоит из операторов вида*

$$T(D) := c R^{l-m}(D) \prod_{k=1}^m (\lambda_k D_1 + \mu_k D_2) + Q(D), \quad c \in \mathbb{C}, \quad (5.6)$$

где $Q(D)$ – произвольный оператор порядка $\leq l-1$ и $R^{l-m}(D)$ – главная часть оператора $R(D)$ (порядка $l-m$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1.4, если $T \in L_{\infty, \mathbb{R}^2}^0(P)$, то

$$T^l(D) = c P^l(D) = c R^{l-m}(D) \prod_{k=1}^m (\lambda_k D_1 + \mu_k D_2),$$

т.е. оператор $T(D)$ имеет вид (5.6).

Обратно, пусть оператор $T(D)$ имеет вид (5.6). По теореме 5.1, (ii) $T(D)$ слабо коэрцитивен в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$, и при $c = 0$ имеем $Q = T \in L_{\infty, \mathbb{R}^2}^0(P)$. При $c \neq 0$ получим, что для соответствующей “срезающей” функции $\chi(\xi)$ справедливо

$$\chi(\xi) \frac{T(\xi)}{P(\xi)} = \chi(\xi) \frac{c P(\xi) + (T(\xi) - c P(\xi))}{P(\xi)} = \chi(\xi) \left[c + \frac{T(\xi) - c P(\xi)}{P(\xi)} \right] \in \mathcal{M}_1,$$

поскольку $T^l = c P^l$, и, значит, $\deg(T - c P) \leq l-1$. Отсюда $T \in L_{\infty, \mathbb{R}^2}^0(P)$.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Произведение эллиптического оператора порядка l от двух переменных на слабо коэрцитивный в $\mathring{W}_\infty^m(\mathbb{R}^2)$ оператор порядка m является слабо коэрцитивным в $\mathring{W}_\infty^{l+m}(\mathbb{R}^2)$ оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_1(D)$ – эллиптический оператор порядка l , а $T_2(D)$ – слабо коэрцитивный оператор порядка m . По теореме 5.1, (i)

$$T_2(D) = R(D) \prod_{k=1}^s (\lambda_k D_1 + \mu_k D_2 + \alpha_k) + Q(D), \quad (5.7)$$

где $R(D)$ – эллиптический оператор порядка $m - s$, $\deg Q \leq m - 2$, $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, (λ_k, μ_k) – попарно неколлинеарные векторы в $\mathbb{R}^2$, $k \in \{1, \dots, s\}$, $s \leq m$. Умножая представление (5.7) на $T_1(D)$, получим представление

$$T_1(D)T_2(D) = T_1(D)R(D) \prod_{k=1}^s (\lambda_k D_1 + \mu_k D_2 + \alpha_k) + T_1(D)Q(D),$$

которое также имеет вид (5.1). В самом деле, $T_1(D)R(D)$ – эллиптический оператор порядка $l + m - s$, а $\deg(T_1 Q) = \deg T_1 + \deg Q \leq l + m - 2$.

Алгебраический критерий слабой коэрцитивности в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ дает следующая

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $P(D)$, $D = (D_1, D_2)$, – оператор порядка l , а все коэффициенты и корни полинома $P^l(\xi)$ вещественны.

(i) Если $P(D)$ слабо коэрцитивен в изотропном пространстве $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$, то полиномы $P^l(\xi)$ и $\text{Im } P^{l-1}(\xi)$ не имеют общих нетривиальных вещественных нулей.

(ii) Обратно, если полиномы $P^l(\xi)$ и $\text{Im } P^{l-1}(\xi)$ не имеют общих нетривиальных вещественных нулей, то оператор $P(D)$ слабо коэрцитивен в $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^2)$, $p \in [1, \infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию старшая форма $P^l(\xi)$ имеет вид

$$P^l(\xi) = \prod_{k=1}^l (\lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2), \quad \text{где } (\lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^2, \quad k \in \{1, \dots, l\}. \quad (5.8)$$

