Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Похожаев, О разрушении решений уравнения
Курамото–Сивашинского, *Матем. сб.*, 2008, том 199, но-
мер 9, 97–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:42:31

УДК 517.954

С. И. Похожаев

О разрушении решений уравнения Курамото–Сивашинского

В работе рассматривается проблема отсутствия глобальных решений начально-краевых задач для уравнения Курамото–Сивашинского. Получены достаточные условия отсутствия глобальных решений рассматриваемых задач как для ограниченных, так и для неограниченных областей. Выполнение этих условий влечет априори разрушение решения соответствующей начально-краевой задачи. Доказательство использует обобщение метода нелинейной емкости, основанного на выборе асимптотически оптимальных пробных функций.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение. Постановка задачи

Уравнение Курамото–Сивашинского, как известно, имеет вид

$$u_t + \Delta^2 u + \Delta u = |Du|^2. \quad (1.1)$$

Здесь $u = u(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$; Du – градиент функции u относительно x , т.е.

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Это уравнение было выведено независимо Я. Курамото (см. [1], [2]) и Г. Сивашинским (см. [3], [4]). В первом случае – для описания процесса образования диссипативных структур в реакциях с диффузией. Во втором случае – для описания распространения фронта пламени в турбулентном потоке. В дальнейшем это уравнение подобно уравнению Кортевега–де Фриза нашло широкое применение при описании различных нелинейных процессов, включая распространение неустойчивостей в гидродинамике, в теории горения и во многих других нелинейных процессах.

В одномерном случае ($N = 1$) уравнение (1.1) изучалось многими авторами как аналитическими, так и численными методами (см., например, [3]–[18] и приведенную там литературу). При этом рассматривалась как задача Коши [15], так и начально-краевая задача [19] в одномерном случае.

Наряду с этими классическими задачами рассматривались вопросы бифуркации решений, асимптотическое поведение решений [8] и структуры их аттракторов [15], [16]. Много работ посвящено исследованию периодических по

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00370), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3810.2008.1), Программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” и INTAS (грант № 05-1000008-7921).

$x \in \mathbb{R}$ решений продифференцированного по x уравнения (1.1) (см. [6], [11] и приведенную там литературу). Большое число работ посвящено также исследованию решений типа бегущих волн (см. [14] и приведенную там литературу).

Ключевым моментом при исследовании одномерного уравнения (1.1) является наличие интеграла энергии в рассмотренных задачах. Эта ключевая априорная оценка дает затем возможность привлечь соответствующую теорию линейных уравнений, теорию интерполяции и другие известные методы и получить дальнейшие результаты о существовании и поведении решений, а также об их свойствах.

В случае многомерного уравнения (1.1) этот подход не срабатывает.

В многомерном случае можно рассматривать “обобщенное” уравнение Курамото–Сивашинского, содержащее либо дополнительные “хорошие” члены, либо $|Du|^p$ с $p > 2$, либо то и другое. Это “обобщение” дает возможность получить первую априорную оценку и затем продолжить исследование, используя известные методы.

В предлагаемой статье рассматриваются начально-краевые задачи как в ограниченной области, так и в неограниченной внешней области пространства $\mathbb{R}^N$ с граничными условиями типа Навье на внутренней границе. При определенных начальных условиях доказывается разрушение решения этой задачи за конечное время и устанавливается нижняя оценка для роста соответствующего интеграла.

Доказательство проводится на основании обобщения “метода нелинейной емкости” [20]. Суть этого подхода заключается в использовании асимптотически оптимальных пробных функций.

Статья организована следующим образом. В § 2 рассматриваются начально-краевые задачи в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^N$ и устанавливаются условия на начальные данные, которые влекут априори разрушение решения за конечное время. При этом устанавливается оценка для момента разрушения.

Случаю неограниченной области пространства $\mathbb{R}^N$ посвящен § 3. Здесь доказывается основная теорема о разрушении решения. В § 4 в качестве приложения основной теоремы рассматриваются конкретные достаточные условия разрушения решений при $N = 1$, $N = 2$ и $N > 2$.