(i) Пусть оператор $P(D)$ слабо коэрцитивен в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$. Тогда в силу предположения 4.1, (iv) векторы (λ_k, μ_k) в (5.8) попарно неколлинеарны. По теореме 5.1, (i) и согласно равенству (5.8) полином $P(\xi)$ записывается в виде

$$P(\xi) = \prod_{k=1}^l (\lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2 + \alpha_k) + Q(\xi), \quad (5.9)$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $k \in \{1, \dots, l\}$, а $\deg Q \leq l - 2$. Из (5.9) вытекает, что

$$P^{l-1}(\xi) = \sum_{j=1}^l \alpha_j \prod_{k \neq j} (\lambda_k \xi_1 + \mu_k \xi_2). \quad (5.10)$$

Подставляя теперь один из нулей $(-\mu_r, \lambda_r)$ старшей формы $P^l(\xi)$ в (5.10), получим

$$P^{l-1}(-\mu_r, \lambda_r) = \alpha_r \prod_{k \neq r} (\lambda_r \mu_k - \lambda_k \mu_r), \quad (5.11)$$

откуда в силу условий на числа α_k и векторы (λ_k, μ_k) получаем $P^{l-1}(-\mu_r, \lambda_r) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Значит, $P^l(-\mu_r, \lambda_r) = 0$ и $\text{Im } P^{l-1}(-\mu_r, \lambda_r) \neq 0$ для всех $r \in \{1, \dots, l\}$.

(ii) Обратно, пусть полиномы $P^l(\xi)$ и $\text{Im } P^{l-1}(\xi)$ не имеют общих нетривиальных вещественных нулей, т.е. $\text{Im } P^{l-1}(-\mu_r, \lambda_r) \neq 0$ для всех $r \in \{1, \dots, l\}$. Как следует из доказательства теоремы 5.1, (i), полином $P(\xi)$ со старшей формой (5.8) можно представить в виде (5.9), где $\deg Q \leq l-2$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ – некоторые числа. При этом полином $P^{l-1}(\xi)$ представляется той же формулой (5.10). В силу того, что $P^{l-1}(-\mu_r, \lambda_r) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $\lambda_r \mu_k - \lambda_k \mu_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k, r \in \{1, \dots, l\}$, $k \neq r$, из равенства (5.11) вытекает, что $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $k \in \{1, \dots, l\}$. Отсюда по теореме 5.1, (ii) следует слабая коэрцитивность оператора $P(D)$ в $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. (i) Условие вещественности коэффициентов a_α полинома P^l в теореме 5.4 не является ограничительным: если корни полинома P^l вещественны, то его коэффициенты имеют вид $a_\alpha = ca'_\alpha$, где $c \in \mathbb{C}$, $a'_\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) При помощи результата $R[f, g]$ полиномов f и g условие теоремы 5.4 записывается в виде $R[P^l, \text{Im } P^{l-1}](\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. В таком виде проверка слабой коэрцитивности не требует знания корней полинома $P^l(\xi)$.

(iii) Теорема 5.1 вместе с предложением 4.1 показывают, что любой строго гиперболический оператор порядка l от двух переменных после подходящего возмущения его оператором порядка $l-1$ становится слабо коэрцитивным в $\mathring{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$. Возмущениями порядка $l-2$ добиться этого, вообще говоря, невозможно.

(iv) Операторы (5.1) остаются слабо коэрцитивными в $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ в случае любой (в том числе ограниченной) области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, но не описывают всей совокупности слабо коэрцитивных операторов в $\mathring{W}_p^l(\Omega)$.

(v) Теорема 5.1 позволяет дополнить результаты из [32]. А именно, согласно [32; с. 220] оператор Даламбера $\square := D_1^2 - a^2 D_2^2$ не является слабо коэрцитивным в $\mathring{W}_\infty^2(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Но после подходящего возмущения оператора $\square$ членами меньшего порядка он становится слабо коэрцитивным в $\mathring{W}_\infty^2(\mathbb{R}^2)$, а значит, и в $\mathring{W}_\infty^2(\Omega)$.

§ 6. Слабо коэрцитивные неэллиптические однородные системы

В этом параграфе мы показываем, что произведение произвольной эллиптической системы и специальной слабо коэрцитивной системы является слабо коэрцитивной, но не эллиптической системой. Для произвольной слабо коэрцитивной системы такое заключение неверно (см. замечание 6.5).

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_1 = \widetilde{\mathcal{M}}_1(\mathbb{R}^n)$ класс мультипликаторов, удовлетворяющих условиям теоремы 2.10. Также введем, следуя [22; § 2], отношение частичного порядка на множестве мультииндексов $\mathbb{Z}_+^n$: будем писать $\alpha \leq \beta$, если $\alpha_j \leq \beta_j$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$; при этом $\alpha < \beta$, если $\alpha_j < \beta_j$ хотя бы для одного j .

В некоторых случаях проверку условий теоремы 2.10 упрощает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, $P(\xi)$ – полином степени l , и пусть множество его нулей содержится в шаре B_r^n . Рассмотрим семейство функций

$$\Phi_\beta(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi^\beta}{P(\xi)}, \quad 0 < \beta \leq \alpha, \quad |\alpha| < l, \quad (6.1)$$

где $\chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – “срезающая” функция, $0 \leq \chi(\xi) \leq 1$, равная нулю в шаре B_r^n и единице при $|\xi| \geq r_1 > r$. Пусть при $|\xi| \geq r_1$ выполнены следующие условия:

- (i) функции (6.1) удовлетворяют неравенству (2.7);
- (ii) полином $P(\xi)$ удовлетворяет неравенствам

$$\prod_{j=1}^n (1 + |\xi_j|)^{\gamma_j} |(D^\gamma P)(\xi)| \leq C |P(\xi)|, \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}_2^n, \quad C > 0. \quad (6.2)$$

Тогда $\Phi_\beta \in \widetilde{\mathcal{M}}_1$ при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $0 < \beta \leq \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что неравенства (2.7) и (2.8) выполнены при $|\xi| \leq R$ для любого $R > 0$ в силу непрерывности функций Φ_β и их производных. Поэтому далее везде будет предполагаться, что $|\xi|$ достаточно велико (и, значит, наличие “срезающей” функции $\chi(\xi) \equiv 1$ при $|\xi| \geq r_1$ в дальнейших выкладках можно не оговаривать) и что $0 < \beta \leq \alpha$, а через C будут обозначаться различные положительные константы.

Рассмотрим случай $n = 2$ (в случае $n \geq 2$ доказательство аналогично).

(i) Пусть $|\xi_1| > 1, |\xi_2| > 1$. Тогда неравенства (2.7), (2.8) и (6.2) соответственно эквивалентны следующим группам неравенств:

$$|\xi_1 \xi_2|^\delta |\Phi_\beta(\xi)| \leq C; \quad (6.3)$$

$$|\xi_1|^{\delta+1} |\xi_2|^\delta |D_1 \Phi_\beta| \leq C, \quad |\xi_1|^\delta |\xi_2|^{\delta+1} |D_2 \Phi_\beta| \leq C, \quad (6.4)$$

$$|\xi_1 \xi_2|^{\delta+1} |D_1 D_2 \Phi_\beta| \leq C;$$

$$|\xi_1 D_1 P| \leq C |P(\xi)|, \quad |\xi_2 D_2 P| \leq C |P(\xi)|, \quad |\xi_1 \xi_2 D_1 D_2 P| \leq C |P(\xi)|. \quad (6.5)$$

В силу теоремы 2.10 достаточно показать, что из (6.3) и (6.5) следуют неравенства (6.4).

Оценим $D_1 \Phi_\beta$. Имеем

$$\begin{aligned} |(D_1 \Phi_\beta)(\xi)| &= \left| \frac{\beta_1 \xi^\beta}{\xi_1 P(\xi)} - \frac{\xi^\beta}{P(\xi)} \frac{D_1 P}{P} \right| = \left| \frac{\beta_1 \Phi_\beta}{\xi_1} - \Phi_\beta \frac{D_1 P}{P} \right| \\ &\leq C \left| \frac{\Phi_\beta(\xi)}{\xi_1} \right| \leq \frac{C}{|\xi_1|^{\delta+1} |\xi_2|^\delta}. \end{aligned}$$

Оценку $D_2 \Phi_\beta$ получим, если в предыдущем рассуждении поменять местами ξ_1 и ξ_2 .