В заключительном § 5 обсуждается условие теоремы 4.1 о разрушении решения в случае $N > 2$.

§ 2. Случай ограниченной области

Пусть Ω есть ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t + \Delta^2 u + \Delta u = |Du|^2 \quad \text{в } Q_T, \quad (2.1)$$

$$u = \frac{\partial}{\partial n}(u + \Delta u) = 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (2.2)$$

$$u = u_0(x) \quad \text{при } t = 0, x \in \Omega. \quad (2.3)$$

Здесь $Q_T = (0, T) \times \Omega$ и $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $u \in W_2^{1,4}(Q_T)$ есть решение задачи (2.1)–(2.3). Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx = \int_{\Omega} |Du|^2 \, dx. \quad (2.4)$$

Доказательство является очевидным. Для этого достаточно проинтегрировать уравнение (2.1) с учетом граничного условия (2.2).

Обозначим

$$J(t) = \int_{\Omega} u(t, x) \, dx.$$

Тогда в силу граничного условия $u = 0$ на Γ_T и известных неравенств получаем

$$\int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 \, dx \geq \frac{\lambda_1}{|\Omega|} J^2(t).$$

Здесь $|\Omega|$ – мера (Лебега) множества Ω и λ_1 – первое собственное значение оператора Лапласа в области Ω с однородным граничным условием Дирихле.

Подставляя эти неравенства в (2.4), находим

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{\lambda_1}{|\Omega|} J^2. \quad (2.5)$$

Отсюда непосредственно следует

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть

$$J_0 = \int_{\Omega} u_0 \, dx > 0.$$

Тогда не существует решения u задачи (2.1)–(2.3) при $t \geq T = \frac{|\Omega|}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{J_0}$, при этом

$$J(t) \geq \frac{J_0}{1 - \frac{\lambda_1}{|\Omega|} J_0 \cdot t} \quad \text{при } t \rightarrow T.$$

§ 3. Случай неограниченной области.

Постановка задачи. Тождество. Основная теорема

Пусть Ω_0 есть ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega_0$ и $0 \in \Omega_0$.

Пусть $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_0$. Рассмотрим в Ω следующую задачу:

$$u_t + \Delta^2 u + \Delta u = |Du|^2 \quad \text{в } Q_T, \quad (3.1)$$

$$u = \frac{\partial}{\partial n}(u + \Delta u) = 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (3.2)$$

$$u = u_0(x) \quad \text{при } t = 0, x \in \Omega. \quad (3.3)$$

Здесь $Q_T = (0, T) \times \Omega$ и $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega_0$.

Поставленная задача рассматривается в пространстве $W_{2,\text{loc}}^{1,4}(Q_T)$.

ТОЖДЕСТВО. Пусть $\varphi(x)$ есть функция из класса $C^3(\overline{\Omega}_{\rho_0, R})$, где $\Omega_{\rho_0, R} = B_R \setminus B_{\rho_0}$ и $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$.

Здесь $\rho_0 = \min\{|x| : x \in \partial\Omega_0\} > 0$ и $R > 2R_0$ с $R_0 = \max\{|x| : x \in \overline{\Omega}_0\}$.

Умножая уравнение (3.1) на φ и интегрируя по частям, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} u \varphi dx = \int_{\Omega_R} Du D(\Delta \varphi + \varphi) dx + \int_{\Omega_R} |Du|^2 \varphi dx + B(u, \varphi), \quad (3.4)$$

где

$$B(u, \varphi) = - \int_{\partial \Omega_R} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u + u) \varphi dx' + \int_{\partial \Omega_R} \Delta u \frac{\partial \varphi}{\partial n} dx' - \int_{\partial \Omega_R} \frac{\partial u}{\partial n} \Delta \varphi dx'. \quad (3.5)$$

Здесь $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ и $\frac{\partial}{\partial n}$ есть производная по направлению внешней нормали n к границе $\partial \Omega_R$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Доказательство нижеприведенных результатов основано на тождестве (3.4) относительно функций $\varphi \in C^3(\overline{\Omega}_R)$. В силу этого класс функций, в котором рассматривается решение задачи (3.1)–(3.3), естественным образом расширяется до класса функций, для которых имеют смысл тождества (3.4) и начальное условие (3.3).