Аналогично оценим $D_1 D_2 \Phi_\beta$. Имеем

$$|D_1 D_2 \Phi_\beta| = \left| \frac{\beta_1 D_2 \Phi_\beta}{\xi_1} - D_2 \Phi_\beta \frac{D_1 P}{P} - \Phi_\beta \left(\frac{D_1 D_2 P}{P} - \frac{D_1 P}{P} \frac{D_2 P}{P} \right) \right| \leq \frac{C}{|\xi_1 \xi_2|^{\delta+1}}.$$

(ii) Пусть $|\xi_1| \leq 1, |\xi_2| > 1$. Тогда неравенства (2.7), (2.8) и (6.2) соответственно эквивалентны следующим группам неравенств:

$$|\xi_2|^\delta |\Phi_\beta(\xi)| \leq C; \quad (6.6)$$

$$|\xi_2|^\delta |D_1 \Phi_\beta| \leq C, \quad |\xi_2|^{\delta+1} |D_2 \Phi_\beta| \leq C, \quad |\xi_2|^{\delta+1} |D_1 D_2 \Phi_\beta| \leq C; \quad (6.7)$$

$$|D_1 P| \leq C |P(\xi)|, \quad |\xi_2 D_2 P| \leq C |P(\xi)|, \quad |\xi_2 D_1 D_2 P| \leq C |P(\xi)|. \quad (6.8)$$

Покажем, что из (6.6) и (6.8) следуют неравенства (6.7). Обозначим $\beta' := (\beta_1 - 1, \beta_2)$ при $\beta_1 > 0$ и $\beta' := \beta$ при $\beta_1 = 0$. Оценим $D_1\Phi_{\beta'}$, $D_2\Phi_{\beta}$ и $D_1D_2\Phi_{\beta}$. Имеем

$$\begin{aligned} |(D_1\Phi_{\beta})(\xi)| &= \left| \beta_1\Phi_{\beta'}(\xi) - \Phi_{\beta}(\xi) \frac{D_1P}{P} \right| \leq C(|\Phi_{\beta'}(\xi)| + |\Phi_{\beta}(\xi)|) \leq \frac{C}{|\xi_2|^{\delta}}, \\ |(D_2\Phi_{\beta})(\xi)| &= \left| \frac{\beta_2\Phi_{\beta}(\xi)}{\xi_2} - \Phi_{\beta}(\xi) \frac{(D_2P)(\xi)}{P(\xi)} \right| \leq C \left| \frac{\Phi_{\beta}(\xi)}{\xi_2} \right| \leq \frac{C}{|\xi_2|^{\delta+1}}, \\ |D_1D_2\Phi_{\beta}| &= \left| \frac{\beta_1\beta_2\Phi_{\beta'}}{\xi_2} - D_2\Phi_{\beta} \frac{D_1P}{P} - \Phi_{\beta} \left(\frac{D_2D_1P}{P} - \frac{D_1P}{P} \frac{D_2P}{P} \right) \right| \leq \frac{C}{|\xi_2|^{\delta+1}}. \end{aligned}$$

(iii) Случай $|\xi_1| > 1$, $|\xi_2| \leq 1$ рассматривается аналогично предыдущему.

Таким образом, по теореме 2.10 функция $\Phi \in \mathcal{M}_1$.

В следующей теореме приводятся широкие классы слабо коэрцитивных в изотропном пространстве $\mathring{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, но не эллиптических систем. В частности, для них нарушается условие $n \geq 2N + 1$ теоремы 4.9.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\{P_j(D)\}_1^N$ – эллиптическая система порядка l ,

$$R_{uv}(D) := (D_u + i)(D_v + i), \quad D_k := -i \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (6.9)$$

Тогда система операторов

$$S_{juv}(D) := P_j(D)R_{uv}(D), \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad u, v \in \{1, \dots, n\}, \quad u > v, \quad (6.10)$$

слабо коэрцитивна в $\mathring{W}_p^{l+2}(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1, \infty]$, но не эллиптична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (6.10) не эллиптична, так как система $S_{juv}^{l+2}(\xi) = \xi_u \xi_v P_j^l(\xi)$ ее $(l+2)$ -главных частей имеет общий нетривиальный нуль $\xi^0 = (0, \dots, 0, 1)$.