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА. Выберем в качестве пробной функции φ в тождестве (3.4) функцию $\varphi(x) = \varphi(|x|) = \varphi(r) \geq 0$ из класса $C^3(\mathbb{R}_+)$ такую, что

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq r \leq R/2, \\ 0, & \text{при } r \geq R, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$K_R(\varphi) := \int_{B_R} \frac{|D(\Delta \varphi + \varphi)|^2}{\varphi} dx < \infty. \quad (3.7)$$

Тогда в силу граничных условий (3.2) на внутренней границе $(0, T) \times \partial \Omega_0$ и $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \Delta \varphi = 0$ на внешней границе $(0, T) \times \partial B_R$, т.е. при $|x| = R$, получаем

$$B(u, \varphi) = 0.$$

Таким образом, при указанном выборе (3.6) функции φ соотношение (3.4) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} u \varphi dx = \int_{\Omega_R} |Du|^2 \varphi dx + \int_{\Omega_R} Du D(\Delta \varphi + \varphi) dx. \quad (3.8)$$

Далее, в силу неравенства Юнга с весом $\varphi \geq 0$

$$\left| \int_{\Omega_R} Du D(\Delta \varphi + \varphi) dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} |Du|^2 \varphi dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} \frac{|D(\Delta \varphi + \varphi)|^2}{\varphi} dx.$$

Из равенства (3.8) получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} u \varphi dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} |Du|^2 \varphi dx - \frac{1}{2} K_R(\varphi). \quad (3.9)$$

Теперь по функции φ определим функцию $\psi = \psi(r)$ как решение следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d\psi}{dr} = \varphi(r), \quad 0 < r < R, \quad (3.10)$$

$$\psi = \frac{d\psi}{dr} = 0 \quad \text{при } r = R. \quad (3.11)$$

Тогда в силу формулы Грина

$$\int_{\Omega_R} u \varphi dx = \int_{\Omega_R} u \Delta \psi dx = \int_{\partial \Omega_R} u \frac{\partial \psi}{\partial n} dx' - \int_{\Omega_R} Du \cdot D\psi dx$$

и граничных условий (3.2) для функции u при $x \in \partial \Omega_0$ и (3.11) для функции ψ при $|x| = R$ получаем

$$\int_{\Omega_R} u \varphi dx = - \int_{\Omega_R} Du \cdot D\psi dx.$$

Отсюда в силу неравенства Гёльдера с весом $\varphi \geq 0$ следует, что

$$\left| \int_{\Omega_R} u \varphi dx \right|^2 \leq C(\rho_0, R) \int_{\Omega_R} |Du|^2 \varphi dx, \quad (3.12)$$

где

$$C(\rho_0, R) = \int_{\Omega_R} \frac{|D\psi|^2}{\varphi} dx < \infty. \quad (3.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Очевидно, что функции $\varphi = \varphi(r)$ и соответствующие им функции ψ , удовлетворяющие неравенству (3.13), существуют при $\rho_0 > 0$.

Таким образом, для

$$J(t) := \int_{\Omega_R} u(t, x) \varphi(x) dx \quad (3.14)$$

из дифференциального неравенства (3.9) в силу (3.12) получаем

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{C(\rho_0, R)} J^2 - \frac{1}{2} K_R(\varphi). \quad (3.15)$$

Введем следующие обозначения:

$$J_0 = \int_{\Omega_R} u_0(x) \varphi(x) dx, \quad M(\rho_0, R) = [C(\rho_0, R) \cdot K_R(\varphi)]^{1/2}, \quad (3.16)$$

где функция $\varphi = \varphi(r)$ удовлетворяет неравенствам (3.7) и (3.13) так, что $C(\rho_0, R) K_R(\varphi) < \infty$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть

$$J_0 > M(\rho_0, R). \quad (3.17)$$

Тогда не существует решения задачи (3.1)–(3.3) при $x \in \Omega_R$ и

$$t \geq T = \frac{\ln A}{\varkappa}, \quad (3.18)$$

при этом

$$J(t) \geq M(\rho_0, R) \frac{A + e^{\varkappa t}}{A - e^{\varkappa t}} \quad \text{при } t \rightarrow T, \quad (3.19)$$

где

$$A = \frac{J_0 + M(\rho_0, R)}{J_0 - M(\rho_0, R)}, \quad \varkappa = \frac{M(\rho_0, R)}{C(\rho_0, R)}.$$

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из дифференциального неравенства (3.15).

§ 4. Приложения. Примеры

Теорема 3.1 утверждает, что если существует радиус R такой, что выполняется неравенство (3.17), то задача (3.1)–(3.3) не имеет решения при $t \geq T$ и $x \in \Omega_R$. Следовательно, в этом случае не существует решения u в любой большой области $\Omega_{R'}$ с $R' \geq R$.

Определим зависимость характеристики $M(\rho_0, R)$, определенной формулой (3.16), от R .

С этой целью положим

$$\varphi(r) = \varphi_0(\xi), \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad (4.1)$$

где φ_0 есть неотрицательная функция класса $C^3(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\begin{aligned} \varphi_0(\xi) &= \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \xi \leq 1/2, \\ 0 & \text{при } \xi \geq 1, \end{cases} \\ K_0 &:= 2\omega_N \int_0^1 \frac{(D_\xi \varphi_0)^2 + (D_\xi \Delta_\xi \varphi_0)^2}{\varphi_0} \xi^{N-1} d\xi < \infty. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь ω_N – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^N$, $D_\xi \varphi_0 = \frac{d\varphi_0}{d\xi}$ и

$$\Delta_\xi \varphi_0 = \frac{d^2 \varphi_0}{d\xi^2} + \frac{N-1}{\xi} \frac{d\varphi_0}{d\xi}.$$

Очевидно, что такие функции φ_0 существуют.

Далее, среди таких функций φ_0 выберем те, для которых соответствующие функции $\psi_0 = \psi_0(\xi)$, определяемые как решения задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} + \frac{N-1}{\xi} \frac{d\psi_0}{d\xi} = \varphi_0(\xi), & 0 < \xi < 1, \\ \psi_0(1) = \psi'_0(1) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

обладают конечным интегралом

$$c_0(\bar{\rho}_0) := \omega_N \int_{\bar{\rho}_0 > 0}^1 \frac{|D_\xi \psi_0|^2}{\varphi_0} \xi^{N-1} d\xi < \infty. \quad (4.4)$$

Ясно, что рассматриваемые функции φ_0 , удовлетворяющие неравенствам (4.2) и (4.4) с $\bar{\rho}_0 > 0$, существуют.

Тогда для величины $K_R(\varphi)$, определенной формулой (3.7), имеем

$$K_R(\varphi) = \omega_N \cdot R^{N-2} \int_0^1 \frac{(D_\xi \varphi_0 + D_\xi \Delta_\xi \varphi_0 / R^2)^2}{\varphi_0} \xi^{N-1} d\xi \leq K_0 \cdot R^{N-2} \quad (4.5)$$

при $R > \max\{1, 2R_0\}$.

Далее, для величины $C(\rho_0, R)$, определенной формулой (3.13), имеем

$$C(\rho_0, R) = \int_{\Omega_R} \frac{|D\psi(r)|^2}{\varphi(r)} dx \leq \int_{\rho_0 \leq |x| \leq R} \frac{|D\psi(r)|^2}{\varphi(r)} dx = c_0(\bar{\rho}_0) R^{N+2} \quad (4.6)$$

с $1 > \bar{\rho}_0 = \rho_0 / R > 0$.