Далее, выберем произвольный моном D^{α} с условием $0 < |\alpha| \leq l+1$. Так как переменные $\xi_1, \dots, \xi_n$ в записи операторов (6.9) и (6.10) “равноправны”, то без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 > 0$. Покажем, что вместо неравенства слабой коэрцитивности выполнена более сильная оценка

$$\begin{aligned} \|D^{\alpha}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq C_1 \sum_{j=1}^N \sum_{v=2}^n \|S_{j1v}(D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \\ f &\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \quad (6.11)$$

где в правой части неравенств присутствуют лишь операторы, содержащие D_1 . Для справедливости (6.11) достаточно показать, что функции

$$\Phi_{\alpha jv}(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi^{\alpha} \overline{S_{j1v}(\xi)}}{\sum_{q=1}^N \sum_{s=2}^n |S_{q1s}(\xi)|^2} = \chi(\xi) \frac{\xi^{\alpha} (\xi_v - i) \overline{P_j(\xi)}}{(\xi_1 + i) \sum_{q=1}^N |P_q(\xi)|^2 \sum_{s=2}^n (\xi_s^2 + 1)} \quad (6.12)$$

являются мультипликаторами в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, при $|\alpha| \leq l+1$, $j \in \{1, \dots, N\}$, $v \in \{2, \dots, n\}$. Здесь $\chi(\xi) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ – “срезающая” функция, $0 \leq \chi(\xi) \leq 1$, равная единице при достаточно большом $|\xi|$ и нулю в шаре B_r^n , содержащем компактное (см. предложение 2.11, (i)) множество нулей эллиптической системы

$\{P_j(D)\}_1^N$. Действительно, если включения $\Phi_{\alpha jv} \in \mathcal{M}_1$ доказаны, то желаемые оценки (6.11) вытекают из равенств

$$\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^N \sum_{v=2}^n \Phi_{\alpha jv}(\xi) S_{j1v}(\xi) \widehat{f}(\xi) + \xi^\alpha (1 - \chi(\xi)) \widehat{f}(\xi), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

после применения к ним обратного преобразования Фурье.

Пусть вначале $|\alpha| < l + 1$ и, как указано выше, $\alpha_1 > 0$. Тогда каждая из следующих рациональных дробей:

$$\frac{\xi_1}{\xi_1 + i}, \quad \chi(\xi) \frac{\xi_1^{\alpha_1-1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n} \overline{P_j(\xi)}}{\sum_{q=1}^N |P_q(\xi)|^2}, \quad \frac{\xi_v - i}{\sum_{s=2}^n (\xi_s^2 + 1)},$$

принадлежит $\mathcal{M}_1$. Действительно, $\xi_1(\xi_1 + i)^{-1} = 1 - i(\xi_1 + i)^{-1} \in \mathcal{M}_1$ в силу формулы (5.4). Легко видеть, что две другие дроби принадлежат $\mathcal{M}_1$ в силу теоремы 2.10 (или предложения 6.1), поскольку их знаменатели являются эллиптическими полиномами от своих переменных. И наконец, $\Phi_{\alpha jv} \in \mathcal{M}_1$, так как $\mathcal{M}_1$ является алгеброй.

Рассмотрим теперь случай $|\alpha| = l + 1$. Легко видеть, что

$$\Phi_{\alpha jv}(\xi) = \chi(\xi) \frac{\xi_1}{\xi_1 + i} \frac{\xi^\beta (\xi_v - i) \overline{P_j(\xi)}}{\sum_{q=1}^N |P_q(\xi)|^2 \sum_{s=2}^n (\xi_s^2 + 1)} =: \frac{\xi_1}{\xi_1 + i} \Psi_{\beta jv}(\xi),$$

где $\beta := (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\beta| = l$. Как отмечено выше, $\xi_1(\xi_1 + i)^{-1} \in \mathcal{M}_1$. Поэтому достаточно показать, что $\Psi_{\beta jv} \in \mathcal{M}_1$.

Обозначим через $\varkappa$ степень, с которой ξ_1 входит в произведение $\xi^\beta \overline{P_j(\xi)}$, $\varkappa \leq 2l$. Рассмотрим два случая.

(i) Пусть $\varkappa < 2l$. Очевидно, функции $\Psi_{\beta jv}$ – суммы функций вида

$$\Phi_\gamma(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi^\gamma}{G(\xi) \sum_{s=2}^n (\xi_s^2 + 1)}, \quad |\gamma| \leq 2l + 1, \quad \gamma_1 \leq 2l - 1, \quad (6.13)$$

где $G(\xi) := \sum_{q=1}^N |P_q(\xi)|^2$ – эллиптический полином степени $2l$. Проверим, что для функций (6.13) выполнены условия предложения 6.1. Сначала проверим условие (2.7).