Для производной $D_\xi \psi_0 = \frac{d\psi_0}{d\xi}$ решения задачи Коши (4.3) имеем

$$\frac{d\psi_0}{d\xi} = \frac{1}{\xi^{N-1}} \int_1^\xi \varphi_0(\zeta) \zeta^{N-1} d\zeta.$$

Тогда из неравенства (4.6) находим, что

$$C(\rho_0, R) \leq \begin{cases} c_1 \frac{R^{2N}}{\rho_0^{N-2}} + c_2 R^{N+2} & \text{при } N > 2, \\ c_1 R^4 \ln \frac{R}{\rho_0} + c_2 R^4 & \text{при } N = 2, \\ c_1 R^3 & \text{при } N = 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

при $R > \max\{1, 2R_0\}$ с соответствующими положительными постоянными c_1 и c_2 , определяемыми функцией φ_0 , удовлетворяющей неравенству (4.4).

В силу полученных неравенств (4.5) и (4.7) находим, что

$$M(\rho_0, R) = [C(\rho_0, R) K_R(\varphi)]^{1/2} \leq \begin{cases} c \cdot R^N \left(\frac{R}{\rho_0} \right)^{(N-2)/2} & \text{при } N > 2, \\ c \cdot R^2 \ln \frac{R}{\rho_0} & \text{при } N = 2, \\ c \cdot R & \text{при } N = 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

при $R > \max\{1, 2R_0\}$ с соответствующими положительными константами c , определяемыми функцией φ_0 , удовлетворяющей неравенствам (4.2) и (4.4).

Рассмотрим теперь задачу (3.1)–(3.3). Обозначим

$$I_R(u_0) := \int_{\Omega_R} u_0(x) dx.$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{I_R(u_0)}{R^{(3N-2)/2}} &= +\infty & \text{при } N > 2, \\ \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{I_R(u_0)}{R^2 \ln R} &= +\infty & \text{при } N = 2, \\ \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{I_R(u_0)}{R} &= +\infty & \text{при } N = 1. \end{aligned}$$

Тогда задача (3.1)–(3.3) не имеет глобального по $t > 0$ решения.

Более того, не существует решения $u(t, x)$ при $x \in \Omega_R$ с $R > R_*$ и $t > T_{R_*}$, где R_* есть наименьшее значение R , после которого выполняется неравенство (3.17), и T_{R_*} есть момент времени, определяемый формулой (3.18) по R_* .

Доказательство этой теоремы следует непосредственно из теоремы 3.1 на основании неравенств (4.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В случае конечных пределов из теоремы 4.1 утверждение этой теоремы остается справедливым, если эти пределы больше соответствующих констант из неравенств (4.8) с учетом $\rho_0 > 0$ при $N \geq 2$.

§ 5. О критическом показателе при $N > 2$

Покажем, что условия теоремы 4.1, касающиеся асимптотического поведения интеграла от начальной функции $\int_{\Omega_R} u_0(x) dx$ при $R \rightarrow +\infty$, при $N \geq 3$ являются существенными.

С этой целью построим решение задачи (3.1)–(3.3), определенное при всех $x \in \Omega$ и $t > 0$. В качестве такого решения рассмотрим стационарное решение уравнения (3.1) в области $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}_0$ с $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$.