В силу предложения 2.11, (ii) при достаточно большом $|\xi|$ имеем неравенство

$$C_1 |\xi|^{2l} \leq |G(\xi)| \leq C_2 |\xi|^{2l}, \quad C_1, C_2 > 0. \quad (6.14)$$

Далее, согласно неравенству о среднем геометрическом и среднем квадратическом

$$\prod_{j=1}^n (1 + |\xi_j|)^\delta \leq C |\xi|, \quad \text{где } \delta := \frac{1}{n}, \quad (6.15)$$

при больших $|\xi|$. Так как $|\gamma| \leq 2l + 1$ и $\gamma_1 \leq 2l - 1$, то $\gamma = \gamma' + \tilde{\gamma}$, где мультииндексы γ' и $\tilde{\gamma}$ таковы, что $\gamma_1 = \gamma'_1 \leq 2l - 1$, $|\gamma'| \leq 2l - 1$ и $|\tilde{\gamma}| \leq 2$, $\tilde{\gamma}_1 = 0$. Тогда

$$|\xi^{\gamma'}| \leq |\xi|^{|\gamma'|} \leq |\xi|^{2l-1}, \quad |\xi^{\tilde{\gamma}}| \leq \sum_{k=2}^n (\xi_k^2 + 1) \quad (6.16)$$

при $|\xi| > 1$. Перемножив неравенства (6.15) и (6.16) и учитывая (6.14), при больших $|\xi|$ приходим к неравенству (2.7) для функции $\Phi_\gamma(\xi)$.

Неравенства (6.2) для полинома $G(\xi) \sum_{s=2}^n (1 + \xi_s^2)$ вытекают из формулы Лейбница (2.4), поскольку для $G(\xi)$ эти неравенства справедливы как для эллиптического полинома (см. [14; § 4]), а для полинома $\sum_{s=2}^n (1 + \xi_s^2)$ они очевидны.

Таким образом, согласно предложению 6.1 $\Phi_\gamma \in \widetilde{\mathcal{M}}_1$, а значит, и $\Psi_{\beta jv} \in \widetilde{\mathcal{M}}_1$.

(ii) Пусть $\varkappa = 2l$. Тогда $\xi^\beta = \xi_1^l$. Пусть также $P_j(\xi) = c_j \xi_1^l + \dots$, где многоточие обозначает сумму мономов, содержащих ξ_1 в степени $< l$. Тогда $G(\xi) = \sum_{q=1}^n |c_q|^2 \xi_1^{2l} + \dots$, причем $\sum_{q=1}^n |c_q|^2 \neq 0$. В силу теоремы 2.10 функция

$$\Psi'_{\beta jv}(\xi) := \chi(\xi) \frac{\bar{c}_j}{\sum_{q=1}^n |c_q|^2} \frac{\xi_v - i}{\sum_{s=2}^n (\xi_s^2 + 1)}$$

является мультипликатором в $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\Psi'_{\beta jv} \in \mathcal{M}_1$. Кроме того, по доказанному на шаге (i)

$$\Psi_{\beta jv}(\xi) - \Psi'_{\beta jv}(\xi) = \chi(\xi) \frac{[\xi_1^l (\bar{c}_j \xi_1^l + \dots) - \bar{c}_j (\sum_{q=1}^n |c_q|^2)^{-1} G(\xi)] (\xi_v - i)}{G(\xi) \sum_{s=2}^n (\xi_s^2 + 1)} \in \mathcal{M}_1,$$

поскольку множитель в квадратных скобках уже не содержит мономов с ξ_1^{2l} .

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Пусть $P(D)$ – эллиптический оператор порядка l , $R_{uv}(D)$ – операторы вида (6.9). Тогда система $\{P(D)R_{uv}(D)\}_{u>v}$ слабо коэрцитивна в $\dot{W}_p^{l+2}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, но не эллиптична.