Для этого рассмотрим следующую задачу Коши для функции $u(r)$:

$$\Delta^2 u + \Delta u = |Du|^2 \quad \text{при } r > 1 \quad (5.1)$$

с начальными данными

$$u(1) = 0, \quad u'(1) = 1, \quad u''(1) = 0, \quad u'''(1) = N - 2. \quad (5.2)$$

Здесь

$$Du = \frac{du}{dr}, \quad \Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{du}{dr}, \quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u).$$

Априорная оценка. Умножим уравнение (5.1) на функцию $\varphi(r)$ из теоремы 4.1 и проинтегрируем с весом r^{N-1} . Тогда в силу начальных условий (5.2) и выбора функции φ получим

$$\begin{aligned} \int_1^R |Du|^2 \varphi r^{N-1} dr &= - \int_1^R Du D(\Delta \varphi + \varphi) r^{N-1} dr \\ &= - \int_{R/2}^R Du D(\Delta \varphi + \varphi) r^{N-1} dr \\ &\leq \left(\int_{R/2}^R |Du|^2 \varphi r^{N-1} dr \right)^{1/2} \left(\int_{R/2}^R \frac{(D(\Delta \varphi + \varphi))^2}{\varphi} r^{N-1} dr \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_1^{R/2} |Du|^2 r^{N-1} dr &\leq \int_1^R |Du|^2 \varphi \cdot r^{N-1} dr \\ &\leq \int_{R/2}^R \frac{(D(\Delta \varphi + \varphi))^2}{\varphi} r^{N-1} dr \leq CR^{N-2} \quad \text{при } R > 1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где C не зависит от R .

Из этой априорной оценки следует отсутствие глобального решения задачи Коши (5.1)–(5.2) при $N = 1$ и $N = 2$.

При этом в случае $N = 1$ этот результат вытекает непосредственно из (5.4) после перехода к пределу при $R \rightarrow +\infty$. В случае $N = 2$ сначала получаем из (5.4) ограниченность интеграла (в предположении существования решения при всех $r > 0$)

$$\int_1^\infty |Du|^2 r^{N-1} dr \leq C < \infty,$$

что влечет

$$\int_{R/2}^R |Du|^2 \varphi r^{N-1} dr \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Затем из неравенства (5.3) при $N = 2$ следует, что

$$\int_1^{R/2} |Du|^2 r \, dr \leq \int_1^R |Du|^2 \varphi r \, dr \leq C \cdot \int_{R/2}^R |Du|^2 r \, dr \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Полученное предельное соотношение доказывает невозможность существования решения задачи Коши (5.1)–(5.2) при всех $r > 0$ в случае $N = 2$.

Отметим, что при доказательстве отсутствия глобального решения задачи Коши (5.1)–(5.2) при $N = 1, 2$ было существенно использовано условие

$$\frac{d}{dr}(\Delta u + u) = 0 \quad \text{при } r = 1.$$

Этот же результат при $N = 1, 2$ сохраняется при условии

$$\frac{d}{dr}(\Delta u + u) > 0 \quad \text{при } r = 1.$$

В связи с отсутствием глобальных решений задачи Коши (5.1)–(5.2) при $N = 1, 2$ отметим, что в случаях $N = 1$ и $N = 2$ уравнение (3.1) не допускает нетривиального (т.е. отличного от константы) стационарного решения в $\mathbb{R}^N$, принадлежащего классу $W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Этот результат установлен в [7] посредством метода нелинейной емкости [20], основанного на выборе асимптотически оптимальных пробных функций.

В случае $N > 2$ из априорной оценки (5.4) следует разрешимость задачи Коши (5.1)–(5.2) при любом $r > 1$.

Для этого решения $u(r)$ имеем

$$u(r) = \int_1^r Du \, d\rho = \int_1^r Du \cdot \rho^{(N-1)/2} \frac{d\rho}{\rho^{(N-1)/2}}.$$

Следовательно,

$$|u(r)| \leq \left(\int_1^r |Du|^2 \rho^{N-1} \, d\rho \right)^{1/2} \left(\int_1^r \frac{d\rho}{\rho^{N-1}} \right)^{1/2},$$

и в силу неравенства (5.4) получаем

$$|u(r)| \leq C r^{(N-2)/2} \quad \text{при } N > 2 \text{ и } r > 1.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \int_{\Omega_R} u(r) \, dx \right| \leq \omega_N \int_1^R |u(r)| r^{N-1} \, dr \leq C R^{(3N-2)/2} \quad \text{при } N > 2 \text{ и } R > 1.$$

Сравнение этого неравенства с условием теоремы 4.1 при $N > 2$ показывает, что показатель $(3N - 2)/2$ роста интеграла $\left| \int_{\Omega_R} u_0(x) \, dx \right|$ при $N > 2$ является критическим в общем случае.