В следующем предложении мы покажем, что при $p = \infty$ число операторов $R_{uv}(D)$ в теореме 6.2 нельзя уменьшить даже при $N = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Пусть $n \geq 3$, $P(D)$ – эллиптический оператор порядка l и $R_{uv}(D)$ – операторы вида (6.9). Тогда система $\{P(D)R_{uv}(D)\}_{u>v}$ после удаления из нее любого оператора перестает быть слабо коэрцитивной в $\dot{W}_\infty^{l+2}(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, не нарушая общности, что из системы удален оператор $P(D)R_{12}(D)$. Предположим, что система

$$\{P(D)R_{uv}(D)\}_{u>v, u+v>3}$$

осталась слабо коэрцитивной в $\dot{W}_\infty^{l+2}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим “суженную” систему $\{P(D)R_{uv}(D) \restriction E\}_{u>v, u+v>3}$, где $E := \text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$. Она имеет порядок $l+1$ и согласно следствию 4.7 слабо коэрцитивна в $\dot{W}_\infty^{l+2}(\mathbb{R}^2)$, т.е., в частности, оценивает оператор D_1^{l+1} . В силу предложения 1.4 справедливо тождество

$$\begin{aligned} \xi_1^{l+1} &= \sum_{u>v, u+v>3} \lambda_{uv} (P(\xi)R_{uv}(\xi) \restriction E)^{l+1}(\xi) \\ &= (P^l(\xi) \restriction E) \left[i \sum_{u>v, u+v>3} \lambda_{u1} \xi_1 + \lambda_{u2} \xi_2 \right]. \end{aligned}$$

Полином $P^l(\xi) \restriction E$ эллиптичен и поэтому не делится на ξ_1 . Значит, полином в квадратных скобках должен делиться на ξ_1^{l+1} . Но это противоречит неравенству $l \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Предложение 6.4 показывает, что следствие 5.3, вообще говоря, не имеет места в случае $N > 1$. Например, система $\{(D_1 + i)(D_2 + i), (D_3 + i)(D_4 + i)\}$ слабо коэрцитивна в $\overset{\circ}{W}_{\infty}^2(\mathbb{R}^4)$, но система

$$(D_1^2 + \dots + D_4^2)(D_1 + i)(D_2 + i), \quad (D_1^2 + \dots + D_4^2)(D_3 + i)(D_4 + i)$$

не является слабо коэрцитивной в $\overset{\circ}{W}_{\infty}^4(\mathbb{R}^4)$.

Список литературы

- [1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, Физматлит, М., 1996; англ. пер. 1-го изд.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, vol. I, II, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto, ON–London, 1979.
- [2] Л. Р. Волевич, “Локальные свойства решений квазиэллиптических систем”, *Матем. сб.*, **59(101)**(дополнительный) (1962), 3–52.
- [3] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, *Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных*, УРСС, М., 2002; англ. пер.: S. Gindikin, L. R. Volevich, *The method of Newton's polyhedron in the theory of partial differential equations*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **86**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
- [4] Я. Б. Лопатинский, “Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям”, *Укр. матем. журн.*, **5:2** (1953), 123–151; англ. пер.: Ya. B. Lopatinskiĭ, “A method of reducing boundary problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **89** (1970), 149–183.
- [5] М. С. Агранович, “Об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами”, *УМН*, **16:2** (1961), 27–93; англ. пер.: M. S. Agranovich, “Partial differential equations with constant coefficients”, *Russian Math. Surveys*, **16:2** (1961), 23–90.
- [6] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, т. I, Мир, М., 1971; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [7] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: H. Triebel, *Theory of function spaces*, Monogr. Math., **78**, Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1983.
- [8] О. В. Бесов, “О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева”, *Матем. сб.*, **73(115):4** (1967), 585–599; англ. пер.: O. V. Besov, “On coercivity in nonisotropic Sobolev spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **2:4** (1967), 521–534.
- [9] Л. Хёрмандер, *К теории общих дифференциальных операторов в частных производных*, ИЛ, М., 1959; пер. с англ.: L. Hörmander, “On the theory of general partial differential operators”, *Acta Math.*, **94:1** (1955), 161–248.
- [10] М. М. Маламуд, “Дифференциальные свойства функций и коэрцитивность в пространствах с равномерной нормой”, *Укр. матем. журн.*, **34:5** (1982), 553–558; англ. пер.: M. M. Malamud, “Differential properties of functions and coerciveness in spaces with uniform norm”, *Ukrainian Math. J.*, **34:5** (1982), 444–449.
- [11] М. М. Маламуд, “Оценка для дифференциальных операторов в равномерной норме и коэрцитивность в пространствах Л. Соболева”, *Докл. АН СССР*, **298:1** (1988), 32–36; англ. пер.: M. M. Malamud, “An estimate for differential operators in the uniform norm, and coercivity in Sobolev spaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **37:1** (1988), 25–29.

- [12] М. М. Маламуд, “Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ ”, Тр. ММО, **56**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1995, 206–261; англ. пер.: М. М. Malamud, “Estimates for systems of minimal and maximal differential operators in $L_p(\Omega)$ ”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1995, 159–202.
- [13] D. Ornstein, “A non-inequality for differential operators in the L_1 norm”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **11**:1 (1962), 40–49.
- [14] E. S. Belinsky, M. Z. Dvejrjn, M. M. Malamud, “Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators”, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:1 (2005), 6–16.
- [15] Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд, “О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в L^1 и L^∞ ”, *Докл. РАН*, **397**:4 (2004), 453–458; англ. пер.: D. V. Limanskii, M. M. Malamud, “Weak coercivity of systems of differential operators in L^1 and L^∞ ”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **70**:1 (2004), 584–588.
- [16] K. de Leeuw, H. Mirkil, “A priori estimates for differential operators in L_∞ norm”, *Illinois J. Math.*, **8**:1 (1964), 112–124.
- [17] П. И. Лизоркин, “Обобщенное лиувилевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения”, *Матем. сб.*, **60(102)**:3 (1963), 325–353.
- [18] С. Г. Михлин, “О мультипликаторах интегралов Фурье”, *ДАН*, **109**:4 (1956), 701–703.
- [19] Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд, “Слабо коэрцитивные неквазиэллиптические системы дифференциальных операторов в $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ ”, *ДАН*, **415**:5 (2007), 583–588; англ. пер.: D. V. Limanskii, M. M. Malamud, “Weakly coercive non-quasi-elliptic systems of differential operators in $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ ”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **76**:1 (2007), 583–588.
- [20] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1966.
- [21] Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: L. Nirenberg, *Topic in nonlinear functional analysis*, Courant Institute of Math. Sciences, New York Univ., New York, 1974.
- [22] J. Boman, “Supremum norm estimates for partial derivatives of functions of several real variables”, *Illinois J. Math.*, **16**:2 (1972), 203–216.
- [23] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [24] О. В. Бесов, “К теореме Хермандера о мультипликаторах Фурье”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*, 11, Тр. МИАН, **173**, Наука, М., 1986, 3–13; англ. пер.: O. V. Besov, “On Hörmander’s theorem on Fourier multipliers”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **173** (1987), 1–12.
- [25] П. И. Лизоркин, “Предельные случаи теорем о $\mathcal{FL}_p$ -мультипликаторах”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*, 11, Тр. МИАН, **173**, Наука, М., 1986, 164–180; англ. пер.: P. I. Lizorkin, “Limiting cases of theorems on $\mathcal{FL}_p$ -multipliers”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **173** (1987), 177–194.
- [26] Р. М. Тригуб, “Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:6 (1980), 1378–1409; англ. пер.: R. M. Trigub, “Absolute convergence of Fourier integrals, summability of Fourier series, and polynomial approximation of functions on the torus”, *Math. USSR-Izv.*, **17**:6 (1981), 567–593.
- [27] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier analysis and approximation of functions*, Kluwer Acad. Publ., Boston–Dordrecht–London, 2004.

- [28] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, “Многогранник Ньютона и локальная разрешимость линейных дифференциальных уравнений в частных производных”, Тр. ММО, **48**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1985, 211–262; англ. пер.: L. R. Volevich, S. G. Gindikin, “The Newton polyhedron and local solvability of linear partial differential equations”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1986, 227–276.
- [29] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965; англ. пер.: Ju. M. Berezans’kii, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [30] А. И. Марковский, “Об ансамблях минимальных дифференциальных операторов”, *Теор. и прикл. матем. Львов*, 1963, № 2, 48–52.
- [31] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., Наука, М., 1969; нем. пер. 1-го изд.: M. A. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, Akademie-Verlag, Berlin, 1960.
- [32] W. Littman, C. McCarthy, N. Rivière, “The non-existence of L^p estimates for certain translation-invariant operators”, *Studia Math.*, **30**:2 (1968), 218–229.

Д. В. Лиманский (D. V. Limanskii)
Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: lim8@telenet.dn.ua

Поступила в редакцию
15.01.2008

М. М. Маламуд (M. M. Malamud)
Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: mmm@telenet.dn.ua