Список литературы

- [1] Yo. Kuramoto, T. Tsuzuki, “On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems”, *Progr. Theoret. Phys.*, **54**:3 (1975), 687–699.
- [2] Yo. Kuramoto, T. Tsuzuki, “Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium”, *Progr. Theoret. Phys.*, **55**:2 (1976), 356–369.

- [3] G. I. Sivashinsky, “Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. I. Derivation of basic equations”, *Acta Astronaut.*, **4**:11–12 (1977), 1177–1206.
- [4] G. I. Sivashinsky, “On flame propagation under conditions of stoichiometry”, *SIAM J. Appl. Math.*, **39**:1 (1980), 67–82.
- [5] H. Bellout, S. Benachour, E. S. Titi, “Finite-time singularity versus global regularity for hyper-viscous Hamilton–Jacobi-like equations”, *Nonlinearity*, **16**:6 (2003), 1967–1989.
- [6] Ja. C. Bronski, Th. N. Gambill, “Uncertainty estimates and L_2 bounds for the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Nonlinearity*, **19**:9 (2006), 2023–2039.
- [7] Ya. Cao, E. S. Titi, “Trivial stationary solutions to the Kuramoto–Sivashinsky and certain nonlinear elliptic equations”, *J. Differential Equations*, **231**:2 (2006), 755–767.
- [8] Sh. Cui, C. Guo, “Global existence and exponential decay of solutions of generalized Kuramoto–Sivashinsky equations”, *J. Partial Differential Equations*, **18**:2 (2005), 167–184.
- [9] J. N. Elgin, X. Wu, “Stability of cellular states of the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *SIAM J. Appl. Math.*, **56**:6 (1996), 1621–1638.
- [10] C. Foias, B. Nicolaenko, G. R. Sell, R. Temam, “Inertial manifolds for the Kuramoto–Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimension”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **67**:3 (1988), 197–226.
- [11] L. Giacomelli, F. Otto, “New bounds for the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **58**:3 (2005), 297–318.
- [12] B. Guo, “The existence and nonexistence of a global smooth solution for the initial value problem of generalized Kuramoto–Sivashinsky type equations”, *J. Math. Res. Exposition*, **11**:1 (1991), 57–70.
- [13] P. Kent, J. Elgin, “Travelling-waves of the Kuramoto–Sivashinsky equation: period-multiplying bifurcations”, *Nonlinearity*, **5**:4 (1992), 899–919.
- [14] J. Nickel, “Travelling wave solutions to the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Chaos Solitons Fractals*, **33**:4 (2007), 1376–1382.
- [15] E. Tadmor, “The well-posedness of the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *SIAM J. Math. Anal.*, **17**:4 (1986), 884–893.
- [16] D. Tseluiko, D. T. Papageorgiou, “A global attracting set for nonlocal Kuramoto–Sivashinsky equations arising in interfacial electrohydrodynamics”, *European J. Appl. Math.*, **17**:6 (2006), 677–703.
- [17] H. Uecker, A. Wierschem, “A spatially periodic Kuramoto–Sivashinsky equation as a model problem for inclined film flow over wavy bottom”, *Electron. J. Differential Equations*, **118** (2007), 1–18.
- [18] D. Yang, “Dynamics for the stochastic nonlocal Kuramoto–Sivashinsky equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **330**:1 (2007), 550–570.
- [19] N. A. Larkin, “Korteweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equations in bounded domains”, *J. Math. Anal. Appl.*, **297**:1 (2004), 169–185.
- [20] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 1–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234**:3 (2001), 1–362.

С. И. Похожаев (S. I. Pokhozhaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова, РАН

E-mail: pokhozhaev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

16.01.2008